UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
LISANDRO ALVARADO

DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROPIEDADES DE LOS ANILLOS DE DIVISIÓN CON INVOLUCIÓN GENERAL

POR: DENNYS RAMOS

BARQUISIMETO, MAYO 2010

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
LISANDRO ALVARADO

DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROPIEDADES DE LOS ANILLOS DE DIVISIÓN CON INVOLUCIÓN GENERAL

TRABAJO DE ASCENSO PARA OPTAR A LA CATEGORÍA DE AGREGADO

POR: DENNYS RAMOS

BARQUISIMETO, MAYO 2010

Índice general

Dedicatoria

A mi Señor, **Jesús**, quien me dio la fe, la fortaleza, la salud y la esperanza para terminar este trabajo.

A mi adorada hija **Lesly Ramos**, quien me prestó el tiempo que le pertenecía para terminar este trabajo y me motivó siempre con su sonrisa. Realmente ella me llena por dentro para conseguir un equilibrio que me permita dar el máximo de mi.

A mi esposa, **Deyanira Álvarez de Ramos**, a ella especialmente le dedico este trabajo. Por su amor, por su cariño, por su paciencia, por su estímulo y su apoyo constante. Porque su presencia llena de felicidad y dicha todos los días de mi existir. Ella es lo mejor que nunca me ha podido pasar.

A mis padres, **Gregoria y Fidel** quienes me enseñaron desde pequeño a luchar para alcanzar mis metas. Por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien.

A mis suegros **Pastor Álvarez y Martha Jiménez**, y a mi cuñada **Martha Álvarez**, por su comprensión y ayuda en momentos malos y menos malos. Me han ayudado en la adversidad y sin pedir nunca nada a cambio.

A todos aquellos que nunca dudaron que lograría este triunfo, muchas gracias de todo corazón.

Agradecimientos

Este trabajo, si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación por parte del autor, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que a continuación citaré:

Primero y antes que nada, dar gracias al **Dios Vivo**, por su infinito amor, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por ser una gran fuente de inspiración en la resolución de varios problemas.

A **Nicolás Arias** quien me brindó sus consejos y orientación para la realización de este trabajo.

A **Cristian Rojas**, mi amigo y compañero quien me bridó su apoyo al enviarme varias referencias que necesité para entender varios problemas de este trabajo.

A **mi familia** porque a pesar de no saber nada de Álgebra Abstracta, se que se preocupan por mi bienestar.

A **Deyanira Álvarez de Ramos**, mi porción de cielo en este mundo, que me brindó su apoyo y comprensión.

A **Karmela**, por ayudarme en la realización de las gráficas que aparecen en este trabajo.

A todos aquellos que participaron directa o indirectamente en la elaboración de este trabajo. Muchas gracias de todo corazón.

Introducción

El objetivo primordial de esta investigación es dar a conocer las nuevas generalizaciones que se han producido en los anillos con involución y por ende también, las nuevas generalizaciones que se producen en una valuación. La teoría de valuaciones pueden ser vista como una rama del álgebra topológica. En mi Trabajo de Grado [8] expongo algunas propiedades de los anillos con involuciones. Idris [4] expone una generalización de la noción de una involución, la cual se refiere como una ε-involución. Idris [4] define como una ε-involución en un anillo de división D como un antiautomorfismo, tal que $(x^*)^* = \varepsilon^{-1}x\varepsilon$ y en donde $\varepsilon^*\varepsilon = \varepsilon\varepsilon^* = 1$. Se establecerán propiedades y hechos básico referente a los anillos división considerados. También, se probará que si todo elemento simétrico en un anillo de división D con una ε-involución $*$ son centrales, entonces D es un campo. En [1], una condición necesaria y suficiente es dada para la extensión de una valuación abeliana de un anillo de división en un anillo de división. Se resolverá en este trabajo una ε-versión de este problema, donde la valuaciones son remplazadas con las ε-valuaciones. Mi aporte es estudiar que propiedades se conservan en el caso de las ε-involuciones generales con respecto a las involuciones usuales, para esto me enfocare en los elementos simétricos y semisimétricos, estableciendo propiedades generales, todo esto lo verán en el capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

La teoría de grupos, anillos, grupos ordenados, valuaciones en un anillo, y terminología que vamos a utilizar para el desarrollo de este trabajo estarán basadas en los libros de Lang [6], Pierre [7] , Knus [5], Schilling [9] y Herstein [2]. Vamos a considerar siempre que D es un anillo de división con centro $Z(D)$. Para un subconjunto A del anillo D el conjunto $A^{\times}$ representa a todos los elementos de A excepto al 0, esto es $A^{\times} = A - \{0\}$.

Los anillos con involución han sido estudiados intensamente, especialmente en aplicaciones tales como las Algebras de Lie, las Algebras de Jordan, en los Anillos de Operadores, en la Teoría de C^*-Algebras, en las Formas Cuadrácticas, en Formas Hermitianas, en la Geometría Algebráica Real no Conmutativa, en los Espacios de Signos Abstractos y en los Conjuntos Constructibles de Generación Minimal. Recientemente las Categorías de Anillos con Involución han sido tomadas bajo investigación. Es por esto que esta generalización también será estudiada y tendrá muchas aplicaciones.

1.1. Anillo de división con ε-involución

Antes de continuar recordemos lo que se define como una involución.

Definición 1.1.1 *Una **involución** es una función $x \mapsto x^*$ en un anillo R tal que:*

1. $(x+y)^* = x^* + y^*$.
2. $(xy)^* = y^*x^*$.
3. $(x^*)^* = x$

Para mayor información sobre las propiedades de las involución pueden ver [8] y [5].

Idris [4], modifica la parte (3) de la Definición 1.1.1, esta queda como sigue:

Definición 1.1.2 [4] *Una ε-**involución** es una función $x \mapsto x^*$ en el anillo de división D tal que:*

1. $(x+y)^* = x^* + y^*$.

2. $(xy)^* = y^* x^*$.

3. $(x^*)^* = \varepsilon^{-1} x \varepsilon$

donde $\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon^*\varepsilon = 1$, es decir $\varepsilon^* = \varepsilon^{-1}$.

Una función $*$ en un anillo de división D que cumpla las condiciones (1) y (2), es llamada un **antiautomorfismo** en D.

Cuando $\varepsilon = 1$, entonces $*$ define una involución usual. Más generalmente, si ε está en el centro de D, entonces $*$ es una involución usual.

Ejemplo 1.1.1 [4] *Sea $D = \mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y multiplicación usuales. Un antiautomorfismo en $\mathbb{C}$ es $*$ dada por $(x+yi)^* = x - yi$, la conjugada. $*$ define una ε-involución cuando la norma de ε es 1.*

En efecto,

$$\begin{aligned} ((x+yi)+(a+bi))^* &= ((x+a)+(y+b)i)^* \\ &= (x+a)-(y+b)i \\ &= (a-bi)+(x-yi) \\ &= (a+bi)^* + (x+yi)^* \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} ((x+yi)(a+bi))^* &= (xa + xbi + yai - yb)^* \\ &= (xa - yb + (xb+ya)i)^* \\ &= xa - yb - (xb+ya)i \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} (a+bi)^*(x+yi)^* &= (a-bi)(x-yi) \\ &= ax - ayi - bxi - by \\ &= ax - by - (ay+bx)i \\ &= xa - yb - (xb+ya)i \end{aligned}$$

Por tanto,$((x+yi)(a+bi))^* = (a+bi)^*(x+yi)^*$. En consecuencia, $*$ define un antiautomorfismo. Haciendo $\varepsilon = a+bi$ y aplicando la definición de $*$, obtenemos:

$$\varepsilon\varepsilon^* = 1 \Rightarrow (a+bi)(a-bi) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \parallel \varepsilon \parallel = 1.$$

Ejemplo 1.1.2 [4] *Sea* $D = \mathbb{H}$ *el conjunto de los cuaterniones reales, recordar que*

$$H = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

donde, $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj \quad y \quad ki = j = -ik$. *La aplicación* $*$ *definida en* D *por* $(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* = a_0 - a_1 i - a_3 j + a_2 k$. *Define una* ε*-involución, donde* $\varepsilon = i$.

En efecto, sean $x, y \in \mathbb{H}$ donde $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $y = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$. Primero veamos que $*$ define un antiautomorfismo en $\mathbb{H}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(x+y)^* &= ((a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k))^* \\
&= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k)^* \\
&= (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)i - (a_3 + b_3)j + (a_2 + b_2)k \\
&= ((a_0 - a_1 i - a_3 j + a_2 k) + (b_0 - b_1 i - b_3 j + b_2 k) \\
&= x^* + y^*
\end{aligned}$$

Probemos que $(xy)^* = y^* x^*$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(xy)^* &= ((a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k))^* \\
&= ((a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i \\
&\quad + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1)j + (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0)k)^* \\
&= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) - (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i \\
&\quad - (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0)j + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1)k
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
y^* x^* &= (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)^* (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* \\
&= (b_0 - b_1 i - b_3 j + b_2 k)(a_0 - a_1 i - a_3 j + a_2 k) \\
&= (b_0 a_0 - b_1 a_1 - b_2 a_2 - b_3 a_3) + (-b_0 a_1 - b_1 a_0 - b_3 a_2 + b_2 a_3)i \\
&\quad + (-b_0 a_3 + b_1 a_2 - b_3 a_0 - b_2 a_1)j + (b_0 a_2 + b_1 a_3 - b_3 a_1 + b_2 a_0)k \\
&= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (-a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_2 b_3 + a_3 b_2)i \\
&\quad + (-a_0 b_3 - a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_0)j + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1)k \\
&= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) - (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i \\
&\quad - (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0)j + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1)k \\
&= (xy)^*
\end{aligned}$$

Como $(x+y)^* = x^* + y^*$ y $(xy)^* = y^* x^*$, se tiene que $*$ define un antiautomorfismo en $\mathbb{H}$. También se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(x^*)^* &= ((a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^*)^* \\
&= (a_0 - a_1 i - a_3 j + a_2 k)^* \\
&= a_0 + a_1 i - a_2 j - a_3 k
\end{aligned}$$

Y además, tomando $\varepsilon = i$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1} x \varepsilon &= i^{-1} x i \\
&= (-i)(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) i \\
&= (-a_0 i + a_1 - a_2 k + a_3 j) i \\
&= a_0 + a_1 i - a_2 j - a_3 k \\
&= (x^*)^*
\end{aligned}$$

Luego, para toda $x \in \mathbb{H}$ se tiene que $(x^*)^* = \varepsilon^{-1} x \varepsilon$. Por tanto, hemos probado que $*$ define una ε-involución en $\mathbb{H}$ donde $\varepsilon = i$.

1.2. Elemento simétrico y semisimétrico. Traza y semitraza

Definición 1.2.1 [4] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$.*

1. *Un elemento $x \in D$ es llamado* ***elemento simétrico*** *si $\varepsilon x^* = x$.*

2. *Un elemento $x \in D$ es llamado* ***elemento semisimétrico*** *si se cumple que $\varepsilon x^* = -x$.*

3. *Para todo elemento $x \in D$, llamaremos* ***traza*** *de x al elemento $x + \varepsilon x^*$.*

4. *Para todo elemento $x \in D$, llamaremos* ***semitraza*** *de x al elemento $x - \varepsilon x^*$.*

Nótese que la traza es un elemento simétrico, en efecto: sea $a = x + \varepsilon x^*$, entonces $\varepsilon a^* = \varepsilon(x + \varepsilon x^*)^* = \varepsilon(x^* + (x^*)^* \varepsilon^*) = \varepsilon(x^* + \varepsilon^{-1} x \varepsilon \varepsilon^*) = \varepsilon(x^* + \varepsilon^{-1} x) = \varepsilon x^* + x = x + \varepsilon x^* = a$. De igual forma se puede probar que toda semitraza es semisimétrica.

Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. El conjunto de todos los elementos simétricos de D es denotado por S_ε, el conjunto de todos los elementos semisimétricos es denotado por SK_ε, el conjunto de todas las trazas es denotada por T_ε y el conjunto de todas las semitrazas es denotada por ST_ε. Si no hay lugar a confunsión, también será denotado el conjunto de los elementos simétricos, semisimétricos, trazas y semitrazas por S, SK, T, ST respectivamente.

Ejemplo 1.2.1 [*4*] *Sea $*$ definida en el cojunto de los cuarteniones reales $\mathbb{H}$ como en el Ejemplo 1.1.2. Entonces $S = \mathbb{R}(1+i)$, $SK = \mathbb{R}(1-i) + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, $T = \mathbb{R}(1+i)$ y $ST = \mathbb{R}(1-i) + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.*

En efecto, sea $x \in \mathbb{H}$ donde $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$. Si x es simétrico, entonces $\varepsilon x^* = x$. De aquí que:

$$\begin{aligned}
& i(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \\
\Longrightarrow\ & i(a_0 - a_1 i - a_3 j + a_2 k) \ = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \\
\Longrightarrow\ & a_0 i + a_1 - a_3 k - a_2 j \qquad = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \\
\Longrightarrow\ & a_0 = a_1, -a_3 = a_3, -a_2 = a_2 \\
\Longrightarrow\ & a_0 = a_1, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $S = \{a_0 + a_0 i \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \{a_0(1+i) \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1+i)$.

Si suponemos ahora que x es antisimétrico, entonces $\varepsilon x^* = -x$. De aquí que:

$$\begin{aligned}
& i(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* = -a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \\
\Longrightarrow\ & i(a_0 - a_1 i - a_3 j + a_2 k) \ \ = -a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \\
\Longrightarrow\ & a_0 i + a_1 - a_3 k - a_2 j \qquad = -a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \\
\Longrightarrow\ & a_0 = -a_1, -a_3 = -a_3, -a_2 = -a_2 \\
\Longrightarrow\ & a_0 = -a_1, \quad a_3 = a_3, \quad a_2 = a_2
\end{aligned}$$

Por tanto, $SK = \{a_0 - a_0 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} = \{a_0(1-i) + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1-i) + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

Encontremos el conjunto de la traza de D, sea $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x + \varepsilon x^* &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + i(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* \\
&= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + i(a_0 - a_1 i - a_3 j + a_2 k) \\
&= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (a_0 i + a_1 - a_3 k - a_2 j) \\
&= (a_0 + a_1) + (a_0 + a_1) i \\
&= (a_0 + a_1)(1 + i)
\end{aligned}$$

Como $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ son arbitrarios, concluimos que $T = \mathbb{R}(1+i)$.

