Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Postgrado en Matemática

Ecuaciones Parciales Parabólicas Funcionales: Fórmula de Variación de Parámetros y Controlabilidad Aproximada

Autor: Alexander Carrasco.

Tutor: Hugo Leiva.

Tesis Doctoral

Presentada ante la Ilustre

Universidad Central de Venezuela

Para optar al título de

Doctor en Ciencias

Mención Matemática

Caracas, 11/04/2008

Índice general

Dedicado a mi esposa Isabel Cristina y a mi hija

Gabrielys Alexandra

Agradecimientos

Este trabajo, si bien ha requerido de mucho esfuerzo y dedicación no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación de todas y cada una de las personas que a continuación citaré.

A Dios por darme la fortaleza e iluminación en los momentos dificiles en el transcurrir de este camino.

A mis padres, por darme la vida y porque gracias a su apoyo he logrado alcanzar esta meta.

A mi esposa Isabel y mi hija Gabrielys, porque gracias al fruto del inmenso apoyo, amor y confianza que en mi depositarón, me dieron la fuerza necesaria para culminar con éxito. Sólo deseo que entiendan que el logro mío, es el logro de ustedes y que mi esfuerzo es motivado por ustedes.

A mi tutor y amigo, Dr. Hugo Leiva, muchas gracias por todo su tiempo invertido en la dirección de este trabajo.

A mis colegas del Departamento de Matemática del Decanato de Ciencias de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA), por ese apoyo al asumir parte de mi actividad académica, para de esa forma poder dedicarme más tiempo al desarrollo de este trabajo.

A la UCLA por la beca otorgada para la realización de estos estudios doctorales.

A la Universidad Central de Venezuela, por brindarme la oportunidad para realizar el doctorado en dicha institución.

Resumen

En este trabajo, en primer lugar, se encuentra una fórmula de variación de parámetros para el siguiente sistema de ecuaciones parciales parabólicas funcionales

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} & = & D\Delta u + Lu_t + f(t,x), \quad t > 0, \quad u \in \mathbb{R}^n, \\
\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial \eta} & = & 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\
u(0,x) & = & \phi_0(x), \\
u(s,x) & = & \phi(s,x), \quad s \in [-\tau, 0), \quad x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{0.0.1}
$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, D es una matriz no diagonal $n \times n$ cuyos autovalores son semi-simples con parte real no negativa y $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función suave. La notación estándar $u_t(x)$ define una función de $[-\tau, 0]$ en $\mathbb{R}^n$ (con x fijado en $\mathbb{R}^n$) por $u_t(x)(s) = u(t+s, x), -\tau \leq s \leq 0$. Aquí $\tau \geq 0$ es el máximo retardo, el cual se supone que es finito. Se supondra que el operador $L : L^2([-\tau, 0]; Z) \longrightarrow Z$ es lineal y acotado con $Z = L^2(\Omega)$ y $\phi_0 \in Z$, $\phi \in L^2([-\tau, 0]; Z)$.

En segundo lugar, se dan condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad aproximada del sistema (0.0.1). Para ello, primero, se reformula este sistema como una ecuación diferencial de primer orden funcional o con retardo. Segundo, el semigrupo asociado a la ecuación de primer orden con retardo sobre un espacio producto apropiado es expresado como una serie de semigrupos fuertemente continuos y de proyecciones ortogonales relacionadas con los autovalores del operador Laplaciano $(A = -\dfrac{\partial}{\partial^2})$; esta representación permite reducir la controlabilidad de la ecuación diferencial parcial con retardo a una familia de ecuaciones ordinarias con retardo. Finalmente, se hace uso de un resultado conocido sobre la condición del rango para la controlabilidad aproximada de sistemas con retardo para así derivar el segundo resultado de este trabajo.

Introducción

La teoría de semigrupos de operadores fuertemente continuos encuentra aplicaciones fascinantes en el mundo de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y en general en sistemas de dimensión infinita.

La fórmula de variación de parámetros juega un rol importante en el estudio de la controlabilidad, estabilidad, existencia de soluciones acotadas y el comportamiento asíntotico de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Para la siguiente ecuación diferencial ordinaria semi-lineal:

$$\begin{cases} x'(t) &=& A(t)x + f(t,x), \ x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) &=& x_0, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

la fórmula de variación de parámetros es conocida y viene dada por

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s,x(s))ds,$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la matriz fundamental del sistema

$$x'(t) = A(t)x. \tag{0.0.3}$$

Dada la importancia de esta fórmula para ecuaciones diferenciales ordinarias semi-lineal, en 1961 el matemático ruso Alekseev, V. M. , encontro una fórmula para el siguiente problema de valor inicial no lineal:

$$\begin{cases} y'(t) &=& f(t,y) + g(t,y), \quad y \in \mathbb{R}^n \\ y(t_0) &=& y_0, \end{cases} \tag{0.0.4}$$

la cual viene dada por

$$y(t,t_0,y_0) = x(t,t_0,y_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t,s,y(s))g(s,y(s))ds,$$

donde $x(t,t_0,y_0)$ es la solución del problema de valor incial

$$\begin{cases} x'(t) &=& f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ x(t_0) &=& y_0, \end{cases} \tag{0.0.5}$$

y

$$\Phi(t,s,\xi)=\frac{\partial x(t,t_0,y_0)}{\partial y_0}.$$

Esta fórmula es usada para comparar las soluciones de (0.0.4) con las soluciones de (0.0.5). En efecto, esta fórmula fue usada en ([11]).

En espacios de Banach de dimensión infinita Z, se tiene la siguiente situación general. Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en Z y $f:[0,\beta]\longrightarrow Z$ es una función dada, entonces la solución del problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{lcl} z'(t) &=& A(t)z(t)+f(t),\ t>0,\ z\in Z,\\ z(0) &=& z_0, \end{array}\right. \tag{0.0.6}$$

viene dada por la fórmula de variación de parámetros

$$z(t)=T(t)z_0+\int_0^t T(t-s)f(s)ds,\ \ t\in[0,\infty). \tag{0.0.7}$$

Así, cualquier solución del problema (0.0.6) es también solución de la ecuación integral (0.0.7), pero no necesariamente las soluciones de (0.0.7) son soluciones de (0.0.6), ya que las soluciones de (0.0.7) no tienen porque ser diferenciables. A las soluciones de (0.0.7) se les conoce como soluciones moderadas de (0.0.6), y en este sentido pueden verse como soluciones generalizadas de (0.0.6). Más aún, si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo analítico y la función f satisface la siguiente condición de Hôlder

$$\parallel f(s)-f(t)\parallel\leq L\mid s-t\mid^{\theta},\ \ s,t\in[0,\beta],$$

con $L>0,\theta\geq 1$, entonces la solución moderada (0.0.7) es también solución del problema de valor inicial (0.0.6).

Este trabajo y muchos otros estan motivados por el legendario artículo de J.G. Borisovic y A.S. Turbabin (ver [3]) y H.T. Banks (ver [1]), en el que los autores encontraron una fórmula de variación de parámetros para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales funcional no homogéneas

$$\begin{cases} z'(t) &= Lz_t + f(t),\ t > 0,\ z \in \mathbb{R}^n, \\ z(0) &= z_0, \\ z(s) &= \phi(s),\ s \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{0.0.8}$$

donde $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función dada. La notación estandar z_t define una función de $[-\tau, 0]$ en $\mathbb{R}^n$ por $z_t(s) = z(t+s)$, $-\tau \leq s \leq 0$. Aquí $\tau \geq 0$ representa el máximo retardo, el cual se asume finito. Se supone que el operador $L : L^p([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal, acotado, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\phi \in L^p([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Bajo algunas condiciones ellos prueban la existencia y la unicidad de las soluciones al sistema (0.0.8) y le asocian a este un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en el espacio de Banach $\mathbb{M}_p([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus L^p([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$.
Por lo tanto, el sistema (0.0.8) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathbb{M}_p$:

$$\begin{cases} \dfrac{dW(t)}{dt} &= \Lambda W(t) + \Phi(t),\ t > 0, \\ W(0) &= W_0 = (z_0, \phi(\cdot)), \end{cases} \tag{0.0.9}$$

donde Λ es el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $\Phi(t) = (f(t), 0)$.
En consecuencia, la solución del sistema (0.0.8) viene dada por la fórmula de variación de parámetros o solución moderada:

$$W(t) = T(t)W_0 + \int_0^t T(t-s)\Phi(s)ds. \tag{0.0.10}$$

Es un hecho conocido, la existencia de fórmulas de variación de parámetros para ecuaciones de reacción-difusión, ecuaciones funcionales y ecuaciones neutrales, para una mayor información, se puede ver el artículo de Luiz de Oliveira ([7]), pero, al menos para nosotros, para ecuaciones parabólicas funcionales no se conocia hasta ahora.

En este trabajo se encuentra una fórmula de variación de parámetros para el siguiente sistema de ecuaciones parciales parabólicas funcionales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} &=& D\Delta u + Lu_t + f(t,x), \quad t>0, \quad u \in \mathbb{R}^n, \\ \\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial \eta} &=& 0, \quad t>0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \\ u(0,x) &=& \phi_0(x), \\ \\ u(s,x) &=& \phi(s,x), \quad s \in [-\tau, 0), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.0.11}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, D es una matriz no diagonal $n \times n$ cuyos autovalores son semi-simples con parte real no negativa y $f : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función suave. La notación estándar $u_t(x)$ define una función de $[-\tau, 0]$ en $\mathbb{R}^n$ (con x fijado en $\mathbb{R}^n$) por $u_t(x)(s) = u(t+s, x), -\tau \leq s \leq 0$. Aquí $\tau \geq 0$ es el máximo retardo, el cual se supone que es finito. Se supondra que el operador $L : L^2([-\tau, 0]; Z) \longrightarrow Z$ es lineal y acotado con $Z = L^2(\Omega)$ y $\phi_0 \in Z$, $\phi \in L^2([-\tau, 0]; Z)$.

Este resultado, si se cambia las condiciones de borde de Neumann por condiciones de borde de Dirichlet, se mantiene.

Esta fórmula es usada para caracterizar la controlabilidad aproximada de los sistemas de ecuaciones parabólicos con retardo, y a todo sistema de EDPs que puedan reescribirse en la forma $\dfrac{\partial}{\partial t}u = D\Delta u$, como la ecuación de la cuerda vibrante no lineal con amortiguamiento, ecuación de termolacidad, etc. Ver [12].

Finalmente, en este trabajo se dan condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad aproximada del sistema (0.0.11).

Como un caso particular se considerara el siguiente sistema controlado de ecuaciones parabólicas con retardo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t} & = & D\Delta z + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_i z(t-h_i,x) + Bu(t), \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & = & 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ z(0,x) & = & \phi_0(x), \quad x \in \Omega, \\ z(s,x) & = & \phi(s,x), \quad s \in [-\tau, 0), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.0.12}$$

donde $0 < h_1 < \cdots < h_p$ representa los puntos de retardo, $\tau = h_p$, $B, A_i \in L(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots p$, u pertenece a $L^2([0,r];U)$ $(U = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$ y $\phi_0 \in Z$, $\phi \in L^2([-\tau, 0]; Z)$ con $Z = U$.

Este trabajo está estructurado en cuatro capítulos. En el capítulo 1, el de preliminares, se presentan algunos resultados fundamentales sobre la teoría de semigrupos fuertemente continuos y ecuaciones diferenciales abstractas semi-lineales. El capítulo 2 trata de ecuaciones diferenciales funcionales o con retardos lineales, allí se prueba la existencia y unicidad de las soluciones y se asocia a estas ecuaciones un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert adecuado, para luego reescribirla como una ecuación diferencial ordinaria y finalmente estudiar la controlabilidad de estas ecuaciones.

El capítulo 3 representa el corazón de esta investigación, de hecho es un artículo publicado en el 2007, por A. Carrasco y H Leiva, ver [4], allí se considera la ecuación parcial parabólica funcional y se prueba que ésta tiene soluciones únicas, para luego asociarle un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert adecuado y concluir con la fórmula de variación de paramétros, pero para ello fue necesario generalizar un Lema de la teoría de semigrupo continuo debido a H. Leiva, el cual aparece en [9].

En el capítulo 4 se usa la fórmula de variación de paramétros encontrada en el capítulo 3 para estudiar la controlabilidad aproximada de ecuaciones parciales parabólicas con retardo.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Introducción

Sea $z_0 \in Z$ el estado inicial, es decir para $t = 0$ de un sistema dinámico definido en un espacio de Hilbert Z y el estado en un tiempo $t > 0$ es $z(t)$. Supóngase que la dinámica que gobierna la evolución es lineal y autónoma, entonces para cada t se puede definir un operador lineal $T(t)$ como sigue:

$$T(t) : Z \longrightarrow Z; \;\; T(0) = I$$

$$T(t)z_0 := z(t)$$

Supóngase también que el estado de nuestro sistema dinámico satisface la condición de Hadamard, esto es:

a) Es única.

b) Varia continuamente con respecto al estado inicial, es decir

$$z(t+s) = T(t+s)z_0 = T(t)z(s) = T(t)T(s)z_0$$

$$T(t+s) = T(t)T(s)$$

Ya que se supone que el estado varia continuamente con respecto al estado inicial z_0, se tiene que $T(t)$ es un mapeo acotado en Z, y finalmente imponiendo alguna suavidad en la trayectoria $z(t)$ y suponiendo que $z(t) \longrightarrow z_0$ cuando $t \longrightarrow 0^+$ para todo $z_0 \in Z$, se tiene:

$$\parallel T(t)z_0 - z_0 \parallel \longrightarrow 0 \;\; cuando \;\; t \longrightarrow 0^+.$$

Esto motiva la definición y el estudio de los semigrupos fuertemente continuos.

1.2. Semigrupo Fuertemente Continuo

***Definición* 1.2.1.** *Un semigrupo fuertemente continuo es el mapeo $T(t)$ de $\mathbb{R}^+$ en $\mathcal{L}(Z)$ el cual satisface:*

i) $T(t+s) = T(t)T(s); \quad 0 \leq s \leq t.$

ii) $T(0) = I.$

iii) $\parallel T(t)z_0 - z_0 \parallel \longrightarrow 0 \;\; cuando \;\; t \longrightarrow 0^+; \;\; \forall z_0 \in Z.$

1.3. Generador Infinitesimal

***Definición* 1.3.1.** *El generador infinitesimal A de un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert Z se define como:*

$$Az = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t) - I)z,$$

siempre que el límite exista. El dominio de A, D(A), es el conjunto de elementos en Z para el cual el límite existe.

Para la demostración de los siguientes resultados ver [5].

***Teorema* 1.3.1.** *Sea $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert Z, con generador infinitesimal A, entonces:*

(a) Si $z_0 \in D(A), \;\; T(t)z_0 \in D(A) \;\; \forall t \geq 0.$

(b) $\dfrac{d}{dt}(T(t)z_0) = AT(t)z_0 = T(t)Az_0,\ para\ z_0 \in D(A),\ t > 0.$

(c) $\dfrac{d^n}{dt^n}(T(t)z_0) = A^nT(t)z_0 = T(t)A^nz_0,\ \ z_0 \in D(A^n),\ t > 0.$

(d) $T(t)z_0 - z_0 = \displaystyle\int_0^t T(s)Az_0ds,\ \ z_0 \in D(A).$

(e) A *es un operador lineal cerrado y* $D(A)$ *es denso en* Z.

(f) $\displaystyle\bigcap_n D(A^n)$ *es denso en* Z.

***Lema* 1.3.1.** *Sea* $T(t)$ *un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal* A *y* $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$. *Si* $Re\lambda > w$ *entonces* $\lambda \in \rho(A)$ *y para todo* $z \in Z$ *los siguientes resultados se tienen:*
a. $R(\lambda, A)z = (\lambda I - A)^{-1}z = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)zdt$ *y* $\| R(\lambda, A) \| \leq \dfrac{M}{\sigma - w};\ \sigma = Re(\lambda);$
b. $\displaystyle\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} \alpha(\alpha I - A)^{-1}z = z,\ \forall z \in Z,$ *donde* $\alpha \in \mathbb{R}$.

***Teorema* 1.3.2. Teorema de Hille-Yosida-Phillips**

Una condición necesaria y suficiente para que un operador lineal cerrado A *con dominio denso en un espacio de Hilbert* Z *genere un semigrupo fuertemente continuo es que existan números reales* M, w, *tal que para todo número real* $\lambda > w,\ \ \lambda \in \rho(A)$ *(conjunto resolvente de* A*) y*

$$\| R(\lambda, A)^r \| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^r} \ \ r = 1, 2, ...$$

donde $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *es el resolvente. En este caso:*

$$\| T(t) \| \leq Me^{wt}.$$

***Definición* 1.3.2.** $T(t)$ *es un semigrupo de contracción si es un semigrupo fuertemente continuo que satisface la siguiente estimación* $\| T(t) \| \leq 1,\ \forall t \geq 0.$

***Teorema* 1.3.3.** *Sea A un operador cerrado, densamente definido con dominio $D(A)$ en un espacio de Hilbert Z. Entonces $A - wI$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción $T(t)$ en Z si, y sólo si, las siguientes condiciones se tienen para todo número real $\alpha > w$:*

$$\| (\alpha I - A)z \| \geq (\alpha - w) \| z \|, \ \textit{para } z \in D(A); \tag{1.3.1}$$

$$\| (\alpha I - A^*)z \| \geq (\alpha - w) \| z \|, \ \textit{para } z \in D(A^*), \tag{1.3.2}$$

donde A^* denota el adjunto de A.

