



UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL  
"LISANDRO ALVARADO"  
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

*Simulación de un Flujo Bifásico Agua-Petróleo en un Paso de  
Tiempo usando el Elemento Finito de Taylor-Hood*

**Autor:** Ing. Edwin Rodríguez

**Tutor:** Prof. Wilfredo Angulo

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Centroccidental  
"Lisandro Alvarado" como requisito parcial para optar al título de Magister Scientiarum en  
Ciencias, mención Física-Matemática.

Barquisimeto, 10 de febrero de 2008

*A mis dos Marías,  
pilares y fuentes de inspiración en todo lo que hago y haré.*

# Agradecimiento

Siempre que uno alcanza alguna meta propuesta hay muchas personas detrás de este logro.

Primeramente, debo agradecer con todo mi corazón y las fuerzas de mi ser a Dios todopoderoso, por estar presente todos los días de mi vida en cada cosa que hago, ¡Hágase tu voluntad!

Gracias PILI,... esposa, amiga, consejera y pilar de mi vida, sin tu apoyo y comprensión jamás habría terminado este proyecto, ¡gracias por haber cedido ese tiempo que era tuyo!

Gracias María José, hija mía, llegaste a mi vida y todo, todo pasó a segundo plano, incluso este proyecto. Por ti lo terminé.

A mi Papá, ejemplo a seguir y apoyo incondicional; a MamaOme, por su amor y apoyo; a mi suegra Rosalba por su apoyo y soportar todo el desorden que cause en casa, ya no tengo excusa para no recoger los libros que están en la mesa... ¡ja! ¡ja! ¡ja!

A mis hermanos: Mary, Mili, Ada, Homar y Adi, por estar siempre pendientes, espero ser ejemplo y apoyo para ustedes.

A mi tutor, Wilfredo Angulo, por haber confiado en mí para realizar este proyecto.

A mi amigo Edemir... ¡viejo! el que recorrieras este camino de los elementos finitos primero me permitió llegar más rápido, gracias por tus asesorías.

A los desconocidos que aportaron mucho de los cuales solo conozco sus escritos... Bourkardt, Carstensen, Jhonson, Oñate y Zárate, Bird, entre otros... y por su puesto a google.

A todos gracias, ¡Muchas Gracias!

Edwin Rodríguez

# Índice general

<b>1. Planteamiento del problema</b>	<b>1</b>
1.1. El modelo no lineal de un flujo bifásico 2- $D$ y formulación variacional . . . . .	2
<b>2. Discretización del problema variacional</b>	<b>10</b>
2.1. Discretización del dominio y sistema de ecuaciones tipo Galerkin . . . . .	11
<b>3. Solución del problema por el Método de los Elementos Finitos</b>	<b>19</b>
3.1. El elemento mixto conforme $\mathbb{P}_2(T)$ - $\mathbb{P}_1(T)$ de Taylor-Hood . . . . .	20
3.2. Definición de las funciones de forma $\phi_j$ y $\psi_k$ para la velocidad y la presión .	22
3.3. Contribución de elemento finito para el ensamblaje del sistema global . . . . .	23
3.3.1. Sistema tipo Galerkin elemental . . . . .	24
3.4. El ensamblaje del sistema global . . . . .	26
3.5. Transformaciones de coordenadas y expresiones integrales . . . . .	28
<b>4. Implementación computacional y resultados numéricos</b>	<b>33</b>
4.1. Descripción del código computacional . . . . .	34

4.2. Evaluación del desempeño del código . . . . .	36
4.3. Resultados para el problema de flujo bifásico . . . . .	39
<b>5. Conclusiones</b>	<b>47</b>

# Introducción

En muchas aplicaciones dentro de la ciencia y la tecnología, el flujo de dos fluidos inmiscibles e incompresibles en tuberías, o *flujo bifásico*, juega un rol importante [1], [2]. En particular, las técnicas de *tuberías lubricadas* se usan frecuentemente para facilitar el transporte de aceites viscosos a través de una tubería lubricada con un líquido de baja viscosidad tal como lo es el agua. Para que este proceso sea exitoso el fluido de baja viscosidad debe introducirse y mantenerse entre el aceite viscoso y la pared de la tubería, formando una *cápsula* entre la pared y el fluido de alta viscosidad, de manera tal que el *esfuerzo de cizalla* tome el valor máximo que permite reducir los *requerimientos de energía* para el transporte del aceite. Este *patrón de flujo* es llamado *flujo centro-anular*, y el modelo físico propuesto para estudiarlo considera que en tal configuración ambos fluidos inmiscibles viajan en el *espacio*<sup>1</sup> y el *tiempo* de manera *adyacente*; siendo la interfaz una *superficie* natural de separación entre los dos fluidos. Este modelo geométrico permite, entonces, analizar la *distribución de velocidad* y de *presión*, en los sistemas donde se presenta este patrón de flujo bajo el *régimen* que lo haga posible [3].

El establecimiento del régimen y el patrón es crucial para asegurar un buen diseño del proceso de flujo. Existen modelos empíricos, basados en condiciones de operación independientes de las condiciones iniciales, que se usan para predecir el régimen y patrón de flujo. Sin embargo, bajo estas premisas (independencia de las condiciones iniciales) no siempre es cierto que se puedan hacer tales predicciones, debido a que existen fenómenos sensibles a perturbaciones

---

<sup>1</sup>Dentro de la tubería

sobre las condiciones iniciales. Tal es el caso del petróleo lubricado con agua que presenta problemas de estabilidad en la interfaz de ambos fluidos cuando las variables asociadas a las condiciones de operación del proceso son perturbadas. Estas perturbaciones afectan la estabilidad interfacial de tal forma que la *cápsula* formada por el patrón de flujo centro-anular se rompe y ocasiona que el petróleo se *disgregue* en forma de partículas emulsionadas en el agua, las cuales son casi inseparables e irre recuperables, debido a los altos costos implicados [2].

En este orden de ideas, un gran número de problemas teóricos se han estudiado utilizando modelación matemática y simulación computacional. Desde el punto de vista fisicomatemático, el sistema de ecuaciones de *Navier-Stokes* es el que modela al transporte de fluidos. Este sistema de ecuaciones *en derivadas parciales* ha generado una gama de problemas desde el punto de vista matemático y computacional que hoy en día están abiertos y no se han abordado del todo [4]. En tal sentido, bajo numerosas consideraciones y enfoques, se ha podido dar respuesta a preguntas relacionadas con la *existencia* y *unicidad* de soluciones; pero bajo otras consideraciones, asociadas a un problema físico muy específico de transporte, todavía no se han logrado establecer generalidades desde este punto de vista. Por esto, en el campo *numérico* y *computacional* bajo un contexto *equivalentemente consistente* al problema de *Navier-Stokes*, se desarrollan y ponen en práctica *métodos* con los cuales se ha logrado *aproximar*, con un cierto grado de *precisión* y *exactitud*, la solución de estas ecuaciones bajo condiciones apropiadas<sup>2</sup> que se asocian a la fisicamatemática de un problema determinado.

Las técnicas que proporciona el *Análisis Numérico* para estudiar, tanto desde el punto de vista teórico como computacional, el comportamiento de soluciones en aquellos problemas donde aparecen las ecuaciones de *Navier-Stokes*, van desde métodos tan simples como los fundamentados en *diferencias finitas*, *teoría espectral* y, entre otros, los fundamentados en *leyes de conservación* [5]. Entre estos últimos se encuentra el *Método de Elementos Finitos*

---

<sup>2</sup>Estas condiciones apropiadas están relacionadas con el buen planteamiento del problema

(MEF) que, contrario a los basados en *diferencias finitas*, explota gran parte de los conceptos fundamentales del *Análisis Funcional* para estudiar el *buen planteamiento* del problema de *Navier-Stokes* en cualquier tipo de *dominio*, formulado en un contexto *variacional* que comúnmente se conoce con el nombre de *formulación débil*.

Los inicios del MEF se ubican desde los años cincuenta, y sus primeras aplicaciones fueron hechas en la *mecánica de medios continuos deformables* y notablemente en problemas de la *aeronáutica* [6], [7], [8]. Estos problemas hicieron intervenir *geometrías complejas* a partir de las cuales difícilmente se lograban obtener buenas aproximaciones numéricas por los métodos más clásicos basados en diferencias finitas. Por otro lado, los trabajos teóricos concernientes a la aproximación de las *ecuaciones de la elasticidad lineal* aparecieron en los años cincuenta [9], y posteriormente en el año 1960 Clough introduce la terminología *elementos finitos* en un artículo sustentado sobre el análisis de elasticidad lineal en dos dimensiones espaciales [10].

En los años sesenta, el MEF inicia un desarrollo importante, particularmente debido al número creciente de ingenieros que utilizaban este método para tratar los problemas de medios continuos deformables. El ciclo de conferencias de Dayton [11] marca una etapa importante en el desarrollo del método, pues la mayor parte de los MEF's conocidos se consideran a partir de allí como clásicos. Al final de los años sesenta, el campo de acción del MEF es extendido a otras aplicaciones, específicamente a aquellas relacionadas con la *mecánica de fluidos* [12]. La idea de que el MEF no es aplicable si los problemas no son *simétricos* y *coercivos*, donde una *formulación variacional* es posible, se fue abandonando progresivamente y los ingenieros comenzaron a interesarse igualmente en los problemas que surgieron dentro de un marco generalizado.

En los años setenta se inicia el desarrollo de la *teoría matemática* del MEF. Un gran número de resultados empíricos conocidos por los ingenieros se confirman y clarifican, y es a partir de ese momento que se sustentan las bases sólidas para entender el método que tiene un campo

de aplicaciones más extenso de lo que se pensaba. En este contexto, la noción fundamental del *buen planteamiento* de un problema fue establecida en el sentido de Hadamard [13]:

*Un problema formulado en estos términos admite una y sólo una solución, y posee una propiedad de estabilidad que permite controlar la solución por la data del problema en ciertas normas asociadas a los espacios de trabajo del problema.*

La teoría de ecuaciones en derivadas parciales (EDP's) y el análisis funcional puntualizan ya, relativamente, un buen establecimiento de sus bases y fundamentos en los años cuarenta con la sucesión de trabajos hechos por Banach, Sobolev y Schwartz, pero el vínculo con el MEF no se hace sino más tarde debido en parte a la escasa comunicación que existía entre los matemáticos y los ingenieros. En tal sentido, y haciendo uso de un marco funcional adecuado, los problemas físicos, planteados en términos de EDP's con condiciones de frontera, pudieron ser escritos en la forma más general, conocida con el nombre de *formulación débil* o *formulación variacional*. Esta nueva formulación, que es natural en mecánica de medios continuos deformables debido a que aprovecha el *principio de trabajos virtuales* o *principio de mínima energía*, permitió colocar el MEF en un marco conceptual general que lo propone como herramienta del *análisis* particularmente potente para estudiar problemas planteados en EDP's.

El MEF como herramienta de análisis matemático debuta en 1968 con las estimaciones a priori sobre el *error de aproximación* para un problema de elasticidad plana [14], un análisis del *error de interpolación* para elementos finitos *triangulares* [15] y una prueba de *convergencia* para los problemas elípticos lineales en una dimensión con *espacio de aproximación* correspondiente a las funciones afines a trozos [16]. Un congreso llevado a cabo en Baltimore [17] permitió mostrar varios resultados matemáticos fundamentales sobre el MEF. Entre estos resultados, las condiciones *inf-sup* jugaron un rol esencial pues ellas permitieron caracterizar los problemas lineales con *restricción* que estaban bien planteados. Las condiciones *inf-sup* popularizadas por Babuška en 1972 se fundamentan en los trabajos teóricos de Nečas

[18], que reposan directamente sobre el *teorema fundamental de Banach*<sup>3</sup>.

En la actualidad el MEF ocupa una *posición importante* en el mundo del *cálculo científico*. Existe una gran cantidad de literatura (ver [4], [19], [20], [21] y [22]) orientada al estudio de este método y en donde se puede enumerar un centenar de miles de trabajos sobre el MEF publicados en revistas de divulgación científica. Tal es el caso de la obra escrita por V. Girault y P. Raviart [4] (1986), donde se encuentran plasmados los resultados teóricos más resaltantes sobre el MEF como herramienta de análisis cualitativo y numérico-implementista usada para estudiar las ecuaciones de *Navier-Stokes*. La teoría desarrollada por estos autores pone de manifiesto los distintos tipos de *elementos finitos* que pueden ser empleados en un *dominio de validez* del sistema de ecuaciones de *Navier-Stokes*, con condiciones de frontera que frecuentemente se presentan en problemas modelados por tales ecuaciones.

En este orden de ideas Maury *et al.* (ver [23]) en el 2000 propone un estudio sobre el *flujo bifásico lineal en dimensión dos* ( $D = 2$ ) de un fluido compuesto de agua y petróleo en una tubería horizontal y modelado por el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDP's) de *Navier-Stokes*. En una primera etapa, Maury en [23] planteó el modelo matemático basado en estas ecuaciones con fronteras adecuadas en una configuración axisimétrica. Esta configuración de axisimetría adicionó una frontera ficticia que se ubicó en el eje central imaginario a lo largo de la tubería, y sobre tal frontera se impuso otra condición poco real pero que simplificó el estudio, en el sentido de que la interfaz entre ambos fluidos se representó como una sola frontera libre. Esta frontera libre es una incógnita a determinar en el problema, y esto; aunque aparentemente sencillo, dificulta el problema al adicionar la *ecuación de transporte* que modela la evolución espacio temporal de la interfaz a medida que se deforma debido a la acción de esfuerzos producidos por la tensión superficial entre los dos fluidos. Posteriormente, Girault, López y Maury (ver [24]) discretizaron en espacio las ecuaciones obtenidas en cada paso del tiempo cuando se discretizan las ecuaciones de Navier-Stokes en el tiempo. En cada

---

<sup>3</sup>El teorema de la aplicación abierta o de la imagen cerrada

paso del tiempo el sistema se redujo a un problema de *Stokes Generalizado* con condiciones *no estándar* en la frontera y en la interfaz entre los dos fluidos. Esta discretización se realizó usando el *mini-elemento* o elemento finito de *Arnold-Brezzi-Fortin* como elemento conforme, y se establecieron estimaciones para el error numérico.

En este trabajo se presenta la *implementación computacional* de un elemento finito *conforme de primer grado* al problema planteado por Maury *et al.* en [23], conocido con el nombre de *elemento finito de Taylor-Hood* [25]. El propósito fundamental es el de establecer un código computacional usando el MEF de Taylor-Hood como método de discretización espacial en el problema de Stokes-Generalizado, el cual servirá de soporte experimental en la simulación del flujo bifásico, agua-petróleo, propuesta como una segunda etapa iniciada por W. Angulo y H. López en [26].

A fin de mostrar el desarrollo general del tema, el trabajo se ha estructurado de la siguiente manera. En el primer capítulo se presenta el planteamiento formal del problema en términos del modelo matemático que modela el flujo bifásico agua-petróleo siguiendo muy de cerca el trabajo de Maury *et al.* en [23], además se presenta una formulación variacional equivalente del problema de Stokes-Generalizado asociado con el problema de flujo bifásico. En el capítulo dos se presenta la discretización del problema variacional asociado al flujo bifásico hasta transformarlo en un sistema tipo Galerkin [27]. Luego, en el capítulo tres se presenta la solución del problema por el MEF, donde se describe el elemento finito propuesto por Taylor y Hood [25] y se definen las funciones de forma para la velocidad y presión en dicho elemento y la contribución del elemento finito para la construcción del sistema de ecuaciones algebraico producido por el problema variacional discreto. En el capítulo cuatro se presentan la implementación del código computacional asociado a la construcción y la resolución del sistema de ecuaciones algebraico del problema con los resultados numéricos obtenidos a través de ensayos. Finalmente en el capítulo cinco se dan las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros.