Encontremos ahora el conjunto de la semitraza de D, sea $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$. Entonces

$$\begin{aligned} x - \varepsilon x^* &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) - i(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* \\ &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) - i(a_0 - a_1 i - a_3 j + a_2 k) \\ &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) - a_0 i - a_1 + a_3 k + a_2 j) \\ &= (a_0 - a_1) - (a_0 - a_1)i + 2a_2 j + 2a_3 k \\ &= (a_0 - a_1)(1 - i) + 2a_2 j + 2a_3 k \end{aligned}$$

Como $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ son arbitrarios, concluimos que $ST = \mathbb{R}(1 - i) + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

Ejemplo 1.2.2 [4] *Sea $D = \mathbb{H}$ el conjunto de los cuaterniones reales. La aplicación $*$ definida en D por $(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^\sharp = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$, (la conjugación usual en $\mathbb{H}$). Entonces, $\sharp$ define una involución usual y enconsecuencia define una 1-involución, ($\varepsilon = 1$), donde $S = \mathbb{R}$, $SK = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, $T = \mathbb{R}$ y $ST = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.*

En efecto, sean $x, y \in \mathbb{H}$ donde $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $y = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$. Primero veamos que $*$ define un antiautomorfismo en $\mathbb{H}$

$$\begin{aligned} (x + y)^\sharp &= ((a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k))^\sharp \\ &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k)^\sharp \\ &= (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)i - (a_2 + b_2)j - (a_3 + b_3)k \\ &= ((a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) + (b_0 - b_1 i - b_2 j - b_3 k) \\ &= x^\sharp + y^\sharp \end{aligned}$$

Probemos que $(xy)^\sharp = y^\sharp x^\sharp$. En efecto:

$$\begin{aligned} (xy)^\sharp &= ((a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k))^\sharp \\ &= ((a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i \\ &\quad + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1)j + (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0)k)^\sharp \\ &= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) - (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i \\ &\quad - (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1)j - (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0)k \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
y^\sharp x^\sharp &= (b_0+b_1i+b_2j+b_3k)^\sharp(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)^\sharp \\
&= (b_0-b_1i-b_2j-b_3k)(a_0-a_1i-a_2j-a_3k) \\
&= (b_0a_0-b_1a_1-b_2a_2-b_3a_3)+(-b_0a_1-b_1a_0+b_2a_3-b_3a_2)i \\
&\quad +(-b_0a_2-b_1a_3-b_2a_0+b_3a_1)j+(-b_0a_3+b_1a_2-b_2a_1-b_3a_0)k \\
&= (b_0a_0-b_1a_1-b_2a_2-b_3a_3)-(b_0a_1+b_1a_0-b_2a_3+b_3a_2)i \\
&\quad -(b_0a_2+b_1a_3+b_2a_0-b_3a_1)j-(b_0a_3-b_1a_2+b_2a_1+b_3a_0)k \\
&= (a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)-(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)i \\
&\quad -(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1)j-(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0)k \\
&= (xy)^\sharp
\end{aligned}$$

Por tanto, $(xy)^\sharp = y^\sharp x^\sharp$, de esta manera hemos probado que $\sharp$ define un antiautomorfismo en $\mathbb{H}$. También se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(x^\sharp)^\sharp &= ((a_0+a_1i+a_2j+a_3k)^\sharp)^\sharp \\
&= (a_0-a_1i-a_2j-a_3k)^\sharp \\
&= a_0+a_1i+a_2j+a_3k \\
&= x
\end{aligned}$$

Luego, para toda $x \in \mathbb{H}$ se tiene que $(x^\sharp)^\sharp = x$. Por tanto, hemos probado que $\sharp$ define una involución usual, y en consecuencia $\sharp$ define una 1-involución en $\mathbb{H}$.

Sea $x \in \mathbb{H}$ donde $x = a_0+a_1i+a_2j+a_3k$. Si x es simétrico, entonces $x^\sharp = x$. De aquí que:

$$\begin{aligned}
&(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)^\sharp = a_0+a_1i+a_2j+a_3k \\
&\Longrightarrow a_0-a_1i-a_2j-a_3k \quad = a_0+a_1i+a_2j+a_3k \\
&\Longrightarrow a_0=a_0, -a_1=a_1, -a_2=a_2, -a_3=a_3 \\
&\Longrightarrow a_0=a_0, \quad a_1=0, \quad a_2=0, \quad a_3=0
\end{aligned}$$

Por tanto, $S = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Si suponemos ahora que x es antisimétrico, entonces $x^\sharp = -x$. De aquí que:

$$\begin{aligned}
&(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)^\sharp = -a_0-a_1i-a_2j-a_3k \\
&\Longrightarrow a_0-a_1i-a_2j-a_3k \quad = -a_0-a_1i-a_2j-a_3k \\
&\Longrightarrow a_0=-a_0, -a_1=-a_1, -a_2=-a_2, -a_3=-a_3 \\
&\Longrightarrow a_0=0, \quad a_1=a_1, \quad a_2=a_2, \quad a_3=a_3
\end{aligned}$$

Por tanto, $SK = \{a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

Calculemos la traza de $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} x + x^\sharp &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) \\ &= 2a_0 \ \text{ (donde } a_0 \text{ es un número real arbitrario)} \end{aligned}$$

Luego, $T = \mathbb{R}$.

Por último calculemos la semitraza de $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} x - x^\sharp &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) - (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) \\ &= 2a_1 i + 2a_2 j + 2a_3 k \ \text{ (donde } a_1, a_2, a_3 \text{ son números reales arbitrarios)} \end{aligned}$$

Por tanto $ST = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.

Proposición 1.2.1 [*4*] *Sea $\mathbb{H}$ el anillo de los cuaterniones reales. Si $*$ define en $\mathbb{H}$ una 1-involución tal que $\mathbb{R} \subset S$, $T \subset \mathbb{R}$ y $xx^* \in \mathbb{R}$, entoces $(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$. Es decir la única 1-involución que satisface estas condiciones es la conjugación en $\mathbb{H}$.*

Demostración:

Como $\mathbb{R} \subset S$, entonces por definición de S tenemos que, si $r \in \mathbb{R}$, entonces:

$$r^* = r \quad (i)$$

Como $T \subset \mathbb{R}$, entonces

$$i + i^*, j + j^*, k + k^* \in \mathbb{R} \quad (ii)$$

Ya que $xx^* \in \mathbb{R}$, entonces

$$ii^*, jj^*, kk^* \in \mathbb{R} \quad (iii)$$

Probemos que $i^* = -i$, $j^* = -j$ y $k^* = -k$. Primero probaremos que, $i^* = -i$, en efecto, por (ii), sea $i + i^* = r_1$, donde $r_1 \in \mathbb{R}$. De aquí obtenemos que $i^* = r_1 - i$ (iv). Por (iii) sea $ii^* = r_2$ (v), donde $r_2 \in \mathbb{R}$. Combinando (iv) y (v) tenemos que $i(r_1 - i) = r_2 \Longrightarrow r_1 i + 1 = r_2$, si suponemos que $r_1 \neq 0$, entonces $i = \frac{r_2 - 1}{r_1} \in \mathbb{R}$, esto es una contradicción. Luego, $r_1 = 0$ y por (iv) tenemos que $i^* = -i$. De igual forma se prueba que $j^* = -j$ y que $k^* = -k$. Sea $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$. Entonces:

$$\begin{aligned} x^* &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* \\ &= a_0^* + (a_1 i)^* + (a_2 j)^* + (a_3 k)^* \\ &= a_0 + i^* a_1^* + j^* a_2^* + k^* a_3^* \\ &= a_0 + (-i)a_1 + (-j)a_2 + (-k)a_3 \\ &= a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \end{aligned}$$

Por tanto, $(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$. ■

Nota 1.2.1 *El conjunto de los cuarteniones reales $\mathbb{H}$ tiene un número considerable de 1-involuciones con $\mathbb{R} \subset S$.*

En efecto, considerando la 1-involución $(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$. Podemos definir las siguientes 1-involuciones como sigue: $x \mapsto u^{-1}x^*u$, donde u es una unidad en $\mathbb{H}$ con $u^* = \pm u$. En efecto, sea $u \in \mathbb{H}$ arbitrario pero fijo, con $u^* = \pm u$ (u existe, un ejemplo de u puede ser $u = i$, $u = j$, $u = k$, entre otros). Sea $\sharp$ definida en $\mathbb{H}$ por $x^\sharp = u^{-1}x^*u$. Primero probemos que $\sharp$ es un antiautomorfismo. Sean $x, y \in \mathbb{H}$. Entonces $(xy)^\sharp = u^{-1}(xy)^*u = u^{-1}y^*x^*u = (u^{-1}y^*u)(u^{-1}x^*u) = y^\sharp x^\sharp$. Por otra parte tenemos que, $(x+y)^\sharp = u^{-1}(x+y)^*u = u^{-1}(x^* + y^*)u = u^{-1}x^*u + u^{-1}y^*u = x^\sharp + y^\sharp$. De esta forma hemos probado que $\sharp$ es un antiautomorfismo en $\mathbb{H}$. Veamos que $\sharp$ define una 1-involución. En efecto,

$$\begin{aligned}
x^{\sharp\sharp} &= (u^{-1}x^*u)^\sharp \\
&= u^{-1}(u^{-1}x^*u)^*u \\
&= u^{-1}(u^*(x^*)^*(u^{-1})^*)u \\
&= u^{-1}(\pm u)(x(\pm u)^{-1})u \\
&= (\pm 1)x(\pm 1) \\
&= x \\
&= 1^{-1}x1
\end{aligned}$$

Luego, $\sharp$ define una 1-involución en $\mathbb{H}$. Sólo falta probar que $\mathbb{R} \subset S$. Sea $r \in \mathbb{R}$, entonces $r^\sharp = u^{-1}r^*u = u^{-1}ru = u^{-1}ur = r$. Por tanto, $\mathbb{R} \subset S$.

Al igual que en el caso de un anillo R con una involución $*$, los conjuntos S, SK, T y ST son subgrupos aditivos de R, esto mismo sucede en el caso de anillo de división con una ε-involución.

Proposición 1.2.2 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Los conjuntos S, SK, T y ST son subgrupos aditivos de D.*

Demostración:

Nótece que todos estos conjuntos no son vacíos ya que tienen como elemento en común al 0. Probemos que S es un subgrupo aditivo de D. Sean $s_1, s_2 \in S$. Entonces:

$$\varepsilon(s_1 - s_2)^* = \varepsilon(s_1^* - s_2^*) = \varepsilon s_1^* - \varepsilon s_2^* = s_1 - s_2$$

Luego, $s_1 - s_2 \in S$ por tanto S es un subgrupo de D. Los otros conjuntos se prueban en forma similar que son subgrupos aditivos de D. ■

1.3. Propiedades de las ε-involución

En la siguiente sección consideramos algunos resultados que se cumplen en un anillo de división D con una ε-involución $*$. Veamos la siguiente proposición.

Proposición 1.3.1 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$.*

1. $0^* = 0$.
2. $(-x)^* = -x^*$ *para todo* $x \in D$.
3. $1^* = 1$.
4. $n^* = n$ *para todo* $n \in Z$.
5. $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$ *para todo* $x \in D^\times$.
6. $1 + \varepsilon$ *es simétrico.*
7. $1 - \varepsilon$ *es semisimétrico.*
8. $n + n\varepsilon$ *es simétrico, para todo* $n \in \mathbb{Z}$.
9. $n - n\varepsilon$ *es semisimétrico, para todo* $n \in \mathbb{Z}$.
10. $(\varepsilon^*)^* = \varepsilon$.
11. *Si* $a \in S$, *entonces* $xax^* \in S$, *para todo* $x \in D$.
12. *Si* $a \in SK$, *entonces* $xax^* \in SK$, *para todo* $x \in D$.

Demostración:
La parte 1., 2., 3., 4. y 5. se prueba en forma similar que en [8]. Probaremos la parte 6. al 12.

6. $\varepsilon(1+\varepsilon)^* = \varepsilon(1^* + \varepsilon^*) = \varepsilon(1 + \varepsilon^*) = \varepsilon 1 + \varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon + 1 = 1 + \varepsilon$.
7. $\varepsilon(1-\varepsilon)^* = \varepsilon(1^* - \varepsilon^*) = \varepsilon(1 - \varepsilon^*) = \varepsilon 1 - \varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon - 1 = -(1-\varepsilon)$.
8. Se prueba usando la parte 6. y el hecho de que S es un grupo aditivo de D.
9. Se prueba usando la parte 7. y el hecho de que SK es un grupo aditivo de D.
10. $(\varepsilon^*)^* = \varepsilon^{-1}\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$.
11. Sea $a \in S$ arbitrario pero fijo. Si $x \in D$, entonces $\varepsilon(xax^*)^* = \varepsilon((x^*)^* a^* x^*) = \varepsilon(\varepsilon^{-1} x \varepsilon a^* x^*) = xax^*$, por tanto $xax^* \in S$ para todo $x \in D$.

12. Se prueba en forma similar que en 11. ■

Proposición 1.3.2 [4] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si $car(D) \neq 2$, entonces:*

1. *Para cada $x \in D$, $x = s + k$ donde s es un elemento simétrico y k es un elemento semisimétrico.*

2. *$T = S$.*

3. *S y K son preservados bajo la traslación $a \mapsto xax^*$, $x \in D$.*

Demostración:
Supongamos que $car(D) \neq 2$.

1. Si $x \in D$, entonces $x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon x^*) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon x^*) = s + k$ donde $s = \frac{1}{2}(x + \varepsilon x^*)$ es un elemento simétrico y $k = \frac{1}{2}(x - \varepsilon x^*)$ es un elemento semisimétrico.

2. Como toda traza es simétrica, tenemos que $T \subset S$. Si $s \in S$, entonces $s = \frac{1}{2}s + \varepsilon(\frac{1}{2}s)^*$, luego $S \subset T$. Por tanto, $T = S$.