Corolario 1.3.1. *Condiciones suficientes para que un operador A cerrado, densamente definido en un espacio de Hilbert sea el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo satisfaciendo $\| T(t) \| \leq e^{wt}$ son:*

$$Re(\langle Az, z\rangle) \leq w \| z \|^2 \ \textit{ para } z \in D(A); \tag{1.3.3}$$

$$Re(\langle A^*z, z\rangle) \leq w \| z \|^2 \ \textit{ para } z \in D(A^*). \tag{1.3.4}$$

***Teorema* 1.3.4.** *Si $T(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A en un espacio de Hilbert Z, entonces $T^*(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A^* en Z.*

1.4. Problema de Cauchy Homogéneo

Del teorema 1.3.1 se tiene que, si A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$, entonces la solución al problema de Cauchy:

$$\dot{z}(t) = Az(t), \ \ t \geq 0, \ \ z(0) = z_0 \in D(A),$$

viene dada por

$$z(t) = T(t)z_0.$$

1.5. Problema de Cauchy no Homogéneo

Considérese el problema de Cauchy no homogéneo

$$\dot{z}(t) = Az(t) + f(t), \quad z(0) = z_0, \tag{1.5.1}$$

donde en principio se supone que $f \in \mathbf{C}([0,\tau]; Z)$. El problema (1.5.1) es también llamado ecuación de evolución abstracta o ecuación diferencial abstracta.

En primer lugar, se dará el significado de solución de (1.5.1) y luego se definirá lo que es una solución clásica. Se denota por $\mathbf{C}^1([0,\tau]; Z)$ al conjunto de funciones continuas en $[0,\tau]$ a valores en Z, cuya derivada es continua en $[0,\tau]$.

***Definición* 1.5.1.** *La función $z(t)$ es una solución clásica de (1.5.1) en $[0,\tau]$ si $z(\cdot) \in \mathbf{C}^1([0,\tau]; Z)$, $z(t) \in D(A)$, $\forall t \in [0,\tau]$ y $z(t)$ satisface (1.5.1) sobre todo $[0,\tau]$. La función $z(\cdot)$ es una solución clásica en $[0,\infty)$ si $z(\cdot)$ es una solución clásica en $[0,\tau]$, $\forall \tau > 0$.*

Para la demostración de los siguientes resultados ver [6].

***Lema* 1.5.1.** *Supóngase que $f \in \mathbf{C}([0,\tau]; Z)$ y que z es una solución clásica (1.5.1) en $[0,\tau]$. Entonces $Az(\cdot)$ es un elemento de $\mathbf{C}([0,\tau]; Z)$, y*

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{1.5.2}$$

***Teorema* 1.5.1.** *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo $T(t)$ en el espacio de Hilbert Z, $f \in \mathbf{C}^1([0,t]; Z)$ y $z_0 \in D(A)$, entonces (1.5.2) es continuamente diferenciable en $[0,\tau]$ y además es la única solución clásica de (1.5.1).*

***Definición* 1.5.2.** *Si $f \in L^p([0,\tau]; Z)$ para $p \geq 1$ y $z_0 \in Z$, entonces se dice que (1.5.2) es una solución moderada de (1.5.1) en $[0,\tau]$.*

***Lema* 1.5.2.** *Supóngase que $f \in L^p([0,\tau]; Z)$ para $p \geq 1$ y $z_0 \in Z$. Entonces la solución moderada $z(t)$ definida por (1.5.1) es continua en $[0,\tau]$.*

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Funcionales Lineales

2.1. Introducción

En las aplicaciones, el comportamiento futuro de muchos fenómenos se asume descrito por soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Bajo ciertas condiciones este comportamiento queda determinado únicamente por el presente y es independiente del pasado. Los retardos o retrasos en tiempo son componentes naturales de los sistemas biológicos y existen numerosas razones para incluirlos en los modelos matemáticos. Por ejemplo, los retrasos podrían ser incluidos para representar:

- Lapsos de regeneración de recursos con períodos de maduración.
- Lapsos por alimentación, etc.

Incluir el retardo en una EDO hace que el modelo representado por ella sea más realístico y represente con más exactitud al problema real, en este caso la ecuación diferencial, se conoce con el nombre de ecuación diferencial con retardo (EDR) ó ecuación diferencial funcional (EDF). Aquí, el pasado ejecuta influencias sobre el futuro muy significativas, y de hecho el comportamiento de las soluciones es mucho más complicado que en las EDOs, tampoco hay fórmulas directa para representar las soluciones aun en la ecuación mas simple.

En este capítulo, se encuentra una fórmula de variación de parámetros para una clase de ecuaciones lineales con retardos y se utiliza para analizar la controlabilidad aproximada de un modelo de control gobernado por esta ecuación.

2.2. Ecuaciones Diferenciales con Retardo

En esta sección, se considera la siguiente ecuación diferencial con retardo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t-h_i), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= r, \\ x(\theta) &= f(\theta), \quad -h_p \leq \theta < 0, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde $0 < h_1 < \cdots < h_p$, representa los puntos de retardo, $x(t) \in \mathbb{C}^n$, $A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$[1], $i = 0, \ldots, p$, y $f \in L^2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$.

Se reformulará la ecuación (2.2.1) como una ecuación diferencial abstracta de la forma

$$\dot{z}(t) = Az(t), \qquad z(0) = z_0,$$

donde A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert adecuado. Primero, se demostrará que (2.2.1) tiene una única solución para todo $r \in \mathbb{C}^n$ y todo $f \in L^2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$.

***Teorema* 2.2.1.** *Considérese la ecuación diferencial con retardo (2.2.1). Para todo $r \in \mathbb{C}^n$ y todo $f \in L^2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$, existe una única función $x(\cdot)$ en $[0, \infty)$, que es a.c*[2] *y satisface la ecuación diferencial (2.2.1). Esta función es llamada la solución de (2.2.1), y satisface*

$$x(t) = e^{A_0 t} r + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t e^{A_0(t-s)} A_i x(s-h_i) ds, \qquad t \geq 0. \tag{2.2.2}$$

Para su demostración, ver [6].

Corolario 2.2.1. *La solución de la ecuación diferencial con retardo (2.2.1) satisface*

[1] Denótese por $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ al conjunto de las aplicaciones lineales y acotadas en $\mathbb{C}^n$.

[2] *a.c: función absolutamente continua.*

$$x(t_1) = e^{A_0(t_1-t_0)}x(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \int_{t_0}^{t_1} e^{A_0(t_1-s)} A_i x(s-h_i) ds, \tag{2.2.3}$$

para todo real positivo t_0, t_1.

Demostración

Considérese la siguiente aplicación: $F(s) = e^{-A_0 s}x(s)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(F(s)) &= \frac{d}{ds}(e^{-A_0 s}x(s)) \\
&= e^{-A_0 s}\dot{x}(s) - A_0 e^{-A_0 s}x(s) \\
&= \sum_{i=1}^{p} e^{-A_0 s} A_i x(s-h_i).
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds}(F(s)) &= F(t_1) - F(t_0) \\
&= e^{-A_0 t_1}x(t_1) - e^{-A_0 t_0}x(t_0).
\end{aligned}$$

Así,

$$e^{-A_0 t_1}x(t_1) - e^{-A_0 t_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{p} e^{-A_0 s} A_i x(s-h_i) ds,$$

esto implica que,

$$x(t_1) = e^{A_0(t_1-t_0)}x(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \int_{t_0}^{t_1} e^{A_0(t_1-s)} A_i x(s-h_i) ds.$$

□

***Lema* 2.2.1.** *Si* $x(t)$ *es la solución de (2.2.1), entonces las siguientes desigualdades se tienen:*

$$\| x(t) \|^2 \leq C_t \left[\| r \|^2 + \| f \|^2_{L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)} \right] \tag{2.2.4}$$

$$\int_0^t \| x(\tau) \|^2 \, d\tau \leq D_t \left[\| r \|^2 + \| f \|^2_{L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)} \right] \tag{2.2.5}$$

Demostración

En primer lugar, por el Teorema de Hille-Yosida-Phillips, si $e^{A_0 t}$ es un semigrupo fuertemente continuo, entonces existen constantes M_0, w_0, tal que

$$\| e^{A_0 t} \| \leq M_0 e^{w_0 t}, \qquad t \geq 0.$$

Definiendo la constante positiva M por

$$M := max(\| A_1 \|, ..., \| A_p \|, M_0),$$

entonces se tiene de (2.2.2) que:

$$\begin{aligned}
\| x(t) \| &\leq \| e^{A_0 t} r \| + \left\| \sum_{i=1}^{p} \int_0^t e^{A_0(t-s)} A_i x(s-h_i) ds \right\| \\
&\leq M e^{w_0 t} \| r \| + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t M e^{w_0(t-s)} M \| x(s-h_i) \| ds \\
&= M e^{w_0 t} \| r \| + \sum_{i=1}^{p} M^2 \int_{-h_i}^{t-h_i} e^{w_0(t-\tau-h_i)} \| x(\tau) \| d\tau \qquad \tau = s - h_i \\
&= M e^{w_0 t} \| r \| + M^2 e^{w_0 t} \sum_{i=1}^{p} \int_{-h_i}^{t-h_i} e^{-w_0(\tau+h_i)} \| x(\tau) \| d\tau.
\end{aligned}$$

Pero,

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{-h_i}^{t-h_i} e^{-w_0(\tau+h_i)} \| x(\tau) \| d\tau \leq \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{-h_i}^{0} e^{-w_0(\tau+h_i)} \| x(\tau) \| d\tau + \int_0^t e^{-w_0(\tau+h_i)} \| x(\tau) \| d\tau \right)$$

Ahora bien, dado que $e^{-w_0(\tau+h_i)} < 1$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{-h_i}^{0} e^{-w_0(\tau+h_i)} \| x(\tau) \| d\tau \leq \sum_{i=1}^{p} \int_{-h_i}^{0} \| f(\tau) \| d\tau$$

y de igual forma ya que $e^{-w_0 h_i} < 1$ se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{p} \int_0^t e^{-w_0(\tau+h_i)} \| x(\tau) \| d\tau \leq \sum_{i=1}^{p} \int_0^t e^{-w_0 \tau} \| x(\tau) \| d\tau.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p}\int_{-h_i}^{t-h_i} e^{-w_0(\tau+h_i)} \parallel x(\tau) \parallel d\tau &\leq \sum_{i=1}^{p}\int_{-h_i}^{0} \parallel f(\tau) \parallel d\tau + \sum_{i=1}^{p}\int_{0}^{t} e^{-w_0\tau} \parallel x(\tau) \parallel d\tau \\
&\leq \sum_{i=1}^{p}\int_{-h_p}^{0} \parallel f(\tau) \parallel d\tau + \sum_{i=1}^{p}\int_{0}^{t} e^{-w_0\tau} \parallel x(\tau) \parallel d\tau \\
&\leq p\sqrt{h_p} \parallel f \parallel_{L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)} + p\int_{0}^{t} e^{-w_0\tau} \parallel x(\tau) \parallel d\tau
\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene,

$$\parallel x(t) \parallel \leq e^{w_0 t}\left[M \parallel r \parallel + M^2 p\sqrt{h_p} \parallel f \parallel_{L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)} + M^2 p\int_{0}^{t} e^{-w_0\tau} d\tau\right].$$

Haciendo $\alpha = M \parallel r \parallel + M^2 p\sqrt{h_p} \parallel f \parallel_{L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)}$, $\beta = M^2 p$ y $g(t) = e^{w_0 t} \parallel x(t) \parallel$ se tiene que:

$$g(t) \leq \alpha + \beta\int_{0}^{t} g(\tau) d\tau.$$

Del Lema de Gronwall se concluye que

$$g(t) = \alpha e^{\beta t}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\parallel x(t) \parallel &\leq \alpha e^{(\beta+w_0)t} \\
&= e^{(pM^2+w_0)t}[M \parallel r \parallel + M^2 p\sqrt{h_p} \parallel f \parallel_{L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)}] \\
&\leq e^{(pM^2+w_0)t} max(M, M^2 p\sqrt{h_p})[\parallel r \parallel + \parallel f \parallel_{L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\parallel x(t) \parallel^2 \leq 2e^{2(pM^2+w_0)t}[max(M, M^2 p\sqrt{h_p})]^2[\parallel r \parallel^2 + \parallel f \parallel^2_{L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)}].$$

Integrando se obtiene la otra desigualdad. $\square$

Considérese el espacio de Hilbert $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n) := \mathbb{C}^n \oplus L^2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$ con el producto interior usual:

$$\left\langle \begin{pmatrix} r_1 \\ f_1(\cdot) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 \\ f_2(\cdot) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{M}_2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)} := \langle r_1, r_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} + \langle f_1(\cdot), f_2(\cdot) \rangle_{L^2}.$$

Se define, para $t \geq 0$, el siguiente operador en $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$

$$T(t) \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_t(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{2.2.6}$$

donde $x(\cdot)$ es la solución de (2.2.1) y $x(-s) = f(-s)$ para $h_p > s > 0$.

***Teorema* 2.2.2.** *El operador $T(t)$ definido por (2.2.6) para $t \geq 0$ satisface:*

(a) $T(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)), \quad \forall t \geq 0$.

(b) $T(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo en $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$.

Demostración

(a) De la linealidad de (2.2.1) y de la únicidad de la solución se tiene que $T(t)$ es lineal.

Se demostrará que $T(t)$ es un operador acotado.

En efecto, sea $\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| T(t) \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \right\| &= \| x(t) \|^2 + \int_{-h_p}^{0} \| x(t+\tau) \|^2 \, d\tau \\ &= \| x(t) \|^2 + \int_{t-h_p}^{t} \| x(\tau) \|^2 \, d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \| x(t) \|^2 + \int_{t-h_p}^{0} \| x(\tau) \|^2 \, d\tau + \int_0^t \| x(\tau) \|^2 \, d\tau \\
&\leq \| x(t) \|^2 + \int_0^t \| x(\tau) \|^2 \, d\tau + \| f \|_{L^2}^2 \\
&\leq C_t \left[\| r \|^2 + \| f \|_{L^2}^2 \right] + D_t \left[\| r \|^2 + \| f \|_{L^2}^2 \right] + \| f \|_{L^2}^2 \\
&\leq (C_t + D_t + 1) \left[\| r \|^2 + \| f \|_{L^2}^2 \right].
\end{aligned}
$$

(b) En primer lugar, sea $\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$.

(i)

$$
T(0) \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(0+\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto, $T(0) = I$.

(ii) Para probar que $T(t+s) = T(t)T(s)$, se considera la función $g(t) = x(t+s)$, donde $x(\cdot)$ es la solución de (2.2.1). Entonces $g(t)$ satisface:

$$
\begin{aligned}
\dot{g}(t) &= A_0 g(t) + \sum_{i=1}^{p} A_i g(t-h_i), \quad t \geq 0, \\
g(0) &= x(s), \\
g(\theta) &= x(\theta + s), \quad -h_p \leq \theta < 0,
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

Usando la definición de $T(t)$, se concluye que

$$
\begin{pmatrix} g(t) \\ g(t+\cdot) \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} x(s) \\ x(s+\cdot) \end{pmatrix}.
$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
T(t+s)\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(t+s) \\ x(t+s+\cdot) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g(t) \\ g(t+\cdot) \end{pmatrix} \\
&= T(t)\begin{pmatrix} x(s) \\ x(s+\cdot) \end{pmatrix} \\
&= T(t)T(s)\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, se probará que $T(t)$ es fuertemente continuo.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\| T(t)\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \right\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t+\cdot) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \| \, x(t) - r \, \|_{\mathbb{C}^n}^2 + \| \, x(t+\cdot) - f(\cdot) \, \|_{L^2}^2 \\
&= \left\| e^{A_0 t} r + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t e^{A_0(t-s)} A_i x(s-h_i) ds - r \right\|^2 + \\
&\quad \int_{-h_p}^{0} \| \, x(t+\tau) - f(\tau) \, \|^2 \, d\tau
\end{aligned}$$

Ahora bien, se tiene que

$$\left\| e^{A_0 t} r + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t e^{A_0(t-s)} A_i x(s-h_i) ds - r \right\|^2 \longrightarrow 0$$

cuando $t \longrightarrow 0^+$, ya que la función

$$v(t) = e^{A_0 t} r + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t e^{A_0(t-s)} A_i x(s-h_i) ds$$

es continua.