# Capítulo 1

## Planteamiento del problema

El problema que a continuación se describe, forma parte de un trabajo de cooperación bilateral Venezuela-Francia sobre el flujo bifásico de agua y petróleo pesado por tuberías. El trabajo data del 2002 y sus primeros pasos se encuentran en [23], referencia en la cual se deja claro el carácter, en principio, académico de la investigación en el área de matemática aplicada. Entre los productos terminados del proyecto se tienen los artículos [24] y [26]; siendo éste último una extensión del primero con más, pero realistas, complicaciones físicas y matemáticas. En [24] y en [26] se presentan resultados matemáticos teóricos concernientes al buen planteamiento del problema continuo bajo una formulación variacional adecuada, y particularmente en [24] el análisis numérico del problema discreto asociado usando el elemento finito de *Arnold-Brezzi-Fortine* [28]. En la actualidad, el análisis numérico de la extensión presentada por W. Angulo y H. López en [26] se está llevando a cabo, y un avance de gran parte de éste estudio lo reportan W. Angulo y V. Girault en [29]. Los autores de este último avance matemático presentan los resultados en base al elemento finito no-conforme de *Crouzeix-Raviart*, y han establecido la existencia y unicidad de la solución discreta que aproxima la solución continua caracterizada en [26].

El problema sobre el flujo bifásico que se plantea en los avances y artículos citados anteriormente, se realizó considerando que el dominio de tal flujo es un trozo de tubería horizontal

seccionada longitudinalmente, de manera tal que matemáticamente puede verse como subconjunto del espacio bidimensional  $\mathbb{R}^2$  en donde evolucionan temporalmente el agua y el petróleo separados por una interfaz en *configuración axisimétrica*; es decir con simetría en torno a un eje imaginario ubicado por el centro de la tubería. Maury *et al* en [23] presenta un implementación computacional usando el elemento conforme de *Arnold-Brezzi-Fortin* que soporta el estudio hecho en [24].

Siguiendo con la idea de usar elementos finitos conformes, realizamos una discretización espacial del problema de flujo bifásico para el transporte de petróleo lubricado con agua, usando el elemento finito de Hood-Taylor en un paso de tiempo. Para ésto, se presenta el modelo matemático completo basado en las ecuaciones de *Navier-Stokes*, el problema de *Stokes generalizado* a resolver espacialmente por cada paso de tiempo producto de una semi-discretización temporal del modelo matemático completo y la formulación variacional adecuada sobre la que se realiza la discretización de elemento finito.

## 1.1. El modelo no lineal de un flujo bifásico 2-D y formulación variacional

En este estudio se considera que los dos componentes del fluido, el agua y el petróleo, son no miscibles e incompresibles de manera que las ecuaciones de *Navier-Stokes* modelan el comportamiento del flujo en la tubería tal como lo establece Maury *et al.* en [23].

En una sección longitudinal de un trozo de tubería, el fluido de baja viscosidad (agua) es adyacente a la pared de la misma y está envolviendo al fluido de alta viscosidad (petróleo). En la Figura 1.1 se ilustra este patrón de flujo bifásico como un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  delimitado por el trozo de tubería horizontal

Para cada tiempo  $t \in [0, T]$ , el dominio  $\Omega$  se descompone en dos subdominios  $\Omega^1(t)$  y  $\Omega^2(t)$ .

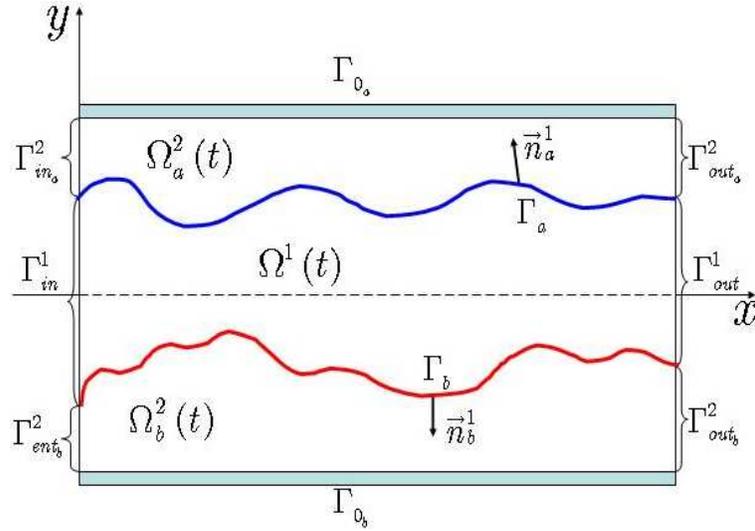


Figura 1.1: Dominio  $\Omega$  y frontera  $\partial\Omega$

Aquí, el subdominio  $\Omega^1$  es la región ocupada por el fluido pesado (el petróleo) y  $\Omega^2$  es la región ocupada por el agua. Esta última región,  $\Omega^2$ , está dividida en dos subregiones: una *superior* y otra *inferior* que denotaremos por  $\Omega_a^2$  y  $\Omega_b^2$ , respectivamente, y tales que

$$\Omega^2(t) = \Omega_a^2(t) \cup \Omega_b^2(t).$$

Por otro lado la frontera de  $\Omega^i$ , respectivamente para cada  $i = 1, 2$ , viene dada por:

$$\begin{aligned} \partial\Omega^1(t) &= \Gamma_{in}^1 \cup \Gamma_{out}^1 \cup \Gamma_a(t) \cup \Gamma_b(t), \\ \partial\Omega^2(t) &= \Gamma_{in}^2 \cup \Gamma_{out}^2 \cup \Gamma_a(t) \cup \Gamma_b(t) \cup \Gamma_{0_a} \cup \Gamma_{0_b}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $\Gamma_{in}^1$  y  $\Gamma_{in}^2 = \Gamma_{in_a}^2 \cup \Gamma_{in_b}^2$  representan las fronteras de entrada para cada  $\Omega^i$ ,  $\Gamma_{out}^1$  y  $\Gamma_{out}^2 = \Gamma_{out_a}^2 \cup \Gamma_{out_b}^2$  representan las fronteras de salida para cada subdominio  $\Omega^i$ . Denotaremos, entonces, por  $\Gamma_{in} = \Gamma_{in}^1 \cup \Gamma_{in}^2$  y  $\Gamma_{out} = \Gamma_{out}^1 \cup \Gamma_{out}^2$  las fronteras de entrada y de salida, respectivamente, para todo el dominio  $\Omega$ . Por otro lado  $\Gamma_{0_a}$  y  $\Gamma_{0_b}$  representan las fronteras correspondientes a las paredes rígidas de la tubería, y finalmente las interfaces de separación entre ambos componentes dadas por:  $\Gamma_a(t) = \overline{\Omega}^1(t) \cap \overline{\Omega}_a^2$  y  $\Gamma_b(t) = \overline{\Omega}^1(t) \cap \overline{\Omega}_b^2$  en la parte superior y en la parte inferior respectivamente.

Se supone que el flujo es suficientemente suave, Reynolds bajos:  $R_e < 2000$  [30], y que se mantiene hasta un tiempo  $T$ . Por tanto, en el tiempo inicial puede considerarse que las interfaces entre los dos fluidos son líneas rectas, que nunca son adyacentes a las paredes de la tubería y que siempre hay una distancia suficientemente considerable entre ellas que minimiza la posibilidad de choques entre si [31]. Bajo éstas premisas ambas interfaces pueden ser parametrizadas convenientemente por:

$$\Gamma_a : (x, t) \mapsto \Phi_a(x, t),$$

$$\Gamma_b : (x, t) \mapsto \Phi_b(x, t),$$

de manera tal que, para cantidades pequeñas  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ , se tenga:

$$0 \leq x \leq L, \quad \Phi_a(x, t) - \Phi_b(x, t) > \delta_1 > 0, \quad \Phi_b(x, t) > -D + \delta_2, \quad \Phi_a(x, t) < D - \delta_3; \quad (1.2)$$

y los subdominios están definidos por:

$$\Omega^1(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad \Phi_b(x, t) < y < \Phi_a(x, t)\}, \quad (1.3)$$

$$\Omega_a^2(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad \Phi_a(x, t) < y \leq D\}, \quad (1.4)$$

$$\Omega_b^2(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad -D \leq y < \Phi_b(x, t)\}, \quad (1.5)$$

donde  $D > 0$  es el radio de la tubería y  $L$  es la longitud.

Para describir la *densidad* y la *viscosidad* en todo  $\Omega$ , se introducen las cantidades  $\rho$  y  $\mu$  dadas por:

$$\rho = \sum_{i=1}^2 \chi^i \rho^i \quad \text{y} \quad \mu = \sum_{i=1}^2 \chi^i \mu^i, \quad (1.6)$$

donde  $\chi^i$  es la función característica del subdominio  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2$ , con  $\chi^2$  definida por  $i = 2$

$$\chi^2 = \chi_{\Omega_a^2 \cup \Omega_b^2} = \chi_{\Omega_a^2} + \chi_{\Omega_b^2}.$$

Aquí  $\rho^i$  y  $\mu^i$  son las densidades y las viscosidades dadas constantes para cada  $i = 1, 2$ .

Los campos de velocidad y de presión se denotan de la forma siguiente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^i(\mathbf{x}, t) = (u_x^i(\mathbf{x}, t), u_y^i(\mathbf{x}, t)), \quad p = p^i(\mathbf{x}, t) \quad \text{para todo } (\mathbf{x}, t) \in \Omega^i \times [0, T], \quad i = 1, 2.$$

Entonces, para cada tiempo  $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$  el problema de Navier-Stokes en este caso se escribe como

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} & \text{en } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

donde  $\mathbf{g}$  es la gravedad y

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}.$$

Este sistema de EDP's se complementa con una condición inicial adecuada

$$\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0^i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^i, \quad i = 1, 2, \quad (1.8)$$

en donde  $\mathbf{u}_0^i$  es una función suave tal que  $\nabla \cdot \mathbf{u}_0^i = 0$  en  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2$ , y tal que  $\mathbf{u}_0^i(\Gamma_{0j} \cap \Gamma_{in}^2) = \mathbf{0}$ ,  $j = a, b$ . Por otro lado, las condiciones de frontera que se imponen son las siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{U} & \text{sobre } \Gamma_{in}, \\ \mathbf{u}^2 = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_{0j} \text{ para } j = a, b, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = -p_{out} \mathbf{n} & \text{sobre } \Gamma_{out}, \end{cases} \quad (1.9)$$

y las condiciones en las interfaces (continuidad de la velocidad y el balance de esfuerzos con la tensión superficial, en las interfaces):

$$[\mathbf{u}^i]_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad [\sigma]_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{n}_j^1 = -\frac{\kappa_j}{R_j} \mathbf{n}_j^1 \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } j = a, b, \quad (1.10)$$

donde  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^i$  sobre  $\Gamma_{in}^i$  para  $i = 1, 2$  denota el vector de velocidad de entrada, dado e independiente del tiempo,  $p_{out}$  es la presión exterior dada en el borde de salida,  $\mathbf{n}$  es el vector normal exterior principal a  $\Omega^i$ ,  $\mathbf{n}_j^1$  denota el vector normal a  $\Gamma_j$ ,  $j = a, b$ , exterior a  $\Omega^1$ ,  $[\cdot]_{\Gamma_j}$  denota el salto sobre  $\Gamma_j$  en la dirección de  $\mathbf{n}_j^1$ ,  $j = a, b$ :

$$[f]_{\Gamma_j} = f|_{\Omega^1} - f|_{\Omega_j^2}.$$

Físicamente, la primera condición en (1.9) representa el campo de velocidad con el cual los fluidos entran a  $\Omega^i$ ,  $i = 1, 2$ , a través de  $\Gamma_{in}$ , la segunda se refiere a la condición de *no deslizamiento* que se impone al campo de velocidad del fluido 2 por estar en contacto con las paredes de la tubería,  $\Gamma_{0j}$ ,  $j = a, b$ , como elemento sólido del subdominio  $\Omega^2(t)$ , y por último la tercera condición representa el balance de *fuerzas de tensión superficial normal* respecto a la *presión exterior* necesario para establecer el equilibrio con los *esfuerzos* que ambos fluidos ejercen sobre la frontera de salida  $\Gamma_{out}$ . Para detalles sobre este tipo de condiciones de fronteras ver [32], [33] y [34]. Por otro lado,  $\kappa_j > 0$ ,  $j = a, b$ , son constantes geométricas, dadas, relacionadas con la *curvatura media* de las interfaces;  $R_j$ ,  $j = a, b$ , denota el radio de la curvatura con el signo apropiado, es decir, con la convención de que  $R_j > 0$  si el centro de la curvatura de  $\Gamma_j$  está localizado en  $\Omega^1$ ,  $j = a, b$ , y  $\sigma$  es el tensor de esfuerzos dado por la ecuación constitutiva de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos no compresibles:

$$\sigma = \sigma(\mathbf{u}, p) = \mu A_1(\mathbf{u}) - p\mathbf{I},$$

en donde  $A_1(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t)$  es el tensor de *tasa de deformación* (ver [3], [30], [32] y [58]).

Se considera que la velocidad entrante  $\mathbf{U}$  tiene la forma:

$$\mathbf{U} = -U(y)\mathbf{n} = (U(y), 0)^t, \quad U(y) > 0 \quad \forall y \in (-D, D), \quad (1.11)$$

es decir, la velocidad entrante es paralela al vector normal  $\mathbf{n}$  y está dirigida hacia dentro de  $\Omega$ . Aún más, consideraremos que  $U(D) = U(-D) = 0$ ; así que  $\mathbf{U}$  satisface la condición de compatibilidad:

$$\mathbf{U}^2(\Gamma_{0j} \cap \Gamma_{in}^2) = \mathbf{0} \quad \text{por cada } j = a, b. \quad (1.12)$$

Finalmente, la ecuación para el movimiento de las superficies libres  $\Gamma_j$ ,  $j = a, b$ , viene dada por

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial t} + u_x \frac{\partial\Phi_j}{\partial x} = u_y \quad \text{para cada } j = a, b, \quad (1.13)$$

con las condiciones, inicial y de borde, siguientes:

$$\Phi_j(x, 0) = \pm y_0 \quad \forall x \in [0, L] \quad j = a, b,$$

$$\Phi_j(0, t) = \pm y_0 \quad \forall t \in [0, T] \quad j = a, b,$$

donde  $\pm y_0 \in (0, \pm D)$  es una constante dada que toma el signo  $+$  si  $j = a$  y el signo  $-$  si  $j = b$ .

En [26] el término de convección no-lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes (1.7) se semi-discretizó por el método de las características (ver [35], [36] y [37]). Con ésto, la posición  $\mathbf{x}$  de la partícula del fluido es una función de  $t$  y el término de convección es la derivada total (o en su efecto la material) que se sustituye por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \approx \frac{\mathbf{u}_m^{m+1} - \mathbf{u}_m(\mathbf{X}^m)}{\delta t}.$$

Luego las ecuaciones de Navier-Stokes en (1.7) se transforman en las conocidas ecuaciones de *momentum* y se obtiene el sistema de Stokes generalizado para flujo incompresible (para simplificar, suprimimos la dependencia sobre  $m$ ):

$$\begin{cases} \alpha \rho \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u}^i + \nabla p = \rho \mathbf{g} + \rho \alpha \mathbf{w} & \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.14)$$

donde  $\delta t > 0$  es el paso de discretización temporal,  $\mathbf{X}^m = \mathbf{X}(t^m)$  es la característica en todo tiempo  $t^m$ ,  $\alpha$  se usa para representar a  $1/\delta t$  y  $\mathbf{w}^i$  para representar a  $\mathbf{u}_m^i(\mathbf{X}^m)$  (conocida en un paso anterior  $t^{m-1}$ ). Las condiciones de borde están dadas por (1.9) y al problema planteado en estos términos se le conoce con el nombre de *problema de Stokes generalizado* (ver [4] y [38]), el cual debe ser resuelto en cada paso del tiempo dada la superficie que describe a cada interfaz. La primera condición para las interfaces (1.10) queda igual, y ya que la posición de cada interfaz es ahora conocida, la segunda condición se simplifica y (1.10) se transforma en:

$$[\mathbf{u}^i]_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad [\sigma]_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{n}_j^1 = -K_j \mathbf{n}_j^1 \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } j = a, b, \quad (1.15)$$

donde  $K_j$ , que se usa para representar a  $\kappa_j/R_j$  para cada  $j = a, b$ , es ahora una función conocida. Finalmente (1.14), (1.9) y (1.15) son las expresiones que definen al problema de Stokes generalizado con condiciones de frontera no estándar.