3. Sea $s \in S$. Entonces por la Proposición 1.3.1 parte 11 tenemos que xax^* es simétrico. Por tanto la aplicación $a \mapsto xax^*$, preserva los elementos simétricos. Similarmente, usando la Proposición 1.3.1 parte 12 se prueba que $a \mapsto xax^*$, preserva los elementos semisimétricos. ■

Puede ocurrir que $T = S$ aún cuando $car(D) = 2$, esto lo veremos en la siguiente proposición:

Proposición 1.3.3 [4] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Sea $car(D) = 2$. Si existe un elemento z en el centro de D con $z \neq z^*$, entonces $T = S$.*

Demostración:
Sea $x \in D$. Como $car(D) = 2$, entonces $x + x = 0$ y esto implica que $x = -x$. Ahora probemos que si $d \in Z(D)$, entonces $d^* \in Z(D)$. Sea $x \in D$. Entonces:

$$\begin{aligned}
x^*d = dx^* &\implies (x^*d)^* = (dx^*)^* \\
&\implies d^*(x^*)^* = (x^*)^*d^* \\
&\implies d^*\varepsilon^{-1}x\varepsilon = \varepsilon^{-1}x\varepsilon d^* \\
&\implies d^*\varepsilon^*x\varepsilon = \varepsilon^*x\varepsilon d^* \\
&\implies (\varepsilon d)^*x\varepsilon = \varepsilon^*x(d\varepsilon^*)^* \\
&\implies (d\varepsilon)^*x\varepsilon = \varepsilon^*x(\varepsilon^*d)^* \\
&\implies \varepsilon^*d^*x\varepsilon = \varepsilon^*xd^*\varepsilon \\
&\implies d^*x = xd^*
\end{aligned}$$

Puesto que $x \in D$ es arbitrario, se concluye que $d^* \in Z(D)$. Ahora bien, por hipótesis $z^* \neq z$, de aquí que $z + z^* \neq 0$ (recordar que $z = -z$). También se tiene que, $(z + z^*)^* = z^* + (z^*)^* = z^* + \varepsilon^{-1} z\varepsilon = z^* + \varepsilon^{-1}\varepsilon z = z + z^*$. Como $z, z^* \in Z(D)$, entonces $z + z^* \in Z(D)$. Sea $s \in S$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{sz}{z+z^*} + \varepsilon(\frac{sz}{z+z^*})^* &= \frac{sz}{z+z^*} + \varepsilon\frac{z^*s^*}{z+z^*} \\
&= \frac{sz}{z+z^*} + \frac{\varepsilon z^*s^*}{z+z^*} \\
&= \frac{sz}{z+z^*} + \frac{z^*\varepsilon s^*}{z+z^*} \\
&= \frac{sz}{z+z^*} + \frac{z^*s}{z+z^*} \\
&= \frac{sz}{z+z^*} + \frac{sz^*}{z+z^*} \\
&= s\frac{z+z^*}{z+z^*} \\
&= s
\end{aligned}$$

Por tanto $S \subset T$ y como también se tiene que $T \subset S$, entonces por doble inclusión se obtiene que $T = S$. ■

Nótese que una ε-involución $*$ con $\varepsilon \neq 1$ es tal que ε no es un elemento simétrico. En efecto, si ε es simétrico, entonces $\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon$, pero recordemos que por definición $\varepsilon\varepsilon^* = 1$, así que $\varepsilon = 1$, una contradicción. También si k es un elemento semisimétrico y s es un elemento simétrico de D, entonces por la proposión 1.3.1 los siguientes elementos son simétricos: $k(1+\varepsilon)k^* = kk^* - k^2$; $s(1+\varepsilon)s^* = ss^* + s^2$. Para toda $a, b \in D$, hacemos $(a, b) = ab - ba$.

Lema 1.3.1 [4] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$ tal que car$(D) \neq 2$, y supongamos que $sk - ks = 0$ para todo elemento simétrico s y todo elemento semisimétrico k en D. Entonces, para toda $s \in S$ y toda $x \in D$, muestre que $(s, (s, x)) = 0$.*

Demostración :
Como $\varepsilon \in Z(D)$, entonces para todo $x \in D$ se tiene que $\varepsilon x = x\varepsilon$, de aquí se obtiene que $x\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}x$ pero como $\varepsilon^* = \varepsilon^{-1}$ obtenemos que: $x\varepsilon^* = \varepsilon^* x$ para todo $x \in D$, por tanto $\varepsilon^* \in Z(D)$ de estamanera se tiene que $1 + \varepsilon^* \in Z(D)$.

Sean $s_1, s_2 \in S$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\varepsilon[(1+\varepsilon^*)(s_1,s_2)]^* &= \varepsilon[(1+\varepsilon^*)(s_1s_2 - s_2s_1)]^* \\
&= \varepsilon[s_1s_2 - s_2s_1 + \varepsilon^* s_1s_2 - \varepsilon^* s_2s_1]^* \\
&= \varepsilon[s_2^*s_1^* - s_1^*s_2^* + s_2^*s_1^*(\varepsilon^*)^* - s_1^*s_2^*(\varepsilon^*)^*] \\
&= \varepsilon s_2^*s_1^* - \varepsilon s_1^*s_2^* + \varepsilon s_2^*s_1^*\varepsilon - \varepsilon s_1^*s_2^*\varepsilon \\
&= s_2s_1^* - s_1s_2^* + s_2s_1^*\varepsilon - s_1s_2^*\varepsilon \\
&= s_2\varepsilon^*s_1 - s_1\varepsilon^*s_2 + s_2\varepsilon s_1^* - s_1\varepsilon s_2^* \\
&= \varepsilon^*s_2s_1 - \varepsilon^*s_1s_2 + s_2s_1 - s_1s_2 \\
&= \varepsilon^*(s_2s_1 - s_1s_2) + s_2s_1 - s_1s_2 \\
&= -\varepsilon^*(s_1s_2 - s_2s_1) - (s_1s_2 - s_2s_1) \\
&= -(1+\varepsilon^*)(s_1s_2 - s_2s_1) \\
&= -(1+\varepsilon^*)(s_1,s_2)
\end{aligned}$$

Luego, $(1+\varepsilon^*)(s_1,s_2)$ es semisimétrico y por hipótesis conmuta con todo elemento simétrico, en particular conmuta con s_1. Luego,

$$\begin{aligned}
s_1(1+\varepsilon^*)(s_1,s_2) = (1+\varepsilon^*)(s_1,s_2)s_1 &\implies (1+\varepsilon^*)s_1(s_1,s_2) - (1+\varepsilon^*)(s_1,s_2)s_1 \\
&\implies (1+\varepsilon^*)(s_1(s_1,s_2) - (s_1,s_2)s_1) = 0 \\
&\implies (1+\varepsilon^*)(s_1,(s_1,s_2)) = 0 \\
&\implies 1+\varepsilon^* = 0 \ \vee \ (s_1,(s_1,s_2)) = 0
\end{aligned}$$

Consideremos los dos casos:

Caso 1. $(s_1,(s_1,s_2)) = 0$. En este caso no hay nada que probar.

Caso 2. Supongamos que $1+\varepsilon^* = 0$. Aquí se tiene que $\varepsilon^* = -1$, o lo que es lo mismo $\varepsilon = (\varepsilon^*)^* = -1$. Si $k \in D$ es semisimétrico, entonces $\varepsilon k^* = -k$, pero como $\varepsilon = -1$, se tiene que $k \in D$ es semisimétrico si $k^* = k$. También se verifica que $s \in D$ es simétrico si $s = -s$. Afirmamos que (s_1,s_2) es un elemento semisimétrico, en efecto:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(s_1,s_2)^* = -(s_1s_2 - s_2s_1)^* &\implies -(s_2^*s_1^* - s_1^*s_2^*) \\
&\implies -((-s_2)(-s_1) - (-s_1)(-s_2)) \\
&\implies -(s_2s_1 - s_1s_2) \\
&\implies s_1s_2 - s_2s_1
\end{aligned}$$

Luego, (s_1,s_2) es semisimétrico y en consecuencia conmuta con todo elemento simétrico, en particular conmuta con s_1. Así, $s_1(s_1,s_2) = (s_1,s_2)s_2$ y por tanto $(s_1,(s_1,s_2)) = 0$.

En ambos casos se tiene que $(s_1, (s_1, s_2)) = 0$.

También por hipótesis se tiene que $(k_1, s_1) = s_1k_1 - k_1s_1 = 0$ para todo elemento simétrico s_1 y todo elemento semisimétrico k_1. Así $(s_1, (s_1, k_1)) = 0$ para todo elemento simétrico s_1 y todo elemento semisimétrico k_1. Como la caraterística de D es distinta de dos se tiene que todo elemento $x \in D$ se puede escribir como $x = s + k$ donde s es un elemento simétrico y k es un elemento semisimétrico. Sea $s_1 \in S$. Luego, $(s_1, (s_1, x)) = (s_1, (s_1, s+k)) = (s_1, (s_1, s)+(s_1, k)) = (s_1, (s_1, s))+(s_1, (s_1, k)) = 0+0 = 0$.

Por tanto, $(s_1, (s_1, x)) = 0$ para todo elemento $s_1 \in S$. ■

Lema 1.3.2 ([2]) *Sea D un anillo de división con car$(D) \neq 2$. Si $(a, (a, x)) = 0$ para toda $x \in D$, entonces $a \in Z(D)$.*

Demostración:
Sea $x \in D$ arbitrario pero fijo. Por hipótesis tenemos que $(a, (a, x)) = 0$, de aquí obtenemos que:

$$\frac{a^2x}{2} + \frac{xa^2}{2} = axa \quad (i)$$

Sustituyendo en (i) la variable x por x^2 obtenemos lo siguiente:

$$\frac{a^2x^2}{2} + \frac{x^2a^2}{2} = ax^2a \quad (ii)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(ax - xa)^2 &= axax - ax^2a - xa^2x + xaxa \\
&= (\frac{a^2x}{2} + \frac{xa^2}{2})x - ax^2a - xa^2x + x(\frac{a^2x}{2} + \frac{xa^2}{2}) \text{ por } (i) \\
&= \frac{a^2x^2}{2} + \frac{xa^2x}{2} - ax^2a - xa^2x + \frac{xa^2x}{2} + \frac{x^2a^2}{2} \\
&= \frac{a^2x^2}{2} - ax^2a + \frac{x^2a^2}{2} \\
&= \frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^2a^2}{2} + \frac{x^2a^2}{2} \text{ por } (ii) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De aquí que $(ax - xa)(ax - xa) = 0$ y como en D no hay divisores de cero, se concluye que $ax-xa = 0$, luego, $ax = xa$ y como $x \in D$ es arbitrario concluimos que $a \in Z(D)$. ■

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de los dos lemas anteriores.

Corolario 1.3.1 [4] *Si D es un anillo de división con una ε-involución $*$. Tal que $sk - ks = 0$ para todo elemento simétrico s y todo elemento semisimétrico $k \in D$, entonces todo elemento simétrico en D son central.*

Teorema 1.3.1 [4] *Sea D un anillo de división con $car(D) \neq 2$ y con una ε-involución $*$, donde $\varepsilon \neq 1$. Supongamos que todos los elementos simétricos en D son centrales. Entonces D es un campo.*

Demostración:

Puesto que $1+\varepsilon \in S$ y por hipótesis $S \subset Z(D)$, entonces $1+\varepsilon \in Z(D)$. Esto muestra que $\varepsilon \in Z(D)$ y también tenemos que $1-\varepsilon, (1+\varepsilon)^{-1}, \varepsilon^* \in Z(D)$. Probemos que todo elemeto semisimétrico también es un elemento central, y con esto concluiremos que todo elemento de D es central, para ello consideremos los dos siguientes casos para ε:

Caso 1. Si $\varepsilon \neq -1$, sea $k_0 = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-1}$. Entonces $k_0 \neq 0$ ya que de lo contrario $\varepsilon = 1$, lo cual sería una contradicción. Además, si $d \in D$ entonces $dk_0 = d(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-1} = (1-\varepsilon)d(1+\varepsilon)^{-1} = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-1}d = k_0 d$. Por tanto $k_0 \in Z(D)$. Por otra parte tenemos que: $k_0^* = ((1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-1})^* = (1+\varepsilon^*)^{-1}(1-\varepsilon^*) = (1+\varepsilon^{-1})^{-1}(1-\varepsilon^{-1}) = (\varepsilon^{-1}(\varepsilon+1))^{-1}(\varepsilon^{-1}(\varepsilon-1)) = ((\varepsilon+1)^{-1}\varepsilon)(\varepsilon^{-1}(\varepsilon-1)) = (\varepsilon+1)^{-1}(\varepsilon-1) = (\varepsilon-1)(\varepsilon+1)^{-1} = -(1-\varepsilon)(\varepsilon+1)^{-1} = -k_0$.

Sea $\tau \in D$ un elemento semisimétrico. Entonces: $\varepsilon(k_0\tau)^* = \varepsilon(\tau^* k_0^*) = (-\tau)(-k_0) = \tau k_0 = k_0 \tau$ (recordar que $k_0 \in Z(D)$), esto muestra que $k_0\tau$ es un elemento simétrico, y por tanto $k_0\tau \in Z(D)$. Como k_0 es un elemento no nulo en $Z(D)$ y $Z(D)$ es un subanillo de D, tenemos que $\tau \in Z(D)$. De esta forma hemos probado que todo elemento semisimétrico es central. Como $car(D) \neq 2$, entonces todo elemento $x \in D$ se puede escribir como $x = s+k$ para algún $s \in S$ y algún $k \in SK$. Si $d \in D$, entonces:

$$dx = d(s+k) = ds + dk = sd + kd = (s+k)d = xd$$

De esta manera hemos probado que todo elemento de D son centrales, es decir $D = Z(D)$ y por tanto D es un campo.

Caso 2. Sea $\varepsilon = -1$. En este caso s es un elemento simétrico si y sólo si $s^* = -s$, y k es un elemento semisimétrico si y sólo si $k^* = k$. Para un elemento simétrico s y un elemento semisimétrico k en D uno tiene que $(sk)^* = k^*s^* = k(-s) = -(ks) = -(sk)$. Luego, $sk \in Z(D)$ para todo $s \in S$ y todo $k \in SK$. Sea $k_1 \in SK$. Supongamos que existe un $s_1 \in S$ no nulo, entonces $s_1k_1 \in Z(D)$ y de aquí que $k_1 = s_1^{-1}(s_1k_1) \in Z(D)$. Como $car(D) \neq 2$, entonces todo elemento $x \in D$ se puede escribir como $x = s+k$ para algún $s \in S$ y algún $k \in SK$. Y al igual que el caso 1., se prueba que que $D = Z(D)$ y por tanto D es un campo.

Si ningún elemento de S es no nulo, entonces $S = \{0\}$. Como $car(D) \neq 2$, entonces todo elemento $x \in D$ se puede escribir como $x = s+k$ para algún $s \in S$ y algún $k \in SK$.

Pero $S = \{0\}$, así $x = k$ y por tanto todo elemento de D es semisimétrico. Si $x, y \in D$, entonces: $(yx)^* = yx \Longrightarrow x^*y^* = yx \Longrightarrow xy = yx$, y por tanto D es conmutativo, en consecuencia D es un campo. Del caso 1 y 2 tenemos que D es un campo. ■

1.4. Construciones de $\sharp$-involución a partir de una ε-involución dada

En esta sección estamos interesados en determinar que características y propiedades tienen las $\sharp$-involución, donde esta $\sharp$-involución es determinada a partir de una ε-involución dada.