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-h_p}^{0} \| x(t+\tau) - f(\tau) \|^2 \, d\tau &\leq 2 \int_{-h_p}^{0} (\| x(t+\tau) \|^2 + \| f(\tau) \|^2) d\tau \\
&= 2 \int_{-h_p}^{0} \| x(t+\tau) \|^2 \, d\tau + \| f \|_{L^2} \\
&\leq 2 \int_0^t \| x(\tau) \|^2 \, d\tau + 3 \| f \|_{L^2} \\
&\leq 2D_t(\| r \|^2 + \| f \|_{L_2}) + 3 \| f \|_{L^2} \\
&\leq (2D_t + 3)(\| r \|^2 + \| f \|_{L^2})
\end{aligned}$$

y de acá que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \| x(t+\tau) - f(\tau) \|^2 = 0.$$

Luego, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se obtiene que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \int_{-h_p}^{0} \| x(t+\tau) - f(\tau) \|^2 \, d\tau = 0.$$

Por tanto, $T(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo. $\square$

Lema 2.2.2. *Sea $T(t)$ el semigrupo fuertemente continuo definido por (2.2.6) y A el generador infinitesimal. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, suficientemente grande, el operador resolvente viene dado por:*

$$(\alpha I - A)^{-1} \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(0) \\ g(\cdot) \end{pmatrix}$$

donde

$$g(\theta) = e^{\alpha\theta} g(0) - \int_0^\theta e^{\alpha(\theta - s)} f(s) ds, \quad \theta \in [-h_p, 0],$$

y de acá que

$$g(0) = [\Delta(\alpha)]^{-1} \left[r + \sum_{i=1}^{p} \int_{-h_p}^{0} e^{-\alpha(\theta + h_i)} A_i f(\theta) d\theta \right],$$

donde

$$\Delta(\lambda) = \left[\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i} \right]. \tag{2.2.8}$$

Más aún, la función g satisface:

$$\alpha g(0) = r + A_0 g(0) + \sum_{i=1}^{p} A_i g(-h_i).$$

Demostración

Del Lema 1.3.1, se tiene que, para $\alpha > \alpha_0$

$$(\alpha I - A)^{-1} \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(t) \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t + \cdot) \end{pmatrix} dt.$$

Para $\theta \in [-h_p, 0]$ se define:

$$g(\theta) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} x(t + \theta) dt.$$

Haciendo el cambio de variable $s = t + \theta$, se tiene

$$g(\theta) = \int_0^\infty e^{-\alpha(s - \theta)} x(s) ds.$$

Aplicando la regla de Leibnitz se obtiene que

$$\frac{dg(\theta)}{d\theta} = \alpha g(\theta) - x(\theta), \quad -h_p \leq \theta \leq 0.$$

Por la fórmula de variación de parámetros para ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene que $g(\cdot)$ satisface

$$g(\theta) = e^{\alpha\theta}g(0) - \int_0^\theta e^{\alpha(\theta-s)}f(s)ds, \qquad \theta \in [-h_p, 0].$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha g(0) &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t}x(t)dt \\
&= -(x(t)e^{-\alpha t}]_0^\infty) + \int_0^\infty e^{-\alpha t}x'(t)dt \\
&= r + \int_0^\infty e^{-\alpha t}\left(A_0x(t) + \sum_{i=1}^p A_ix(t-h_i)\right)dt \\
&= r + A_0\int_0^\infty e^{-\alpha t}x(t)dt + \sum_{i=1}^p \int_0^\infty e^{-\alpha t}A_ix(t-h_i))dt \\
&= r + A_0g(0) + \sum_{i=1}^p A_ig(-h_i).
\end{aligned}$$

Por otro lado, de la penúltima igualdad separando integrales se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha g(0) &= r + A_0g(0) + \sum_{i=1}^p \int_{h_i}^\infty e^{-\alpha t}A_ix(t-h_i)dt + \sum_{i=1}^p \int_0^{h_i} e^{-\alpha t}A_if(t-h_i)dt \\
&= r + A_0g(0) + \sum_{i=1}^p \int_0^\infty e^{-\alpha(s+h_i)}A_ix(s)ds + \sum_{i=1}^p \int_0^{h_i} e^{-\alpha t}A_if(t-h_i)dt \\
&= r + A_0g(0) + \sum_{i=1}^p e^{-\alpha h_i}A_ig(0) + \sum_{i=1}^p \int_0^{h_i} e^{-\alpha t}A_if(t-h_i)dt.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\alpha I - A_0 - \sum_{i=1}^p e^{-\alpha h_i}A_i\right)g(0) = r + \sum_{i=1}^p \int_{-h_i}^0 e^{-\alpha(\theta+h_i)}A_if(\theta)d\theta.$$

Por lo tanto,

$$g(0) = [\Delta(\alpha)]^{-1} \left[r + \sum_{i=1}^{p} \int_{-h_p}^{0} e^{-\alpha(\theta + h_i)} A_i f(\theta) d\theta \right],$$

donde

$$\Delta(\lambda) = \left[\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i} \right].$$

$\square$

***Teorema* 2.2.3.** *Si $T(t)$ es el semigrupo fuertemente continuo definido por (2.2.6), entonces el generador infinitesimal viene dado por*

$$A \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 r + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_i f(-h_i) \\ \\ \dfrac{df}{d\theta}(\cdot) \end{pmatrix} \tag{2.2.9}$$

con dominio

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n) / f \text{ es a.c.}, \ \frac{df(\cdot)}{d\theta} \in L^2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n) \text{ y } f(0) = r \right\}.$$

Más aún, el espectro de A es discreto y viene dado por

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n / det(\Delta(\lambda)) = 0\}.$$

La multiplicidad de todos los autovalores es finito. Además, para todo $\delta \in \mathbb{R}$, existe una cantidad finita de autovalores en $\mathbb{C}_\delta^+$[3]. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$ entonces $\begin{pmatrix} r \\ e^{\lambda} r \end{pmatrix}$, con $r \neq 0$ satisface $\Delta(\lambda) r = 0$ y es un autovector de A con autovalor λ. Por otro lado, si ϕ es un autovector de A con autovalor λ, entonces $\phi = \begin{pmatrix} r \\ e^{\lambda} r \end{pmatrix}$ con $\Delta(\lambda) r = 0$.

[3] $\mathbb{C}_\delta^+ : \{\lambda \in \mathbb{C} / Re(\lambda) > \delta\}$

Demostración

Denótese por $\widetilde{A}$ el operador

$$\widetilde{A}\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 r + \sum_{i=1}^{p} A_i f(-h_i) \\ \\ \dfrac{df}{d\theta}(\cdot) \end{pmatrix}$$

con dominio

$$D(\widetilde{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)/f \ es \ a.c., \ \frac{df(\cdot)}{d\theta} \in L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n) \ y \ f(0) = r \right\}.$$

Se probará que el generador infinitesimal de A es igual $\widetilde{A}$. En efecto, sea $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que se cumpla el Lema anterior. Basta probar que la inversa de $(\alpha_0 I - \widetilde{A})$ es igual a $(\alpha_0 I - A)^{-1}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\alpha_0 I - \widetilde{A})(\alpha_0 I - A)^{-1}\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} &= (\alpha_0 I - \widetilde{A})\begin{pmatrix} g(0) \\ g(\cdot) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_0 g(0) - A_0 g(0) - \sum_{i=1}^{p} A_i g(-h_i) \\ \\ \alpha_0 g(\cdot) - \dfrac{dg(\cdot)}{d\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r \\ \alpha_0 g(\cdot) - \dfrac{dg(\cdot)}{d\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, se probará que:

$$(\alpha_0 I - A)^{-1}(\alpha_0 I - \widetilde{A}) \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}$$

para $\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}$. Sea $\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \in D(\widetilde{A})$, se define

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ f_1(\cdot) \end{pmatrix} := (\alpha_0 I - A)^{-1}(\alpha_0 I - \widetilde{A}) \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (\alpha_0 I - \widetilde{A}) \begin{pmatrix} r_1 \\ f_1(\cdot) \end{pmatrix} &= (\alpha_0 I - \widetilde{A}) \left\{ (\alpha_0 I - A)^{-1}(\alpha_0 I - \widetilde{A}) \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \right\} \\ &= (\alpha_0 I - \widetilde{A}) \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo que, $\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ f_1(\cdot) \end{pmatrix}$ si, y sólo si, $(\alpha_0 I - \widetilde{A})$ es inyectiva. Si se supone lo contrario entonces existe $\begin{pmatrix} r_0 \\ f_0(\cdot) \end{pmatrix} \in D(\widetilde{A})$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_0 I - \widetilde{A}) \begin{pmatrix} r_0 \\ f_0(\cdot) \end{pmatrix}$$

$$= \quad (\alpha_0 I - \widetilde{A}) \begin{pmatrix} r_0 \\ \\ f_0(\cdot) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 f_0(0) - A_0 f_0(0) - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_i f_0(-h_i) \\ \\ \alpha_0 f_0(\cdot) - \dfrac{df_0(\cdot)}{d\theta} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, $\dfrac{df_0(\cdot)}{d\theta} = \alpha_0 f_0(\cdot)$, esto implica que $f_0(\theta) = f_0(0)e^{\alpha_0 \theta}$.

Luego,

$$0 = \alpha_0 f_0(0) - A_0 f_0(0) - \sum_{i=1}^{p} A_i f_0(-h_i) = \alpha_0 f_0(0) - A_0 f_0(0) - \sum_{i=1}^{p} A_i f_0(0) e^{-\alpha_0 h_i}.$$

Pero, como $\alpha_0 \in \rho(\widetilde{A})$ se tiene que $det(\Delta(\alpha_0)) \neq 0$, por lo que, $\Delta(\alpha_0)$ es invertible. Así, si $\Delta(\alpha_0) f_0(0) = 0$ entonces $f_0(0) = 0$. En consecuencia, $f_0(\cdot) = f_0(0)e^{\alpha_0 (\cdot)} = 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $(\alpha_0 I - \widetilde{A})$ es inyectivo. Así, $A = \widetilde{A}$.

Ahora bien, para calcular el espectro de A, se hace uso de la expresión explicita para el operador resolvente obtenida en el Lema anterior. Se denota por Q_λ la extensión del resolvente $\rho(A)$ a $\mathbb{C}$, esto es:

$$Q_\lambda \begin{pmatrix} r_0 \\ \\ f_0(\cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g(0) \\ \\ g(\cdot) \end{pmatrix}$$

si $\lambda \in \mathbb{C}$ satisface que $det(\Delta(\lambda)) \neq 0$ entonces Q_λ es un operador lineal acotado de

$\mathbb{M}_2$ en $\mathbb{M}_2$, ya que

$$\begin{aligned} g(0) &= (\Delta(\lambda))^{-1}\left(r+\sum_{i=1}^{p}\int_{-h_i}^{0} e^{-\lambda(\theta+h_i)}A_i f(\theta)d\theta\right) \\ g(\theta) &= e^{\lambda\theta}g(0)-\int_{0}^{\theta} e^{-\lambda(\theta-s)}f(s)ds, \qquad \theta\in[-h_p,0]. \end{aligned}$$

Más aún, como $(\lambda I-A)Q_\lambda = I$ y $det(\Delta(\lambda))\neq 0$ se tiene que $(\lambda I - A)$ es inyectiva y en consecuencia se concluye que $Q_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A)$. De aquí se obtiene:

$$\left\{\lambda\in\mathbb{C}/det\left(\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i}\right)\neq 0\right\}\subset\rho(A).$$

Por otro lado, si $det(\Delta(\lambda)) = 0$ entonces existe un $\xi\in\mathbb{C}^n$ tal que $\Delta(\lambda)\xi = 0$. Luego, si se considera el siguiente elemento de $\mathbb{M}_2$, $z_0 = \begin{pmatrix}\xi \\ e^{\lambda}\xi\end{pmatrix}$, este se encuentra en $D(A)$, ya que $e^{\lambda}\xi$ es a.c. y $\lambda e^{\lambda}\xi\in L_2$ con $e^0\xi=\xi$. Además,

$$(\lambda I - A)z_0 = \begin{pmatrix} \lambda\xi - A_0\xi - \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-h_i\lambda}\xi \\ \\ \lambda e^{\lambda\theta}\xi - \frac{d}{d\theta}e^{\lambda\theta}\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0\end{pmatrix}$$

Así, $\{\lambda\in\mathbb{C}/det(\Delta(\lambda))=0\}\subset\sigma_p(A)$.

Sea $\lambda\in\mathbb{C}^+_\delta$ con $|\lambda| > \| A_0 \| + \sum_{i=1}^{p}\| A_i \| e^{-\delta h_i}$. Se tiene que:

$$\| A_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-h_i\lambda} \| \leq \| A_0 \| + \sum_{i=1}^{p}\| A_i \| e^{-\delta h_i} < |\lambda| .$$

En consecuencia, se tiene que $A_0+\sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i}$ es un operador lineal acotado en $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Luego, por corolario (A.4.10) de [6], se tiene que $\lambda I - A_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i}$ es invertible. De acá que, $det(\Delta(\lambda))\neq 0$ y por tanto $\lambda\in\rho(A)$. Más aún, la función determinante es diferenciable, por lo que la función composición $det(\lambda I - A_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i})$ es diferenciable en $\mathbb{C}^n$ y por lo tanto una función entera, ya que el operador $\lambda I - A_0 +$

$\sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i}$ es lineal y en consecuencia, tiene asociado una representación matricial, la cual también es diferenciable en $\mathbb{C}^n$.

Por otro lado, como dicha función es no nula, se tiene por Teorema (A.1.4) de [6] que los ceros son aislados en $\overline{\mathbb{C}_\delta^+} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} / \mid \lambda \mid \leq \| A_0 \| + \sum_{i=1}^{p} \| A_i \| e^{-\delta h_i}\}$[4], y como en el resto de $\mathbb{C}_\delta^+$ no tiene ceros, se concluye que solo existe un número finito de ceros en $\mathbb{C}_\delta^+$.

Sea $\phi = \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}$ un autovector de A con autovalor λ. Se tiene que

$$A\phi = A \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 r + \sum_{i=0}^{p} A_i f(-h_i) \\ \\ \dfrac{df(\cdot)}{d\theta} \end{pmatrix}$$

Luego, para $\theta \in [-h_p, 0)$ se tiene

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = Af(\theta) = \lambda f(\theta)$$

esto implica que

$$f(\theta) = e^{\lambda\theta} f(0) = e^{\lambda\theta} r.$$

Por otro lado,

$$A_0 r + \sum_{i=0}^{p} A_i f(-h_i) = \lambda r$$

Así,

$$\Delta(\lambda) r = \left(\lambda I - A_0 r + \sum_{i=0}^{p} A_i f(-h_i) \right) r = 0.$$

Ahora bien, del Lema 2.2.2 se tiene que

$$(\alpha I - A)^{-1} \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(0) \\ e^{\alpha(\cdot)} g(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\int_0^\theta e^{\alpha(\cdot - s)} f(s) ds \end{pmatrix}$$

[4] $\overline{\mathbb{C}_\delta^+} = \{\lambda \in \mathbb{C} / Re(\lambda) \geq \delta\}$

En consecuencia, de la expresión anterior, se concluye que el operador resolvente es la suma de un operador con rango finito y un operador integral. Pero, por el Lema A.3.22 de [6] se tiene que $\begin{pmatrix} g(0) \\ e^{\alpha(\cdot)}g(0) \end{pmatrix}$ es compacto y por el Teorema A.3.24 de [6] se obtiene también que el operador integral es compacto. Así, se concluye que el operador resolvente es compacto. Luego, por el Teorema A.4.18 de [6] se sigue que la multiplicidad de los autovalores del operador $(\alpha I - A)^{-1}$ es finita y por tanto del Lema A.4.19 de [6] se obtiene que la multiplicidad de los autovalores de A son también finita.

$\square$

Corolario 2.2.2. *Sea A el generador infinitesimal dado por (2.2.9). Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $det(\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i}) \neq 0$, se tiene que el operador resolvente es dado por:*

$$(\lambda I - A)^{-1} \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(0) \\ g(\cdot) \end{pmatrix},$$

donde

$$g(\theta) = e^{\lambda\theta} g(0) - \int_0^\theta e^{\lambda(\theta - s)} f(s) ds, \quad \theta \in [-h_p, 0],$$

y

$$g(0) = [\Delta(\lambda)]^{-1} \left[r + \sum_{i=1}^{p} \int_{-h_p}^{0} e^{-\lambda(\theta + h_i)} A_i f(\theta) d\theta \right],$$

$\Delta(\lambda)$ definido como en (2.2.8). Más aún, el operador resolvente es compacto.

En consecuencia, se tiene que la ecuación (2.2.1) se puede reformular como una ecuación diferencial abstracta:

$$\dot{z}(t) = Az(t), \qquad z(0) = z_0,$$

en el espacio $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$. El vector $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t + \cdot) \end{pmatrix}$ contiene la información del comportamiento en el presente, $x(t)$, y la información del pasado, $x(\cdot)$.