Una formulación variacional equivalente al problema de Stokes generalizado con condiciones de frontera no estándar (1.14), (1.9) y (1.15), tomada de [26], es: Dadas las funciones  $\mathbf{w}$ ,  $K_j$ ,  $j = a, b$ ,  $p_{out}$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  y la constante  $\alpha$ , encontrar  $\mathbf{u} \in X_0 + \bar{\mathbf{U}}$  y  $p \in M$  solución de

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in X_0, & a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \ell(\mathbf{v}) \\ \forall q \in M, & b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

$$X_0 = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2; \mathbf{v}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{0}, \mathbf{v}|_{\Gamma_{0j}} = \mathbf{0} \text{ para } j = a, b \right\}, \quad (1.17)$$

$$M = \{q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; q \in L^2(\Omega)\}, \quad (1.18)$$

$a : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  es una *forma bilineal* definida como:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu A_1(\mathbf{u}) : A_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

$b : X_0 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  es una *forma bilineal* definida mediante la siguiente expresión:

$$b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

y, finalmente,  $\ell : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  es una *forma lineal* definida mediante:

$$\ell(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Aquí, la función  $\bar{\mathbf{U}}$  es una extensión adecuada a todo  $\Omega$  de la velocidad de entrada  $\mathbf{U}$ . Proponemos una simple repitiendo estos valores de la velocidad de entrada para todo  $(x, y)$  en  $\Omega$ , es decir

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \bar{\mathbf{U}}(x, y) = (U(y), 0)^t, \quad (1.19)$$

la cual, tiene divergencia cero, depende continuamente de la función  $U$ , pertenece a  $H^1(\Omega)^2$  y satisface la condición de compatibilidad

$$\bar{\mathbf{U}}^2(\Gamma_{0j} \cap \Gamma_{in}^2) = \mathbf{0} \text{ por cada } j = a, b.$$

También se consideró que las interfaces son continuas Lipschitz al igual que cada subdominio  $\Omega^i$ , que la función  $U$  se toma en el espacio  $H^1(-D, D)$ , la presión de salida  $p_{out}$  en  $L^2(\Gamma_{out})$  y las funciones conocidas  $K_j$  en  $L^2(\Gamma_j)$  para cada  $j = a, b$ .

Finalmente, puntualizamos señalando que la formulación variacional (1.16) es un problema bien planteado gracias a que: la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica, la forma lineal  $\ell(\cdot)$  es una forma lineal continua y la forma bilineal satisface una condición inf-sup sobre  $X_0 \times M$  [26].

## Capítulo 2

# Discretización del problema variacional

A partir de la formulación variacional se establecen los espacios funcionales *infinito-dimensionales*, por medio de una *sucesión de espacios de dimensión finita* o *finito-dimensionales* [39], sobre los que una única *solución débil* del problema de frontera fuerte existe y es estable. Lo que debe hacerse a continuación, es formular el *problema discreto* análogo para aproximar la solución.

Una vez establecida la característica del espacio finito-dimensional, lo que se hace es *elegir adecuadamente* una *base* que lo genere, y a partir de ésta se construye por *combinación lineal* una sucesión de elementos que se aproximarán a la solución del problema variacional toda vez que la sucesión de espacios finito-dimensionales se aproxime al espacio funcional infinito-dimensional sobre el cual el problema variacional continuo está bien planteado. La elección de los espacios juega un rol importante debido a que un cambio en estos puede modificar considerablemente el conjunto de soluciones, y por tanto la aproximación no será la deseada ([40] y [41]).

## 2.1. Discretización del dominio y sistema de ecuaciones tipo Galerkin

Teniendo en cuenta que  $K_j$ , para cada  $j = a, b$ , está relacionada con la tensión superficial y las hipótesis de regularidad especificadas en el capítulo anterior, a partir de ésta sección consideraremos que cada  $\Gamma_j$  es una curva de clase  $\mathcal{C}^1 \cap H^2(\Omega)$  con una tangente horizontal en el punto de entrada  $(0, y_0)$  para  $\Phi_a$  y en  $(0, -y_0)$  para  $\Phi_b$ , es decir

$$\Phi'_a(0) = 0 \quad \text{y} \quad \Phi'_b(0) = 0.$$

Entonces triangulamos por separado cada subdominio  $\Omega^i$  con una triangulación  $\mathcal{T}_h^i$ , de manera que la triangulación global sea conforme y viene dada por

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2,$$

con  $\mathcal{T}_h^2 = \mathcal{T}_{h_a}^2 \cup \mathcal{T}_{h_b}^2$ ,  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T)$ , y es regular en el sentido de que no hay solapamiento entre los elementos de la triangulación y existe una constante  $\zeta$  independiente de  $h$  tal que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \zeta,$$

donde  $h_T$  denota el diámetro de cada  $T$  y  $\rho_T$  es el diámetro del círculo inscrito en  $T$ . Consideraremos también que  $\mathcal{T}_h$  contiene dos líneas poligonales  $\Gamma_{h_a}$  y  $\Gamma_{h_b}$  cuyos nodos están sobre las interfaces  $\Gamma_a$  y  $\Gamma_b$  respectivamente, entonces denotaremos por  $\Omega_h^i$  al dominio aproximante de cada  $\Omega^i$ ; es decir: la *región acotada* por  $\Gamma_{h_a}$ ,  $\Gamma_{h_b}$ ,  $\Gamma_0^i$ ,  $\Gamma_{in}^i$  y  $\Gamma_{out}^i$  tal como se ilustra en la Figura 2.1.

La discretización espacial asociada al problema variación la hacemos usando el elemento finito mixto Hood-Taylor  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ . Es decir, cada componente  $u_x$  y  $u_y$  de la velocidad  $\mathbf{u}$  se aproxima por un polinomio de grado menor o igual a dos en cada triángulo  $T$  y la presión por un polinomio de grado uno también en cada triángulo  $T$  de la malla. Ambas aproximaciones son continuas en los lados comunes a los triángulos, excepto posiblemente para la presión

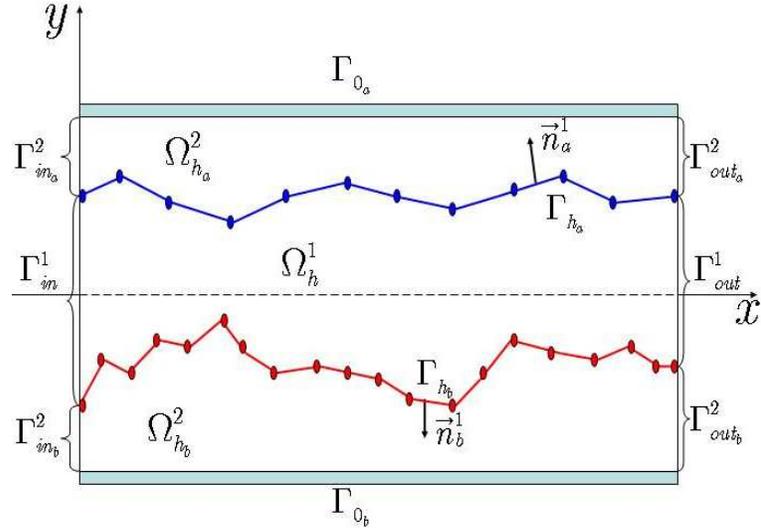


Figura 2.1: Dominio  $\Omega_h$  y frontera  $\partial\Omega_h$

ya que no existe alguna razón impuesta en el modelo para saber que la solución exacta sea continua en las interfaces; por su lado la velocidad si se impone continua en las interfaces. Así, discretizaremos  $X_0$  y  $M$  por

$$X_{0,h} = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h)^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{P}_2^2 \right\} \cap X_0, \quad (2.1)$$

$$M_h = \left\{ q_h = (q_h^1, q_h^2) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h^1) \times \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h^2); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_1 \right\}.$$

Entonces el problema discreto se plantea como :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}_h \in X_{0,h} + \bar{\mathbf{U}}_h \text{ y } p_h \in M_h \text{ tales que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{0,h}, \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = \ell(\mathbf{v}_h) \\ \forall q_h \in M_h, \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

donde  $a$  y  $b$  son las formas bilineales definidas anteriormente, es decir:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{i=1,2} a(\mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h) = \sum_{i=1,2} \alpha \int_{\Omega_h^i} \rho^i \mathbf{u}_h^i \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_h^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}_h^i) : A_1(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}, \\
b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \sum_{i=1,2} b(\mathbf{v}_h, p_h^i) = - \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_h^i} p_h^i \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\
\ell(\mathbf{v}_h) &= \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_h^i} \rho^i (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h \, ds - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \mathbf{v}_h \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v}_h \, ds.
\end{aligned}$$

El próximo paso consiste en aplicar la metodología propuesta por Galerkin para la búsqueda sistemática de las funciones de aproximación de la solución del problema discreto. Entonces, sea  $N_u$  la dimensión del espacio  $X_{0,h}$  y  $N_p$  la dimensión del espacio  $M_h$ , se define una base para cada espacio como:  $\{\boldsymbol{\phi}_j = (\phi_{x,j}, \phi_{y,j})\}_{j=1}^{N_u}$  y  $\{\psi_k\}_{k=1}^{N_p}$ , respectivamente de tal manera que:

$$\begin{aligned}
X_{0,h} &= \text{span} \{ \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_{N_u} \}, \\
M_h &= \text{span} \{ \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_p} \}.
\end{aligned}$$

Así que, cualquier elemento  $\mathbf{u}_{0,h} \in X_{0,h}$  y cualquier elemento  $p_h \in M_h$  admiten un desarrollo de la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{0,h} &= \sum_{j=1}^{N_u} u_j \boldsymbol{\phi}_j, \\
p_h &= \sum_{k=1}^{N_p} p_k \psi_k,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

en donde  $u_j$  son los coeficientes reales a determinar, que se asocian a la combinación lineal para la velocidad y  $p_k$  son los correspondientes coeficientes reales a determinar asociados con la combinación lineal para la presión. Con ésto, la velocidad  $\mathbf{u}_h$  en (2.1) podemos escribirla como

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{0,h} + \bar{\mathbf{U}}_h$$

con  $\mathbf{u}_{0,h}$  dada por la combinación lineal anterior. La función  $\bar{\mathbf{U}}_h$  es una interpolación de  $\bar{\mathbf{U}}$

sobre los nodos que se encuentran en la frontera  $\Gamma_{in}$  dada por:

$$\bar{\mathbf{U}}_h = \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j \phi_j,$$

en donde las funciones  $\phi_{N_u+1}, \phi_{N_u+2}, \dots, \phi_{N_u+V}$  y los valores  $u_{N_u+1}, u_{N_u+2}, \dots, u_{N_u+V}$ , se eligen de manera tal que

$$\sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j \phi_j(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{in}.$$

La interpolación se toma de manera tal que sea a divergencia cero tal como la extensión  $\bar{\mathbf{U}}$  propuesta en [26].

Sin pérdida de generalidad y en pro de usar el método de Galerkin, el problema aproximado (2.1) puede reescribirse de la forma siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}_h \in X_{0,h} \text{ y } p_h \in M_h \text{ tales que} \\ \forall \mathbf{v} \in X_{0,h}, \quad a(\mathbf{u}_{0,h}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = \ell(\mathbf{v}_h) - a(\bar{\mathbf{U}}_h, \mathbf{v}_h) \\ \forall q_h \in M_h, \quad b(\mathbf{u}_{0,h}, q_h) = -b(\bar{\mathbf{U}}_h, q_h), \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ahora bien, siguiendo a Galerkin [27], se escogen como funciones de prueba aquellas idénticamente iguales a las funciones que definen las bases correspondientes a los espacios  $X_{0,h}$  y  $M_h$ . Es decir,  $\mathbf{v}_h = \phi_i$  y  $q_h = \psi_k$  de manera tal que las formas bilineales y lineal de (2.4)

para cada  $i = 1, \dots, N_u$  y  $k = 1, \dots, N_p$  se transforman en:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}_{0,h}, \phi_i) &= a\left(\sum_{j=1}^{N_u} u_j \phi_j, \phi_i\right) = \sum_{j=1}^{N_u} u_j a(\phi_j, \phi_i), \\
b(\phi_i, p_h) &= b\left(\phi_i, \sum_{k=1}^{N_p} p_k \psi_k\right) = \sum_{k=1}^{N_p} p_k b(\phi_i, \psi_k), \\
f(\phi_i) &= l(\phi_i) - a(\bar{\mathbf{U}}_h, \phi_i) = l(\phi_i) - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j a(\phi_j, \phi_i), \\
b(\mathbf{u}_{0,h}, \psi_k) &= b\left(\sum_{j=1}^{N_u} u_j \phi_j, \psi_k\right) = \sum_{j=1}^{N_u} u_j b(\phi_j, \psi_k), \\
g(\psi_k) &= -b(\bar{\mathbf{U}}_h, \psi_k) = -\sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j b(\phi_j, \psi_k).
\end{aligned}$$

Así, se genera el siguiente sistema *global de ecuaciones*:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_u} u_j a(\phi_j, \phi_i) + \sum_{k=1}^{N_p} p_k b(\phi_i, \psi_k) = f(\phi_i), & i = 1, \dots, N_u, \\ \sum_{j=1}^{N_u} u_j b(\phi_j, \psi_k) = g(\psi_k), & k = 1, \dots, N_p, \end{cases} \quad (2.5)$$

el cual escrito de manera matricial tiene la siguiente forma de sistema tipo punto de ensilladura:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

en donde,  $A$  es una matriz de tamaño  $N_u \times N_u$  asociada con la discretización de la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $B$  una matriz de tamaño  $N_p \times N_u$  asociada con la discretización de la forma bilineal  $b(\cdot, \cdot)$  y traspuesta  $B^T$ ,  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son vectores de tamaños  $N_u \times 1$  y  $N_p \times 1$  respectivamente que contienen la data asociada a las fuerzas y solicitudes de volumen y superficie conocidas e impuestas sobre el dominio del problema. Los elementos de estas matrices y vectores están

definidos por:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) = \alpha \int_{\Omega_h} \rho \phi_j \cdot \phi_i \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} \mu A_1(\phi_j) : A_1(\phi_i) \, d\mathbf{x}, \\
B_{kj} &= b(\phi_j, \psi_k) = - \int_{\Omega_h} \psi_k \nabla \cdot \phi_j \, d\mathbf{x}, \\
f_i &= f(\phi_i) = \int_{\Omega_h} \rho (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}) \cdot \phi_i \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} \mathbf{n} \cdot \phi_i \, ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_a} K_a \mathbf{n}_a^1 \cdot \phi_i \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \phi_i \, ds - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j a(\phi_j, \phi_i), \\
g_k &= g(\psi_k).
\end{aligned}$$

Finalmente  $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_{N_u})^t$  y  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{N_p})^t$  son los vectores de incógnitas asociados con los valores nodales de la velocidad y la presión que definen las aproximaciones de Galerkin; el sistema(2.6) heredará propiedades de las formas bilineales que harán posible su resolución numérica-computacional mediante *métodos desacoplados y algoritmos iterativos*.