Teorema 1.4.1 [4] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si p es un elemento no nulo en D, entonces la fórmula $x^\sharp = p^{-1}x^*p$ define una ε_1-involución $\sharp$ en D, donde $\varepsilon_1 \in D$ puede ser encontrada.*

Demostración:

Primero probemos que $\sharp$ es un antiautomorfismo. Sean $x, y \in D$. Entonces:

$$(xy)^\sharp = p^{-1}(xy)^*p = p^{-1}y^*x^*p = (p^{-1}y^*p)(p^{-1}x^*p) = y^\sharp x^\sharp.$$

Por otra parte tenemos que:

$$(x+y)^\sharp = p^{-1}(x+y)^*p = p^{-1}(x^* + y^*)p = p^{-1}x^*p + p^{-1}y^*p = x^\sharp + y^\sharp.$$

De esta forma hemos probado que $\sharp$ es un antiautomorfismo en D. Sea $\varepsilon_1 = \varepsilon(p^{-1})^*p$. Veamos que $\sharp$ define una ε_1-involución. En efecto,

$$\begin{aligned}
x^{\sharp\sharp} &= (p^{-1}x^*p)^\sharp \\
&= p^{-1}(p^{-1}x^*p)^*p \\
&= p^{-1}(p^*(x^*)^*(p^{-1})^*)p \\
&= p^{-1}(p^*(\varepsilon^{-1}x\varepsilon(p^{-1})^*))p \\
&= (\varepsilon(p^{-1})^*p)^{-1}x(\varepsilon(p^{-1})^*p) \\
&= \varepsilon_1^{-1}x\varepsilon_1
\end{aligned}$$

También se tiene que:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1)^\sharp &= (\varepsilon(p^{-1})^*p)^\sharp\\ &= p^{-1}(\varepsilon(p^{-1})^*p)^*p\\ &= p^{-1}(p^*((p^{-1})^*)^*\varepsilon^*)p\\ &= p^{-1}(p^*(\varepsilon^{-1}p^{-1}\varepsilon)\varepsilon^*)p\\ &= p^{-1}(p^*(\varepsilon^{-1}p^{-1}(\varepsilon\varepsilon^*)))p\\ &= p^{-1}(p^*(\varepsilon^{-1}(p^{-1}p)))\\ &= p^{-1}p^*\varepsilon^{-1}\\ &= (\varepsilon(p^{-1})^*p)^{-1}\\ &= \varepsilon_1^{-1}\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que, $\varepsilon_1\varepsilon_1^\sharp = \varepsilon_1^\sharp\varepsilon_1 = 1$. Por tanto, $\sharp$ también define una ε_1-involución. ∎

Recordemos que en una involución usual $*$ definida en un anillo R. Puede originar una nueva involución de la siguiente manera $x^\sharp = p^{-1}x^*p$ donde p es un elemento simétrico. En efecto, por analogía a la demostración del Teorema 1.4.1, tenemos que $\sharp$ define un antiautomorfismo. Sólo falta ver que $(x^\sharp)^\sharp = x$. Recordemos que en un anillo con involución si p es simétrico también lo es p^{-1}. Luego,

$$(x^\sharp)^\sharp = (p^{-1}x^*p)^\sharp = p^{-1}(p^*(x^*)^*(p^{-1})^*)p = p^{-1}(pxp^{-1})p = x.$$

Por tanto, $\sharp$ define una involución usual. Esta nueva involución generada por $*$ es llamada ***involución co-gradiente***.

Por analogía de la involución co-gradiente, si D es un anillo de división con una ε-involución $*$, la involución $\sharp$ definida por $x^\sharp = p^{-1}x^*p$, donde $\varepsilon_1 = \varepsilon(p^{-1})^*p$ es una ε_1-involución (ver Teorema 1.4.1). $\sharp$ es llamada en este caso ε-***involución cogradiente*** (ε no necesariamente es la misma). Es interesante observar que mientras en el caso clásico de involución co-gradiente se requiere que p sea simétrico, en el caso de ε-involución cogradiente no se requiere que p sea simétrico, sólo se requiere que p sea invertible, en esta misma idea si queremos encontrar una involución co-gradiente $\sharp$ solamente necesitamos que $\varepsilon_1 = 1 \Longrightarrow \varepsilon(p^{-1})^*p = 1 \Longrightarrow \varepsilon(p^{-1})^* = p^{-1}$, es decir, requerimos que p^{-1} sea un elemento simétrico respecto a la ε-involución $*$.

Teorema 1.4.2 [4] *Sea D un anillo de división. D admite una ε-involución si y sólo si D admite una involución usual.*

Demostración:
Sea $*$ una ε-involución. Si $x^* = x$ para toda $x \in D$. Entonces, para todo $x, y \in D$ se tiene que $(xy)^* = y^*x^* \Longrightarrow xy = yx$. Por tanto D es conmutativo y en consecuencia D es un campo. Además $(x^*)^* = \varepsilon^{-1}x\varepsilon = (\varepsilon^{-1}\varepsilon)x = 1x = x$. De esta manera hemos probado que $*$ es una involución usual. Ahora supongamos que existe un $y \in D$ tal que $y^* \neq y$. Probemos que existe en D un elemento simétrico no nulo. Sea $b = y + \varepsilon y^*$ la traza de y (recordemos que la traza es un elemento simétrico). Si $b \neq 0$, entonces existe un elemento simétrico no nulo en D. Ahora bien, supongamos que $b = 0$, entonces $\varepsilon y^* = -y$. Sea $c = yy^* - y^2$, probemos que c es un elemento simétrico no nulo en D. En efecto, $\varepsilon c^* = \varepsilon(yy^* - y^2)^* = \varepsilon((y^*)^*y^* - (y^2)^*) = \varepsilon(\varepsilon^{-1}y\varepsilon y^* - y^*y^*) = y\varepsilon y^* - \varepsilon y^*y^* = -y^2 + yy^* = yy^* - y^2 = c$. De aquí que c es un elemento simétrico. Si $c = 0$, entonces $yy^* = y^2 = (-y)(-y) = (-y)(\varepsilon y^*) \Longrightarrow y(1+\varepsilon)y^* = 0 \Longrightarrow y = 0 \vee \varepsilon = -1 \vee y^* = 0$. Consideremos estos tres casos

Caso 1. $y = 0 \Longrightarrow y^* = 0 = y$, pero esto es una contradicción ya que $y^* \neq y$.

Caso 2. Supongamos que $\varepsilon = -1$. Como $\varepsilon y^* = -y$, entonces $y^* = y$, y nuevamente tenemos una contradicción.

Caso 3. $y^* = 0 \Longrightarrow (y^*)^* = 0^* \Longrightarrow \varepsilon^{-1}y\varepsilon = 0 \Longrightarrow y = 0$, esto es una contradicción.

En todos los casos, hemos obtenido una contradicción, por tanto $c \neq 0$. De todo lo anterior concluimos que existe un elemento simétrico no nulo en D, sea este elemento a. Tomando $p = a^{-1}$ y definiendo $\sharp$ en D como:

$$x^\sharp = p^{-1}x^*p$$

Por Teorema 1.4.1 tenemos que $\sharp$ define un antiautomorfismo.

$$\begin{aligned}
(x^\sharp)^\sharp &= (p^{-1}x^*p)^\sharp \\
&= p^{-1}(p^{-1}x^*p)^*p \\
&= p^{-1}(p^*(x^*)^*(p^{-1})^*)p \\
&= p^{-1}(p^*(\varepsilon^{-1}x\varepsilon)(p^{-1})^*)p \\
&= a((a^{-1})^*(\varepsilon^{-1}x\varepsilon)a^*)a^{-1} \\
&= a((\varepsilon a^*)^{-1}x(\varepsilon a^*))a^{-1} \\
&= a(a^{-1}xa)a^{-1} \\
&= x
\end{aligned}$$

Luego, $\sharp$ define una involución usual. Para el recíproco, si $\sharp$ define una involución usual, tomamos $\varepsilon = 1$ o $\varepsilon = -1$, y definiendo $* = \sharp$ tenemos que $\sharp$ es una ε-involución. ■

Nota: Si $\sharp$ define una involución usual en D y b es un elemento no nulo en D. Definiendo $*$ en D como $x^* = b^{-1}x^\sharp b$, tenemos que $*$ define una ε-involución, donde $\varepsilon = (b^{-1})^\sharp b$.

En efecto, por Teorema 1.4.1 tenemos que $*$ define un antiautomorfismo en D. Además, $(x^*)^* = b^{-1}(b^{-1}x^\sharp b)^\sharp b = b^{-1}(b^\sharp(x^\sharp)^\sharp(b^{-1})^\sharp)b = ((b^{-1})^\sharp b)^{-1}x((b^{-1})^\sharp b) = \varepsilon^{-1}x\varepsilon$. Luego, $*$ define una ε-involución.

Teorema 1.4.3 [4] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Sea $p \in D$ no nulo, tomando la ε_1-involución $\sharp$ en D, dada por $x^\sharp = p^{-1}x^*p$ donde $\varepsilon_1 = \varepsilon(p^{-1})^*p$. Entonces $S_\sharp = S_\varepsilon p$ y $SK_\sharp = SK_\varepsilon p$.*

Demostración:
Sea $s_1 \in S_\sharp$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 s_1^\sharp = s_1 &\implies (\varepsilon(p^{-1})^*p)(p^{-1}s_1^*p) = s_1 \\
&\implies \varepsilon(p^{-1})^*s_1^*p = s_1 \\
&\implies \varepsilon(s_1p^{-1})^* = s_1p^{-1} \\
&\implies s_1p^{-1} \in S_\varepsilon \\
&\implies s_1p^{-1} = s_2 \quad \text{donde } s_2 \in S_\varepsilon \\
&\implies s_1 = s_2p \\
&\implies s_1 \in S_\varepsilon p
\end{aligned}$$

Por tanto, $S_\sharp \subset S_\varepsilon p$. Probemos la otra inclusión. Sea $s \in S_\varepsilon$, entonces: $\varepsilon s^* = s$. Luego

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(sp)^\sharp &= (\varepsilon(p^{-1})^*p)(p^{-1}(sp)^*p) \\
&= \varepsilon(p^{-1})^*p^*s^*p \\
&= \varepsilon s^*p \\
&= sp
\end{aligned}$$

Luego, $sp \in S_\sharp$ y de esta forma obtenemos que $S_\varepsilon p \subset S_\sharp$. Por tanto, por doble inclusión obtenemos que $S_\sharp = S_\varepsilon p$. En forma similar se demuestra que $SK_\sharp = SK_\varepsilon p$. ■

Capítulo 2

ε-Valuaciones en anillos de división con ε-involución

Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$ y sea $D^\times$ el grupo multiplicativo de los elementos no nulos de D.

Definición 2.0.1 *Un grupo $(G, \star)$ es llamado **grupo ordenado linealmente**, cuando en G es definido un orden lineal $\geq$, preservado bajo la operación del grupo, es decir:*
$a \geq b \Longrightarrow c \star a \geq c \star b \ \wedge \ a \star c \geq b \star c$ para todo $c \in G$.

Definición 2.0.2 *Sea D un anillo de división. Una ε-**valuación** en D es una función sobreyectiva $\omega : D \mapsto G \cup \{\infty\}$, donde $(G, \star)$ es un grupo ordenado linealmente y ∞ no es un elemento de G, tal que las siguientes condiciones son válidas:*

1. $\omega(x) = \infty \iff x = 0$.
2. $\omega(xy) = \omega(x) \star \omega(y)$.
3. $\omega(x + y) \geq min\{\omega(x), \omega(y)\}$.
4. $\omega(\varepsilon x^*) = \omega(x)$.

Aquí, ∞ cumple con las siguientes condiciones: $g \star \infty = \infty \star g = \infty$ y $\infty \geq g$ para todo $g \in G$.

El grupo $G_\omega = \{\omega(x) \mid x \in D^\times\} = G$ es llamado **grupo valuado** de ω. Antes de continuar veamos algunas propiedades que satisface una ε-valuación. Estas las veremos en la siguiente proposición:

Proposición 2.0.1 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Sea $\omega : D \mapsto G \cup \{\infty\}$ una ε-valuación. Entonces:*

1. $\omega(1) = 0$.

2. $\omega(\varepsilon) = 0$

3. $\omega(x^*) = \omega(x) \quad si \quad x \in D^\times$

4. $\omega(x^{-1}) = -\omega(x) \quad si \quad x \in D^\times$

5. $\omega(-x) = \omega(x) \quad si \quad x \in D^\times$

6. $\omega(x) \geq \omega(y) \Rightarrow -\omega(x) \leq -\omega(y)$.

Demostración:
Sean $x, y \in D$, entonces:

1. Como ω es una ε-valuación, entonces $\omega(xy) = \omega(x) + \omega(y)$ para todo $x, y \in D$, entonces: $\omega(1) = \omega((1)(1)) = \omega(1) + \omega(1)$, de aquí que $\omega(1) = 0$.

2. Para toda $x \in D$ se tiene que $\omega(\varepsilon x^*) = \omega(x)$, en particular si $x = 1$ tenemos que $\omega(\varepsilon 1^*) = \omega(1)$, esto implica que $\omega(\varepsilon) = 0$.

3. $\omega(\varepsilon x^*) = \omega(x) \Longrightarrow \omega(\varepsilon) + \omega(x^*) = \omega(x) \Longrightarrow \omega(x^*) = \omega(x)$.

4. $\omega(xx^{-1}) = \omega(1) \Longrightarrow \omega(x) + \omega(x^{-1}) = 0 \Longrightarrow \omega(x^{-1}) = -\omega(x)$.

5. Tenemos dos posibilidades para $\omega(-x)$, estas son $\omega(-x) \geq \omega(x)$ o $\omega(-x) \leq \omega(x)$. Primero supongamos que $\omega(-x) \geq \omega(x)$, entonces $\omega(-1) + \omega(-x) \geq \omega(-1) + \omega(x)$, luego $\omega(x) = \omega(-1(-x)) \geq \omega(-1x) = \omega(-x)$ y por antisimetría tenemos que $\omega(-x) = \omega(x)$. Si suponemos que $\omega(-x) \leq \omega(x)$, entonces $\omega(-1) + \omega(-x) \leq \omega(-1) + \omega(x)$, luego $\omega(x) = \omega(-1(-x)) \leq \omega(-1x) = \omega(-x)$ y por antisimetría tenemos que $\omega(-x) = \omega(x)$. En ambos casos tenemos que $\omega(-x) = \omega(x)$.

6. $\omega(x) \geq \omega(y) \Longrightarrow \omega(x) - \omega(x) \geq \omega(y) - \omega(x) \Longrightarrow 0 \geq \omega(y) - \omega(x) \Longrightarrow -\omega(y) \geq -\omega(y) + \omega(y) - \omega(x) = -\omega(x) \Longrightarrow -\omega(x) \leq -\omega(y)$ ■

También tenemos que toda ε-valuación $\omega : D \mapsto G$ es abeliana, esto es, su grupo valuado G es un grupo abeliano, por que $\omega(x) + \omega(y) = \omega(xy) = \omega((xy)^*) = \omega(y^* x^*) = \omega(y^*) + \omega(x^*) = \omega(y) + \omega(x)$.