***Definición* 2.2.1.** *Sea V un subespacio del espacio de Hilbert Z y sea $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en Z. Se dice que V es $T(t)$-invariante si para todo $t \geq 0,\ T(t)V \subset V$.*

***Definición* 2.2.2.** *Sea V un subespacio del espacio de Hilbert Z y sea A el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo en Z. Se dice que V es A-invariante si $A(V \cap D(A)) \subset V$.*

La demostración de los siguientes resultados pueden encontrarse en [6].

***Lema* 2.2.3.** *Sea V un subespacio cerrado de Z y sea A el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$. Si V es $T(t)$-invariante entonces se tiene lo siguiente:*

a. V es A-invariante.

b. $T(t)\mid_V$ es un semigrupo fuertemente continuo en V con generador infinitesimal A^V, donde $A^V = Av$ para $v \in D(A^V) \cap V$.

***Lema* 2.2.4.** *Supóngase que A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$ en el espacio de Hilbert Z. Si V es un subespacio cerrado contenido en $D(A)$ y V es A-invariante entonces V es $T(t)$-invariante.*

Corolario 2.2.3. *Si V es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert Z y $A \in \mathcal{L}(Z)$ entonces A-invariante es equivalente a $T(t)$-invariante.*

***Lema* 2.2.5.** *Sea $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en Z con generador infinitesimal A. Sea $\rho_\infty(A)$ la componente maximal del conjunto resolvente $\rho(A)$ de A tal que contiene el intervalo $[r, \infty)$. Para el subespacio cerrado V, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a. V es $T(t)$-invariante.

b. V es $(\lambda I - A)^{-1}$-invariante para algún $\lambda \in \rho_\infty(A)$.

c. V es $(\lambda I - A)^{-1}$-invariante para todo $\lambda \in \rho_\infty(A)$.

***Lema* 2.2.6.** *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$ en Z. Supóngase que el espectro de A es la unión de dos conjuntos, σ^+ y σ^-, tal que la curva Γ simple, rectificable y cerrada, esta contenida en un conjunto abierto, conteniendo en su interior a σ^+ y σ^- en el exterior. El operador, P_Γ, definido por*

$$P_\Gamma z = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1} z d\lambda,$$

donde Γ recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj, es una proyección. A esta proyección se le dara el nombre de proyección espectral en σ^+. Esta proyección induce una descomposición del espacio Z,

$$Z = Z^+ \oplus Z^-,$$

donde $Z^+ = P_\Gamma Z$ y $Z^- = (I - P_\Gamma)Z$.

Más aún, las siguientes propiedades se siguen:

a. Para todo $s \in \rho(A)$ se tiene que $(sI - A)^{-1} P_\Gamma = P_\Gamma (sI - A)^{-1}$, Z^+ y Z^- son subespacios invariantes bajo $(sI - A)^{-1}$ y Z^+ y Z^- son $T(t)$-invariante.

b. $P_\Gamma Z \subset D(A)$, y $AZ^+ \subset Z^+$, $A(Z^- \bigcap D(A)) \subset Z^-$.

c. La restricción de A en Z^+, A^+, es un operador acotado en Z^+ y el espectro $\sigma(A^+) = \sigma^+(A)$. La restricción de A en Z^-, A^-, tiene espectro $\sigma(A^-) = \sigma^-(A)$. Más aún, para $\lambda \in \rho(A)$ se obtiene que $(\lambda I - A^+)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} |_{Z^+}$ y $(\lambda I - A^-)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} |_{Z^-}$.

d. Los operadores $T^+(t) := T(t) |_{Z^+}$ y $T^-(t) := T(t) |_{Z^-}$ son semigrupos fuertemente continuos en Z^+ y Z^- respectivamente, y sus generadores infinitesimales son dados por A^+ y A^-, respectivamente.

e. Si σ^+ consiste sólo de un número finito de autovalores con orden finito, entonces P_Γ proyecta sobre el espacio de los autovectores generalizados de los autovalores que se encuentran dentro de la curva Γ. Así, se tiene que,

$$ranP_\Gamma = \sum_{\lambda_n \in \sigma^+} Ker(\lambda_n I - A)^{\nu(n)}$$

donde $\nu(n)$ es el orden de λ_n.

f. Si $\sigma^+ = \lambda_n$ con λ_n un autovalor con multiplicidad 1, entonces

$$P_\Gamma z = \langle z, \psi_n \rangle \phi_n,$$

donde ϕ_n es el autovector de A correspondiente a λ_n y ψ_n es el autovector de A^* correspondiente a $\overline{\lambda_n}$ con $\langle \phi_n, \psi_n \rangle = 1$.

***Lema* 2.2.7.** *Sea la ecuación diferencial con retardo (2.2.1)*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t-h_i), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= r, \\ x(\theta) &= f(\theta), \quad -h_p \leq \theta < 0, \end{aligned}$$

definida en el espacio $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$. El generador infinitesimal A tiene la propiedad de que $\rho_\infty(A)$ definido en el Lema 2.2.5 es igual a todo el conjunto resolvente $\rho(A)$. Si V es un subespacio cerrado e invariante por $T(t)$ tal que $\sigma(A|_V) = \emptyset$, entonces $V = \{0\}$ si $\det A_p \neq 0$.

Demostración

En primer lugar, como el espectro de la ecuación diferencial considerada es discreto, se tiene que $\rho(A) = \rho_\infty(A)$, por lo que, del Lema 2.2.5 se obtiene que $(\lambda I - A)^{-1} V \subset V$ para todo $\lambda \in \rho(A)$. De igual forma del Lema 2.2.6 considerando $V = Z^+$ se sigue fácilmente que $(\lambda I - A)^{-1}|_V = (\lambda I_V - A^V)^{-1}$ para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Sea $\alpha \in \rho(A)$ y sea v un elemento en V. Considerando

$$\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} := (\alpha I - A)^{-1} v$$

se tiene del Lema 2.2.5 que $\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \in V \cap D(A)$.

Ahora bien, para $\lambda \in \rho(A)$ se tiene que

$$(\lambda I_V - A^V)^{-1} \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_\lambda(0) \\ g_\lambda(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{2.2.10}$$

donde g_λ viene dado como en el corolario 2.2.2.

Por otro lado, ya que $\sigma(A|_V) = \emptyset$, se tiene que (2.2.10) puede ser extendida holomórficamente a todo $\mathbb{C}$. Así que:

$$g_\lambda(0) = [\Delta(\lambda)]^{-1} \left[r + \sum_{i=1}^{p} \int_{-h_i}^{0} e^{-\lambda(\theta+h_i)} A_i f(\theta) d\theta \right],$$

es una función entera. Más aún, existen constantes positivas c_1, c_2, y c_3 tales que:

$$|g_\lambda(0)| \leq \frac{c_1}{|\lambda| + 1} \qquad para \ \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$$

$$|g_\lambda(0)| \leq c_2 e^{-c_3 Re(\lambda)} \quad para \ \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0.$$

Del Teorema de Paley-Wiener de [6], se sigue que $g_\lambda(0)$ es la transformada de Laplace de una función que es cero en el intervalo $[c_3, \infty)$. Del Lema 2.2.2 se tiene que $g_\lambda(0)$ es la transformada de Laplace de $x(t)$, donde $x(t)$ es la solución de la ecuación diferencial con retardo con $x(0) = r$ y $x(\theta) = f(\theta)$ para $\theta \in [-h_p, 0]$.

Así,

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t - h_i) \ \ para \ t \geq 0.$$

Para $t \in (h_{p-1} + c_3, h_p + c_3)$, se tiene que,

$$0 \ = \ A_0 0 + \sum_{i=1}^{p-1} A_i 0 + A_p x(t - h_p).$$

Pero, por hipotesis $det A_p \neq 0$, por lo que, A_p es invertible y en conclusión, $x(t - h_p) = 0$. Así que $x(\tau) = 0$, para todo $\tau \geq c_3 - (h_p - h_{p-1})$. Repitiendo este argumento se obtiene que $x(t) = 0$, para todo $t \geq 0$ y $f(\cdot) = 0$. Así se tiene que $(\alpha I - A)^{-1}v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y por tanto $v = 0$. Como v era fijo, pero arbitrario, se concluye que $V = \{0\}$.

$\square$

***Teorema* 2.2.4.** *Sea la ecuación diferencial con retardo*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t-h_i), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= r, \\ x(\theta) &= f(\theta), \qquad\qquad -h_p \leq \theta < 0, \end{aligned}$$

definida en el espacio $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$*. Si* $\det A_p \neq 0$*, entonces los vectores propios generalizados de* A *son densos en* Z*. Lo mismo ocurre para los vectores propios generalizados de* A^**.*

Demostración

Se probará el resultado en primer lugar para A^*. Se denota por $\overline{P_m}$ la proyección espectral sobre los primeros m valores propios de A^* (ver Lema 2.2.7) y se define el siguiente subespacio lineal cerrado de $Z = \mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$

$$V = \{v \in Z \mid \langle v, \overline{P_m}z \rangle = 0, \ \text{para todo } z \in Z \text{ y todo } m \geq 1\}.$$

Debido a que $\overline{P_m}$ es la proyección sobre las funciones propias generalizadas de A^* correspondiente a los primeros m valores propios, se tiene la siguiente afirmación.

Afirmación:

Las funciones propias generalizadas son densas en Z si, y sólo si, $V = \{0\}$.

En efecto, como V es cerrado, del Lema 2.2.5.a, es fácil ver que $(\alpha I - A)^{-1}v \in V$ para todo $v \in V$ y todo $\alpha \in \rho(A)$. Si denota por Q, la restricción de $(\alpha I - A)^{-1}_V$, entonces Q es compacto y si λ_0 es un valor propio de Q, entonces $Qv_0 = \lambda_0 v_0$ para algún v_0 no nulo. Ahora bien, ya que $(\alpha I - A)^{-1}$ es invertible se tiene que Q lo es y de así que:

$$\begin{aligned}(\alpha I \; - \; A)^{-1}v_0 \;&=\; \lambda_0 v_0 && \Longleftrightarrow\\ v_0 \;&=\; (\alpha I \; - \; A)\lambda_0 v_0 && \Longleftrightarrow\\ Av_0 \;&=\; (\alpha \; - \; \tfrac{1}{\lambda_0})v_0.\end{aligned}$$

Así, $\lambda_1 := \alpha - \dfrac{1}{\lambda_0}$, es un valor propio de A.
Por otro lado, se sigue que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda - \overline{\lambda_1}}||v_0||^2 \;&=\; \langle v_0, \frac{1}{\overline{\lambda} - \lambda_1}v_0\rangle\\ &=\; \langle v_0, (\bar{\lambda}I - A)^{-1}v_0\rangle \;=\; \langle(\lambda I - A^*)^{-1}v_0, v_0\rangle.\end{aligned}$$

Sea Γ una circunferencia orientada positivamente conteniendo a $\overline{\lambda_1}$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}||v_0||^2 \;&=\; \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}\frac{1}{\lambda - \overline{\lambda_1}}||v_0||^2 d\lambda\\ &=\; \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}\langle(\lambda I - A^*)^{-1}v_0, v_0\rangle d\lambda \;=\; \langle P_{m_0}v_0, v_0\rangle, \quad \text{para algún } m_0.\end{aligned}$$

De la definición de V se sigue que la última expresión es cero lo cual contradice lo supuesto que v_0 es una función propia. Entonces Q no tiene valores propios, y esto implica que $\sigma((\alpha I \; - \; A)|v) \;=\; \emptyset$ y en consecuencia $\sigma(A|v) \;=\; \emptyset$ y por Lema 2.2.7 se concluye que V es el conjunto nulo. Esto prueba que las funciones propias generalizadas de A^* son densas en Z.
Se probará lo mismo para A.
Sea P_m la proyección espectral en los primeros m valores propios de A y se define

$$W := \{w \;\in\; Z \mid \langle w, P_m z\rangle \;=\; 0\, \forall z \;\in\; Z \; y \; \forall\, m \;\geq\; 1\}.$$

Como en la primera parte de ésta prueba, se obtiene que las funciones propias generalizadas de A son densas en Z si, y sólo si, $W \;=\; \{0\}$. Más aún, W es invariante bajo el operador $(\lambda I \; - \; A^*)^{-1}$ y además $\sigma((\lambda I \; - \; A^*)^{-1}\,|_W) \;=\; \{0\}$, para todo

$\lambda \in \rho(A)$.

Sea $\alpha \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ y $S = (\lambda I - A^*)^{-1}|_W$. Como α es real se tiene que $(\lambda I - A^*)^{-1} = ((\lambda I - A)^{-1})^*$, por lo que, $S^* = (\lambda I - A)^{-1}$. Así que, S^*S es compacto y autoabjunto en W, con radio espectral 0. Luego, por el Teorema A.4.20 de [6], se concluye que $S^*S = 0$.

Por otro lado, dado $w \in W$ se tiene que

$$\begin{aligned}
P_W(\alpha I - A)^{-1}w &= \frac{1}{2\pi j}\int_W (\lambda I - A)^{-1}(\alpha I - A)^{-1} w d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi j}\int_W (\alpha I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1} w d\lambda \\
&= (\alpha I - A)^{-1}\frac{1}{2\pi j}\int_W (\lambda I - A)^{-1} w d\lambda \\
&= (\alpha I - A)^{-1} P_W w \\
&= (\alpha I - A)^{-1} w \\
&= S^* w.
\end{aligned}$$

Como w era fijo, pero arbitrario se tiene que $S^* = P_W(\alpha I - A)^{-1}|_W$.

En consecuencia, para todo $w \in W$ se obtiene que:

$$P_W(\alpha I - A)^{-1}(\alpha I - A^*)^{-1} w = 0.$$

Así que,

$$\langle \alpha I - A)^{-1}(\alpha I - A^*)^{-1} w, P_W z\rangle \neq 0.$$

Por lo tanto, $(\alpha I - A)^{-1}(\alpha I - A)^{-1} w \in W^\perp$. Además W es $(\overline{\lambda} I - A^*)^{-1}$ invariante para todo $\overline{\lambda} \in \rho(A^*)$, de esto sigue que $W^\perp$ es $(\lambda I - A)^{-1}$ invariante para todo

$\lambda \in \rho(A)$. Luego, de los Lemas 2.2.5 y 2.2.1 se obtiene que $W^{\perp}$ es A-invariante. En conclusión, se tiene que

$$(\alpha I - A^*)^{-1}w = (\alpha I - A)(\alpha I - A)^{-1}(\alpha I - A^*)^{-1}w \in (\alpha I - A)(W^{\perp} \cap \mathbf{D}(A)) \subset W^{\perp}.$$

Pero $w \in W$, así que $(\alpha I - A^*)^{-1}w \in W$. Esto es posible sólo si $(\alpha I - A^*)^{-1}w = 0$, lo que implica que $w = 0$. Como w era fijo, pero arbitrario, se concluye que $W = \{0\}$

$\square$

2.3. Controlabilidad de Ecuaciones Diferenciales Funcionales

Se daran las definiciones de controlabilidad exacta y controlabilidad aproximada en términos del sistema:

$$z'(t) = Az(t) + Bu(t), \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \quad t > 0. \tag{2.3.1}$$

donde Z, U son espacios de Banach, A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en Z, B es un operador lineal acotado del espacio de Banach U en Z. Para ello, dado $z_0 \in Z$ y un control $u \in L^2([0,t_1];U)$ la ecuación (2.3.1) tiene una única solución moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad 0 \leq t \leq t_1. \tag{2.3.2}$$

***Definición* 2.3.1.** *Se dice que (2.3.1) es exactamente controlable en $[0,t_1]$, si para todo $z_0, z_1 \in Z$ existe un control $u \in L^2([0,t_1];U)$ tal que la solución $z(t)$ de (2.3.2) correspondiente a u, verifique que $z(t_1) = z_1$.*

Sea el siguiente operador lineal no acotado:

$$G : L^2([0,t_1];U) \longrightarrow Z, \quad Gu = \int_0^{t_1} T(t-s)B(s)u(s)ds. \tag{2.3.3}$$

La demostración del Teorema siguiente se encuentra en [5].

***Teorema* 2.3.1.** *Si Z y U son espacios de Banach reflexivos entonces (2.3.1) es exactamente controlable en $[0, t_1]$ si, y sólo si, existe $\gamma > 0$, tal que:*

$$\gamma \parallel B^*(\cdot)T^*(\cdot)z^* \parallel_{L^2([0,t_1];U^*)} \geq \parallel z^* \parallel_{Z^*}, \quad z^* \in Z^*.$$

***Definición* 2.3.2.** *Se dice que (2.3.1) es aproximadamente controlable en $[0, t_1]$ si para todo $z_0, z_1 \in Z$ y $\epsilon > 0$, existe un control $u \in L^2([0, t_1]; U)$ tal que la solución $z(t)$ dada por (2.3.2) satisface*

$$\parallel z(t_1) - z_1 \parallel \leq \epsilon.$$

La demostración del siguiente Teorema puede encontrarse en [5].

***Teorema* 2.3.2.** *(2.3.1) es aproximadamente controlable en $[0, t_1]$ si, y sólo si,*

$$B^*T^*(t)z = 0, \quad \forall t \in [0, t_1] \Longrightarrow z = 0.$$

Las demostraciones de la Proposición y del Teorema siguiente se encuentran en [5].