En la práctica, el sistema (2.6) puede describirse realizando una partición en bloques de las matrices  $A$ ,  $B$  y  $B^T$  por contribución de las componentes en  $x$  y  $y$  de la velocidad. Siguiendo la idea propuesta por Silvester *et alt.* [42], dado un conjunto de funciones escalares de base para un espacio escalar de elementos finitos  $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ , se toma  $N_u = 2n$  y se define el conjunto de funciones de base para la velocidad como:

$$\{\phi_1, \dots, \phi_{2n}\} = \{(\phi_1, 0)^t, \dots, (\phi_n, 0)^t, (0, \phi_1)^t, \dots, (0, \phi_n)^t\}.$$

Con esto se tiene que:

a) para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, n$

$$A_{ij} = \alpha \int_{\Omega_h} \rho \phi_j \phi_i \, dx dy + 2 \int_{\Omega_h} \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \, dx dy + \int_{\Omega_h} \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \, dx dy = A_{xx,ij};$$

b) para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = n + 1, \dots, 2n$

$$A_{ij} = \int_{\Omega_h} \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy = A_{xy,ij};$$

c) para  $i = n + 1, \dots, 2n$  y  $j = 1, \dots, n$

$$A_{ij} = \int_{\Omega_h} \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dx dy = A_{yx,ij};$$

d) para  $i = n + 1, \dots, 2n$  y  $j = n + 1, \dots, 2n$

$$A_{ij} = \alpha \int_{\Omega_h} \rho \phi_j \phi_i dx dy + 2 \int_{\Omega_h} \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy + \int_{\Omega_h} \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy = A_{yy,ij}.$$

De la misma manera para la forma bilineal  $B$  se tiene que

a) para  $k = 1, \dots, N_p$  y  $j = 1, \dots, n$

$$B_{kj} = - \int_{\Omega_h} \psi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx dy = B_{x,kj};$$

b) para  $k = 1, \dots, N_p$  y  $j = n + 1, \dots, 2n$

$$B_{kj} = - \int_{\Omega_h} \psi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dx dy = B_{y,kj}.$$

Finalmente para el vector  $\mathbf{f}$  se tiene

a) para  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} f_i = & \int_{\Omega_h} \rho (g_x + w_x) \phi_i dx dy - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} n_x \phi_i ds \\ & - \int_{\Gamma_a} K_a n_{a,x}^1 \phi_i ds - \int_{\Gamma_b} K_b n_{b,x}^1 \phi_i ds - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j a(\phi_j, \phi_i) = f_{x,i}; \end{aligned}$$

b) para  $i = n + 1, \dots, 2n$

$$f_i = \int_{\Omega_h} \rho (g_y + w_y) \phi_i dx dy - \int_{\Gamma_{out}} p_{out} n_y \phi_i ds - \int_{\Gamma_a} K_a n_{a,y}^1 \phi_i ds - \int_{\Gamma_b} K_b n_{b,y}^1 \phi_i ds - \sum_{j=N_u+1}^{N_u+V} u_j a(\phi_j, \phi_i) = f_{y,i}.$$

Con esto el sistema (2.6) escrito en la partición por bloques es:

$$\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & B_x^T \\ A_{yx} & A_{yy} & B_y^T \\ B_x & B_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

en donde  $A_{xx}$ ,  $A_{xy}$ ,  $A_{yx}$  y  $A_{yy}$  son matrices de tamaño  $n \times n$  y, respectivamente, coeficientes  $A_{xx,ij}$ ,  $A_{xy,ij}$ ,  $A_{yx,ij}$ ,  $A_{yy,ij}$ . Similarmente,  $B_x$  y  $B_y$  son matrices de tamaño  $N_p \times n$  y coeficientes  $B_{x,j}$ ,  $B_{y,j}$  respectivamente. Finalmente,  $\mathbf{U}_x$ ,  $\mathbf{U}_y$ ,  $\mathbf{f}_x$  y  $\mathbf{f}_y$  son vectores de tamaño  $n \times 1$  de componentes dadas por  $u_{x,i}$ ,  $u_{y,i}$ ,  $f_{x,i}$  y  $f_{y,i}$ .

## Capítulo 3

# Solución del problema por el Método de los Elementos Finitos

Básicamente, resolver el problema variacional implica el cálculo de las integrales donde intervienen funciones definidas sobre el dominio  $\Omega$  y caracterizadas dentro de los espacios funcionales  $X_0$  y  $M$ . El problema aproximante, transforma éste cálculo de integrales sobre  $\bar{\Omega}$  pero con funciones escritas como combinaciones lineales de las que forman una base para los espacios aproximantes  $X_{0,h}$  y  $M_h$ ; ésto sugiere entonces la aproximación de las integrales por medio de una *partición* del dominio  $\bar{\Omega}$ . Por tanto, no solo se requiere de un procedimiento para elegir adecuadamente las bases de los espacios aproximante, sino que también se requiere que dicho procedimiento proporcione una *manera fácil* de realizar el cálculo de las integrales sobre  $\bar{\Omega}$  basado en una *partición adecuada* de éste dominio.

En éste orden de ideas se tiene el MEF, el cual consiste en particionar el dominio  $\bar{\Omega}$  en un *gran* número de *pequeños* trozos de forma simple, llamados *elementos*; a la partición en general se le conoce con el nombre de *triangularización* [43]. El *ensamblaje* de éstos elementos es llamado *un mallaje* [44]. Por pequeño se entiende que su tamaño, que está vinculado con el parámetro  $h$ , no se encuentra *acotado superiormente*. La restricción de las funciones de  $X_{0,h}$  y de  $M_h$  a cada elemento es un *polinomio* o una *transformada de un polinomio de grado acotado* pero generalmente bien pequeño. El grado de los polinomios se engloba en las

constantes y todo el análisis numérico se hace en relación al parámetro  $h$  que tiende a cero [44], [45], [46] y [47].

El principio del MEF, establece entonces el *procedimiento sistemático* para elegir las funciones de base que propone Galerkin debe hacerse adecuadamente a fin de generar los espacios aproximantes, y además propone una forma para calcular las integrales asociadas al problema variacional; en efecto, el cálculo se realiza mediante *interpolación polinomial* en cada elemento de las funciones que definen los integrandos [46]. En base a esto, los espacios aproximantes  $X_{0,h}$  y  $M_h$  quedan definidos de manera explícita y se les denominan *espacios de elementos finitos*.

### 3.1. El elemento mixto conforme $\mathbb{P}_2(T)$ - $\mathbb{P}_1(T)$ de Taylor-Hood

El elemento propuesto por Taylor y Hood [25] es un *elemento finito mixto* utilizado usualmente en problemas de flujo de fluidos [28]. Para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ , el elemento de Taylor Hood denotado por  $\mathbb{P}_2(T)$ - $\mathbb{P}_1(T)$  aproxima la velocidad localmente por un polinomio de grado dos determinado por sus valores en los vértices del triángulo y los puntos medios asociados a cada lado del triángulo; en general son llamados *nodos de velocidad*. La presión es aproximada por un polinomio de grado uno determinado por sus valores solamente en los vértices del triángulo y se denominan *nodos de presión*. Globalmente, la aproximación por medio de este elemento finito en cada  $T \in \mathcal{T}_h$  se usa para definir las funciones de base que generan los espacios discretos  $X_{0,h}$  y  $M_h$ , y tal aproximación es conforme ya que los espacios finito-dimensionales  $X_{0,h}$  y  $M_h$  son subconjuntos de los espacios  $X_0$  y  $M$  respectivamente.

En este orden de ideas, para cualquier triángulo  $T_e \subset \mathbb{R}^2$  de  $\mathcal{T}_h$  denotaremos sus vértices por  $\mathbf{a}_1^e = (x_1^e, y_1^e)$ ,  $\mathbf{a}_2^e = (x_2^e, y_2^e)$  y  $\mathbf{a}_3^e = (x_3^e, y_3^e)$  numerados en el sentido antihorario y por  $\mathbf{a}_4^e = (x_4^e, y_4^e)$ ,  $\mathbf{a}_5^e = (x_5^e, y_5^e)$  y por  $\mathbf{a}_6^e = (x_6^e, y_6^e)$  los puntos medios tal como se muestra en la

figura 3.1.

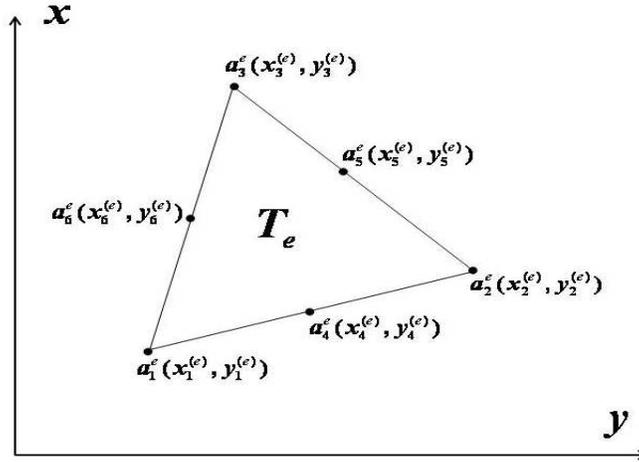


Figura 3.1: Definición del Elemento de Taylor-Hood

Para cada componente de la velocidad  $u_x$  y  $u_y$  se define sobre  $T_e$  la aproximación polinomial de grado dos dada por:

$$\begin{cases} \forall \mathbf{x} \in T_e, u_x^e(\mathbf{x}) \approx u_{x,h}^e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 u_{x,j}^e \phi_j^e(\mathbf{x}), \\ \forall \mathbf{x} \in T_e, u_y^e(\mathbf{x}) \approx u_{y,h}^e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 u_{y,j}^e \phi_j^e(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $u_{x,j}^e = u_x^e(\mathbf{a}_j^e)$  y  $u_{y,j}^e = u_y^e(\mathbf{a}_j^e)$ , con  $j = 1, \dots, 6$ , son los valores exactos de las componentes de la velocidad en los nodos  $\mathbf{a}_1^e$ ,  $\mathbf{a}_2^e$ ,  $\mathbf{a}_3^e$ ,  $\mathbf{a}_4^e$ ,  $\mathbf{a}_5^e$  y  $\mathbf{a}_6^e$  respectivamente, y  $\phi_j^e$  es la correspondiente  $j$ -ésima función de base local, o función de forma, asociada al espacio de elemento finito para cada  $T_e \in \mathcal{T}_h$ .

La presión  $p^e$  sobre cada  $T_e$  se aproxima por el polinomio de grado uno:

$$\forall \mathbf{x} \in T_e, p^e(\mathbf{x}) \approx p_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 p_k^e \psi_k^e(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

en donde los  $p_k^e = p^e(\mathbf{a}_k^e)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , son los correspondientes valores de la presión en los nodos  $\mathbf{a}_1^e$ ,  $\mathbf{a}_2^e$  y  $\mathbf{a}_3^e$ , y  $\psi_k^e$  la  $k$ -ésima función de base local o de forma de la presión en cada  $T_e \in \mathcal{T}_h$ .

### 3.2. Definición de las funciones de forma $\phi_j$ y $\psi_k$ para la velocidad y la presión

La definición de las funciones de forma para elementos triangulares, como es el caso para el elemento Taylor-Hood, se facilita si éstas se escriben en función de las coordenadas baricéntricas o de área [41]. De manera más precisa, para un punto  $\mathbf{x} = (x, y) \in T_e$ , las coordenadas baricéntricas bienen dadas por

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = 1 - x - y,$$

$$\lambda_2(\mathbf{x}) = x,$$

$$\lambda_3(\mathbf{x}) = y.$$

Con esto, las funciones de forma para el espacio de elementos finitos asociado a los nodos de velocidad se definen de la manera siguiente

Para todo  $\mathbf{x} \in T_e$

$$\phi_1^e(\mathbf{x}) = (2\lambda_1(\mathbf{x}) - 1)\lambda_1(\mathbf{x}),$$

$$\phi_2^e(\mathbf{x}) = (2\lambda_2(\mathbf{x}) - 1)\lambda_2(\mathbf{x}),$$

$$\phi_3^e(\mathbf{x}) = (2\lambda_3(\mathbf{x}) - 1)\lambda_3(\mathbf{x}),$$

$$\phi_4^e(\mathbf{x}) = 4\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x}),$$

$$\phi_5^e(\mathbf{x}) = 4\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}),$$

$$\phi_6^e(\mathbf{x}) = 4\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}),$$

y cumplen con la siguiente propiedad

$$\phi_j^e(\mathbf{a}_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } i = j \\ 0 & \text{si y solo si } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (3.3)$$

De manera similar las funciones de forma para el espacio de elementos finitos asociado a los nodos de presión se definen en términos de las coordenadas baricéntricas. En tal caso, las funciones de forma coinciden con las funciones baricéntricas dado a que son polinomios de grado uno relativos a los vértices del elemento  $T_e$ , por lo tanto

$$\forall \mathbf{x} \in T_e, \psi_k^e(\mathbf{x}) = \lambda_k(\mathbf{x}).$$

Estas funciones también cumplen con la propiedad

$$\psi_k^e(\mathbf{a}_i^e) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

### 3.3. Contribución de elemento finito para el ensamblaje del sistema global

Para generar el sistema global por bloques (2.7) asociado al problema de flujo bifásico, la tecnología de los elementos finito propone *elementalizar* la formulación variacional [42]. Esto es, localizar o restringir la formulación variacional sobre cada elemento  $T \in \mathcal{T}_h$  al mismo tiempo y finalmente realizar una suma sobre cada elemento para obtener de ésta forma toda la contribución sobre el dominio completo; a ésto se le conoce con el nombre de *contribución elemental* [47]. Durante éste proceso se realiza la aproximación de los campos de velocidad y presión sobre cada elemento basada en la propiedad local de las funciones de forma para los espacios de elementos finitos.

A continuación, las siguientes subsecciones estarán dedicadas a la construcción del sistema por bloques para cada elemento  $T_e \in \mathcal{T}_h$ , que posteriormente se usará como contribución de cada elemento para ensamblar el sistema global (2.7).

### 3.3.1. Sistema tipo Galerkin elemental

Para un elemento  $T_e \in \mathcal{T}_h$  el sistema por bloques se escribe como

$$\begin{pmatrix} A_{xx}^e & A_{xy}^e & (B_x^T)^e \\ A_{yx}^e & A_{yy}^e & (B_y^T)^e \\ B_x^e & B_y^e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{p}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x^e \\ \mathbf{f}_y^e \\ \mathbf{g}^e \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

en donde  $A_{xx}^e$ ,  $A_{xy}^e$ ,  $A_{yx}^e$  y  $A_{yy}^e$  son matrices de tamaño  $6 \times 6$  y, respectivamente, coeficientes  $A_{xx,ij}^e$ ,  $A_{xy,ij}^e$ ,  $A_{yx,ij}^e$ ,  $A_{yy,ij}^e$ . Similarmente,  $B_x^e$  y  $B_y^e$  son matrices de tamaño  $3 \times 6$  y coeficientes  $B_{x,j}^e$ ,  $B_{y,j}^e$  respectivamente. Finalmente,  $\mathbf{U}_x^e$ ,  $\mathbf{U}_y^e$ ,  $\mathbf{f}_x^e$  y  $\mathbf{f}_y^e$  son vectores de tamaño  $6 \times 1$  de componentes dadas por  $u_{x,i}^e$ ,  $u_{y,i}^e$ ,  $f_{x,i}^e$  y  $f_{y,i}^e$ . Los coeficientes de las matrices y vectores elementales que se han mencionado vienen dados por:

a) para  $i = 1, \dots, 6$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$A_{xx,ij}^e = \alpha \int_{T_e} \rho \phi_j^e \phi_i^e dx dy + 2 \int_{T_e} \mu \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy + \int_{T_e} \mu \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} dx dy;$$

b) para  $i = 1, \dots, 6$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$A_{xy,ij}^e = \int_{T_e} \mu \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy;$$

c) para  $i = 1, \dots, 6$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$A_{yx,ij}^e = \int_{T_e} \mu \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} dx dy;$$

d) para  $i = 1, \dots, 6$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$A_{yy,ij}^e = \alpha \int_{T_e} \rho \phi_j^e \phi_i^e dx dy + 2 \int_{T_e} \mu \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy + \int_{T_e} \mu \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy.$$

De la misma manera para la forma bilineal  $B$  se tiene que

a) para  $k = 1, \dots, 3$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$B_{x,kj}^e = - \int_{T_e} \psi_k^e \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy;$$

b) para  $k = 1, \dots, 3$  y  $j = 1, \dots, 6$

$$B_{y,kj}^e = - \int_{T_e} \psi_k^e \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} dx dy.$$

Finalmente para el vector  $\mathbf{f}$  se tiene

a) para  $i = 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned} f_{x,i}^e &= \int_{T_e} \rho (g_x + w_x) \phi_i^e dx dy - \int_{\Gamma_{out} \cap \partial T_e} p_{out} n_x \phi_i^e ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_{h_a} \cap \partial T_e} K_a n_{a,x}^1 \phi_i^e ds - \int_{\Gamma_{h_b} \cap \partial T_e} K_b n_{b,x}^1 \phi_i^e ds; \end{aligned}$$

b) para  $i = 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned} f_{y,i}^e &= \int_{T_e} \rho (g_y + w_y) \phi_i^e dx dy - \int_{\Gamma_{out} \cap \partial T_e} p_{out} n_y \phi_i^e ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_{h_a} \cap \partial T_e} K_a n_{a,y}^1 \phi_i^e ds - \int_{\Gamma_{h_b} \cap \partial T_e} K_b n_{b,y}^1 \phi_i^e ds. \end{aligned}$$

Note que en la expresión para las componentes del vector  $\mathbf{f}$  restringido al elemento  $T_e$  no se considera la interpolación para la condición de frontera tipo Dirichlet en  $\Gamma_{in}$ . Este es un procedimiento estándar para llevar a cabo la implementación computacional, no obstante después de realizar el *ensamblaje* por contribución de las matrices elementales tal condición en esa frontera se incorpora al lado derecho del sistema de Galerkin.