Además, vemos que una ε-valuación es en si misma una valuación. Por tanto, las propiedades de una valuación también se cumplen en una ε-valuación. Un ejemplo de esto lo veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.0.2 [9] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Sea $\omega : D \mapsto G \cup \{\infty\}$ una ε-valuación. Si $\omega(x) \neq \omega(y)$, entonces $\omega(x+y) = min\{\omega(x), \omega(y)\}$.*

Demostración:
Supongamos sin perdida de generalidad que $\omega(x+y) > min\{\omega(x), \omega(y)\}$ con $\omega(x) > \omega(y)$. Entonces, $\omega(y) = \omega(x+y-x) \geq min\{\omega(x+y), \omega(-x)\} = min\{\omega(x+y), \omega(x)\} = \omega(y)$. Esto es una contradicción, por tanto $\omega(x+y) = min\{\omega(x), \omega(y)\}$ ■

2.1. Subanillos: totales, simétrico, ε-valuación e invariantes

Definición 2.1.1 [4] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Sea R un subanillo de D. Diremos que:*

1. *R es **total** si contiene a x o x^{-1} para todo elemento no nulo x en D.*

2. *R es **simétrico** si contiene a $\varepsilon x^* x^{-1}$ para todo elemento no nulo x en D.*

3. *R es un **anillo ε-valuación** de D si es total y simétrico.*

4. *R es **cerrado bajo la ε-involución** si $x \in R \Longrightarrow x^* \in R$.*

5. *R es **preservado bajo la conjugación** o es **invariante** si se cumple que $x^{-1}Rx = R$, para toda $x \in D^{\times}$.*

Ejemplo 2.1.1 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Sea $\omega : D \mapsto G \cup \{\infty\}$ una ε-valuación en D. Sea $R_\omega = \{x \in D | \omega(x) \geq 0\}$, entonces R_ω es un anillo ε-valuación de D.*

Primero probemos que R_ω es un subanillo de D. Sean $x, y \in R_\omega$, entonces $\omega(x) \geq 0$ y $\omega(y) \geq 0$. Como $\omega(x-y) \geq min\{\omega(x), \omega(-y)\} = min\{\omega(x), \omega(y)\} \geq 0$, esto prueba que $x - y \in R_\omega$, así R_ω es un grupo abeliano. Probemos que R_ω es cerrado bajo la multiplicación. $\omega(xy) = \omega(x) + \omega(y) \geq 0$, luego $xy \in R_\omega$. Por tanto, R_ω es un subanillo de D. Para toda $x \in D$ tenemos que $\omega(x) \geq 0$ o $\omega(x) \leq 0$, esto implica que $\omega(x) \geq 0$ o $\omega(x^{-1}) = -\omega(x) \geq 0$, luego $x \in R_\omega$ o $x^{-1} \in R_\omega$, de esta manera hemos probado que R_ω es total. Como, $\omega(\varepsilon x^* x^{-1}) = \omega(\varepsilon^* x) + \omega(x^{-1}) = \omega(x) - \omega(x) = 0$, entonces $\varepsilon x^* x^{-1} \in R_\omega$ así, R_ω es simétrico. Como R_ω es total y simétrico, concluimos que R_ω es un subanillo ε-valuación de D.

2.2. Anillo de valuación de la ε-valuación ω

La siguiente definición se debe a Schilling, vea [9].

Definición 2.2.1 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Sea $\omega : D \mapsto G \cup \{\infty\}$ una ε-valuación en D. El conjunto $R_\omega = \{x \in D| \, \omega(x) \geq 0\}$ es llamado* ***anillo de valuación*** *de ω.*

Teorema 2.2.1 [4] *Dado un subanillo ε-valuación R de un anillo de división D con una ε-involución $*$, entonces existe un grupo abeliano ordenado linealmente G, y una ε-valuación $\omega : D \mapsto G \cup \{\infty\}$ tal que R coincide con el anillo de valuación de ω.*

Demostración:
Sea U el grupo multiplicativo de los elementos invertibles de R. Entonces $\varepsilon x^* x^{-1} \in U$ para toda $x \in D$, por que $(\varepsilon x^* x^{-1})^{-1} = x(x^*)^{-1}\varepsilon^{-1} = \varepsilon(\varepsilon^{-1}x\varepsilon\varepsilon^*)((x^*)^{-1}\varepsilon^{-1}) = \varepsilon(\varepsilon x^*)^*(\varepsilon x^*)^{-1} \in R$. Como $\varepsilon x^* x^{-1} \in U$ para toda $x \in D$, si sustituimos $x = 1$ y luego $x = \varepsilon$, obtenemos que $\varepsilon, \varepsilon^* \in U$. También, puesto que U es multiplicativo, esto muestra que $x^* x^{-1} = \varepsilon^* \varepsilon x^* x^{-1} \in U$, para toda $x \in D$. Afirmamos que $xyx^{-1}y^{-1} \in U$ para toda $x, y \in D$. Esto debido a la siguiente identidad:

$$xyx^{-1}y^{-1} = [\varepsilon(x^*)^*(x^*)^{-1}][(\varepsilon y^* x)^*(\varepsilon y^* x)^{-1}][\varepsilon y^* y^{-1}]$$

Luego, U contiene el subgrupo conmutador $[D^\times, D^\times]$ de $D^\times$. Luego, U es un subgrupo normal de $D^\times$, y en consecuencia, el grupo factor $G = D^\times/U$ es abeliano. Definamos $\omega : D^\times \mapsto G$ el epimorfismo canónico, y G ordenado por:

$$a, b \in D^\times, \ aU \geq bU \text{ si y sólo si } ab^{-1} \in R \text{ si y sólo si } Ra \subset Rb.$$

Afirmamos que, $\geq$ esta bien definida, ya que si $xU = zU$, $yU = tU$ y $xU \geq yU$, entonces $Rx = Rz$, $Ry = Rt$ y $Rx \subset Ry$, luego $Rz \subset Rt$.

Ahora probemos que $\geq$ es una relación de orden lineal en G. Como $xx^{-1} = 1 \in R$, entonces $xU \geq xU$ para toda $x \in D^\times$. Esto prueba que $\geq$ es reflexiva. Supongamos que $xU \geq yU$ y $yU \geq xU$, entonces $xy^{-1}, yx^{-1} \in R$, esto implica que existen $r_1, r_2 \in R$ tales que $xy^{-1} = r_1$ y también $yx^{-1} = r_2$, así que $1 = (xy^{-1})(yx^{-1}) = r_1 r_2$, luego $r_1^{-1} = r_2 \in R$ y $r_2^{-1} = r_1 \in R$, de esta manera hemos probado que $r_1, r_2 \in U$. Puesto que $xy^{-1} = r_1$, esto implica que $x = r_1 y$, así $xU = (r_1 y)U = (r_1 U)(yU) = U(yU) = yU$. Esto prueba que $\geq$ es antisimétrica. Ahora probemos que $\geq$ es transitiva. Sean $x, y, x \in D^\times$ tales que $xU \geq yU$ y $yU \geq zU$. Entonces, $xy^{-1}, yz^{-1} \in R$, esto implica que $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in R$, así $xU \geq zU$, luego $\geq$ es transitiva. Como $\geq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva $\geq$ es una relación de orden en G.

Sean $xU, yU, zU \in G$, con $xU \geq yU$, entonces $(xz)(yz)^{-1} = xy^{-1} \in R$, de esta manera obtenemos que $xUzU = (xz)U \geq (yz)U = yUzU$, análogamente se prueba que $zUxU \geq zUyU$, así G es un grupo ordenado.

Por hipótesis R es un subanillo total de D, entonces para toda $x, y \in D^{\times}$ se tiene que $xy^{-1} \in R$ o $yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in R$, luego $xU \geq yU$ o $yU \geq xU$, por tanto $\geq$ es un orden lineal en G. De lo anterior concluimos que G con $\geq$ es un grupo multiplicativo ordenado linealmente. Ahora probemos que ω es una ε-valuación. Definamos $\omega(0) = \infty$, entonces por definición ω es sobreyectiva y además:

1. $\omega(x) = \infty \iff x = 0$.

2. $\omega(xy) = (xy)U = (xU)(yU) = \omega(x)\omega(y)$.

3. Sean $x, y \in D^{\times}$. Supongamos sin perdida de generalidad que $xU \geq yU$, entonces $min\{xU, yU\} = yU$. Como $xU \geq yU$, entonces $xy^{-1} \in R$. También, $(x+y)y^{-1} = xy^{-1} + 1 \in R$, así que $(x+y)U \geq yU = min\{xU, yU\}$. Por tanto $\omega(x+y) \geq min\{\omega(x), \omega(y)\}$.

4. Como $x^*x^{-1} \in U$, entonces $x^*x^{-1} \in R$ y $x(x^*)^{-1} = (x^*x^{-1})^{-1} \in R$ de aquí que $x^*U \geq xU$ y también $xU \geq x^*U$, por antisimetría se tiene que $x^*U = xU$. Luego, $\omega(\varepsilon x^*) = (\varepsilon x^*)U = (\varepsilon U)(x^*U) = U(x^*U) = x^*U = xU = \omega(x)$.

Luego, ω es una ε-valuación. Sea $R_\omega = \{x \in D \mid xU \geq U\} = \{x \in D \mid \omega(x) \geq 1\}$. Probemos que $R = R_\omega$.

$$x \in R_\omega \iff \omega(x) \geq 1 \iff xU \geq U \iff x = x1^{-1} \in R.$$

Por tanto $R_\omega = R$. ■

2.3. ε-Valuaciones equivalentes

La siguiente definición es parecida a la definición de valuaciones equivalentes de [7].

Definición 2.3.1 *El **grupo valuado** de una ε-valuación $\nu : D \mapsto G \cup \{\infty\}$ es $G_\nu = \{\nu(x) \mid x \in D^{\times}\}$. Dos ε-valuaciones ν y ω definidas en D, son **equivalentes** cuando existe un isomorfismo preservando orden $\theta : G_\nu \mapsto G_\omega$ tal que $\omega(x) = \omega(\nu(x))$ para toda $x \in D^{\times}$.*

La siguiente proposición es parecida a la Proposición 6.3 de [7]. La incluyo en este trabajo para facilitar la demostración del Teorema 2.6.2.

Proposición 2.3.1 *Toda ε-valuación $\omega : D \mapsto G \cup \{\infty\}$ en un anillo de división D con una ε-involución $*$ es equivalente a la valuación inducida por el anillo de valuación de ω. En particular, dos ε-valuaciones en el mismo anillo de división son equivalentes si y sólo si ellas tienen el mismo subanillo ε-valuación.*

Demostración:
Sea $R_\omega = \{x \in D \mid \omega(x) \geq 0\}$. Sea $U_\omega = \{x \in D \mid \omega(x) = 0\}$ el grupo multiplicativo de los elementos invertibles de R_ω. Sea el grupo cociente $G' = D^\times / U_\omega$. Definamos $\nu : D^\times \mapsto G'$ el epimorfismo canónico, por Teorema 2.2.1, tenemos que ν define una ε-valuación. Puesto que $Ker(\omega) = \{x \in D \mid \omega(x) = 0\} = U_\omega = Ker(\nu)$ y $Im(\omega) = G$, entonces existe un isomorfismo $\theta : G \mapsto G'$ tal que $\theta \circ \omega = \nu$. Veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} D^\times \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "\nu"'] & & G \arrow[dl, "\theta"] \\ & D^\times/U_\omega & \end{tikzcd}$$

Supongamos que θ no preserva el orden, entonces existen $x, y \in D^\times$ tal que $\omega(x) \geq \omega(y)$ y $\theta(\omega(y)) > \theta(\omega(x))$.

$$\begin{aligned}
\theta(\omega(y)) > \theta(\omega(x)) &\implies \nu(y) > \nu(x) \\
&\implies yU_\omega > xU_\omega \\
&\implies yx^{-1} \in R_\omega \ \wedge \ yU_\omega \neq xU_\omega \\
&\implies \omega(yx^{-1}) \geq 0 \ \wedge \ yU_\omega \neq xU_\omega \\
&\implies \omega(y) - \omega(x) \ \wedge \ x^{-1}y \notin U_\omega \\
&\implies \omega(y) \geq \omega(x) \ \wedge \ \omega(x^{-1}y) \neq 0 \\
&\implies \omega(y) \geq \omega(x) \ \wedge \ -\omega(x) + \omega(y) \neq 0 \\
&\implies \omega(y) > \omega(x)
\end{aligned}$$

Esto es una contradicción. Por tanto, θ preserva el orden. Además,
$\theta(\omega(\varepsilon x^*)) = \nu(\varepsilon x^*) = \nu(x) = \theta(\omega(x))$. ■

2.4. Propiedades de un subanillo simétrico

Lema 2.4.1 *[4] Todo subanillo simétrico R de un anillo de división D con una ε-involución tiene las siguientes propiedades:*

1. R contiene ε, ε^* y x^*x^{-1}, para todo x en D.

2. R es cerrado bajo la ε-involución ($x \in R \Longrightarrow x^* \in R$).

3. R contiene el subgrupo comutador $[D^\times, D^\times]$, y luego R es preservado bajo la conjugación ($x^{-1}Rx = R$, para toda $x \in D^\times$).

4. Cada ideal I izquierdo, derecho o bilátero de R es cerrado bajo la ε-involución.

5. I es un ideal izquierdo de R si y sólo si I es un ideal derecho de R.

6. Si I es un ideal de R, entonces: $xy \in I$ implica que $yx \in I$.

Demostración:

Sea R un subanillo simétrico de D un anillo de división D con una ε-involución $*$. Entonces:

1. Como R es un subanillo simétrico de R, entonces $\varepsilon x^*x^{-1} \in R$, para todo $x \in D^\times$. Si tomamos $x = 1$ o $x = \varepsilon$, tenemos que $\varepsilon, \varepsilon^* \in R$ (recordar que $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^*$). También, $x^*x^{-1} = \varepsilon^*(\varepsilon x^*x^{-1}) \in R$.

2. Supongamos que $x \in R$, entonces por la parte 1. se tiene que $x^* = (x^*x^{-1})x \in R$. Por tanto R es cerrado bajo la ε-involución.

3. Para probar esta parte usamos nuevamente la igualdad:

$$xyx^{-1}y^{-1} = [\varepsilon(x^*)^*(x^*)^{-1}][(\varepsilon y^*x)^*(\varepsilon y^*x)^{-1}][\varepsilon y^*y^{-1}]$$

   En consecuencia, $xyx^{-1}y^{-1} \in R$, y por tanto R contiene el subgrupo conmutador de $[D^\times, D^\times]$. Sean $x \in D^\times$ y $r \in R$. Entonces, $x^{-1}rx = x^{-1}((xr)r') = rr' \in R$. De aquí que $x^{-1}Rx \subset R$. Como $r = rx^{-1}x = (rx^{-1})x = x^{-1}rr'x \in x^{-1}Rx$, así $R \subset x^{-1}Rx$. Por doble inclusión tenemos que $x^{-1}Rx = R$. Luego, R es preservado bajo la conjugación.

4. Sean I un ideal izquierdo de R y $x \in I$. Entonces, por la parte 1. tenemos que $x^*x^{-1} \in R$, luego $x^* = (x^*x^{-1})x \in I$, así I es cerrado bajo la ε-involución. De forma simililar se demuestra que si I es un ideal derecho o un ideal, I es cerrado bajo la ε-involución.