***Proposición* 2.3.1.** *(2.3.1) es aproximadamente controlable en $[0, t_1]$ si $\overline{ranB^{t_1}} = 0$.*

***Teorema* 2.3.3.** *(2.3.1) es aproximadamente controlable en $[0, t_1]$ si, y sólo si, cualquiera de las condiciones siguientes se cumplen:*
(i) $KerB^* = 0$.
(ii) $B^*T^*(t)z = 0, \quad \forall t \in [0, t_1] \Longrightarrow z = 0.$

2.3.1. Controlabilidad y Observabilidad

En esta sección se considera la siguiente clase de sistemas infinito-dimensional con entrada u y salida y.

$$z'(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0, \tag{2.3.4}$$

$$y(t) = Cz(t) + Du(t). \tag{2.3.5}$$

***Definición* 2.3.3.** *Se denota por $\sum(A,B,C,D)$ al sistema lineal (2.3.4)-(2.3.5), donde A es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $T(t)$ en el espacio de Hilbert Z, B es un operador lineal acotado del espacio de Hilbert U a Z, C es un operador lineal acotado de Z en el espacio de Hilbert Y y D es un operador acotado de U en Y. Considérese $\sum(A,B,C,D)$ para todo estado inicial $z_0 \in Z$ y toda entrada $u \in L^2([0,\tau];U)$. El estado final viene dado por la solución moderada de (2.3.4)*

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad 0 \le t \le \tau$$

y la salida $y(\cdot)$ es definida por (2.3.5).

Se denota al sistema lineal (2.3.4)-(2.3.5) por $\sum(A,B,C)$ si $D=0$, $\sum(A,B,-)$ si $C=D=0$, y $\sum(A,-,C)$ si $B=D=0$

***Definición* 2.3.4.** *Para el sistema lineal $\sum(A,B,-)$ se definen los siguientes conceptos:*

a. La aplicación de controlabilidad de $\sum(A,B,-)$ en $[0,\tau]$ (para algún $\tau>0$) es el mapeo lineal acotado $\mathbf{B}^\tau : L^2([0,\tau];U) \longrightarrow Z$ definido por:

$$\mathbf{B}^\tau u := \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds.$$

b. $\sum(A,B,-)$ es exactamente controlable en $[0,\tau]$ (para algún $\tau>0$) si

$$^5 rang\mathbf{B}^\tau = Z.$$

c. $\sum(A,B,-)$ es aproximadamente controlable en $[0,\tau]$ (para algún $\tau>0$) si

$$\overline{rang\mathbf{B}^\tau} = Z.$$

***Lema* 2.3.1.** *El sistema lineal $\sum(A,B,-)$ tiene las siguientes propiedades de invarianza:*

[5] *Denótese por rang$\mathbf{B}$ el rango de un operador $\mathbf{B}$.*

1. $\sum(A, B, -)$ *es exactamente (aproximadamente) controlable sobre* $[0, \tau]$ *si, y sólo si,* $\sum(\mu I + A, B, -)$ *es exactamente controlable (aproximadamente) para cualquier* $\mu \in \mathbb{C}$*;*

2. $\sum(A, B, -)$ *es exactamente (aproximadamente) controlable sobre* $[0, \tau]$ *si, y sólo si,* $\sum(A + BF, B, -)$ *es exactamente controlable (aproximadamente) para cualquier* $F \in \mathfrak{L}(Z, U)$.

***Definición* 2.3.5.** *Para el sistema lineal* $\sum(A, -, C)$ *se definen los siguientes conceptos:*

1. *La aplicación de observabilidad de* $\sum(A, -, C)$ *en* $[0, \tau]$ *(para algún* $\tau > 0$*) es el mapeo lineal acotado* $\mathbf{C}^\tau : Z \longrightarrow L^2([0, \tau]; Y)$ *definido por:*

$$\mathbf{C}^\tau z := CT(\cdot)z.$$

2. $\sum(A, -, C)$ *es exactamente observable en* $[0, \tau]$ *(para algún* $\tau > 0$*) si* C^τ *es inyectivo y su inversa es acotada en el rango de* C^τ*.*

3. $\sum(A, -, C)$ *es aproximadamente observable en* $[0, \tau]$ *(para algún* $\tau > 0$*) si*

$$^6 Ker\mathbf{C}^\tau = 0.$$

***Lema* 2.3.2.** *Para el sistema lineal* $\sum(A, -, C)$ *se tiene los siguientes resultados duales:*

1. $\sum(A, -, C)$ *es aproximadamente observable en* $[0, \tau]$ *si, y sólo si, el sistema dual* $\sum(A^*, C^*, -)$ *es aproximadamente controlable en* $[0, \tau]$.

[6] *Denótese por* $Ker\mathbf{C}$ *el nucleo del operador* $\mathbf{C}$.

2. $\sum(A,-,C)$ *es exactamente observable en* $[0,\tau]$ *si, y sólo si, el sistema dual* $\sum(A^*,C^*,-)$ *es exactamente controlable en* $[0,\tau]$.

***Definición* 2.3.6.** *El subespacio de accesibilidad de* $\sum(A,B,-)$ *es denotado por* $\mathcal{R}$ *y definido por:*

$$\mathcal{R} := \left\{ z \in Z / \ \exists\, \tau > 0 \ y \ u \in L^2([0,\tau];U) : z = \int_0^\tau T(t-s)Bu(s)ds \right\}.$$

***Definición* 2.3.7.** *El subespacio no observable de* $\sum(A,-,C)$ *es denotado por* $\mathcal{N}$ *y definido por:*

$$\mathcal{N} := \{ z \in Z / \ CT(t)z = 0 \ \ \forall t \geq 0 \} = \bigcap_{\tau \geq 0} Ker\mathbf{C}^\tau.$$

***Lema* 2.3.3.** *El subespacio no observable* $\mathcal{N}$ *de* $\sum(A,-,C)$*, es el subespacio más grande* $T(t)$*-invariante contenido en el* $kerC$.

Demostración

De la Definición 2.3.7 se tiene que $\mathcal{N}$ está contenido en el $Ker\ C$. Si $z \in \mathcal{N}$, entonces $CT(s)z = 0$ para todo $t \geq 0$ y por la propiedad de semigrupo de $T(t)$ se concluye que $T(t)z$ está tambien en $\mathcal{N}$. Así que, $\mathcal{N}$ es $T(t)$-invariante. Ahora bien, supóngase que $\mathcal{N}_2$ es otro subespacio $T(t)$-invariante contenido en el $Ker\ C$. Entonces para $z \in \mathcal{N}_2,\ T(t)z \in \mathcal{N}_2,$ y $CT(t)z = 0$ para $t \geq 0$, por lo que $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$. □

***Teorema* 2.3.4.** *Sea la ecuación diferencial con retardo*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t-h_i), \quad t \geq 0 \\ x(0) &= r, \\ x(\theta) &= f(\theta), \qquad\qquad -h_p \leq \theta < 0, \end{aligned}$$

donde $0 < h_1 < \cdots < h_p$ *representa los puntos de retardo,* $x(t) \in \mathbb{C}^n,\ A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ $i = 0,\ldots,p,\ r \in \mathbb{C}^n,\ y\ f \in L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)$*. El sistema con retardo y observación*

$$y(t) = C_0x(t),\ t \geq 0, \quad C_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^k),$$

puede ser formulado como el sistema $\Sigma(A,-,C)$, donde A es definida como en el Teorema 2.2.3 y C es la aplicación acotada de $\mathbb{M}_2([-h_p,0],\mathbb{C}^n)$ en C^k definido por

$$C\begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix} = C_0 r.$$

Más aún, $\Sigma(A,-,C)$ es aproximadamente observable si, y sólo si,

$$rang\begin{pmatrix} \Delta(\lambda) \\ C_0 \end{pmatrix} = n. \qquad para\ todo\ \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.3.6}$$

y

$$rang A_p = n,$$

donde

$$\triangle(\lambda) = \lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\lambda h_i}.$$

Demostración

En primer lugar, se tiene que el operador C es acotado y que $\Sigma(A,-,C)$ representa un sistema sobre $\mathbb{M}_2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)$. Por otro lado, de los Lemas 2.3.3 y 2.2.5 se tiene que $\mathcal{N}$ es el subespacio mas grande de $\mathbb{M}_2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)$ contenido en $\ker\mathcal{C}$ y es invariante por $(\lambda I - A)^{-1}$ para todo $\lambda \in \rho_\infty(A) = \rho(A)$ (Ver Lema 2.2.7), es decir

$$\mathcal{N} = \{z \in \mathbb{M}_2([-h_p,0];\mathbb{C}^n) \mid C(\lambda I - A)^{-1}z = 0 \ para\ todo\ \lambda \in \rho(A)\}.$$

Condición Necesaria: Supóngase que (2.3.6) no se cumple. Luego existe un $r \neq 0$ tal que $\Delta(\lambda)r = 0$ y $C_0 r = 0$, lo cual, del Teorema 2.2.3 se concluye que $\begin{pmatrix} r \\ e^{\lambda}r \end{pmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio λ. Más aún, $\begin{pmatrix} r \\ e^{\lambda}r \end{pmatrix}$ es un subespacio invariante por $T(t)$ y $C\begin{pmatrix} r \\ e^{\lambda}r \end{pmatrix} = C_0 r = 0.$

Del Lema 2.3.3 se tiene que $\mathcal{N} \neq 0$ y por tanto de la definición 2.3.5, $\Sigma(A, -, C)$ no es aproximadamente observable.

Supóngase ahora que $rang(A_p) \neq n$. Entonces existe un $q \neq 0$ tal que $A_p q = 0$. Considérese el estado inicial $z = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\cdot) \end{pmatrix}$, donde $f(\theta) = q$ sobre $[-h_p, -h_{p-1}]$ y cero en cualquier otra parte. Del Corolario 2.2.2, se tiene que

$$\begin{aligned} C(\lambda I - A)^{-1} z &= \begin{pmatrix} C_0[\Delta(\lambda)]^{-1} \left[0 + \int_{-h_p}^{h_{p-1}} e^{-\lambda(\theta + h_p)} A_p q d\theta \right] \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por tanto $\mathcal{N} \neq \{0\}$. Así $\Sigma(A, -, C)$ no puede ser aproximadamente observable.

Condición Suficiente: Supóngase que (2.3.6) y $ran(A_p) = n$ se cumplen. Se probará que el subespacio no observable $\mathcal{N}$ es el elemento cero.

Ya que $(\lambda I - A)^{-1}$ y $(\lambda I - A|_{\mathcal{N}})^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}|_{\mathcal{N}}$ son compactos, tanto A como $A|_{\mathcal{N}}$ tienen espectro puntual no vacio y $\sigma(A|_{\mathcal{N}}) \subset \sigma(A)$.

Supóngase que z es un vector propio de $A|_{\mathcal{N}}$ correspondiente al valor propio μ:

$$A|_{\mathcal{N}} z = \mu z.$$

Entonces z es también un vector propio de A y por Teorema 2.2.3, se tiene que:

$$z = \begin{pmatrix} r \\ e^{\mu} r \end{pmatrix}$$

para algún $r \neq 0$ tal que $\Delta(\mu) r = 0$. Pero, z también pertenece a $\mathcal{N}$ y por tanto

$$0 = C(\lambda I - A)^{-1} z = \frac{1}{\lambda - \mu} C z = \frac{1}{\lambda - \mu} C_0 r \quad \textit{para todo } \lambda \in \rho(A).$$

Así que $\begin{pmatrix} \Delta(\mu) \\ C_0 \end{pmatrix} r = 0$, por lo que, de (2.3.6) se obtiene que $r = 0$ y en consecuencia $z = 0$. De acá que, $\sigma(A|_{\mathcal{N}}) = \emptyset$ y del Lema 2.2.7 se tiene que $\mathcal{N} = \{0\}$. $\square$

***Lema* 2.3.4.** *Considérese la ecuación con retardo*

$$\dot{x}(t) \;=\; A_0x(t) \;+\; A_1x(t-h)$$

y la observación escalar

$$y(t) \;=\; C_0x(t) \;=\; b_0^T x(t),$$

donde $b_0 \in \mathbb{C}^n$ *y* $A_0,\ A_1$ *son como en el Teorema 2.3.4. El correspondiente sistema* $\Sigma(A,-,C)$ *sobre* $\mathbb{M}_2([-h,0];\mathbb{C}^n)$ *es aproximadamente observable si las si-guientes condiciones se cumplen:*

$$\Sigma(A_1^*, b_0, -) \text{ es controlable}; \tag{2.3.7}$$

$$A_0^* rang(A_1^*)^j b_0 \subset \sum_{i=0}^{j} rang(A_1^*)^i b_0 \quad j = 0,\ldots,n-1 \tag{2.3.8}$$

$$\det A_1 \neq 0 \tag{2.3.9}$$

Demostración

Se probará que $rang(\Delta^*(\lambda) : b_0) = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. En efecto, ya que $\Sigma(A_1^*, b_0, -)$ es controlable, sin pérdida de generalidad se puede asumir que el sistema está en la siguiente forma (Ver [**?**])

$$A_1^* \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad b_0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego de la condición (2.3.9) se tiene que, con respecto a estas coordenadas, A_0^* es triangular inferior, y así

$$
\begin{aligned}
\Delta^*(\lambda) &= \lambda I - A_0^* - A_1^* e^{-\lambda h} \\
&= \begin{pmatrix}
* & -e^{-\lambda h} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
* & * & -e^{-\lambda h} & 0 & \cdots & & 0 \\
* & * & * & 0 & \cdots & & \vdots \\
 & & & & & & \\
 & & & & & -e^{-\lambda h} & 0 \\
* & * & * & * & \cdots & * & -e^{-\lambda h} \\
* & * & * & * & \cdots & * & *
\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

donde * denota cualquier numero.

Esta forma especial asegura que (2.3.8) se cumple. □

***Lema* 2.3.5.** *Defínase A_{BF} como el generador infinitesimal de la ecuación diferencial con retardo en $\mathbb{M}_2([-h,0];\mathbb{C}^n)$.*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{p-1} A_i x(t-h_i) + (A_p + B_0 F)x(t-h_p), \qquad t \geq 0, \\
x(0) &= r, \\
x(\theta) &= f(\theta), \qquad -h_p \leq \theta < 0,
\end{aligned}
\tag{2.3.10}
$$

donde $0 < h_1 < \cdots < h_p$ representan los puntos de retardo, $x(t) \in \mathbb{C}^n$, $A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $i = 0,\ldots,p$, $r \in \mathbb{C}^n$, $B_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)$, $F \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)$ y $f \in L^2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)$. Entonces el subespacio de accesibilidad de $\Sigma(A_{BF},B,-)$ y $\Sigma(A,B,-)$ son idénticos.

Demostración

En primer lugar, notese que (2.3.10) es igual a (2.2.1) con A_p reemplazado por A_p+B_0F, por lo que también se tiene una formulación abstracta sobre $\mathbb{M}_2([-h_p,0];\mathbb{C}^n)$ como una ecuación diferencial abstracta $\dot{z} = A_{BF}z$. Denótese los subespacios de accesibilidad de $\Sigma(A,B,-)$ y $\Sigma(A_{BF},B,-)$ por $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_{BF}$, respectivamente. De la definición 2.3.6, $\mathcal{R}$ es el conjunto de todos $z \in \mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$ de la forma

$$z = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds$$

para algún $\tau > 0$ y algún $u \in \mathbf{L}_2([0, \tau]; \mathbb{C}^m)$. Ahora bien del Lema 1.5.2 la solución moderada $z(t) = \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds$ es continua en t y en consecuencia la proyección de $z(t)$ sobre $\mathbb{C}^n$ es justamente la solución $x(t)$ de (2.3.10). La siguiente función está en $\mathbf{L}_2([0, \tau]; \mathbb{C}^m)$ para todo $F \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^n)$:

$$u_o(t) = Fx(t - h_p).$$

Considerando $u(t) = u_0(t) + v(t)$ para cualquier $v \in \mathbf{L}_2([0, \tau]; \mathbb{C}^m)$ en (2.3.10), se tiene que esta es una trayectoria de la forma $\int_0^\tau T_{BF}(\tau - s)Bv(s)ds$, donde T_{BF} es el semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A_{BF}. Por lo que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_{BF}$. Por otro lado, considerando las funciones $u_0(t) = -Fx(t - h_p) + v(t)$ para $\Sigma(A_{BF}, B, -)$, se obtiene que $\mathcal{R}_{BF} \subset \mathcal{R}$. $\square$

***Teorema* 2.3.5.** *Considérese la formulación abstracta $\Sigma(A, B, -)$ de la siguiente ecuación diferencial con retardo sobre $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t - h_i) + B_0u(t), \qquad t \geq 0, \\ x(0) &= r, \\ x(\theta) &= f(\theta), \qquad -h_p \leq \theta < 0, \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

donde $0 < h_1 < \ldots < h_p$ representan los puntos de retardo, $x(t) \in \mathcal{C}^n$,
$A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $i = 0, \ldots, p$, $r \in \mathbb{C}^n$, $f \in L^2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$, $B_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ y
$u \in L^2([0, \tau]; \mathbb{C}^m)$ para todo $\tau \geq 0$.