### 3.4. El ensamblaje del sistema global

Un aspecto importante en la contribución de las matrices elementales es el hecho de que cada nodo en el elemento posee una numeración *local* que depende del tipo de elemento, y una numeración *global* con respecto a todos los demás nodos. Este hecho es el que permite conectar las matrices elementales para así contabilizar las contribuciones de cada una en el sistema global. En el elemento de estudio, tipo Taylor-Hood, como ya se ha mencionado, se tiene la siguiente numeración local:  $j = 1, \dots, 6$  para cada componente de la velocidad y  $k = 1, \dots, 3$  para la presión.

La numeración global se construye siguiendo la metodología aplicada para los elementos finitos mixtos [28], donde se enumeran todos los nodos de la malla  $\mathcal{T}_h$ , para la primera componente de la velocidad, y se continúa la numeración para la segunda componente utilizando nuevamente todos los nodos de la malla  $\mathcal{T}_h$  y finalmente se continúan numerando para la presión solo nodos vértices, de esta manera, se construye una numeración global de tres variables a determinar utilizando un solo mallado. Este sistema de numeración (local como global) se almacena en un arreglo denominado *matriz de conectividad*  $M$ , la cual se define para cada variable a determinar, de tal forma que el índice  $i = M_{je}$  representa la numeración global en el  $j$ -ésimo nodo local del  $e$ -ésimo elemento, esto para cualquier componente de la velocidad, y  $i = M_{ke}$  es el índice apropiado en el caso de la presión.

Si se denota como  $M_p$  la matriz de conectividad para la presión, y  $M_u$  y  $M_w$  como las matrices de conectividad para la componentes en la dirección de  $x$  y  $y$  de la velocidad respectivamente, es decir, que  $k_p = M_p(k, e)$ ,  $i_u = M_u(i, e)$  y  $i_w = M_w(i, e)$  son los índices correspondientes a la numeración global ya mencionados; si además se tienen  $n$  nodos para cada componente de la velocidad,  $N_p$  nodos para la presión y  $N_e$  elementos, el ensamblaje del sistema global se plantea por partes en los algoritmos siguientes.

El primer algoritmo construye los bloques  $A$  y el vector  $f$  del sistema (2.6).

```

para  $e = 1$  hasta  $N_e$ 
    para  $i = 1$  hasta 6
        para  $j = 1$  hasta 6
             $K_{i_u j_u} = K_{i_u j_u} + A_{xx,ij}^e$ 
             $K_{i_u j_w} = K_{i_u j_w} + A_{xy,ij}^e$ 
             $K_{i_w j_w} = K_{i_w j_w} + A_{yy,ij}^e$ 
             $K_{i_w j_u} = K_{i_w j_u} + A_{yx,ij}^e$ 
        fin lazo  $j$ 
         $F_{i_u} = F_{i_u} + f_{x,i}^e$ 
         $F_{i_w} = F_{i_w} + f_{y,i}^e$ 
    fin lazo  $i$ 
fin lazo  $e$ 

```

El siguiente algoritmo contruye el bloque para la matriz  $B^T$ .

```

para  $e = 1$  hasta  $N_e$ 
    para  $i = 1$  hasta 6
        para  $k = 1$  hasta 3
             $K_{i_u k_p} = K_{i_u k_p} + (B_{x,ki}^e)^T$ 
             $K_{i_w k_p} = K_{i_w k_p} + (B_{y,ki}^e)^T$ 
        fin lazo  $k$ 
    fin lazo  $i$ 
fin lazo  $e$ 

```

La construcción del bloque conformado por la matriz  $B$  se realiza con el siguiente algoritmo.

```

para  $e = 1$  hasta  $N_e$ 
    para  $k = 1$  hasta 3
        para  $j = 1$  hasta 6
             $K_{k_p j_u} = K_{k_p j_u} + B_{x,kj}^e$ 
             $K_{k_p j_w} = K_{k_p j_w} + B_{y,kj}^e$ 
        fin lazo  $j$ 
         $F_{k_p} = F_{k_p} + g_k^e$ 
    fin lazo  $k$ 
fin lazo  $e$ 

```

Así el sistema global tipo Galerkin se transforma en un sistema de la forma general

$$KU = F,$$

en donde

$$K = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}.$$

Ya para finalizar el ensamblaje, al sistema anterior se le incorporan las condiciones de borde tipo Dirichlet mediante una subrutina que forma parte de la implementación computacional descrita en el próximo capítulo.

### 3.5. Transformaciones de coordenadas y expresiones integrales

En la técnica de elementos finitos, las evaluaciones de las expresiones integrales sobre un elemento cualquiera  $T_e \in \mathcal{T}_h$  se obtienen utilizando transformaciones  $\mathcal{F}_{T_e} : \hat{T} \rightarrow T_e$  y realizando todos los cálculos sobre un elemento de referencia  $\hat{T}$ . En ésta sección se obtendrán

expresiones que puedan ser evaluadas de forma numérica para todos los términos integrales obtenidos en la formulación, y así utilizando las contribuciones elementales, se pueda obtener el sistema de ecuaciones lineales del problema. Para el elemento finito triangular de Taylor-Hood, el elemento de referencia es un triángulo de vértices  $\hat{\mathbf{a}}_1 = (0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_2 = (1, 0)$  y  $\hat{\mathbf{a}}_3 = (0, 1)$  (ver figura 3.2).

Para plantear las expresiones de las contribuciones elementales, y su evaluación numérica, es necesario primero conseguir las en el elemento de referencia a través de una transformación de coordenadas de la variable independiente en un triángulo  $T_e$  cualquiera de  $\mathcal{T}_h$  [42, 44]. Sea el elemento de referencia  $\hat{T}$  con vértices relativos a las coordenadas baricéntricas  $\hat{\mathbf{m}}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{m}}_2 = (0, 1, 0)$  y  $\hat{\mathbf{m}}_3 = (0, 0, 1)$ . Se define entonces la transformación de coordenadas  $\mathcal{F}_{T_e} : \hat{T} \rightarrow T_e$  que aplica el elemento  $\hat{T}$  a cualquier elemento  $T_e$  de la malla  $\mathcal{T}_h$  de vértices  $\mathbf{m}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  como:

$$\begin{aligned} x^e(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{j=1}^3 x^e(\mathbf{m}_j) \hat{\phi}_j, \\ y^e(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{j=1}^3 y^e(\mathbf{m}_j) \hat{\phi}_j, \end{aligned}$$

en donde  $\mathbf{m}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , es el  $j$ -ésimo vértice del elemento  $T_e \in \mathcal{T}_h$  relativo a las coordenadas baricéntricas. Tal transformación, asocia a todo punto  $(\hat{x}, \hat{y})$  en *coordenadas naturales* o *locales* dentro del elemento  $\hat{T}$ , un punto  $(x^e, y^e)$  en *coordenadas globales*, dentro del elemento  $T_e$ . Además,  $x^e(\mathbf{m})$  y  $y^e(\mathbf{m})$  son las coordenadas de un punto  $\mathbf{m}$  en  $T_e$  relativo a las coordenadas baricéntricas, y las funciones  $\hat{\phi}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , son las funciones de base elementales que dependen de las coordenadas baricéntricas con respecto al elemento de referencia, definidas por

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\lambda}_2 &= \hat{x}, \\ \hat{\lambda}_3 &= \hat{y}. \end{aligned}$$

La transformación tiene la propiedad de que es invertible, por tanto las coordenadas de todo punto  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{T}$  pueden ser determinadas por la aplicación inversa

$$\mathcal{F}_{\hat{T}}^{-1} : T_e \rightarrow \hat{T},$$

en tal sentido vienen dadas por

$$\hat{x} = (a_2 + b_2x^e + c_2y^e) \frac{1}{|J^e|},$$

$$\hat{y} = (a_3 + b_3x^e + c_3y^e) \frac{1}{|J^e|},$$

en donde

$$a_2 = x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e,$$

$$a_3 = x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e,$$

$$b_2 = y_3^e - y_1^e,$$

$$b_3 = y_1^e - y_2^e,$$

$$c_2 = x_1^e - x_3^e,$$

$$c_3 = x_2^e - x_1^e$$

y  $|J^e|$  es el Jacobiano de ésta transformación dado por

$$|J^e| = \begin{vmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{vmatrix}$$

Con lo anterior, se tiene que

$$\int_{T_e} \rho \phi_j^e \phi_i^e dx dy = |J^e| \int_{\hat{T}} \rho \hat{\phi}_j \hat{\phi}_i d\hat{x} d\hat{y},$$

en donde  $\hat{\phi}_j = \hat{\phi}_j(\hat{x}, \hat{y})$  y  $\hat{\phi}_i = \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y})$  son funciones polinomiales respecto de las coordenadas baricéntricas relativas al elemento  $\hat{T}$ , adicionalmente la densidad  $\rho$  es una función constante

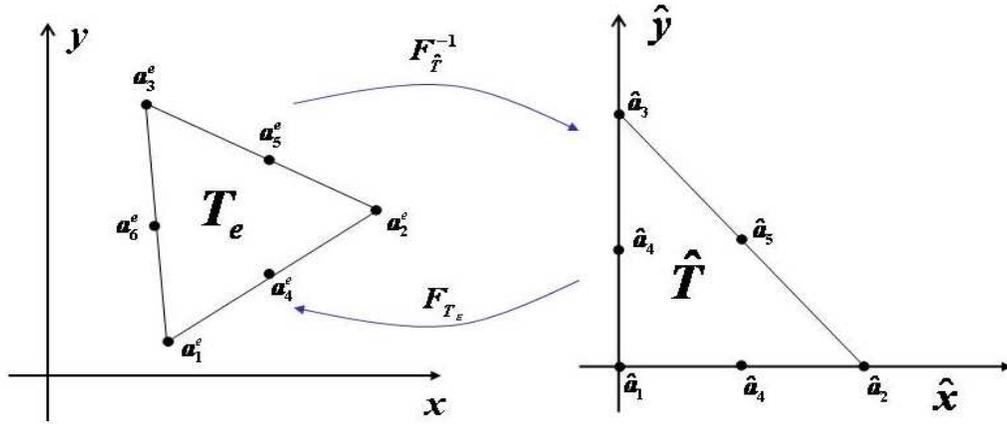


Figura 3.2: Ilustración de la transformación  $\mathcal{F}_{T_e} : \hat{T} \rightarrow T_e$  y la inversa  $\mathcal{F}_{\hat{T}}^{-1} : T_e \rightarrow \hat{T}$ ,

a trozos por cada  $\Omega_h^i$  y en particular sobre cada  $T_e \in \mathcal{T}_h$  es constante, por lo tanto la integral anterior se calcula de manera exacta.

Análogamente, las integrales

$$\int_{T_e} \mu \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} dx dy \quad \text{y} \quad \int_{T_e} \mu \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} dx dy$$

se calculan de manera exacta al considerar que la viscosidad  $\mu$  es una función constante en cada elemento  $T_e$  de  $\mathcal{T}_h$  y empleando la misma transformación de coordenadas.

Sin pérdida de generalidad, el argumento anterior también se aplica para calcular las integrales asociadas con los coeficientes de las matrices  $B_x^e$  y  $B_y^e$ .

Finalmente, para los términos integrales correspondientes a las componentes del vector  $\mathbf{f}$  elemental, se tienen las siguientes hipótesis:

- i) las funciones  $w_x = w_x(\mathbf{x})$  y  $w_y = w_y(\mathbf{x})$  se aproximan mediante una interpolación usando las funciones de forma elemental para la velocidad, por lo tanto cualquier valor dentro

de un elemento  $T_e$  viene dado por

$$w_x(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 w_x(\mathbf{a}_j^e) \phi_j^e(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad w_y(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 w_y(\mathbf{a}_j^e) \phi_j^e(\mathbf{x}),$$

con  $\mathbf{a}_j^e$  es el  $j$ -ésimo vértice del elemento  $T_e$ ;

- ii) las funciones  $g_x$  y  $g_y$  se corresponden con las componentes del vector gravedad  $\mathbf{g} = (0, 9.806)$ ; por tanto son constantes dadas sobre cada elemento  $T_e$ ;
- iii) las componentes  $n_x$  y  $n_y$  del vector normal saliente en la frontera  $\Gamma_{out}$  son constantes. En efecto  $n_x = 1$  y  $n_y = 0$ . Aún más, la presión  $p_{out}$  sobre esa frontera es la presión manométrica y por lo tanto dada constante;
- iv) adicional a la hipótesis de parametrización hecha sobre las interfaces, en esta etapa del trabajo se considera que las líneas rectas se deben a el radio de curvatura infinito y por lo tanto las funciones  $K_j$ ,  $j = a, b$ , son idénticamente igual a la función nula.

Bajo las hipótesis anteriores las componentes  $f_{x,i}^e$  y  $f_{y,i}^e$  se transforman en

a) para  $i = 1, \dots, 6$

$$f_{x,i}^e = \rho \sum_{j=1}^6 w_x(\mathbf{a}_j^e) \int_{T_e} \phi_i^e \phi_j^e dx dy - p_{out} \int_{\Gamma_{out} \cap \partial T_e} \phi_i^e ds;$$

b) para  $i = 1, \dots, 6$

$$f_{y,i}^e = \rho g_y \int_{T_e} \phi_i^e dx dy + \rho \sum_{j=1}^6 w_y(\mathbf{a}_j^e) \int_{T_e} \phi_i^e \phi_j^e dx dy,$$

y en ambos casos las integrales que aparecen relacionadas con las funciones de formas sobre el elemento se calculan como antes.

# Capítulo 4

## Implementación computacional y resultados numéricos

En este capítulo se muestra la implementación computacional del MEF para obtener la solución aproximada al problema de *Stokes Generalizado*, expresado como un sistema tipo Galerkin asociado al espacio de elementos finitos tipo Taylor-Hood. Basado en la estrategia computacional de ensamblaje por contribución elemental, explicada en el Capítulo anterior, se elaboró un código computacional cuyo desempeño se describirá en este capítulo tomando un problema de Stokes con condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann, y cuya solución analítica se conoce. Por tanto, se realizan corridas del código para refinamientos de la malla  $\mathcal{T}_h$  dados al disminuir su talla  $h$ . Para cada corrida se mostrará el error a posteriori de la estimación en norma euclídeana y gráficas que ilustran el comportamiento de las soluciones numéricas para tal problema.