5. Sean I un ideal izquierdo de R, $y \in R$ y $x \in I$. Entonces por ser R e I cerrados bajo la ε-involución, entonces $y^* \in R$ y $x^* \in I$, luego $\varepsilon y^* \in R$ y así $\varepsilon y^*x^* = (xy\varepsilon^*)^* \in I$ por ser I cerrado bajo la ε-involución tenemos que $\varepsilon^{-1}(xy) = \varepsilon^{-1}(xy\varepsilon^*)\varepsilon = ((xy\varepsilon^*)^*)^* \in I$, luego $xy = \varepsilon(\varepsilon^{-1}(xy)) \in I$. Por tanto, I es un ideal derecho de R. La otra inclusión se demuestra en forma similar.

6. Sea I un ideal de R y sea $xy \in I$. Por la parte 5. tenemos que $y^{-1}y^* = y^{-1}(y^*y^{-1})y \in R$, entonces $x^*y^* = (x^*x^{-1})(xy)(y^{-1}y^*) \in I$, luego, $yx = \varepsilon((xy)^*)^*\varepsilon^{-1} \in I$. Por tanto, $yx \in I$. ■

2.5. Propiedades de un anillo ε-valuación

Lema 2.5.1 [4] *Sea R un anillo ε-valuación de un anillo de división D con una ε-involución $*$, entonces el conjunto J de los elementos no invertible en R es un ideal propio de R que contiene todos los otros ideales propios de R. Uno tiene que $J = \{x \in R \mid \omega(x) > e\}$.*

Demostración:
Por Teorema 2.2.1 tenemos que el anillo $R = R_\omega = \{x \in R \mid xU \geq U\}$. Luego, $x \in U \iff xU = U$, de esta equivalencia se tiene que el conjunto $U = \{x \in R \mid xU = U\}$ donde U es el conjunto de las unidades en R, y por tanto el conjunto de las no unidades es dado por $J = \{x \in R \mid \omega(x) > e\}$. Probemos que J es un ideal de R. Sean $x, y \in J$ y $z \in R$. Entonces, $(x-y)U = \omega(x-y) \geq min(\omega(x), \omega(-y)) = min(\omega(x), \omega(y)) > U$, así que $x - y \in J$. Además, por definición de grupo ordenado linealmente tenemos que $zU \geq U \Longrightarrow zxU = (zU)(xU) \geq U(xU) = xU > U$. Luego, $zx \in J$. Por tanto J es un ideal izquierdo de R y por lema 2.4.1 parte 5. tenemos que J es un ideal de R. Sea I un ideal propio de R. Probemos que $I \subset J$. Supongamos lo contrario, es decir que $I \not\subseteq J$, entonces existe un x tal que $x \in I$ y $x \notin J$, como $x \notin J$ entonces x es una unidad en R. Luego, $x^{-1} \in R$ y como I es un ideal en R tenemos que $1 = xx^{-1} \in I$, así $I = R$ y esto contradice el hecho de que I es un ideal propio de R. Luego, $I \subset J$. Por tanto, J es un ideal propio de R que contiene todos los otros ideales propios de R. ■

Por este lema uno puede forma el anillo de división residual $\bar{D} = R/J$. La función $\sharp$ definida en $\bar{D}$, por $(x+J)^\sharp = x^* + J$, con $x \in R$ es una ε-involución en $\bar{D}$. En efecto, primero probemos que $\sharp$ esta bien definida. Sean $x + J, y + J \in \bar{D}$ tales que $x + J = y + J$, entonces $x - y \in J$ y como J es cerrado bajo la ε-involución, tenemos que $(x^* - y^*) = (x-y)^* \in J$, luego, $(x+J)^\sharp = x^* + J = y^* + J = (y+J)^\sharp$, por tanto $\sharp$ esta bien definida en $\bar{D}$. Ahora probemos que $\sharp$ es una $(\varepsilon + J)$-involución. En efecto, sean $x + J, y + J \in \bar{D}$, entonces $((x+J)+(y+J))^\sharp = ((x+y)+J)^\sharp = (x+y)^* + J = (x^* + y^*) + J = (x^* + J) + (y^* + J) = (x+J)^\sharp + (y+J)^\sharp$. También tenemos que $((x+J)(y+J))^\sharp = ((xy)+J)^\sharp = (xy)^* + J = (y^*x^*) + J = (y^*+J)(x^*+J) = (y+J)^\sharp(x+J)^\sharp$. Por otra parte se tiene que $((x+J)^\sharp)^\sharp = (x^*+J)^\sharp = (x^*)^* + J = \varepsilon^{-1}x\varepsilon + J = (\varepsilon^{-1}+J)(x+J)(\varepsilon+J) = (\varepsilon+J)^{-1}(x+J)(\varepsilon+J)$. Por tanto, $\sharp$ es una involución.

2.6. Extensión de ε-valuación

En [1], una condición necesaria y suficiente es dada para la extensión de una valuación abeliana en un anillo de división D sobre el anillo de división K. Nosotros resolveremos aquí una ε-versión de este problema, donde la valuación es remplazada por la ε-valuación. Usaremos las mismas líneas de la solución al problema dada en [1], consideraremos pares (V, J), donde V es un subanillo $*$-cerrado de D tal que $V \supset [D^{\times}, D^{\times}]$, y J es un ideal propio $*$-cerrado de V, denotemos por $\mathbb{P}$ el conjunto de dichos pares. Nótese que, puesto que $[D^{\times}, D^{\times}]$ es un grupo, todo elemento de $[D^{\times}, D^{\times}]$ es una unidad en V y además por ser J un ideal propio de V no posee elementos invertibles, por tanto, $[D^{\times}, D^{\times}] \cap J = \emptyset$. Escribiremos $(V, J) \leq (V', J')$ y decimos que (V', J') ***domina*** a (V, J) si $V \subset V'$ y $J \subset J'$. Claramente esto define un orden parcial en $\mathbb{P}$. En efecto, sean $(V_1, J_1), (V_2, J_2), (V_3, J_3) \in \mathbb{P}$. Entonces como $V_1 \subset V_1$ y $J_1 \subset J_1$, tenemos que $(V_1, J_1) \leq (V_1, J_1)$, por tanto $\leq$ es una relación reflexiva en $\mathbb{P}$. Supongamos que $(V_1, J_1) \leq (V_2, J_2)$ y que $(V_2, J_2) \leq (V_1, J_1)$, entonces $V_1 \subset V_2$, $J_1 \subset J_2$ y $V_2 \subset V_1$ y $J_2 \subset J_1$ así por antisimetría de $\subset$, tenemos que $V_1 = V_2$ y $J_1 = J_2$, por tanto $(V_1, J_1) = (V_2, J_2)$ y en consecuencia $\leq$ es antisimétrica. Ahora supongamos que $(V_1, J_1) \leq (V_2, J_2)$ y que $(V_2, J_2) \leq (V_3, J_3)$, entonces $V_1 \subset V_2$, $J_1 \subset J_2$ y $V_2 \subset V_3$ y $J_2 \subset J_3$ así por transitividad de $\subset$, tenemos que $V_1 \subset V_3$ y $J_1 \subset J_3$, por tanto $(V_1, J_1) \leq (V_3, J_3)$ y en consecuencia $\leq$ es transitiva. Como $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva, concluimos que $\leq$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{P}$.

El siguiente teorema lo vamos a necesitar para probar el Lema 2.6.1.

Teorema 2.6.1 [*9*] *Sea D un anillo de división. Si V es un subanillo del anillo de D tal que V es preservado bajo la conjugación, entonces V es un subanillo total de D.*

Para ver la demostración de este teorema vea [9].

El siguiente lema es una versión similar al Lema 2.2 en [1], donde la valuación es remplazada por la ε-valuación.

Lema 2.6.1 [*4*] *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$, R es un subanillo $*$-cerrado conteniendo a $[D^{\times}, D^{\times}]$ y M un ideal propio $*$-cerrado de R. Entonces existe un subanillo V $*$-cerrado conteniendo a $[D^{\times}, D^{\times}]$, y un ideal J $*$-cerrado tal que el par (V, J) es maximal con respecto a los pares que dominan a (R, M). Más aún, tales pares maximales (V, J) es formado por un subanillo ε-valuación V en D con ideal maximal bilátero precisamente J.*

Demostración:

Sea A el conjunto de los pares (V, J) que dominan a (R, M). Ya probamos que la relación $\leq$ definido en $\mathbb{P}$ es una relación de orden parcial, por tanto $\leq$ es una relación de orden parcial en A. Sea T un subconjunto totalmente ordenado de A. Probemos que T es acotado superiormente. Sea W la unión de todos los subanillos V tal que $(V, J) \in T$. Sea I la unión de todos los ideales J tal que $(V, J) \in T$. Primero probemos que W es un subanillo unitario de D $*$-cerrado que contiene a $[D^\times, D^\times]$. Sean, $a, b \in W$, entonces existen $(V_1, J_1), (V_2, J_2) \in T$ tales que $a \in V_1$ y $b \in V_2$. Como T es totalmente ordenado, se tiene que $(V_1, J_1) \leq (V_2, J_2)$ o $(V_2, J_2) \leq (V_1, J_1)$. Supongamos sin perdida de generalidad que $(V_1, J_1) \leq (V_2, J_2)$, entonces $V_1 \subset V_2$, en consecuencia $a, b \in V_2$ y por ser V_2 un subanillo de D se tiene que $ab, a - b \in V_2 \subset W$. Como $a \in V_1$, entonces $a^* \in V_1$, luego $a^* \in W$. Por tanto W es $*$-cerrado. Como $[D^\times, D^\times] \subset V$ para todo $(V, J) \in T$, se tiene que $[D^\times, D^\times] \subset W$. También, como $1 \in [D^\times, D^\times]$ se tiene que $1 \in W$. Por tanto W es un subanillo unitario de D $*$-cerrado que contiene a $[D^\times, D^\times]$.

Ahora, probemos que I es un ideal propio $*$-cerrado de W. Sean $a \in W$ y $b, c \in I$, entonces existen $(V_1, J_1), (V_2, J_2), (V_3, J_3) \in T$ tales que $a \in V_1$, $b \in J_2$ y $c \in J_3$. Como T es totalmente ordenado tenemos que $(V_2, J_2) \leq (V_3, J_3)$ o $(V_3, J_3) \leq (V_2, J_2)$. Supongamos sin perdida de generalidad que $(V_2, J_2) \leq (V_3, J_3)$, entonces $J_2 \subset J_3$, en consecuencia $b, c \in J_3$ y por ser J_3 un ideal de D se tiene que $a - b \in J_3 \subset I$. Nuevamente, como T es totalmente ordenado tenemos que $(V_1, J_1) \leq (V_3, J_3)$ o $(V_3, J_3) \leq (V_1, J_1)$. Supongamos sin perdida de generalidad que $(V_1, J_1) \leq (V_3, J_3)$, entonces $V_1 \subset V_3$, en consecuencia $a \in V_3$ y por ser J_3 un ideal de V_3 se tiene que $ab, ba \in J_3 \subset I$. Luego, I es un ideal de W. Como $b \in J_2$, entonces $b^* \in J_2$, así $b^* \in I$. Por lo anterior tenemos que I es un ideal de W, $*$-cerrado. Supongamos que $W = I$, entonces $1 \in I$, en consecuencia existe un par $(V_4, J_4) \in T$ tales que $1 \in J_4$ y por tanto $V_4 = J_4$ y luego, J_4 no es un ideal propio de V_4, esto es una contradicción, así I es un ideal propio de W $*$-cerrado.

Por tanto, hemos probado T es acotado superiormente por (W, I) y también $(W, I) \in A$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal en A, sea este elemento (V, J). Probemos que V es un subanillo ε- involución y que J es su ideal maximal. De la maximalidad se tiene que J es un ideal maximal de V. Como V contiene el subgrupo conmutador de $[D^\times, D^\times]$, entonces para todo $d_1, d_2 \in D^\times$, se tiene que existe un $v_1 \in V$ tal que $d_1 d_2 = d_2 d_1 v_1$, así tomando $d \in D^\times$ y $v \in V$, tenemos que , $d^{-1} v d = d^{-1}((dv)v') = vv' \in V$. De aquí que $d^{-1} V d \subset V$. Como $v = vd^{-1}d = (vd^{-1})d = d^{-1}vv'd \in d^{-1}Vd$, obtenemos que, $V \subset d^{-1}Vd$. Por doble inclusión tenemos que $d^{-1}Vd = V$. Luego, V es preservado bajo la conjugación y por Teorema 2.6.1 tenemos que V es total. Luego, $\varepsilon \in V$ o $\varepsilon^* = \varepsilon^{-1} \in V$. Como V es ε-cerrado, si $\varepsilon^* \in V$, entonces $\varepsilon = (\varepsilon^*)^* \in V$, en cualquiera de los dos casos tenemos que $\varepsilon \in V$. Ahora probemos que V es simétrico. Sea $a \in D^\times$ arbitrario pero fijo, por ser V un subanillo total tenemos que $a^* a^{-1} \in V$ o $a(a^{-1})^* = (a^* a^{-1})^{-1} \in V$. Analicemos estos dos casos, primero si $a^*a^{-1} \in V$, entonces $\varepsilon a^*a^{-1} \in V$ y en este caso V es simétrico. Si $a(a^{-1})^* \in V$, entonces por ser V conjugada tenemos que $(a^{-1})^*a = a^{-1}(a(a^{-1})^*)a \in V$, haciendo $x = a^{-1}$ tenemos que $x^*x^{-1} \in V$, pero como a es arbitrario, también lo es x, luego $x^*x^{-1} \in V$ para toda $x \in D^\times$ y nuevamente $\varepsilon x^*x^{-1} \in V$, por tanto, V es simétrico. En cualquiera de los dos casos tenemos que V es simétrico, y como V es total concluimos que V es un subanillo ε-involución. ■

Teorema 2.6.2 [4] *Sean D y K anillos de división tales que $D \subset K$ y K es una extensión de D que posee una ε-involución $*$. Dada una ε-valuación ν en D con anillo ε-valuación $R_\nu = \{x \in D \mid \nu(x) \geq 0\}$ con ideal maximal $J_\nu = \{x \in D \mid \nu(x) > 0\}$ y unidades $U_\nu = \{x \in D \mid \nu(x) = 0\}$, entonces existe una extensión ε-valuación ω de ν en K si y sólo si $J_\nu[K^\times, K^\times]$ es un ideal propio de $R_\nu[K^\times, K^\times]$, esto es, si y sólo si no existe ecuación de la forma:*

$$\sum_i a_i c_i = 1, \;\; \textit{donde } a_i \in J_\nu \;\; \textit{y } c_i \in [K^\times, K^\times] \tag{2.1}$$

Demostración:

Supongamos que existe una extensión ε-valuación ω de ν en K. Si la ecuación (2.1) es válido, entonces:

$$0 = \omega(1) = \omega(\sum_i a_i c_i) \geq \min_i\{\omega(a_i c_i)\} = \min_i\{\omega(a_i) + \omega(c_i)\} \tag{2.2}$$