$\Sigma(A, B, -)$ es aproximadamente controlable si, y sólo si, las siguientes condiciones se cumplen:

$$rang(\Delta(\lambda) : B_0) = n \qquad \textit{para todo } \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.3.12}$$

$$rang(A_p : B_0) = n \tag{2.3.13}$$

Demostración

Suficiencia: Del Lema 2.3.4, se puede suponer sin pérdida de generalidad que (2.3.12) se cumple y que $rangA_p = n$. Por otro lado, del Lema 2.3.3 se sigue que $\Sigma(A, B, -)$ es aproximadamente controlable si, y sólo si, $\Sigma(A^*, -, B^*)$ es aproximadamente observable. De acá que, es suficiente probar que el subespacio no observable de $\Sigma(A^*, -, B^*)$ es el elemento cero. Para ello, al igual que en el Teorema 2.3.4, es suficiente probar que si V es invariante por $(\lambda I - A^*)^{-1}$ para todo $\lambda \in \rho(A^*)$ y además está contenido en $\ker B^* = \ker \begin{pmatrix} B_0^* \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $V = \{0\}$. Suponga que $\mu \in \sigma(A^*|_V)$. Entonces, del Lema 2.4.9, existe un $v \neq 0$ tal que $A^*v = \mu v$ y $v = \begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix}$, donde $\det \Delta^*(\mu) = 0$ y $\Delta^*(\mu) r = 0$ y $f(\theta) = \left[\sum_{i=1}^{p} 1_{[-h_i,0]}(\theta) A_i^* e^{-\mu(\theta + h_i)} \right] r$. Ahora V está contenido en $\ker \begin{pmatrix} B_0^* \\ 0 \end{pmatrix}$ y así $B_0^* r = 0$. De aquí se tiene que

$$\begin{pmatrix} B_0^* \\ B_0^* \Delta^*(\mu) \\ \vdots \\ B_0^* (\Delta^*(\mu))^{n-1} \end{pmatrix} r \;=\; 0,$$

y (2.3.12) implica que $r = 0$. Pero, f es un múltiplo escalar de r y por tanto

$$\begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix} = 0 \text{ y } \sigma(A^*|_V) = \emptyset.$$

Así $(\lambda I - A^*)^{-1} v$ es una función entera de λ para todo $v \in V$. Ahora bien, ya que $rangA_p = n$, del Teorema 2.2.4 se sigue que los vectores propios de A (generalizados) son densos en $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$. Dado $v \in V$ y ϕ_n un vector propio arbitrarios se tiene lo siguiente:

$$\left\langle (\lambda I - A^*)^{-1} v, \phi_n \right\rangle \;=\; \left\langle v, (\overline{\lambda} I - A)^{-1} \phi_n \right\rangle \;=\; \frac{\langle v, \phi_n \rangle}{\lambda - \overline{\lambda_n}},$$

donde λ_n es el valor propio de A correspondiente a ϕ_n.
Como $(\lambda I - A^*)^{-1} v$ es una función entera, se obtiene que el límite de $\lambda \to \overline{\lambda_n}$ existe para cada n. Por lo que, $\langle v, \phi_n \rangle$ debe ser cero. De manera análoga se prueba que $\langle v, \phi_n \rangle$ es cero para todos los vectores propios generalizados, y ya que estos son densos en $\mathbb{M}_2([-h_p, 0]; \mathbb{C}^n)$, se sigue que $v = 0$ y en consecuencia $V = \{0\}$.

Necesaria de (2.3.12): Supóngase que (2.3.12) no se cumple. Entonces existe un $\mu \in \mathbb{C}$ y un $r \neq 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} \triangle^*(\mu) \\ B_0^* \end{bmatrix} r = 0.$$

Del Lema 2.4.9 se tiene que $\mu \in \sigma(A^*)$ y $v = \begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix}$, donde

$$f(\cdot) \;=\; \left[\sum_{i=1}^{p} 1_{[-h_i,0]}(\cdot) A_i^* e^{-\mu(\cdot + h_i)} \right] r,$$

es un vector propio correspondiente de A^*. Así $V := span \left\{ \begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix} \right\}$ es el subespacio no vacio $T^*(t)$-invariante contenido en el $ker\ B^*$ y en consecuencia de los Lemas 2.3.3 y 2.3.4 se sigue que $\sum(A, B, -)$ no es aproximadamente controlable.

Necesaria de 2.3.13: Supóngase que $rang(A_p : B_0) < n$. Entonces existe un $q \neq 0$ tal que $A_p^* q \;=\; 0$ y $B_0^* q \;=\; 0$. Al igual que en la prueba observabilidad aproximada, se construye un elemento no-negativo $\begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix}$, del subespacio no-observable del sistema dual $\sum(A^*, -, B^*)$ y en consecuencia del Lema 2.3.3 se obtiene que $\sum(A, B, -)$ no es aproximadamente controlable.

$\square$

Corolario 2.3.1. *Considérese la ecuación con retardo*

$$\dot{x}(t) \;=\; A_0x(t) + A_1x(t-h) + b_0u(t),$$

donde $b_0 \in \mathbb{C}^n$ *y* $A_0, A_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ *. El correspondiente sistema lineal* $\Sigma(A, B, -)$ *en* $\mathbb{M}_2([-h, 0]; \mathbb{C}^n)$ *es aproximadamente controlable si las siguientes condiciones se satisfacen:*

$$\Sigma(A, B, -) \text{ es controlable}; \tag{2.3.14}$$

$$A_0 rang(A_1^j)b_0 \subset \sum_{i=0}^{j} rang(A_1^i)b_0 \qquad j = 0, \ldots, n-1 \tag{2.3.15}$$

Demostración

La prueba es análoga a la del Lema 2.3.4.

Capítulo 3

Fórmula de Variación de Parámetros para Ec. Parciales Parabólicas Funcionales

3.1. Introducción

En este capítulo se encuentra una fórmula de variación de parámetros para la solución del siguiente sistema de ecuaciones parciales parabólicas funcionales

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= D\Delta u + Lu_t + f(t,x), \quad t > 0, \quad u \in \mathbb{R}^n, \\[2ex]
\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial \eta} &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\[2ex]
u(0,x) &= \phi_0(x), x \in \Omega, \\[2ex]
u(s,x) &= \phi(s,x), \quad s \in [-\tau, 0), \quad x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{3.1.1}
$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, D es una matriz no diagonal $n \times n$ cuyos autovalores son semi-simples con parte real no negativa y $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función suave. La notación estandar $u_t(x)$ define una función de $[-\tau, 0]$ en $\mathbb{R}^n$ (con x fijo) por $u_t(x)(s) = u(t+s, x), -\tau \leq s \leq 0$. Aquí $\tau \geq 0$ es el máximo retardo, el cual se supone que es finito. Se supondra que el operador $L : L^2([-\tau, 0]; Z) \longrightarrow Z$

es lineal y acotado con $Z = L^2(\Omega)$ y $\phi_0 \in Z$, $\phi \in L^2([-\tau, 0]; Z)$.

3.2. Formulación Abstracta del Problema

En esta sección se elige un espacio de Hilbert adecuado donde el sistema (3.1.1) puede ser escrito como una ecuación diferencial ordinaria funcional abstracta, para ello se consideran las siguientes hipotesis:

a. La matriz D es semi-simple (diagonal por bloque) y los autovalores $d_i \in \mathbb{C}$ de D, satisfacen $\mathrm{Re}(d_i) \geq 0$.

b. Si $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_j \longrightarrow \infty$ son los autovalores de $-\Delta$ con condiciones de borde homogéneas de Neumann, entonces existe una única constante $M \geq 1$ tal que:

$$\|e^{-\lambda_j D t}\| \leq M, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, ...$$

c. Para todo $I > 0$ y $z \in L^2_{loc}([-\tau, \infty); Z)$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\int_0^t \mid Lz_s \mid ds \leq M_0(t) \mid z \mid_{L^2([-\tau,t),Z)}, \quad \forall t \in [0, I]$$

donde $M_0(t)$ es una función positiva en $[0, \infty)$.

Considérese $H = L^2(\Omega, \mathbb{R})$ y $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_j \longrightarrow \infty$ los autovalores de $-\Delta$, cada uno con multiplicidad finita γ_j igual a la dimensión al autoespacio correspondiente. Entonces:

(i) Existe un conjunto ortonormal completo $\{\phi_{j,k}\}$ de autovectores de $-\Delta$.

(ii) Para todo $\xi \in D(-\Delta)$ se tiene que

$$-\Delta\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} < \xi, \phi_{j,k} > \phi_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j \xi, \tag{3.2.1}$$

donde $< \cdot, \cdot >$ es el producto interior en H y

$$E_j \xi = \sum_{k=1}^{\gamma_j} < \xi, \phi_{j,k} > \phi_{j,k}. \tag{3.2.2}$$

Así, $\{E_j\}$ es una familia de proyecciones ortogonales completas en H y $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} E_j \xi, \quad \xi \in H.$

(iii) Δ genera un semigrupo analítico $\{T_\Delta(t)\}$ dado por

$$T_\Delta(t)\xi = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} E_j \xi. \tag{3.2.3}$$

Si se denota por Z el espacio de Hilbert $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y se define el siguiente operador

$$A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z, \quad A\psi = -D\Delta\psi$$

con $D(A) = H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ se obtiene que, para todo $z \in D(A)$:

$$Az = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j D P_j z$$

y

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} P_j z, \quad \| z \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| P_j z \|^2, \quad z \in Z,$$

donde

$$P_j = diag(E_j, E_j, ..., E_j)^1,$$

es una familia de proyecciones ortogonales completas en Z.

Observación: Ya que la $dim(Rang(E_j)) = \gamma_j$, se tiene que la $dim(Rang(P_j)) = n\gamma_j$. Así que la matriz representación de P_j tiene dimensión $n\gamma_j \times n\gamma_j$.

En consecuencia, el sistema (3.1.1) puede ser escrito como una ecuación diferencial funcional abstracta en Z:

[1]Denótese por diag(B,B,...,B) la matriz diagonal de B.

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = -Az(t) + Lz_t + f^e(t), \quad t > 0, \\ \\ z(0) = \phi_0, \\ \\ z(s) = \phi(s), \ \ s \in [-\tau, 0). \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Aquí $f^e : (0, \infty) \longrightarrow Z$ es una función definida como:

$$f^e(t)(x) = f(t, x), \ \ t > 0, \ \ x \in \Omega.$$

Esta formulación abstracta se puede encontrar también en ([2]) y en ([4]). Para lograr el objetivo planteado, se probará primero una generalización del Lema 2.1 de [9], éste puede ser aplicado a otro tipo de problemas.

***Lema* 3.2.1.** *Sean Z un espacio de Hilbert separable, $\{S_j(t)\}_{j\geq 1}$ una familia de semigrupos de operadores fuertemente continuos y $\{P_j\}_{j\geq 1}$ una familia de operadores lineales acotados en Z con $\{P_j\}_{j\geq 1}$ una familia de proyecciones ortogonales completas tal que :*

$$\Lambda_j P_j = P_j \Lambda_j, \qquad j \geq 1, 2, \ldots$$

donde Λ_j es el generador infinitesimal de $S_j(t)$.

Si se define la siguiente familia de operadores lineales

$$S(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t) P_j z, \qquad t \geq 0.$$

Entonces :

(a) $S(t)$ es un operador lineal acotado si $\| S_j(t) \| \leq g(t)$, $j = 1, 2, ...$, con $g(t) \geq 0$, continua en $t \geq 0$.

(b) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Hilbert Z cuyo

generador infinitesimal Λ *es dado por*

$$\Lambda z = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j P_j z, \qquad z \in D(\Lambda)$$

con

$$D(\Lambda) = \left\{ z \in Z \ / \ \sum_{j=1}^{\infty} \| \Lambda_j P_j z \|^2 < \infty \right\}.$$

(c) EL espectro $\sigma(\Lambda)$ *de* Λ *viene dado por*

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\bar{\Lambda}_j)}, \tag{3.2.5}$$

donde $\bar{\Lambda}_j = \Lambda_j P_j : \mathcal{R}(P_j) \rightarrow \mathcal{R}(P_j)$.

Demostración

En primer lugar, por el teorema de Hille-Yosida, se tiene que

$$S_j(t) P_j = P_j S_j(t),$$

ya que

$$\Lambda_j P_j = P_j \Lambda_j.$$

Así, $\{S_j(t) P_j z\}_{j \geq 1}$ es una familia de vectores ortogonales en Z. Entonces

$$\begin{aligned}
\| S(t)z \|^2 &= \langle S(t)z, S(t)z \rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t)P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} S_m(t)P_m z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \| S_j(t)P_j z \|^2 \\
&\leq (g(t))^2 \sum_{j=1}^{\infty} \| P_j z \|^2 \\
&= (g(t) \| z \|)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S(t)$ es un operador acotado.

En segundo lugar, tenemos que:

(i)

$$\begin{aligned}
S(t)S(s)z &= \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t)P_j S(s)z \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t)P_j \left(\sum_{m=1}^{\infty} S_m(s)P_m z \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t+s)P_j z \\
&= S(t+s)z.
\end{aligned}$$

(ii)

$$S(0)z = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(0)P_j z = \sum_{j=1}^{\infty} P_j z = z.$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\| S(t)z - z \|^2 &= \| \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t)P_jz - \sum_{j=1}^{\infty} P_jz \|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \| (S_j(t) - I)P_jz \|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} \| (S_j(t) - I)P_jz) \|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} \| (S_j(t) - I)P_jz \|^2 \\
&\leq \sup_{1\leq j\leq N} \| (S_j(t) - I)P_jz \|^2 \sum_{j=1}^{N} + K \sum_{j=N+1}^{\infty} \| P_jz \|^2,
\end{aligned}
$$

para $K = \sup_{0\leq t\leq 1;\, j\geq 1} \| (S_j(t) - I) \|^2 \leq (g(t) + 1)^2$.

Ahora bien, ya que $\{S_j\}_{j\geq 1}$ es una familia de semigrupos fuertemente continuos, se tiene que $\{S_j(t)\}_{t\geq 0}$ $(j = 1, 2, ...)$ es fuertemente continuo, y además, como $\{P_j\}_{j\geq 1}$ es una familia de operadores completa y acotados , se tiene que para cualquier $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$
\sum_{j=N+1}^{\infty} \| P_jz \|^2 < \frac{\epsilon}{2K},
$$

y escogiendo $t \leq 1$ tal que $\sup_{1\leq j\leq N} \| (S_j(t) - I)P_jz \|^2 \leq \frac{\epsilon}{2N}$ se obtiene que

$$
\| S(t)z - z \|^2 < \frac{\epsilon}{2N} \sum_{j=1}^{N} + K \frac{\epsilon}{2K} < \epsilon.
$$

Por lo tanto, $S(t)$ es fuertemente continuo.

Sea Λ el generador de este semigrupo. Por definición, se tiene que para todo $z \in D(\Lambda)$

$$\Lambda z = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)z - z}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(S_j(t) - I)}{t} P_j z.$$

Luego,

$$P_m \Lambda z = P_m \left(\lim_{t \longrightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(S_j(t) - I)}{t} P_j z \right) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S_m(t) - I}{t} P_m z = \Lambda_m P_m z.$$

Así,

$$\begin{aligned} \Lambda z &= \sum_{j=1}^{\infty} P_j \Lambda z \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j P_j z, \end{aligned}$$

y además,

$$D(\Lambda) \subset \left\{ z \in Z / \sum_{j=1}^{\infty} \| \Lambda_j P_j z \|^2 < \infty \right\}.$$

Inversamente, si se supone que $z \in \left\{ z \in Z / \sum_{j=1}^{\infty} \| \Lambda_j P_j z \|^2 < \infty \right\}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j P_j z = y \in Z.$$

Luego, haciendo $z_j = \sum_{k=1}^{j} P_k z$, se obtiene que

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t) z_j - z_j}{t} = \sum_{k=1}^{j} P_k \Lambda_k z < \infty.$$

Por lo tanto, $z_j \in D(\Lambda)$ y $\Lambda z_j = \sum_{k=1}^{j} P_k \Lambda_k z$.

Finalmente, como $z_j \longrightarrow z$ cuando $j \longrightarrow \infty$ y $\lim_{t \longrightarrow 0^+} \Lambda z_j = y$, entonces como Λ es cerrado se tiene que $z \in D(\Lambda)$ y $\Lambda z = y$, esto es, $z \in D(\Lambda)$.