Con respecto al problema de *Stokes Generalizado*, los resultados numéricos que se reportan están basados en la función de entrada  $U(y)$  adaptada a las condiciones del problema a partir de la función propuesta por Bird [3] que se da para la condición de Dirichlet sobre  $\Gamma_{in}$ . De igual forma, los parámetros físicos:  $\mu^i, \rho^i$  para cada  $i = 1, 2$  se dan con la premisa de que  $\mu^1 > \mu^2$  y  $\rho^1 < \rho^2$ . Por otra parte, el parámetro  $\alpha$  asociado a la discretización del término convectivo en las ecuaciones de Navier-Stokes, se proporciona de manera tal que el paso de discretización

en el tiempo,  $\delta t$ , sea lo suficientemente pequeño para representar un instante en el que el flujo sea laminar en el trozo de tubería considerado. No se muestra el error a posteriori por el simple hecho de que *este problema no posee solución exacta* para las condiciones de frontera que definen el flujo bifásico en estudio.

## 4.1. Descripción del código computacional

En esta sección se describen las fases que conforman la estructura del código computacional utilizado para realizar la simulación numérica del flujo bifásico.

La primera fase consiste en *cargar* en el programa las condiciones del problema, tales como: propiedades de los fluidos y constantes físicas ( $\mu^i, \rho^i$  y  $g_y$ ), geometría del problema (longitud y radio de la tubería, diámetro de la interfase) y los parámetros de discretización. En la segunda fase se genera la malla  $\mathcal{T}_h$  en un paso de tiempo donde la semi-discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes conlleva a el problema de Stokes Generalizado, y se considera que en el paso de tiempo anterior  $t$ , la interfaz que separa los dos fluidos es una recta horizontal de radio  $b$ . La discretización se hace, como ya se ha mencionado en este trabajo, usando elementos triangulares regulares. La malla se obtiene a partir de dos subrutinas; la primera se denomina `coord_xy_t6_2fases` y es donde se generan las coordenadas cartesianas de cada nodo almacenadas en la matriz `nodos_xy`, y la subrutina `mallado_t6_2fases` que crea la matriz de conectividad denominada `nodos_elemento`. La numeración global se realiza comenzando por el nodo ubicado en la parte inferior izquierda de la malla y siempre de izquierda a derecha, de manera que al enumerar el último nodo de una misma línea ubicado en la parte derecha de la malla se sube un nivel y se continúa la numeración en la parte izquierda superior, así sucesivamente hasta llegar al último nodo.

Como ejemplo, en la Figura 4.1 se ilustra el dominio  $\bar{\Omega}_h = \bar{\Omega}_h^1 \cup \bar{\Omega}_h^2$  para una malla  $\mathcal{T}_h$  generada con el código, la cual, contiene 16 elementos, 15 nodos vértices y 30 nodos en los

puntos medios de los lados de cada triángulo para un total de 45 nodos. La porción de tubería tiene una longitud  $L = 20$  m y radio  $D = 5$  m, a su vez el radio de la interfase es  $b = 3$  m.

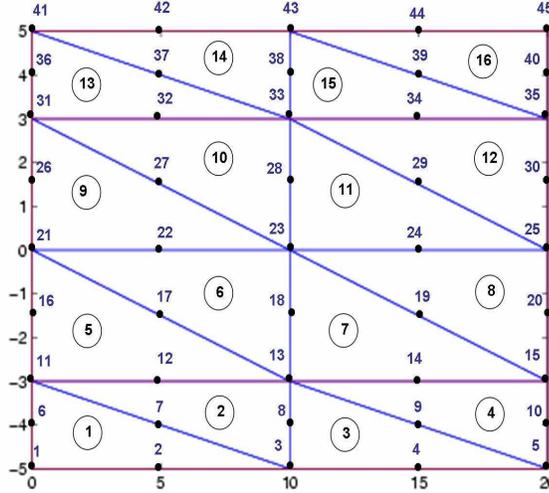


Figura 4.1: Discretización del dominio en 2D de la tubería con un mallado regular

Para este ejemplo, las matrices `nodos_xy` de  $2 \times 45$  y `nodos_elemento` de  $6 \times 16$  resultan:

$$\text{nodos\_xy} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & \dots & 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & \dots & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

y

$$\text{nodos\_elemento} = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 3 & 15 & 11 & 23 & 13 & 25 & 21 & 33 & 23 & 35 & 31 & 43 & 33 & 45 \\ 3 & 11 & 5 & 13 & 13 & 21 & 15 & 23 & 23 & 31 & 25 & 33 & 33 & 41 & 35 & 43 \\ 11 & 3 & 13 & 5 & 21 & 13 & 23 & 15 & 31 & 23 & 33 & 25 & 41 & 33 & 43 & 35 \\ 2 & 12 & 4 & 14 & 12 & 22 & 14 & 24 & 22 & 32 & 24 & 34 & 32 & 42 & 34 & 44 \\ 7 & 7 & 9 & 9 & 17 & 17 & 19 & 19 & 27 & 27 & 29 & 29 & 37 & 37 & 39 & 39 \\ 6 & 8 & 8 & 10 & 16 & 18 & 18 & 20 & 26 & 28 & 28 & 30 & 36 & 38 & 38 & 40 \end{pmatrix},$$

donde se puede apreciar la descripción del mallado antes expuesta.

En la siguiente fase una serie de subrutinas crean un conjunto de *campos* (matrices o vectores) que clasifican los nodos en interno o de frontera, de Neumann o de Dirichlet, vértices o medios, y la ubicación de éstos en el dominio ocupado por petróleo o el agua. Esta información es utilizada por las subrutinas que construyen las matrices de conectividad de cada variable, determinan los nodos asociados a la condición de Dirichlet y asocian a cada nodo las propiedades físicas correspondientes.

Finalmente se visualizan los resultados por medio de gráficas correspondientes al mallado, campo de velocidad y superficie de presión.

## 4.2. Evaluación del desempeño del código

En esta sección se evalúa el desempeño del código computacional aplicado a un problema de Stokes con condiciones de frontera mixta en un rectángulo como dominio de validez.

Para  $\Omega_{\square} = (0, 3) \times (0, 1)$  la frontera viene dada por

$$\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2 \cup \Gamma_{out},$$

en donde

$$\Gamma_{in} = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \partial\Omega; x = 0, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Gamma_0^1 = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \partial\Omega; y = 0, 0 \leq x \leq 3\},$$

$$\Gamma_0^2 = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \partial\Omega; y = 1, 0 \leq x \leq 3\},$$

$$\Gamma_{out} = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \partial\Omega; x = 3, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Entonces, el problema viene dado por

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_{\square}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega_{\square}$$

sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{u} = y(1 - y, 0) \quad \text{en } \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out},$$

$$\mathbf{u} = (0, 0) \quad \text{en } \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2.$$

La solución analítica de éste problema viene dada por:

$$u_x(x, y) = y(1 - y) \quad u_y(x, y) = 0 \quad p(x, y) = -2x + ctte$$

Este problema describe el flujo de un fluido en un canal horizontal, debido a una diferencia de presión cuya solución es una solución particular a las ecuaciones de *Navier-Stokes* conocida con el nombre de *Flujo Poiseuille* [42].

Se realizaron experimentos numéricos para tres refinamientos de la malla, los cuales se muestran en la siguiente tabla.

RESULTADOS POR REFINAMIENTO					
Nivel	Elementos	nodos	$h$	$\frac{\ u_{x_{ex}} - u_{x,h}\ }{\ u_{x_{ex}}\ }$	$\frac{\ p_{ex} - p_h\ }{\ p_{ex}\ }$
1	28	75	0,6585	$8,9 \cdot 10^{-16}$	$1,6 \cdot 10^{-16}$
2	66	161	0,4307	$6,2 \cdot 10^{-16}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$
3	266	585	0,2129	$1,9 \cdot 10^{-15}$	$4,4 \cdot 10^{-16}$
4	638	1357	0,1377	$1,3 \cdot 10^{-11}$	$4,3 \cdot 10^{-15}$

Cuadro 4.1: Error de la aproximación en función de  $h$ .

En la tabla (4.1) se presentan las características de cada una de las refinaciones realizadas: cantidad de nodos, número de lados, tamaño  $h$  de la malla, medida del error en la aproximación de la velocidad y medida del error en la aproximación de la presión. Las gráficas mostradas a continuación ilustran las soluciones numéricas para el primer y último refinamiento de la malla, y también se muestran los diagramas de cada malla. Allí se puede observar que el comportamiento de la presión se mantiene invariante al refinar la malla.

Tanto para la velocidad como para la presión los errores son admisibles desde el punto de vista físico dado que se mantienen en un entorno del cero y por tanto la aproximación se considera buena. Sin embargo, desde el punto de vista numérico el error para la velocidad aumenta en orden de magnitud de manera monótona y para la presión oscila en el orden  $10^{-16}$ . Este comportamiento del error puede estar asociado a la propagación de errores de redondeo en el cómputo basado en la aritmética de punto flotante.

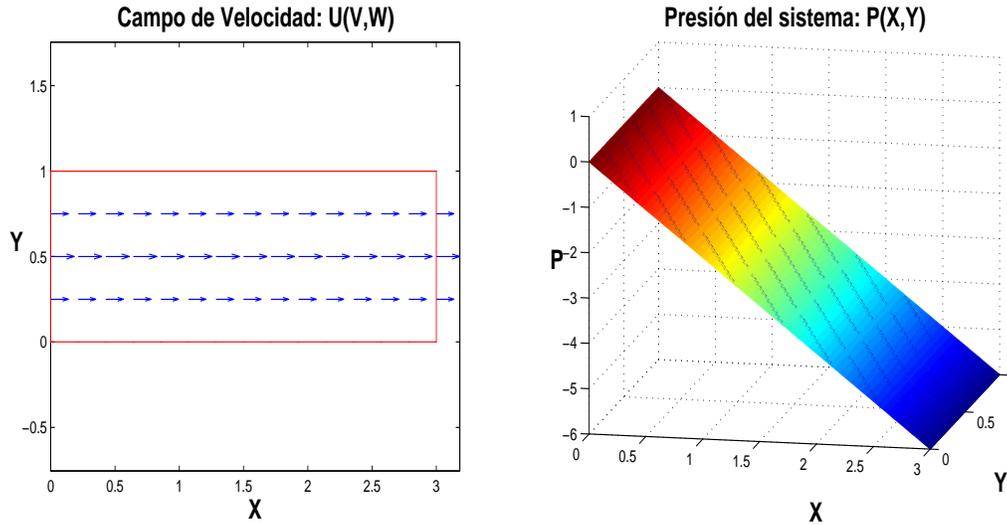


Figura 4.2: Solución discreta de la velocidad  $u_{x,h}$  y de la presión  $p_h$  en el primer refinamiento

Finalmente, el patrón de esparcidad para el sistema de ecuaciones asociado a este problema se muestra para el primer y cuarto refinamiento en la Figura 4.4. Se puede observar claramente la estructura de bandas dada por la matriz global  $K$ . Note que en este caso  $A_{xy} = A_{yx} = 0$  dado que no hay términos de derivadas cruzadas como los que aporta la acción del tensor de tasa de deformación en el problema de flujo bifásico; en efecto, solo existe la contribución del Laplaciano que genera la matriz  $K$  descompuesta en  $A_{xx}$  y  $A_{yy}$  vistas como la banda principal en el patrón de esparcidad. De igual forma, en estos patrones de esparcidad pueden notarse claramente las matrices  $B$  y  $B^T$  con sus respectivas descomposiciones al igual que la matriz nula en la esquina inferior derecha.

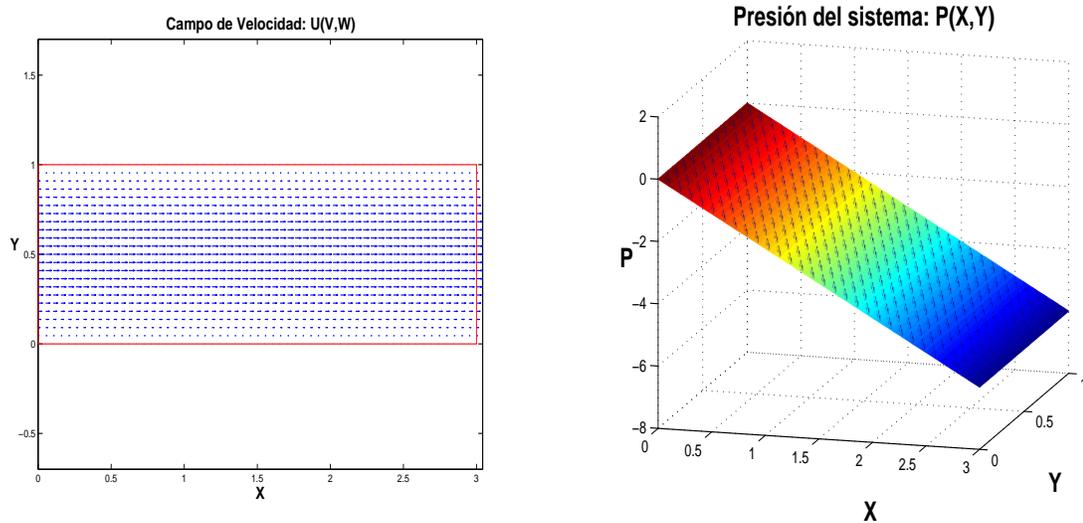


Figura 4.3: Solución discreta de la velocidad  $u_{x,h}$  y de la presión  $p_h$  en el cuarto refinamiento

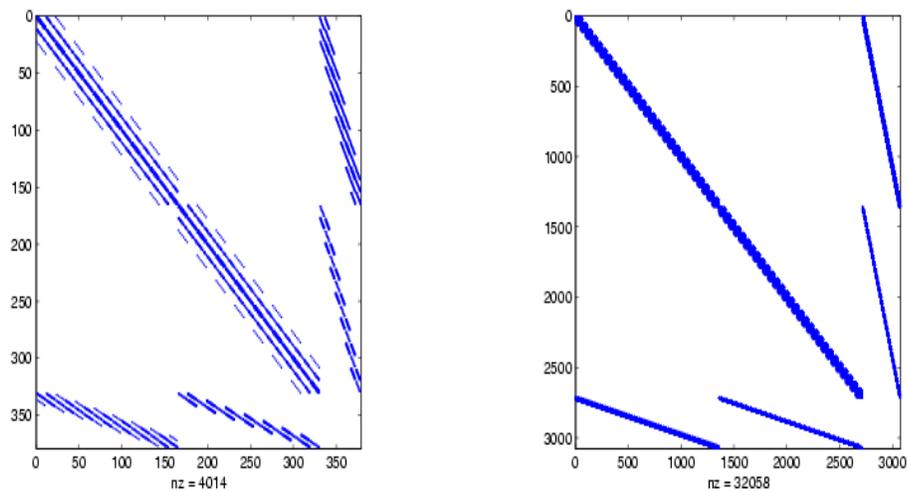


Figura 4.4: Patrón de esparcidad de la matriz  $K$  para el primer y cuarto refinamiento

### 4.3. Resultados para el problema de flujo bifásico

En esta sección se presenta la solución computacional de la Ecuación de *Navier-Stokes* bajo condiciones de entrada no estándar mostrada en los capítulos anteriores. Se muestran los resultados gráficos para varios refinamientos de la malla de elementos finitos. Es importante

aclarar que para el problema de estudio no se conoce una solución analítica o experimental que permita la validación de los resultados, por tanto, la discusión de estos resultados será limitada.