Como $a_i \in J_\nu$, entonces $\omega(a_i) = \nu(a_i) > 0$, también $\omega(c_i) = 0$ (ya que, $\omega(xyx^{-1}y^{-1}) = \omega(x)+\omega(y)+\omega(x^{-1})+\omega(y^{-1}) = 0$ y c_i es el producto de conmutadores), esto muestra que el lado derecho de la ecuación (2.2) es estrictamente positivo, esto es una contradición. Luego la ecuación (2.1) no es válida. Así 1 no pertenece a $J_\nu[K^\times, K^\times]$ y por tanto, es un ideal propio del anillo $R_\nu[K^\times, K^\times]$. Para probar el recíproco, primero notemos que $J_\nu[K^\times, K^\times] = [K^\times, K^\times]J_\nu$ y también $R_\nu[K^\times, K^\times] = [K^\times, K^\times]R_\nu$ (ya que, $r(xyx^{-1}y^{-1}) = (rxyrr^{-1}x^{-1}y^{-1}r^{-1})r$). Probemos que $[K^\times, K^\times]$ es cerrado bajo la ε-involución $*$. En efecto: $(xyx^{-1}y^{-1})^* = (y^*)^{-1}(x^*)^{-1}y^*x^* \in [K^\times, K^\times]$ y como todo elemento de $[K^\times, K^\times]$ es el producto de conmutadores, concluimos que $[K^\times, K^\times]$ es cerrado bajo la ε-involución $*$. Ahora bien, puesto que V y $[K^\times, K^\times]$ son cerrados bajo la ε-involución $*$, esto muestra que $(R_\nu[K^\times, K^\times])^* = [K^\times, K^\times]^* R_\nu^* = [K^\times, K^\times]R_\nu = R_\nu[K^\times, K^\times]$, de aquí que, $V[K^\times, K^\times]$ es cerrado bajo la ε-involución $*$. Similarmente, se prueba que $J_\nu[K^\times, K^\times]$ es cerrado bajo la ε-involución $*$. Ahora, claramente $R_\nu[K^\times, K^\times] \supset [K^\times, K^\times]$ luego, por el Lema 2.6.1, existe un par maximal (V, J) dominando a $(R_\nu[K^\times, K^\times], J_\nu[K^\times, K^\times])$. Luego, V es un subanillo ε-valuación de K, por tanto, por el Teorema 2.2.1 existe una ε-valuación $\omega : K^\times \mapsto K^\times/U$ donde U es el conjunto de las unidades de V y tal que V coincide con el anillo de valuación de ω, es decir $V = R_\omega = \{x \in k|\, \omega(x) \geq U\}$, $U = U_\omega = \{x \in D|\, \omega(x) = U\}$

y $J_\omega = \{x \in D |\, \omega(x) > U\}$. Además también tenemos que: $R_\nu \subseteq R_\nu[K^\times, K^\times] \subseteq V$ y $J_\nu \subseteq J_\nu[K^\times, K^\times] \subseteq J$, es decir $R_\nu \subseteq V = R_\omega$, $J_\nu \subseteq J = J_\omega$ y también $U_\nu \subseteq U = U_\omega$.

Ahora probaremos que $R_\omega \cap D = R_\nu$, $J_\omega \cap D = J_\nu$ y $U_\omega \cap D = U_\nu$. Sea $x \in D$ tal que $x \notin R_\nu$, por ser R_ν un anillo de valuación de ν, se tiene que $x^{-1} \in R_\nu$ y $x^{-1} \notin U_\nu$ (por definición de R_ν), luego $x^{-1} \in J_\nu$ por ser $J_\nu \subseteq J_\omega$, entonces $x^{-1} \in J_\omega$. Si suponemos que $x \in R_\omega$, entonces por ser J_ω un ideal de R_ω tendríamos que $1 = xx^{-1} \in J_\omega$, esto contradice el hecho de que J_ω es un ideal propio de R_ω. Por tanto, $x \notin R_\omega$. Así hemos probado que $x \notin R_\nu \Rightarrow x \notin R_\omega$, cuando $x \in D$. También por contrarrecíproco tenemos que $x \in R_\omega \Rightarrow x \in R_\nu$, si $x \in D$. Luego,

$$R_\omega \cap D \subseteq R_\nu = R_\nu \cap D \subseteq R_\omega \cap D$$

Por tanto $R_\omega \cap D = R_\nu$ (i)

Probemos que $J_\omega \cap D = J_\nu$. Sea $x \in R_\nu - J_\nu = U_\nu$. Entonces $x \in U_\omega$ y como $x \in R_\nu$, entonces $x \in R_\omega$ en consecuencia $x \notin J_\omega$. Luego, $x \notin J_\nu \Rightarrow x \notin J_\omega$, cuando $x \in R_\nu$, y por contrarrecíproco tenemos que $x \in J_\omega \Rightarrow x \in J_\nu$, si $x \in R_\nu$. Luego,

$$J_\omega \cap R_\nu \subseteq J_\nu = J_\nu \cap R_\nu \subseteq J_\omega \cap R_\nu$$

Por tanto $J_\omega \cap R_\nu = J_\nu$ (ii). Luego,

$$\begin{aligned} J_\omega \cap D &= (J_\omega \cap R_\omega) \cap D \\ &= J_\omega \cap (R_\omega \cap D) \\ &= J_\omega \cap R_\nu \quad \text{por } (i) \\ &= J_\nu \quad \text{por } (ii) \end{aligned}$$

Por tanto $J_\omega \cap D = J_\nu$ (iii). Probemos por último que $U_\omega \cap D = U_\nu$.

$$\begin{aligned} U_\omega \cap D &= (R_\omega - J_\omega) \cap D \\ &= (R_\omega \cap D) - (J_\omega \cap D) \\ &= R_\nu - J_\nu \quad \text{por } (i) \text{ y por } (iii) \\ &= U_\nu \end{aligned}$$

Veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & D^\times \arrow[r, "\iota"] \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[d, "\nu'"] & K^\times \arrow[d, "\omega"] \\ G \arrow[r, "\cong"'] & D^\times/U_\nu \arrow[r, dashed, "\psi"'] & K^\times/U_\omega \end{tikzcd}$$

Aquí ν' es la valuación inducida por el anillo de valuación de ν y la función ι es el homomorfismo inclusión de $D^\times$ en $K^\times$. El homomorfismo inclusión induce un homomorfismo $\psi : D^\times/U_\nu \longmapsto K^\times/U_\omega$ (vea el diagrama de arriba) dada por $\psi(xU_\nu) = xU_\omega$ el cual es inyectivo, pues:

$$\begin{aligned} xU_\nu \in Ker(\psi) &\iff \psi(xU_\nu) = U_\omega \ \wedge \ x \in D^\times \\ &\iff xU_\omega = U_\omega \ \wedge \ x \in D^\times \\ &\iff x \in U_\omega \ \wedge \ x \in D^\times \\ &\iff x \in U_\omega \cap D^\times \\ &\iff x \in U_\nu \\ &\iff xU_\nu = U_\nu \end{aligned}$$

Luego, $Ker(\psi) = \{U_\nu\}$, en consecuencia ψ es inyectiva.

Ahora probemos que ψ preserva el orden. Sean $xU_\nu, yU_\nu \in D^\times/U_\nu$ donde $x, y \in D^\times$. Supongamos que $xU_\omega = \psi(xU_\nu) \leq \psi(yU_\nu) = yU_\omega$, en $K^\times/U_\omega$, esta desigualdad es equivalente a $xy^{-1} \in R_\omega \wedge x, y \in D^\times$, esto también es equivalente a $xy^{-1} \in R_\omega \cap D^\times = R_\nu$, esto nuevamente es equivalente a $xU_\nu \leq yU_\nu$, en $D^\times/U_\nu$. Luego, ψ induce un isomorfismo preservando orden $D^\times/U_\nu \cong Im(\psi)$. También, $\psi((xU_\nu)^*) = \psi(x^*U_\nu) = x^*U_\omega = (xU_\omega)^* = (\psi(xU_\nu))^*$.

Por tanto la ε-valuación ω en K extiende la ε-valuación ν' en D. Por la Proposición 2.3.1 , la ε-valuación ν en D es equivalente a la ε-valuación ν' en $D^\times/U_\nu$ y esta también puede ser estendida a K mediante ω. ■

Capítulo 3

Propiedades de los elementos simétricos y semisimétricos en anillos con ε-involución

En este capítulo, queremos ver qué condiciones debemos imponer a ciertas propiedades de los elementos simétricos y semisimétricos para que la teoría de la ε-involución coincida con la teoría de la involución usual. También se estudiarán ciertas propiedades de los conjuntos simétricos y semisimétricos. Como un ejemplo tenemos que en un anillo R con una involución usual $*$, se cumple que: si $a \in R$ es invertible y simétrico, entonces a^{-1} también es simétrico ver [8]. Esto no es válido en una ε-involución $*$ arbitraria, esto se verá en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.0.1 *Tomando para $D = \mathbb{C}$ la ε-involución $(x + yi)^* = x - yi$ con $\varepsilon = i$, tenemos lo siguiente:*

$$i(1 + i)^* = i(1 - i) = i - i^2 = i + 1 = 1 + i$$

De aquí que $1 + i$ es simétrico, pero la inversa de $1 + i$, que en este caso es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ no es simétrica. En efecto, si suponemos que es simétrico tenemos:

$$i(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \Longrightarrow i(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \Longrightarrow \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \Longrightarrow i = 1$$

Esto es una contradicción. Por tanto la inversa de $1 + i$ no es simétrica.

Queremos analizar bajo que condicones se cumple que si a es invertible y simétrico, entonces a^{-1} también lo es.

Lema 3.0.2 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si x y x^{-1} son simétricos, entonces:*

1. $x = \varepsilon x \varepsilon$.

2. $(x^{2n})^* = x^{2n}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

3. $\varepsilon x^2 = x^2 \varepsilon$.

4. x^{2n+1} *es simétrico para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración:
Supongamos que x y x^{-1} son simétricos. Entonces: $\varepsilon x^* = x$ (i) y $\varepsilon(x^{-1})^* = x^{-1}$ (ii). Luego, de (ii) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (\varepsilon(x^{-1})^*)^{-1} = (x^{-1})^{-1} &\implies ((x^{-1})^{-1})^* \varepsilon^{-1} = x \\ &\implies x^* \varepsilon^{-1} = x \qquad (iii) \\ &\implies x^* = x\varepsilon \qquad (iv) \end{aligned}$$

Comencemos a probar las condiciones de este Lema.

1. De (i) y (iv) se tiene que $x = \varepsilon x \varepsilon$.

2. Ahora usando (iii) y (i) tenemos que: $x^2 = xx = (x^*\varepsilon^{-1})(\varepsilon x^*) = x^*x^* = (xx)^* = (x^2)^*$. Probemos primero que $(x^{2n})^* = x^{2n}$ para todo $n \geq 0$. Procedamos por inducción matemática. Para $n = 0$ tenemos que $(x^{2(0)})^* = 1^* = 1 = x^{2(0)}$, por tanto para $n = 0$ la proposición es válida. Supongamos que para un $k = n \geq 0$ se cumple que $(x^{2n})^* = x^{2n}$. Veamos que sucede para $k+1$. $(x^{2(k+1)})^* = (x^{2k+2})^* = ((x^{2k})x^2)^* = (x^{2k})^*(x^2)^* = x^{2k}x^2 = x^{2k+2} = x^{2(k+1)}$. Luego hemos demostrado que: $(x^{2n})^* = x^{2n}$ para todo $n \geq 0$. Si $n < 0$ tenemos que $-n > 0$ luego aplicando la parte anterior obtenemos que $(x^{2(-n)})^* = x^{2(-n)}$ y de aquí que: $((x^{2(-n)})^*)^{-1} = (x^{2(-n)})^{-1} \implies (x^{2n})^* = x^{2n}$. Por tanto $(x^{2n})^* = x^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3. De (i), (iii) y 2. se tiene que $x^2 = xx = (\varepsilon x^*)(x^*\varepsilon^{-1}) = \varepsilon(x^2)^*\varepsilon^{-1} = \varepsilon x^2 \varepsilon^{-1}$, luego $\varepsilon x^2 = x^2 \varepsilon$.

4. Sea $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijo. Entonces usando 2. y el hecho de que x es simétrico se tiene que: $\varepsilon(x^{2n+1})^* = \varepsilon(x^{2n}x)^* = \varepsilon x^*(x^{2n})^* = xx^{2n} = x^{2n+1}$. Por tanto x^{2n+1} es simétrico para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Corolario 3.0.1 *Sea D un campo con una ε-involución $*$. Si x y x^{-1} son simétricos, entonces $\varepsilon^2 = 1$.*

Demostración:
Supongamos que x y x^{-1} son simétricos. Por Lema 3.0.2 parte 1., se tiene que $\varepsilon x \varepsilon = x$, por ser D un campo es conmutativo, entonces $\varepsilon^2 x = x$ y como x es invertible tenemos $\varepsilon^2 = 1$. ∎

Teorema 3.0.3 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si x y x^{-1} son semisimétricos, entonces:*

1. $x = \varepsilon x \varepsilon$
2. $(x^{2n})^* = x^{2n}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$
3. $\varepsilon x^2 = x^2 \varepsilon$
4. x^{2n+1} *es antisimétrico para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración:
Supongamos que x y x^{-1} son antisimétricos. Entonces: $\varepsilon x^* = -x$ y $\varepsilon(x^{-1})^* = -x^{-1}$. De aquí que: $-\varepsilon x^* = x$ y $-\varepsilon(x^{-1})^* = x^{-1}$. Tomando $\gamma = -\varepsilon$ obtenemos que γ define también una γ-involución $*$. Además, $\gamma x^* = x$ y $\gamma(x^{-1})^* = x^{-1}$. Así x y x^{-1} son simétricos según la γ-involución $*$. Luego por Lema 3.0.2 se cumple 1. y 2. y también tenemos que $\gamma x^2 = x^2 \gamma$ y de esto se tiene que $\varepsilon x^2 = x^2 \varepsilon$. Falta probar 4., para ello según el Lema 3.0.2 parte 4., se tiene que:

$$\begin{aligned} \gamma(x^{2n+1})^* = x^{2n+1} &\implies -\varepsilon(x^{2n+1})^* = x^{2n+1} \\ &\implies \varepsilon(x^{2n+1})^* = -x^{2n+1}. \end{aligned}$$

De esta manera hemos probado que x^{2n+1} es antisimétrico. ∎

Corolario 3.0.2 *Sea D un campo con una ε-involución $*$. Si x y x^{-1} son semisimétricos, entonces $\varepsilon^2 = 1$.*

Demostración:
La prueba es similar al Corolario 3.0.1. ∎

Lema 3.0.3 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si x es simétrico y x^{-1} es semisimétrico, entonces:*

1. $x = -\varepsilon x \varepsilon$
2. $(x^{2n})^* = (-1)^n x^{2n}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$
3. $\varepsilon x^2 = x^2 \varepsilon$
4. x^{2n+1} *es simétrico si n es un número par.*
5. x^{2n+1} *es semisimétrico si n es un número impar.*

Demostración:

Supongamos que x es simétrico y x^{-1} es semisimétrico. Entonces: $\varepsilon x^* = x$ (i) y $\varepsilon(x^{-1})^* = -x^{-1}$ (ii). Luego, de (ii) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (\varepsilon(x^{-1})^*)^{-1} = (-x^{-1})^{-1} &\implies ((x^{-1})^{-1})^* \varepsilon^{-1} = -x \\ &\implies -x^* \varepsilon^{-1} = x \qquad (iii) \\ &\implies x^* = -x\varepsilon \qquad (iv) \end{aligned}$$

Comencemos a probar las condiciones de este Lema.