Para completar la prueba del Lema, se debe demostrar la parte (c). Esto es equivalente a probar lo siguiente:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\bar{\Lambda}_j) \subset \sigma(\Lambda) \ \text{ y } \ \sigma(\Lambda) \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\bar{\Lambda}_j)}.$$

Para probar la primera parte, se debe mostrar que $\rho(\Lambda) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \rho(\bar{\Lambda}_j)$. En efecto, sea λ perteneciente a $\rho(\Lambda)$. Entoces $(\lambda - \Lambda)^{-1} : Z \to D(\Lambda)$ es un operador lineal y acotado. Se debe demostrar ahora que

$$(\lambda - \bar{\Lambda}_m)^{-1} : \mathcal{R}(P_m) \to \mathcal{R}(P_m),$$

existe y es acotado para $m \geq 1$. Supóngase que $(\lambda - \bar{\Lambda}_m)P_m z = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} (\lambda - \Lambda)P_m z &= \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda - \Lambda_j) P_j P_m z \\ &= (\lambda - \Lambda_m)P_m z = (\lambda - \bar{\Lambda}_m)P_m z = 0. \end{aligned}$$

lo cual implica que, $P_m z = 0$. Así que, $(\lambda - \bar{\Lambda}_m)$ es uno a uno.

Ahora bien, dado y en $\mathcal{R}(P_m)$ se puede resolver la ecuación siguiente: $(\lambda - \bar{\Lambda}_m)w = y$. En efecto, ya que $\lambda \in \rho(\Lambda)$, existe $z \in Z$ tal que

$$(\lambda - \Lambda)z = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda - \Lambda_j) P_j z = y.$$

Entonces, aplicando P_m en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$P_m(\lambda - \Lambda)z = (\lambda - \Lambda_m)P_m z = (\lambda - \bar{\Lambda}_m)P_m z = P_m y = y.$$

Por lo tanto, $(\lambda - \bar{\Lambda}_m) : \mathcal{R}(P_m) \to \mathcal{R}(P_m)$ es una biyección. Por otro lado, ya que $\bar{\Lambda}_m$ es cerrado, se tiene por el teorema de gráfico cerrado que

$$\lambda \in \rho(\bar{\Lambda}_m) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\bar{\Lambda}_m - \lambda I) \ \text{ es biyectivo}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\bar{\Lambda}_m - \lambda I)^{-1} \ \text{ es acotado}\},$$

para todo $m \geq 1$. Así se ha probado que

$$\rho(\Lambda) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \rho(\bar{\Lambda}_j) \iff \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\bar{\Lambda}_j) \subset \sigma(\Lambda).$$

Ahora bien, se debe demostrar la otra parte de (c), esto es:

$$\sigma(\Lambda) \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\overline{\Lambda_j})}.$$

En efecto, si $\lambda \in \sigma(\Lambda)$, entonces

(1) $\lambda \in \sigma_p(\Lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\Lambda - \lambda I) \text{ no es inyectivo}\}$.

(2) $\lambda \in \sigma_r(\Lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\Lambda - \lambda I) \text{ es inyectivo, pero } \overline{R(\Lambda - \lambda I)} \neq Z\}$.

(3) $\lambda \in \sigma_c(\Lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\Lambda - \lambda I) \text{ es inyectivo, } \overline{R(\Lambda - \lambda I)} = Z, \text{pero } R(\Lambda - \lambda I) \neq Z\}$.

(1) Si $(\Lambda - \lambda I)$ no es inyectivo entonces existe $z \in Z$ no nulo tal que: $(\Lambda - \lambda I)z = 0$. Esto implica que para algún n_0 se tiene que:

$$(\overline{\Lambda}_{n_0} - \lambda I)P_{n_0} z = 0, \quad P_{n_0} z \neq 0.$$

De aquí se obtiene que $\lambda \in \sigma(\overline{\Lambda_{n_0}})$, y por lo tanto $\lambda \in \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\overline{\Lambda_j})}$.

(2) Si $\overline{R(\Lambda - \lambda I)} \neq Z$ entonces existe $z_0 \in Z$ no nulo tal que:

$$\langle z_0, (\Lambda - \lambda I)z \rangle = 0, \quad \forall z \in D(\Lambda).$$

Pero, $z = \sum_{j=1}^{\infty} P_j z$, así que:

$$\langle z_0, \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{\Lambda_j} - \lambda I) P_j z \rangle = 0.$$

Ahora bien, si $z_0 \neq 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $P_{n_0} z_0 \neq 0$. En consecuencia, para $z = P_{n_0}z$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle z_0, \sum_{j=1}^{\infty}(\overline{\Lambda_j} - \lambda I)P_j P_{n_0} z\rangle \\
&= \langle z_0, (\overline{\Lambda_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0} z\rangle \\
&= \langle P_{n_0} z_0, (\overline{\Lambda_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0} z\rangle.
\end{aligned}
$$

Así, $\overline{R(\overline{\Lambda}_{n_0} - \lambda I)} \neq P_{n_0}Z$. Por lo tanto, $\lambda \in \sigma(\overline{\Lambda}_{n_0}) \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\overline{\Lambda_j})}$.

(3) Supóngase que $(\Lambda - \lambda I)$ es inyectivo, $\overline{R(\Lambda - \lambda I)} = Z$ y $R(\Lambda - \lambda I) \subsetneq Z$.

Supóngase por reducción al absurdo que $\lambda \in \left(\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\overline{\Lambda_n})}\right)^C$.

Pero,

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\overline{\Lambda_j})}\right)^C &\subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\overline{\Lambda_j})\right)^C \\
&= \bigcap_{j\geq 1} \left(\sigma(\overline{\Lambda_j})\right)^C \\
&= \bigcap_{j\geq 1} \rho(\overline{\Lambda_j}),
\end{aligned}
$$

el cual implica que, $\lambda \in \rho(\overline{\Lambda_j})$, para todo $j \geq 1$. Entonces se sigue que:

$$(\overline{\Lambda_j} - \lambda I) : R(P_j) \longrightarrow R(P_j),$$

es invertible, con $(\overline{\Lambda_j} - \lambda I)^{-1}$ acotado.

Por lo tanto, para todo $z \in D(\Lambda)$ se obtiene que

$$P_j(\Lambda - \lambda I)z = (\overline{\Lambda_j} - \lambda I)P_j z, \quad j = 1, 2, \ldots$$

es decir,

$$(\overline{\Lambda_j} - \lambda I)^{-1}P_j(\Lambda - \lambda I)z = P_j z, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Ahora bien, ya que $D(\Lambda)$ es denso en Z, se puede extender el operador

$$(\overline{\Lambda_j} - \lambda I)^{-1} P_j (\Lambda - \lambda I)$$

a un operador acotado T_j definido en Z. En consecuencia, se sigue que

$$T_j z = P_j z, \quad \forall z \in Z, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

y

$$\|T_j\| = \|P_j\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Ya que $\overline{R(\Lambda - \lambda I)} = Z$, se tiene que

$$\|(\overline{\Lambda_j} - \lambda I)^{-1}\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{3.2.6}$$

De acá se sigue que $R(\Lambda - \lambda I) = Z$. En efecto, dado $z \in Z$ se define y como:

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{\Lambda_j} - \lambda I)^{-1} P_j z.$$

De (3.2.6) se tiene que y esta bien definido. Se debe probar ahora que $y \in D(\Lambda)$ y $(\Lambda - \lambda I)y = z$. En efecto, se conoce que:

$$y \in D(\Lambda) \iff \sum_{j=1}^{\infty} \|\Lambda_j P_j y\|^2 < \infty.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\overline{\Lambda}_j P_j y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\Lambda_j (\overline{\Lambda_j} - \lambda I)^{-1} P_j z\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\{I + \lambda (\overline{\Lambda_j} - \lambda I)^{-1}\} P_j z\|^2.$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\Lambda_j P_j y\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|(1 + |\lambda|)^2 \|P_j z\|^2 = (1 + |\lambda|)^2 \|z\|^2 < \infty.$$

Entonces, $y \in D(\Lambda)$ y $(\Lambda - \lambda I)y = z$.

Por lo tanto, $R(\Lambda - \lambda I) = Z$, lo cual es una contradicción con lo supuesto, por lo que $\lambda \in \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{\Lambda_n}) \right)}$.

***Lema* 3.2.2.** *Sea Z un espacio de Hilbert separable, $\{S_j(t)\}_{t\geq 0}$ una familia de semi-grupos fuertemente continuos con generadores Λ_j y $\{P_j\}_{j\geq 1}$ una familia completa de proyecciones ortogonales tal que*

$$\Lambda_j P_m = P_m \Lambda_j, \quad j, m = 1, 2, \ldots \tag{3.2.7}$$

Si el operador

$$\Lambda z = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j P_j z, \quad z \in D(\Lambda)$$

con

$$D(\Lambda) = \{z \in Z : \sum_{j=1}^{\infty} \| \Lambda_j P_j z \|^2 < \infty\}$$

genera un semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, entonces

$$S(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t) P_j z, \quad z \in Z.$$

Demostración

Sea $z_0 \in Z$. Entonces $P_j z_0 \in D(\Lambda)$ y la solución del problema

$$\begin{cases} z'(t) &= \Lambda z(t) \\ z(0) &= P_j z_0 \end{cases}$$

viene dada por $z_j(t) = S(t) P_j z_0$.

Usando (3.2.7) y el Teorema de Hille-Yosida, resulta que $P_j S(t) = S(t) P_j$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
z_j'(t) &= \Lambda z_j(t) \\
&= \Lambda S(t) P_j z_0 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_m P_m S(t) P_j z_0 \\
&= \Lambda_j P_j S(t) P_j z_0 \\
&= \Lambda_j S(t) P_j z_0 = \Lambda_j z_j(t).
\end{aligned}
$$

Así, $z_j(t) = S_j(t)P_j z_0 = S(t)P_j z_0$.

Por otra parte,

$$z_0 = \sum_{j=1}^{\infty} P_j z_0.$$

Luego,

$$S(t)z_0 = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(t)P_j z_0.$$

□

Aplicando el Lema 3.2.1 se puede probar el siguiente resultado

***Teorema* 3.2.1.** *El operador $-A$ es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{T_A(t)\}_{t\geq 0}$ en el espacio de Hilbert Z dado por*

$$T_A(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0. \tag{3.2.8}$$

3.3. Existencia y Unicidad de las Soluciones

En esta sección se estudiará la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (3.2.4) en el caso de que $f^e \equiv 0$. Esto es, se analizará el siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = -Az(t) + Lz_t, \quad t > 0, \\ \\ z(0) = \phi_0, \\ \\ z(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0). \end{cases} \tag{3.3.1}$$

***Definición* 3.3.1.** *La función $z(\cdot)$ definida en $[-\tau, \alpha)$ es llamada solución moderada de (3.3.1) si*

$$z(t) = \begin{cases} \phi(t); \quad -\tau \leq t < 0, \\ \\ T_A(t)z_0 + \displaystyle\int_0^t T_A(t-s)Lz_s ds, \quad t \in [0, \alpha). \end{cases}$$

***Teorema* 3.3.1.** *El problema (3.3.1) admite sólo una solución moderada definida en* $[-\tau, \infty)$.

Demostración

Considérese la siguiente función inicial

$$\varphi(s) = \begin{cases} \phi(s); \quad -\tau \leq s < 0, \\ \\ T_A(s)z_0; \quad s \geq 0, \end{cases}$$

la cual se encuentra en $L^2_{loc}([-\tau, \infty), Z)$. En principio se plantea el problema $[-\tau, I]$, $I > 0$ y se denota por G el conjunto:

$$G = \left\{ \psi : \psi \in L^2[[-\tau, \alpha], Z] \quad y \quad | \psi - \varphi |_{L^2} \leq \rho, \quad \rho > 0 \right\},$$

donde $\alpha > 0$ es un número a determinar. Es claro que G con la norma de $L^2([-\tau, \alpha]; Z)$ es un espacio métrico completo.

Ahora bien, considérese la aplicación $S : G \to Z$ dada por

$$(Sz)(t) = Sz(t) = \begin{cases} \phi(t); \quad -\tau \leq t < 0, \\ \\ T_A(t)z_0 + \displaystyle\int_0^t T_A(t-s)Lz_s ds, \quad t \in [0, \alpha]. \end{cases} \qquad \forall z \in G.$$

Afirmación 1. Existe $\alpha > 0$ tal que:

(i) $Sz \in G, \quad \forall z \in G.$

(ii) S es un mapeo de contracción.

En efecto, se probará (i) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} | Sz(t) - \varphi(t) | &\leq \int_0^t | T_A(t-s)Lz_s | \, ds \\ &\leq \int_0^\alpha M | Lz_s | \, ds \\ &\leq MM_0(\alpha) | z |_{L^2([-\tau,\alpha),Z)} . \end{aligned}$$

Integrando se tiene que:

$$| Sz - \varphi |_{L^2} \quad \leq \quad K\alpha^{\frac{1}{2}} | z |_{L^2},$$

donde $K = max\{MM_0(\alpha)/ \ \alpha \in [0, I]\}$.

De aquí que :

$$| Sz - \varphi |_{L^2} \quad \leq \quad K\alpha^{\frac{1}{2}}(| \varphi |_{L^2} + \rho), \quad z \in G.$$

Tomando

$$\alpha \quad < \quad \left(I, \left(\frac{\rho}{K(\mid \varphi \mid_{L^2} + \rho)} \right)^2 \right),$$

se obtiene que $Sz \in G \quad \forall z \in G$.

Para probar (ii), se considera la linealidad de L, por lo que se tiene que:

$$\mid Sz - Sw \mid_{L^2} \quad \leq \quad K\alpha^{\frac{1}{2}} \mid z - w \mid_{L^2} .$$

Luego, para probar que S es una contracción y $S(G) \subset G$ es necesario escoger α como sigue :

$$\alpha \quad < \quad min \left\{ I, \left(\frac{1}{K} \right)^2, \left(\frac{\rho}{K(\mid \varphi \mid_{L^2} + \rho)} \right)^2 \right\}.$$

Por lo tanto, S es un mapeo de contracción.

Así, si se aplica el teorema del punto fijo de Banach, entonces existe un único punto $z \in G$ tal que $Sz = z$, es decir:

$$z(t) = Sz(t) = \begin{cases} \phi(t); \quad -\tau \leq t < 0, \\ \\ T_A(t)z_0 + \displaystyle\int_0^t T_A(t-s)Lz_s ds, \quad t \in [0, \alpha], \end{cases}$$

lo cual prueba la existencia y unicidad de la solución moderada del problema de valor inicial (3.3.1) en $[-\tau, \alpha]$.

Afirmación 2. α puede ser igual a ∞.

En efecto, sea z la única solución moderada definida en el intervalo maximal $[-\tau, \delta)$ ($\delta \geq \alpha$). Supóngase por absurdo que $\delta < \infty$. Ya que z es una solución moderada de (3.3.1), se tiene que

$$z(t) = T_A(t)z_0 + \int_0^t T_A(t-s)Lz_s ds, \quad t \in [0, \delta).$$

Considérese la sucesión $\{t_n\}$ tal que $t_n \longrightarrow \delta^-$. Se probará que $\{z(t_n)\}$ es una sucesión de Cauchy.

En efecto,

$$\begin{aligned} \mid z(t_n) - z(t_m) \mid &= \mid T_A(t_n)z_0 - T_A(t_m)z_0 + \int_0^{t_n} T_A(t_n - s)Lz_s ds - \int_0^{t_m} T_A(t_m - s)Lz_s ds \mid \\ &\leq \mid (T_A(t_n) - T_A(t_m))z_0 \mid + \mid \int_0^{t_n} T_A(t_n - s)Lz_s ds - \int_0^{t_m} T_A(t_m - s)Lz_s ds \mid \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \mid \int_0^{t_n} T_A(t_n - s)Lz_s ds - \int_0^{t_m} T_A(t_m - s)Lz_s ds \mid &\leq \mid \int_0^{t_m} (T_A(t_n - s) - T_A(t_m - s))Lz_s ds \mid \\ &+ \mid \int_{t_n}^{t_m} T_A(t_n - s)Lz_s ds \mid . \end{aligned}$$

Ahora bien, para $z \in L^2([-\tau, \delta))$ se obtiene que

$$\int_0^{t_m} \mid (T_A(t_n - s) - T_A(t_m - s))Lz_s \mid ds \leq \int_0^{\delta} \mid (T_A(t_n - s) - T_A(t_m - s))Lz_s \mid ds.$$

Además, se tiene que

$$\lim_{n,m \longrightarrow \infty} \mid (T_A(t_n - s) - T_A(t_m - s))Lz_s \mid = 0$$

y

$$\mid (T_A(t_n - s) - T_A(t_m - s))Lz_s \mid \leq 2M \mid Lz_s \mid .$$

Luego, de la hipótesis (c), se obtiene que:

$$\int_0^{\delta} 2M \mid Lz_s \mid ds \leq 2MM_0(\delta) \mid z \mid_{L^2([-\tau,\delta);Z)} .$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\lim_{n,m \longrightarrow \infty} \int_0^{\delta} \mid (T_A(t_n - s) - T_A(t_m - s))Lz_s \mid ds = 0.$$

Entonces, ya que la familia $\{T_A(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continua y $t_n \longrightarrow \delta^-$ cuando $n \longrightarrow \infty$, se concluye que la sucesión $\{z(t_n)\}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto existe $B \in Z$ tal que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z(t_n) = B.$$

Ahora bien, para $t \in [0, \delta)$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mid z(t) - B \mid &\leq \mid z(t) - z(t_n) \mid + \mid z(t_n) - B \mid \\
&\leq \mid (T_A(t) - T_A(t_n))z_0 \mid + \mid z(t_n) - B \mid \\
&+ \mid \int_0^{t_n} T_A(t_n - s)Lz_s ds - \int_0^t T_A(t-s)Lz_s ds \mid .
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\mid \int_0^{t_n} T_A(t_n - s)Lz_s ds - \int_0^t T_A(t-s)Lz_s ds \mid &\leq \int_0^{t_n} \mid T_A(t-s) - T_A(t_n - s)Lz_s \mid ds \\
&+ \int_t^{t_n} \mid T_A(t-s)Lz_s \mid ds.
\end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se obtiene que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^{t_n} \mid (T_A(t-s) - T_A(t_n - s))Lz_s \mid = 0.$$

Entonces, ya que la familia $\{T_A(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continua y $t_n \longrightarrow \delta^-$ cuando $n \longrightarrow \infty$, se sigue que $z(t) \longrightarrow B$ cuando $t \longrightarrow \delta^-$.