Para realizar la simulación numérica, a modo de obtener la solución computacional se consideraron los siguientes datos:

- i) la condición en la salida de la tubería se establece como  $p_{out} = 0$ , que se corresponde físicamente con la presión manométrica;
- ii) los parámetros de geometría del sistema se tomaron basados en los valores típicos de condiciones de operación para conductos destinados a transportar petróleo (oleoductos) (ver [48],[49],[50]). Así, se tomó la longitud de la tubería  $L = 12$  m, el radio de la interfase  $b = 0,13$  m y radio de la tubería de  $D = 0,15$  m;
- iii) para obtener las propiedades físicas del petróleo (fluido 1) se consideró que éste era un *crudo mediano* promedio [50] y las propiedades para el agua (fluido 2) se obtuvieron de fuentes bibliográficas [3], los valores utilizados fueron:  $\rho^1 = 998$  kg/m<sup>3</sup> y  $\rho^2 = 910$  kg/m<sup>3</sup>, y  $\mu^1 = 0,02912$  Pa s y  $\mu^2 = 0,000993$  Pa s ;
- iv) el parámetro de discretización temporal  $\alpha$  se fijó en  $1/35$  para visualizar el comportamiento de la solución al refinar la malla, es decir, al variar el número de nodos y por ende el número de elementos; luego se varió entre  $1/10$  y  $1/1000$  manteniendo un mallado fijo (número fijo de elementos), para observar así este efecto;
- v) la función  $U = U(y)$  dada para definir el campo de velocidad  $\mathbf{U} = (U(y), 0)^t$  en  $\Gamma_{in}$ , se tomó como una adaptación de la solución propuesta por Bird [3] para un flujo bifásico que fluye entre dos placas paralelas y que satisface las condiciones de compatibilidad con las condición de no deslizamiento, cabe destacar que en la actualidad no se conoce data real para especificar mejor éstas funciones y sólo se definieron tomando en cuenta

las condiciones de regularidad que se imponen sobre la data y sobre el dominio para que, tanto en el continuo como en el discreto, el problema este bien planteado. La función propuesta viene dada por

$$U(y) = \begin{cases} \frac{\Delta P}{2L\mu^2}(y^2 - D), & \forall y \in \Gamma_{in}^2 \\ \frac{\Delta P}{2L\mu^2} \left[ \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) y^2 - \left( b^2 \left( \frac{\mu_2 - \mu_2}{\mu_1} \right) + D^2 \right) \right], & \forall y \in \Gamma_{in}^1, \end{cases} \quad (4.1)$$

vi) La función  $\mathbf{w}$  viene dada por la copia de la velocidad en la entrada a lo largo de la tubería:  $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (U(y), 0), \forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

En la Figura 4.5 se muestra la velocidad  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  para dos refinamientos de la malla de elementos finitos, donde se pueden apreciar las características físicas del perfil de velocidad en el paso del tiempo anterior. El hecho de que el campo de velocidad  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  no posea componentes en la dirección de  $y$  y sea parabólica indica que el *esfuerzo cortante* es *lineal* y solo tiene la componente en la dirección de  $x$  que actúa sobre el plano normal a la dirección de  $y$  ( $\tau_{yx}$ ) [3] [51]. Puede apreciarse, además, que los cambios de velocidad en el dominio ocupado por el petróleo son pequeños lo que evidencia el efecto de la viscosidad de este fluido en comparación con los cambios que se observan en el perfil de velocidad del otro fluido (agua) de menor viscosidad (casi un 1/30 de la viscosidad del petróleo), con cambios mucho más pronunciados.

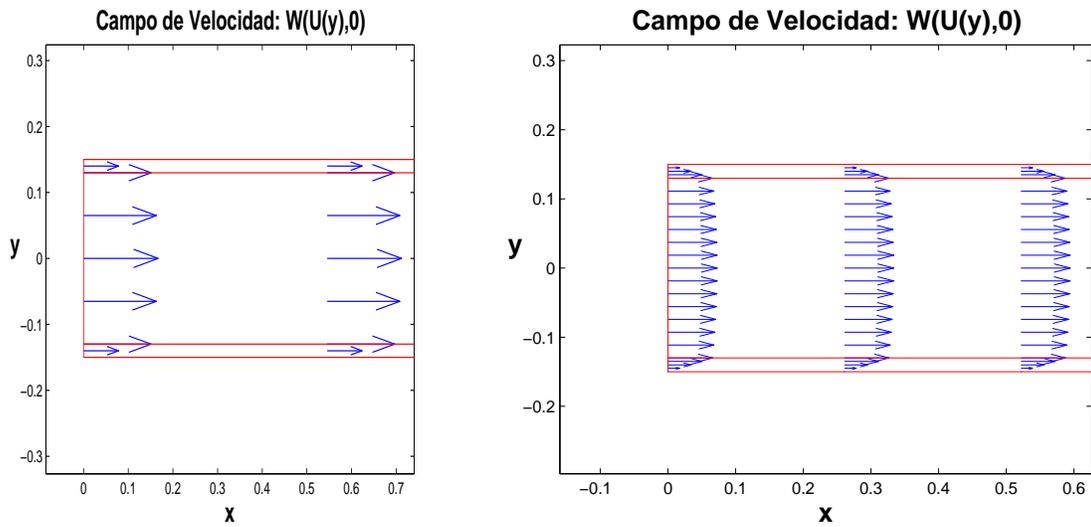


Figura 4.5: Vista del campo de velocidad en el paso del tiempo anterior  $w(\mathbf{x})$  en un extremo de la tubería utilizando 88 y 506 elementos respectivamente.

A continuación se presentan los resultados numéricos para tres refinamientos de la malla de elementos finitos con 88, 506 y 3894 elementos donde se visualizan el perfil de velocidad y la presión para cada solución.

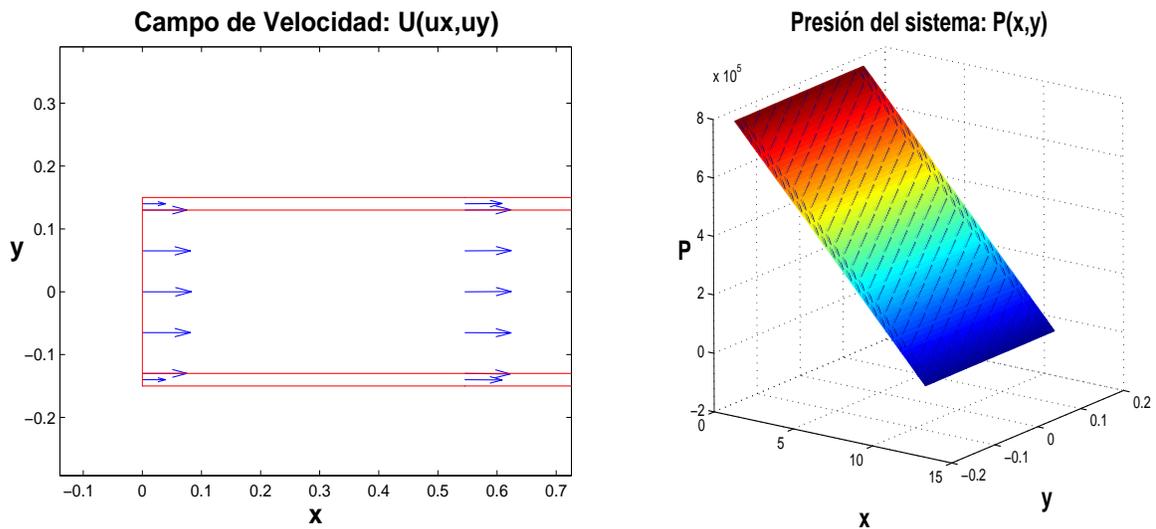


Figura 4.6: Solución discreta de la velocidad  $u_{x,h}$  y de la presión  $p_h$  utilizando 88 elementos,  $\alpha = 1/35$  y parámetro de discretización  $h = 1,0986$ .

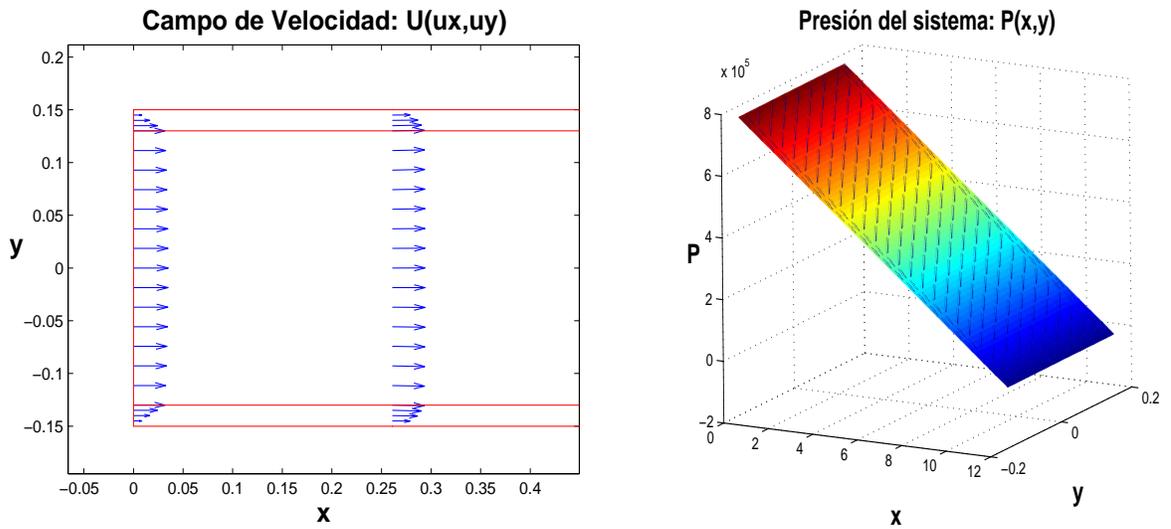


Figura 4.7: Solución discreta de la velocidad  $u_{x,h}$  y de la presión  $p_h$  utilizando 506 elementos,  $\alpha = 1/35$  y parámetro de discretización  $h = 0,5231$ .

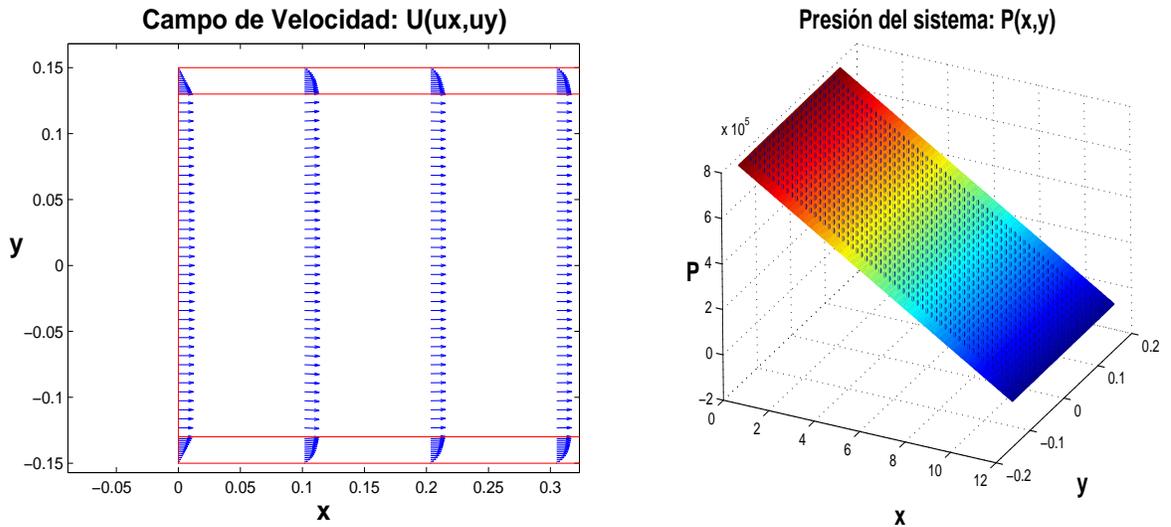


Figura 4.8: Solución discreta de la velocidad  $u_{x,h}$  y de la presión  $p_h$  utilizando 3894 elementos,  $\alpha = 1/35$  y parámetro de discretización  $h = 0,2038$ .

Las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8 evidencian la estabilidad de la solución para la velocidad y presión al variar el parámetro de discretización  $h$ . En cada refinamiento se observa un ligero cambio en el campo de velocidad para el fluido menos viscoso (agua) donde la concavidad del perfil parabólico se acentúa manteniendo las direcciones del campo con componentes solo en la

dirección de  $x$ , de esta forma permanecen iguales las características del esfuerzo cortante, donde el comportamiento lineal de la superficie de presión para cada refinamiento confirma esta aseveración [3] [51].

En la Figura 4.9 se observa el mallado para el primer y segundo refinamiento de la malla de elementos finitos donde se aprecia el carácter regular de los elementos para cada subdominio.

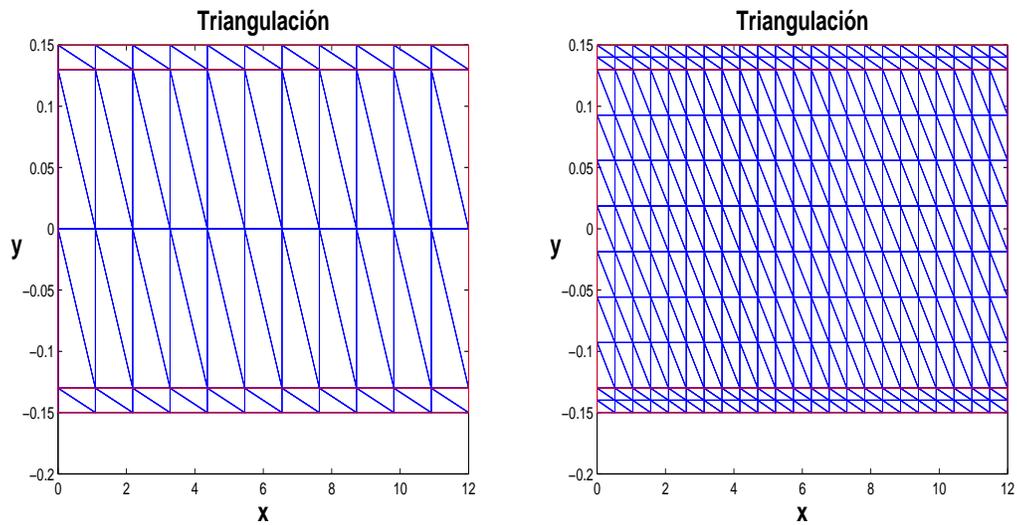


Figura 4.9: Malla de elementos finitos  $T_h$  con 88 y 506 elementos,  $h = 1,0986$  y  $h = 0,5231$  respectivamente.

Los patrones de esparcidad para el sistema de ecuaciones asociado a el problema en estudio para el primer (88 elementos) y último (3894 elementos) refinamiento se muestran en la Figura 4.10, donde queda claro la estructura de bandas dada por la matriz global  $K$ . En este caso  $A_{xy}$  y  $A_{yx}$  no son nulas debido a los términos de derivadas cruzadas que aporta la acción del tensor de tasa de deformación en el problema.

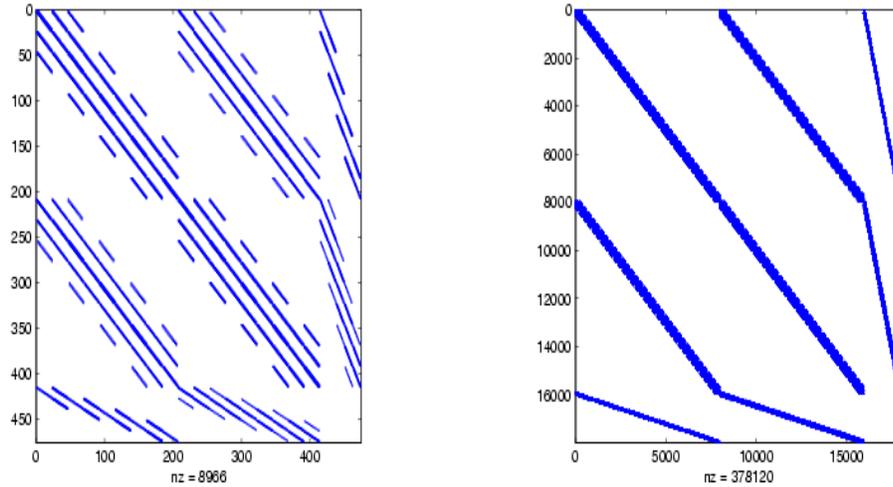


Figura 4.10: Patrones de esparcidad para la matriz  $K$  para el problema resuelto con 88 elementos y 3894 elementos.