1. De (i) y (iv) se tiene que $x = -\varepsilon x \varepsilon$.

2. Ahora usando (iii) y (i) tenemos que: $x^2 = xx = (-x^*\varepsilon^{-1})(\varepsilon x^*) = -x^*x^* = -(xx)^* = -(x^2)^*$. Luego, $= (x^2)^* = -x^2$. Probemos primero que $(x^{2n})^* = (-1)^n x^{2n}$ para todo $n \geq 0$. Procedamos por inducción matemática. Para $n = 0$ tenemos que $(x^{2(0)})^* = 1^* = 1 = (-1)^0 x^{2(0)}$, por tanto para $n = 0$ la proposición es válida. Supongamos que para un $k = n \geq 0$ se cumple que $(x^{2n})^* = (-1)^n x^{2n}$. Veamos que sucede para $k+1$. $(x^{2(k+1)})^* = (x^{2k+2})^* = (x^2(x^{2k}))^* = (x^{2k})^*(x^2)^* = (-1)^k x^{2k}(-x^2) = (-1)^{k+1} x^{2k+2} = (-1)^{k+1} x^{2(k+1)}$. Luego hemos demostrado que: $(x^{2n})^* = (-1)^n x^{2n}$ para todo $n \geq 0$. Si $n < 0$ tenemos que $-n > 0$ luego aplicando la parte anterior obtenemos que $(x^{2(-n)})^* = (-1)^{-n} x^{2(-n)}$ y de aquí que:

$$((x^{2(-n)})^*)^{-1} = ((-1)^{-n} x^{2(-n)})^{-1} \Longrightarrow (x^{2n})^* = (-1)^n x^{2n}.$$

   Por tanto $(x^{2n})^* = (-1)^n x^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3. De (i), (iii) y 2. se tiene que $x^2 = xx = (\varepsilon x^*)(-x^*\varepsilon^{-1}) = -\varepsilon(x^2)^*\varepsilon^{-1} = -\varepsilon(-x^2)\varepsilon^{-1}$, luego $\varepsilon x^2 = x^2 \varepsilon$.

4. Sea $n \in \mathbb{Z}$ un número par arbitrario pero fijo. Entonces usando 2. y el hecho de que x es simétrico se tiene que: $\varepsilon(x^{2n+1})^* = \varepsilon(x^{2n}x)^* = \varepsilon x^*(x^{2n})^* = x(-1)^n x^{2n} = x^{2n+1}$, recordar que n es par. Por tanto x^{2n+1} es simétrico para todo número par n.

5. Sea $n \in \mathbb{Z}$ un número impar arbitrario pero fijo. Entonces usando 2. y el hecho de que x es simétrico se tiene que: $\varepsilon(x^{2n+1})^* = \varepsilon(x^{2n}x)^* = \varepsilon x^*(x^{2n})^* = x(-1)^n x^{2n} = -x^{2n+1}$ recordar que n es un número impar. Por tanto x^{2n+1} es antisimétrico para todo número impar n. ■

Corolario 3.0.3 *Sea D un campo con una ε-involución $*$. Si x es simétrico y x^{-1} es semisimétrico, entonces $\varepsilon^2 = -1$*

Demostración:
Supongamos que x es simétrico y x^{-1} es semisimétrico. Por Lema 3.0.3 parte 1., se tiene que $\varepsilon x \varepsilon = -x$, por ser D un campo es conmutativo, entonces $\varepsilon^2 x = -x$ y como x es invertible tenemos $\varepsilon^2 = -1$. ■

Teorema 3.0.4 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si x es un elemento no nulo de D y $x = \varepsilon x \varepsilon$, entonces: x es simétrico si y sólo si x^{-1} es simétrico.*

Demostración:

$$
\begin{aligned}
x \text{ es simétrico} &\iff \varepsilon x^* = x \\
&\iff \varepsilon(\varepsilon x \varepsilon)^* = x \\
&\iff \varepsilon(\varepsilon^* x^* \varepsilon^*) = x \\
&\iff x^* \varepsilon^{-1} = x \\
&\iff (x^* \varepsilon^{-1})^{-1} = x^{-1} \\
&\iff \varepsilon(x^{-1})^* = x^{-1} \\
&\iff x^{-1} \text{ es simétrico}
\end{aligned}
$$

Por tanto, x es simétrico si y sólo si x^{-1} es simétrico. ■

Corolario 3.0.4 *Sea D un campo con una ε-involución $*$. Supongamos que $\varepsilon^2 = 1$ y que $x \in D^\times$. Entonces: x es simétrico si y sólo si x^{-1} es simétrico.*

Demostración:
Sea $x \in D^\times$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
x \text{ es simétrico} &\iff x \text{ es simétrico} \wedge \varepsilon x \varepsilon = x \\
&\iff x^{-1} \text{ es simétrico} \quad \text{(por Teorema 3.0.4)}
\end{aligned}
$$

Por tanto, x es simétrico si y sólo si x^{-1} es simétrico. ■

Teorema 3.0.5 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si x es un elemento no nulo en D y $x = \varepsilon x \varepsilon$, entonces: x es semisimétrico si y sólo si x^{-1} es semisimétrico.*

Demostración:

$$\begin{aligned} x \text{ es semisimétrico} &\iff \varepsilon x^* = -x \\ &\iff \varepsilon(\varepsilon x \varepsilon)^* = -x \\ &\iff \varepsilon(\varepsilon^* x^* \varepsilon^*) = -x \\ &\iff x^* \varepsilon^{-1} = -x \\ &\iff (x^* \varepsilon^{-1})^{-1} = (-x)^{-1} \\ &\iff \varepsilon(x^{-1})^* = -x^{-1} \\ &\iff x^{-1} \text{ es semisimétrico} \end{aligned}$$

Por tanto, x es semisimétrico si y sólo si x^{-1} es semisimétrico. ■

Teorema 3.0.6 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si x es un elemento no nulo en D y $x = -\varepsilon x \varepsilon$, entonces: x es simétrico si y sólo si x^{-1} es semisimétrico.*

Demostración:

$$\begin{aligned} x \text{ es simétrico} &\iff \varepsilon x^* = x \\ &\iff \varepsilon(-\varepsilon x \varepsilon)^* = x \\ &\iff \varepsilon(\varepsilon^* x^* \varepsilon^*) = -x \\ &\iff x^* \varepsilon^{-1} = -x \\ &\iff (x^* \varepsilon^{-1})^{-1} = (-x)^{-1} \\ &\iff \varepsilon(x^{-1})^* = -x^{-1} \\ &\iff x^{-1} \text{ es semisimétrico} \end{aligned}$$

x es simétrico si y sólo si x^{-1} es semisimétrico. ■

Corolario 3.0.5 *Sea D un campo con una ε-involución $*$. Supongamos que $\varepsilon^2 = -1$ y que $x \in D^\times$. En tonces: x es simétrico si y sólo si x^{-1} es semisimétrico.*

Demostración:

Sea $x \in D^\times$. Entonces:

$$\begin{aligned} x \text{ es simétrico} &\iff x \text{ es simétrico} \wedge -\varepsilon x \varepsilon = x \\ &\iff x^{-1} \text{ es semisimétrico} \quad \text{(por Teorema 3.0.6)} \end{aligned}$$

Por tanto, x es simétrico si y sólo si x^{-1} es semisimétrico. ■

Ejemplo 3.0.2 *Tomando para el campo $D = \mathbb{C}$ la ε-involución $(x+yi)^* = x - yi$ con $\varepsilon = i$, tenemos que $\varepsilon^2 = -1$ y además $x \in S_i$ implica que:*

$$\begin{aligned} i(x+yi)^* = x + yi &\implies i(x-yi) = x + yi \\ &\implies xi + y = x + yi \\ &\implies y + xi = x + yi \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Luego, $S_i = \{x + xi \mid x \in \mathbb{R}\}$. En forma similar se prueba que el conjunto $SK_i = \{x - xi \mid x \in \mathbb{R}\}$. Además, $x + xi$ es simétrico y no nulo, entonces su inversa es $\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x}i$, la cual es un elemento antisimétrico.

Proposición 3.0.1 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Entonces $car(D) = 2$ o $S_\varepsilon \cap SK_\varepsilon = \{0\}$*

Demostración:

Denotemos la identidad en D como 1_D, esto para evitar confunsiones. Como $0 \in S_\varepsilon$ y $0 \in SK_\varepsilon$, entonces $S_\varepsilon \cap SK_\varepsilon \neq \varnothing$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in S_\varepsilon \cap SK_\varepsilon &\implies x \in S_\varepsilon \ \wedge \ x \in SK_\varepsilon \\ &\implies \varepsilon x^* = x \ \wedge \ \varepsilon x^* = -x \\ &\implies x = -x \\ &\implies 2x = 0 \\ &\implies (2(1_D))x = 0 \\ &\implies 2(1_D) = 0 \ \vee \ x = 0 \\ &\implies car(D) = 2 \ \vee \ S_\varepsilon \cap SK_\varepsilon = \{0\} \end{aligned}$$

Por tanto, si $*$ define una ε-involución, entonces $car(D) = 2$ o $S_\varepsilon \cap SK_\varepsilon = \{0\}$ ■.

Una consecuencia inmediata de esta proposición es el siguiente corolario.

Corolario 3.0.6 *Sea D un anillo de división con una ε-involución $*$. Si $car(D) \neq 2$, entonces $S_\varepsilon \cap SK_\varepsilon = \{0\}$*

Proposición 3.0.2 *Sea D un anillo de división con un antiautomorfismo $*$. Supongamos que $*$ define una ε-involución y una γ-involución simultáneamente. Si $\varepsilon \neq \gamma$, entonces $S_\varepsilon \cap S_\gamma = \{0\}$*

Demostración:

Supongamos que $*$ define una ε-involución y una γ-involución simultáneamente en D.

Como $0 \in S_\varepsilon$ y $0 \in S_\gamma$, entonces $\{0\} \subset S_\varepsilon \cap S_\gamma$ y además $S_\varepsilon \cap S_\gamma \neq \varnothing$. Luego,

$$\begin{aligned}
x \in S_\varepsilon \cap S_\gamma &\implies x \in S_\varepsilon \wedge x \in S_\gamma \\
&\implies \varepsilon x^* = x \wedge \gamma x^* = x \\
&\implies \varepsilon x^* = \gamma x^* \\
&\implies (\varepsilon - \gamma) x^* = 0 \\
&\implies \varepsilon - \gamma = 0 \ \vee \ x^* = 0 \\
&\implies \varepsilon = \gamma \ \vee \ (x^*)^* = 0^* \\
&\implies \varepsilon^{-1} x \varepsilon = 0 \\
&\implies x = 0 \\
&\implies S_\varepsilon \cap S_\gamma \subset \{0\}
\end{aligned}$$

Por tanto, $S_\varepsilon \cap S_\gamma = \{0\}$. ■

Glosario de símbolos

- R representa un anillo arbitrario.
- D representa un anillo de división.
- $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{R}$ representa el conjunto de los números reales.
- $\mathbb{C}$ representa el conjunto de los números complejos.
- $\mathbb{H}$ representa el conjunto de los cuaterniones reales.
- $A^{\times}$ representa a todos los elementos del conjunto A excepto el cero.
- $Z(R)$ representa el centro del anillo R.
- $car(R)$ representa la característica del anillo R.
- $*$ y $\sharp$ representan una ε-involución.
- S_{ε} y S representan el conjunto de los elementos simétricos.
- SK_{ε} y SK representan el conjunto de los elementos semisimétricos.
- T_{ε} y T representan el conjunto de todas las trazas.
- S_{ε} y ST representan el conjunto de todas las semitrazas.
- $(G, \star)$ o simplemente G representa un grupo.
- $\geq$ representa un orden lineal en un grupo G, que preserva la operación de G.
- min es el mínimo entre dos valores en un grupo ordenado.
- ∞ es un elemento que no esta en un grupo ordenado $(G, \star)$, tal que cumple con las siguientes condiciones: $g \star \infty = \infty \star g = \infty$ y $\infty \geq g \quad \forall g \in G$.
- ω representa una ε-valuación.

- $R_\omega = \{x \in D^\times \mid \omega(x) \geq e\}$ es el anillo de valuación de ω.
- $J_\omega = \{x \in D^\times \mid \omega(x) > e\}$ es el ideal maximal de R_ω.
- $U_\omega = \{x \in D^\times \mid \omega(x) = e\}$ es el grupo de las unidades de R_ω.
- $[D^\times, D^\times]$ es el subgrupo conmutador de $D^\times$.
- $\cong$ es utilizado para indicar que dos grupos o anillos son isomorfos.
- $Ker(\psi)$ es el nucleo del homomorfismo ψ.
- $Im(\psi)$ es la imagen del homomorfismo ψ.
- $D^\times/U_\nu$ es el grupo cociente de $D^\times$ sobre es subgrupo normal U_ν.

Bibliografía

[1] Cohn K. P. M. and Mahdavi M., Extensions of valuations on skew fields, Lecture Notes in Mathematics, 825, Springer-Verlag, Berlin, (1980), 28 - 41.

[2] Herstein I. N. , Topics in ring theory, University of Chicago Press, Chicago, (1967).

[3] Idris I. M., Algebraic elements in valued $*$-division rings, Indian Journal pure appl. Math. 34(5),(2003), 705 - 714.

[4] Idris I. M., On division rings with general involution, Journal Algebra and Discrete Mathematics, Number 1., (2007), 40 - 48.

[5] Knus M.A., Merkurjev A., Rost M., Tignol J., The book of involutions, AMS, Colloquium Publications, Vol 44, (1998).

[6] Lang S., Algebra, Springer-Verlag, New York, Inc. (2002).

[7] Pierre A. G., Abstract Algebra, Second Edition, Springer, (2007).

[8] Ramos D. A., Anillos ordenados con involución, Trabajo de Grado (2004).

[9] Schilling O. F. G., The theory of valuations, Math. Surveys 4. AMS, Providence, RI, (1950).