Siguiendo con las pruebas numéricas se presentan las Figuras 4.11 y 4.12 que muestran los resultados del campo de velocidad y presión al fijar el mallado en 506 elementos y tomar dos valores para el parámetro de discretización temporal  $\alpha = 1/10$  y  $\alpha = 1/1000$ , que con la Figura 4.7 ( $\alpha = 1/35$  y 506 elementos) visualiza la comparación de la solución numérica al variar este parámetro. Estos resultados muestran una inestabilidad de la solución respecto a  $\alpha$  dado que la tendencia parabólica del perfil de velocidad para el agua se distorsiona y el orden de magnitud en la presión se altera. Esto sugiere que el método de elementos finitos usando el elemento de Taylor-Hood para una malla regular respecto al espacio es sensible frente a cambios en el parámetro  $\alpha$ . Por lo tanto, queda abierto el problema del estudio de estabilidad uniforme y del error para corroborar los resultados de manera teórica.

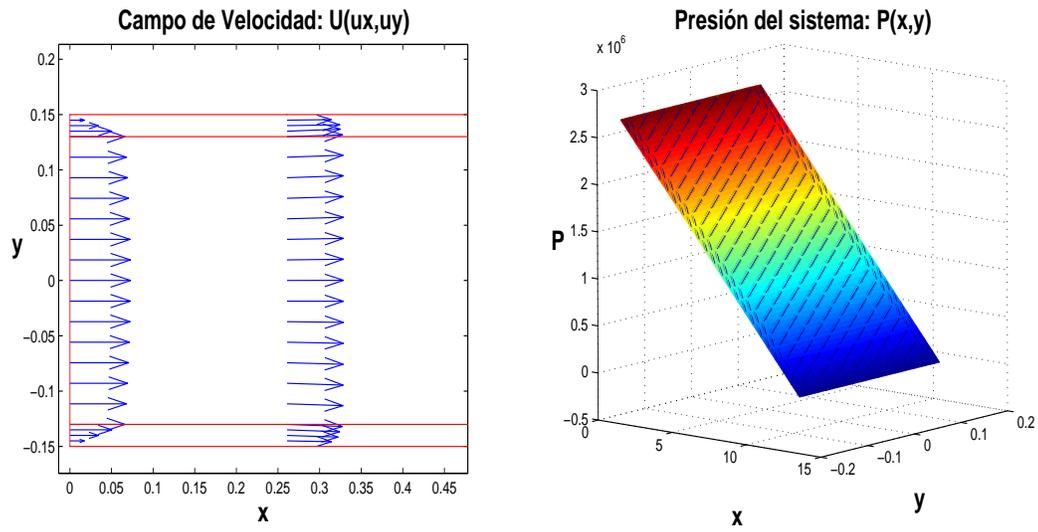


Figura 4.11: Solución discreta de la velocidad  $u_{x,h}$  y de la presión  $p_h$  utilizando 506 elementos,  $\alpha = 1/10$  y parámetro de discretización  $h = 0,5231$

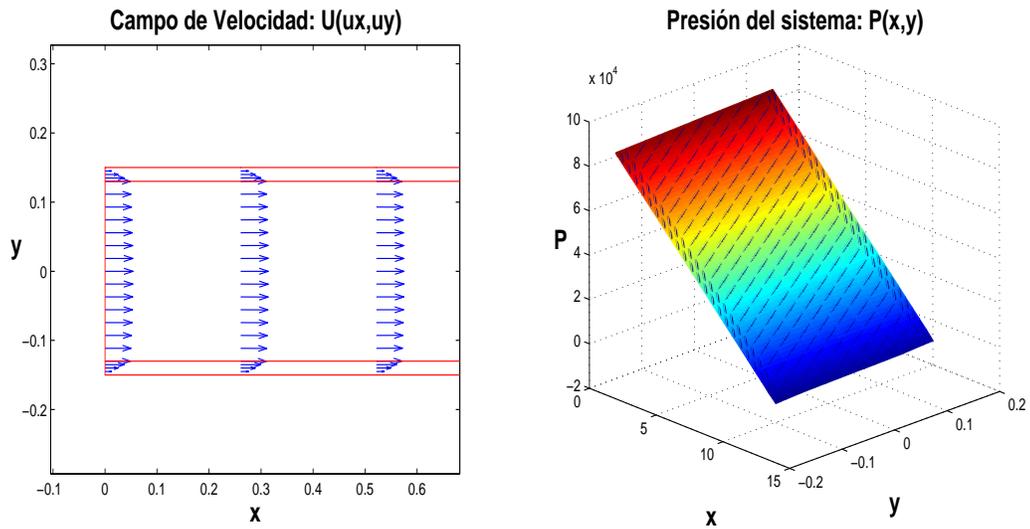


Figura 4.12: Solución discreta de la velocidad  $u_{x,h}$  y de la presión  $p_h$  utilizando 506 elementos,  $\alpha = 1/1000$  y parámetro de discretización  $h = 0,5231$

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se implementó el método de los elementos finitos mixtos para obtener una solución aproximada al problema de *Stokes Generalizado* que modela el flujo de dos fluidos no miscibles (agua y petróleo) e incompresibles en una sección de tubería horizontal representada por un dominio bidimensional. El sistema *Stokes Generalizado* se obtuvo al discretizar en un paso del tiempo las ecuaciones de *Navier Stokes* con condiciones de frontera no estándar. Para aproximar el problema de *Stokes Generalizado* se utilizó una formulación variacional equivalente tomada del trabajo de *Angulo y colaboradores* [26] sobre los espacios *infinito-dimensionales* adecuados tanto para el campo de velocidad como para la presión. La formulación variacional se discretizó mediante el método propuesto por Galerkin [27] y se obtuvo un sistema de ecuaciones lineales equivalente al problema variacional.

El sistema tipo Galerkin, se desacopló siguiendo la propuesta de *Silvester y colaboradores* [42] y posteriormente se planteó la solución través del método de los elementos finitos utilizando el elemento conforme de Taylor-Hood. La solución aproximada del problema se visualizó gracias a la implementación computacional del MEF de Taylor-Hood antes mencionado. Se obtuvieron gráficos para el campo de velocidad y para la presión mediante corridas experimentales de un código computacional adecuado al mismo. Se realizaron corridas para varios refinamientos de la malla de elementos finitos pudiéndose observar el comportamiento físico del campo de

velocidad y de la presión, cuyos resultados fueron aceptables. Estos resultados no pudieron ser discutidos de forma precisa debido al desconocimiento de la solución analítica para el problema, por lo cual, se recomienda en trabajos posteriores realizar estudios experimentales para tal fin.

Además, se realizaron corridas experimentales fijando la malla de elementos finitos y variando el parámetro de discretización temporal observándose cierta inestabilidad en las soluciones. Esto sugiere que el método de elementos finitos usando el elemento de Taylor-Hood para una malla regular respecto al espacio es sensible frente a cambios en el parámetro de discretización temporal. Por lo tanto, quedó abierto el problema del estudio de estabilidad uniforme y del error para corroborar los resultados de manera teórica.

La implementación del método de los elementos finitos comprobó ser una herramienta poderosa para ser utilizado en problemas como éste donde la no linealidad del sistema de EDPs no permite utilizar métodos convencionales.

# Bibliografía

- [1] D. D. JOSEPH AND Y. RENARDY, Fundamentals of two-fluid dynamics, Part II Lubricated transport, *Drops and Miscible Fluids*, Springer, New York, (1993).
- [2] D. D. JOSEPH, R. BAI, K. P. CHEN AND Y. RENARDY, Core-anular flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **29**, 65 (1999).
- [3] R. BIRD, W. STEWART Y E. LIGHTFOOT, Fenómenos de Transporte, 2a. Edición, México, Limusa Wiley, (2006).
- [4] V. GIRAULT AND P. RAVIART, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, *Springer Series in Computational Mathematics*, Vol. 5, Springer-Verlag, New York, (1986).
- [5] A. J. CHORIN, Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, **22**, 745-762, (1968).
- [6] S. LEVY, Structural analysis and influence coefficients for delta wings, *J. Aeronaut. Sci.*, **20**, (1953).
- [7] J. H. ARGYRIS AND S. KELSEY, Energy Theorem and Structural Analysis. Butterworths, London, 3rd edition, (1967).
- [8] J. T. ODEN, *Finite Elements: An Introduction*, vol II: Finite Element Methods , North Holland, Amsterdam, (1991).

- [9] M. J. TURNER, R. W. CLOUGH, H. C. MARTIN AND L. J. TOPP, Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. Aero. Sci.*, **23**, 805-823, (1956).
- [10] R. W. CLOUGH, The finite element method in plane stress analysis. *On Proc 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, PA, (1960).
- [11] J. S. PRZEMIENIECKI, R. M. BADER, W. F. BOZICH, J. R. JOHNSON AND W. J. MYKYTOW, editors. *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Dayton, Ohio, Wright-Patterson AFB, (1966).
- [12] J. T. ODEN, A general theory of finite elements, Part II: Applications. *Internat. J. Numer. Methods Engrg*, **1(2)**, 305-326, (1969).
- [13] J. HADAMARD, *Le probleme de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, MSM, Hermann, Paris, (1932).
- [14] M. W. JOHNSON JR. AND R. W. MCLAY, Convergence of the finite element method in the theory of elasticity, *J. Appl. Mech. E*, **35**, 274-278, (1968).
- [15] M. ZLÁMAL, On the finite element method. *Numer. Math*, **12**, 394-409, (1968).
- [16] P. G. CIARLET, An  $\mathcal{O}(h^2)$  method for non-smooth boundary-value problem. *Aequationes Math*, **2**, 39-49, (1968).
- [17] I. BABUŠKA AND A. K. AZIZ, Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method. In A.K. Aziz, editors, *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, (1972).
- [18] J. NEČAS, Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **16**, 305-326, (1962).

- [19] P. G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, volumen II: Finite Element Methods, chapter 2, North Holland, Amsterdam, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, editors, Handbook of Numerical Analysis, (1991).
- [20] S. C. BRENNER AND L. R. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer, New York, (1994).
- [21] O. PIRONNEAU, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, Paris, (1983).
- [22] P. A. RAVIART ET J. M. THOMAS, *Introduction a l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, (1983).
- [23] B. MAURY, *Flujo de Dos Fases*, Avance del Proyecto ECOS-Nord-V00M04, UCV-CCT, Caracas-Venezuela, (2002).
- [24] V. GIRAULT, H. LÓPEZ AND B. MAURY, *One time-step finite element discretization of the equation of motion of two-fluid flows*, Numerical Methods for Differential Equations, **22**. 3 (2006), pp. 680-707.
- [25] C. TAYLOR, P. HOOD, *A numerical solution of the Navier - Stokes equations using the finite element technique*. Computers and Fluids, 1:73-100, (1973).
- [26] W. ANGULO Y H. LÓPEZ, *Formulación variacional y análisis de un modelo no axisimétrico en 2-D para un flujo bifásico agua-petróleo*, *Divulgaciones Matemáticas*, Edición especial dedicada a los 30 años del *Postgrado de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV*, Caracas-Venezuela, (por aparecer) (2006).
- [27] B. G. GALERKIN, *Series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates*, Eng. Bull, Vestn. Inzh. Tech-Russian. **19** (1915), 897-908.
- [28] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed Hybrid Finite Element Methods*, in Springer Series in Computational Mathematics 15, Springer-Verlag, New York, Berlin Heidelberg, London, Paris, Hong Kong, Barcelona, (1991).

- [29] W. ANGULO ET V. GIRAULT, *Une méthode d'élément fini non-conforme pour l'écoulement diphasique eau-pétrole lourd dans une tuyau horizontale*, Rapport d'avance du Projet ECOS-Nord-V00M04, UPMC-Paris 6-Laboratoire Jaques-Louis Lions, Paris-Francia, (2006).
- [30] C. TRUESDELL AND K. R. RAJAGOPAL, *An Introduction to the Mechanics of Fluids*, Birkhauser, Boston, (2000).
- [31] D. EDWARDS, H. BRENNER AND D. WASAN, *Interfacial Transport Processes and Rheology*, Butterworth-Heinemann, Boston, (1991).
- [32] G. K. BATCHELOR, *An introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, (1967).
- [33] J. M. DELHAYE, *Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation*, Int. J. Multiphase Flow, **1** (1974), pp 395-409.
- [34] I. V. DENISOVA, *Problem of the motion of two viscous incompressible fluids separated by a closed free interface*, Acta Appl. Math. **37-1** (1994), pp 31-40.
- [35] A. BERMUDEZ AND J. DURANY, *Application of characteristics method with variable time step to steady convection-diffusion problems*, North-Holland, (1987).
- [36] M. AMARA, EL DABAGHI Y C. KADA KLOUCHA. *Écoulement incompressible à surface libre*, Informe de INRIA Rocquencourt, (2000).
- [37] M. ABDELWAHED, M. AMARA, F. DABAGHI AND M. HASSINE, *A Numerical Modeling of a two phase flow for water Eutrophication Problems*, Proceeding of the European Conference on Computational Methods in Applied Sciences, Ecomas (2000), 18 pages, Spain 200.
- [38] R. GLOWINSKI, *Numerical Methods for Fluids (Part 3)*, Handbook of Numerical Analysis, P. G. Ciarlet and J. L. Lions-Editors, North-Holland, Amsterdam, (2003).

- [39] V. GIRAULT, *Problemes variationnels et méthodes d'éléments finis*, Notes de cours DEA de l'Université Paris VI-Pierre et Marie Curie, (2001).
- [40] M. GUNZBURGER, *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows. A guide to Theory, Practice and Algorithms*, Computer Science and Scientific Computing, Academic Press, Boston, MA, (1989).
- [41] O. AXELSSON AND V. A. BARKER, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Theory and Computation*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, Orlando, MA, (1984).
- [42] D. J. SILVESTER, H. C. ELMA ABD A. J. WATHEN, *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*, Oxford-University Press, Oxford, New York, (2005).
- [43] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, (1980).
- [44] V. GIRAULT, *Approximations variationnelles des E.D.P.*, Cours du DEA, Laboratoire Jacques-Louis Lions de La Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, (2006)
- [45] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, (1967).
- [46] P.-A. RAVIART ET J.-M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Collection "Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise", Masson, Paris, (1989).
- [47] A. ERN ET J-L. GUERMOND, *Eléments finis*, Théorie, applications et mise en oeuvre, Springer-Smai, Mathématiques & Applications 36, Paris (2002).

- [48] A. BENSAXHRIA, Y. PEYSSON AND G. ANTONINI, *Experimental Study of the Pipeline Lubrication for Heavy Oil Transport*, Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP, Vol. 59 , No. 5, pp. 523-533 (2004).
- [49] Y. HU, HUANG Z., *Coaxial liquid-liquid flows in tubes with limited length*, Journal of Zhejiang University SCIENCE A (2005).
- [50] A. SANIERE, I. HÉNAUT AND J.F. ARGILLIER, *Pipeline Transportation of Heavy Oils, a Strategic, Economic and Technological Challenge*, Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP, Vol. 59, No. 5, pp. 455-466 (2004).
- [51] J. WELTY, C. WICKS Y R. WILSON, *Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa*, 2a ed. , México, Limusa-Wiley (2004).
- [52] W. ANGULO ET V. GIRAULT, *Discrétisation variationnelle du problème de l'écoulement biphásique eau-petrole lourd dans un tuyau*, Publications de séjour du le Laboratoire Jaques-Louis Lions, Paris-France, (2005).
- [53] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*, Collection “Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise”, Masson, Paris, (1983).
- [54] HUGHES T. J. R., *The finite element method.*, DOVER, (2000).
- [55] B. RAMASWAMY AND M. KAWAHARA, *Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface flow*, Int. J. Numer. Methods Fluids, **7** (1987), pp. 1053-1047.
- [56] M. SOULI AND J. P. ZOLESIO, *Arbitrary lagrangian-eulerian and free surface methods in fluid mechanics*, Comut. Methods Appl. Mech. Engrg., **191** (2001), pp. 451-466.
- [57] B. MAURY, *Characteristics ALE Method for the 3D Navier-Stokes Equations with a Free Surface*, Int. Journal of Comp. Fluid Dyn. **6** (1996), pp.175-188.

[58] L. LANDAU ET E. LIFCHITZ, *Mécaniques des Fluides*, MIR Moscou, (1955).