La función

$$\varphi(s) = \begin{cases} z(s); & -\tau \leq s < \delta, \\ \\ T_A(s)B, & s \geq \delta, \end{cases}$$

se encuentra en $L^2_{loc}([-\tau,\infty),Z)$. Así, aplicando nuevamente el teorema de contracción de Banach al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -Ay(t) + Ly_t \quad t > \delta, \\ \\ y(\delta) = B, \\ \\ y(s) = z(s), \quad s \in [\delta-\tau,\delta), \end{cases} \tag{3.3.2}$$

donde $z(\cdot)$ es la única solución del sistema (3.3.1), se tiene que el sistema (3.3.2) admite sólo una solución $y(\cdot)$ en el intervalo $[\delta-\tau,\delta+\epsilon]$ con $\epsilon > 0$. Por lo tanto, la función

$$\widetilde{z}(s) = \begin{cases} z(s); \quad -\tau \leq s < \delta, \\ \\ y(s), \quad \delta \leq s < \delta+\epsilon, \end{cases}$$

es también solución moderada de (3.3.1), lo cual es una contradicción. En consecuencia $\alpha = \infty$. □

3.4. Fórmula de Variación de Parámetros

Para encontrar una fórmula de variación de parámetros para el sistema (3.2.4), se necesita escribir este sistema como una ecuación diferencial ordinaria abstracta en un espacio de Hilbert apropiado. En efecto, se considera el espacio de Hilbert $\mathbb{M}_2([-\tau,0];Z) = Z \oplus L^2([-\tau,0];Z)$ con el producto interior usual dado por:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \varphi_{01} \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_{02} \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \varphi_{01},\varphi_{02}\rangle_Z + \langle \varphi_1,\varphi_2\rangle_{L^2}.$$

Se define el siguiente operador en el espacio $\mathbb{M}_2$ para $t \geq 0$ por

$$T(t)\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t) \\ z_t(\cdot, \varphi_0, \varphi(\cdot)) \end{pmatrix}, \tag{3.4.1}$$

donde $z(\cdot)$ es la única solución del sistema (3.3.1).

***Teorema* 3.4.1.** *La familia de operadores* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *definidos por (3.4.1) es un semigrupo fuertemente continuo en* $\mathbb{M}_2$ *tal que*

$$T(t)W = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t)Q_jW, \quad W \in \mathbb{M}_2, \quad t \geq 0, \tag{3.4.2}$$

donde,

$$Q_j \quad = \quad \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_j \end{pmatrix},$$

con $(\widetilde{P}_j\phi)(s) = P_j\phi(s), \phi \in L^2([-\tau, 0]; Z), \ s \in [-\tau, 0), \ y \ \{\{T_j(t)\}_{t\geq 0}, j = 1,2,3,..\}$ *es una familia de semigrupos fuertemente continuos en* $\mathbb{M}_2^j = Q_j\mathbb{M}_2$ *dados por el Teorema 2.2.2 del capítulo 2 y definido como sigue*

$$T_j(t)\begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} W^j(t) \\ W_t^j(\cdot, w_j^0, w_j) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2^j,$$

donde $W^j(\cdot)$ *es la única solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} = -\lambda_j D w(t) + L_j w_t, \quad t > 0, \\ \\ w(0) = w_j^0, \\ \\ w(s) = w_j(s), \quad s \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{3.4.3}$$

y $L_j = L\widetilde{P}_j = P_jL$.

Demostración

En primer lugar, se debe probar que

$$T(t)W = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t)Q_jW, \quad W \in \mathbb{M}_2, \quad t \geq 0.$$

En efecto, sea $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} T_j(t)Q_jW &= \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) \begin{pmatrix} P_j w_1 \\ \widetilde{P}_j w_2 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} z^j(t) \\ z_t^j(\cdot, P_j w_1, \widetilde{P}_j w_2) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_j D t} P_j w_1 + \displaystyle\int_0^t e^{-\lambda_j D(t-s)} L_j(\widetilde{P}_j z^j(s+\cdot))ds \\ \\ (\widetilde{P}_j z(t+\cdot)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} P_j w_1 + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D(t-s)} P_j \left(L \sum_{m=1}^{\infty} (\widetilde{P}_m z(s+\cdot)) \right) ds \\ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (\widetilde{P}_j z(t+\cdot)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} T_A(t)w_1 + \int_0^t T_A(t-s)Lz(s+\cdot)ds \\ \\ z(t+\cdot) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z(t) \\ z_t(\cdot, w_1, w_2) \end{pmatrix}$$

$$= T(t)W.$$

Del capítulo 2 se tiene que el generador infinitesimal de $\{T_j(t)\}_{t\geq 0}$ viene dado por:

$$\Lambda_j \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_j D w_j^0 + L_j w_j(\cdot) \\ \\ \dfrac{\partial w_j(\cdot)}{\partial s} \end{pmatrix}$$

con

$$D(\Lambda_j) = \left\{ \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2^j : w_j \ es \ a.c., \ \frac{\partial w_j(\cdot)}{\partial s} \in L_2([-\tau, 0]; Q_j Z) \ y \ w_j(0) = w_j^0 \right\}.$$

Más aun, el espectro de Λ_j es discreto y dado por

$$\sigma(\Lambda_j) = \sigma_p(\Lambda_j) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\Lambda_j(\lambda)) = 0\}, \tag{3.4.4}$$

donde $\Lambda_j(\lambda)$ viene dado por

$$\Lambda_j(\lambda)z = \lambda z + \lambda_j D z - L_j e^{\lambda(\cdot)} z, \quad z \in Z_j = P_j Z,$$

el cual puede ser considerado como una matriz ya que $\dim(Z_j) < \infty$.

Por otro lado, $\{Q_j\}_{j\geq 1}$ es una familia completa de proyecciones ortogonales en $\mathbb{M}_2$ y

$$\Lambda_j Q_j = Q_j \Lambda_j, \quad j = 1, 2, 3, ...$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\Lambda_j Q_j \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j(\cdot) \end{pmatrix} &= \Lambda_j \begin{pmatrix} P_j w_j^0 \\ \widetilde{P}_j w_j(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_j D P_j w_j^0 + L_j \widetilde{P}_j w_j(\cdot) \\ \\ \dfrac{\partial \widetilde{P}_j w_j(\cdot)}{\partial s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\lambda_j D P_j w_j^0 + L \widetilde{P}_j \widetilde{P}_j w_j(\cdot) \\ \\ \widetilde{P}_j \dfrac{\partial w_j(\cdot)}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_j D P_j w_j^0 + P_j L_j w_j(\cdot) \\ \\ \widetilde{P}_j \dfrac{\partial w_j(\cdot)}{\partial s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_j D w_j^0 + L_j w_j(\cdot) \\ \\ \dfrac{\partial w_j(\cdot)}{\partial s} \end{pmatrix} = Q_j \Lambda_j \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j(\cdot) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora bien, se debe verificar la condición (a) del Lema 3.1.1, para ello se necesita probar la siguiente afirmación:

Afirmación. Si $W^j(t)$ es la solución de (3.4.3), entonces las siguientes desigualdades se tienen:

$$\| W^j(t) \|_Z \leq c_2 e^{c_1 t} \|w_j^0\|, \quad t \geq 0, \tag{3.4.5}$$

$$\int_0^t \| W^j(u) \|_Z^2 \, du \leq k^2 e^{2c_1 t} \|w_j^0\|^2, \quad t \geq 0. \tag{3.4.6}$$

En efecto, si se considera $M_1 = \max\{M, \| L \|\}$, entonces se cumple que:

$$\| W^j(t+\theta) \|_Z \leq M_1 \|w_j^0\| + M_1^2 \int_0^t \| W_s^j \|_{L^2} \, ds; \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

esto implica que

$$\| W^j(t+\theta) \|_Z^2 \leq \left(M_1 \|w_j^0\| + M_1^2 \int_0^t \| W_s^j \|_{L^2} \, ds \right)^2 .$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-\tau}^{0} \| W^j(t+\theta) \|_Z^2 \, d\theta &\leq \int_{-\tau}^{0} \left(M_1 \|w_j^0\| + M_1^2 \int_0^t \| W_s^j \|_{L^2} \, ds \right)^2 d\theta \\
&\leq \int_{-\tau}^{0} 2^2 \left(M_1^2 \|w_j^0\|^2 + M_1^4 \left(\int_0^t \| W_s^j \|_{L^2} \, ds \right)^2 \right) d\theta \\
&= 2^2 \tau M_1^2 \|w_j^0\|^2 + M_1^4 \left(\int_0^t \| W_s^j \|_{L^2} \, ds \right)^2 \int_{-\tau}^{0} d\theta \\
&= c_2^2 \|w_j^0\|^2 + c_1^2 \left(\int_0^t \| W_s^j \|_{L^2} \, ds \right)^2 \\
&\leq \left(c_2 \|w_j^0\| + c_1 \left(\int_0^t \| W_s^j \|_{L^2} \, ds \right) \right)^2 .
\end{aligned}$$

Así,

$$\| W_t^j \|_{L^2} \leq c_2 \|w_j^0\| + c_1 \left(\int_0^t \| W_s^j \|_{L^2} \, ds \right).$$

En consecuencia, aplicando el Lema de Gronwall se obtiene que

$$\| W_t^j \|_{L^2} \leq c_2 e^{c_1 t} \|w_j^0\|, \quad t \geq 0.$$

Por otro lado, se tiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\| W^j(t) \|_Z &\leq \| T_{A_j}(t) w_j^0 \| + \left\| \int_0^t T_{A_j}(t-s) L_j W^j(s+\cdot) ds \right\| \\
&\leq M_1 \|w_j^0\| + M_1^2 \int_0^t \| W^j(s+\cdot) ds \|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; M_1 \|w_j^0\| + M_1^2 \int_0^t c_1 e^{c_2 s} \|w_j^0\| ds \\
&= \; \left(M_1 + \frac{M_1^2 c_2}{c_1} e^{c_1 t} \right) \|w_j^0\| \\
&\leq \; c e^{c_1 t} \|w_j^0\|, \qquad c = M_1 + \frac{M_1^2 c_2}{c_1}, \; t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\int_0^t \| W^j(u) \|_Z^2 \, du \; \leq \; k^2 e^{c_1 t} \|w_j^0\|, \qquad k = \frac{c}{2c_1}, \; t \geq 0.
$$

Esto completa la demostración de la afirmación.

Ahora bien, usando la anterior desigualdad se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\left\| T_j(t) \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j \end{pmatrix} \right\|^2 &= \; \| W^j(t) \|_Z^2 + \int_{-\tau}^0 \| W^j(t+\tau) \|_Z^2 \, d\tau \\
&= \; \| W^j(t) \|_Z^2 + \int_{t-\tau}^t \| W^j(u) \|_Z^2 \, du \\
&\leq \; \| W^j(t) \|_Z^2 + \int_0^t \| W^j(u) \|_Z^2 \, du + \| w_j \|_{L^2}^2 \\
&\leq \; (c_2^2 e^{2c_1 t} + k^2 e^{2c_1 t}) \|w_j^0\|^2 + \| w_j \|_{L^2}^2 \\
&\leq \; (g(t))^2 \left(\|w_j^0\|^2 + \| w_j \|_{L^2}^2 \right), \qquad j \geq 1, 2, \ldots .
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
\| T_j(t) \| \leq g(t), \qquad j \geq 1, 2, \ldots .
$$

Por lo tanto, aplicando el Lema 3.1.1, se obtiene que $T(t)$ es acotado y $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Hilbert $\mathbb{M}_2$, cuyo generador Λ

viene dado por

$$\Lambda W = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j Q_j W, \qquad W \in D(\Lambda),$$

con

$$D(\Lambda) = \left\{ W \in \mathbb{M}_2 / \sum_{j=1}^{\infty} \| \Lambda_j Q_j W \|^2 < \infty \right\}$$

y el espectro $\sigma(\Lambda)$ de Λ viene daddo por

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma(\bar{\Lambda}_j)}, \tag{3.4.7}$$

donde $\bar{\Lambda}_j = \Lambda_j Q_j : \mathcal{R}(Q_j) \to \mathcal{R}(Q_j)$. □

***Lema* 3.4.1.** *Sea Λ el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces*

$$\Lambda \tilde{\varphi}(s) = \begin{pmatrix} -A\phi_0 + L\phi(s) \\ \\ \dfrac{\partial \phi(s)}{\partial s} \end{pmatrix} ; \ -\tau \leq s \leq 0,$$

$$D(\Lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2 : \phi_0 \in D(A), \phi \ \ es \ \ a.c., \frac{\partial \phi(s)}{\partial s} \in L^2([-\tau, 0]; Z) \ \ y \ \ \phi(0) = \phi_0 \right\},$$

y

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \{\lambda \in \mathbb{C} : det(\Lambda_j(\lambda)) = 0\}}.$$

Demostración

Considérese $\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix}$ en $\mathbb{M}_2$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\Lambda W = \Lambda \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j Q_j W \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j \begin{pmatrix} P_j \phi_0 \\ \widetilde{P}_j \phi(\cdot) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -\lambda_j D P_j \phi(0) + L_j \widetilde{P}_j \phi \\ \\ \dfrac{\partial \widetilde{P}_j \phi(\cdot)}{\partial (s)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j D P_j \phi(0) + L \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{P}_j \phi \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{P}_j \phi(\cdot) \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -A\phi(0) + L\phi(\cdot) \\ \\ \dfrac{\partial \phi(\cdot)}{\partial s} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La otra parte se sigue de (3.4.7). □

Por lo tanto, los sistemas (3.3.1) y (3.2.4) son equivalente a los siguientes dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathbb{M}_2$ respectivamente:

$$
\begin{cases} \dfrac{dW(t)}{dt} = \Lambda W(t), \quad t > 0, \\ \\ W(0) \;\; = W_0 = (\phi_0, \phi(\cdot)), \end{cases} \tag{3.4.8}
$$

$$\begin{cases} \dfrac{dW(t)}{dt} = \Lambda W(t) + \Phi(t), \quad t > 0, \\ \\ W(0) \quad = W_0 = (\phi_0, \phi(\cdot)), \end{cases} \tag{3.4.9}$$

donde Λ es el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $\Phi(t) = (f^e(t), 0)$.

La serie de pasos anteriores nos permiten concluir con la demostración del primer resultado principal en esta tesis: La Fórmula de Variación de Parámetros para Ecuaciones Parciales Parabólicas Funcionales. Este resultado es enunciado en el siguiente teorema.

***Teorema* 3.4.2.** *El problema de Cauchy abstracto en el espacio de Hilbert* $\mathbb{M}_2$

$$\begin{cases} \dfrac{dW(t)}{dt} = \Lambda W(t) + \Phi(t), \quad t > 0, \\ \\ W(0) \quad = W_0, \end{cases}$$

donde Λ *es el generador del semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *y* $\Phi(t) = (f^e(t), 0)$ *es una función tomando valores en* $\mathbb{M}_2$*, admite una y sólo una solución moderada dada por:*

$$W(t) = T(t)W_0 + \int_0^t T(t-s)\Phi(s)ds. \tag{3.4.10}$$

Corolario 3.4.1. *Si* $z(t)$ *es una solución de (3.2.4), entonces la función* $W(t) := (z(t), z_t)$ *es solución de la ecuación (3.4.9)*

Capítulo 4

Controlabilidad de Ecuaciones Parciales Parabólicas Funcionales

4.1. Introducción

En este capítulo se dan condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad aproximada del siguiente sistema de ecuaciones parciales parabólicas con retardo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t} & = & D\Delta z + Lz_t + Bu(t), \quad t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial z(t,x)}{\partial \eta} & = & 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ z(0,x) & = & \phi_0(x), \quad x \in \Omega, \\ z(s,x) & = & \phi(s,x), \quad s \in [-\tau, 0), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, D es una matriz $n \times n$ no diagonal cuyos autovalores son semi-simple con parte real no negativa, el control u pertenece a $L^2([0,r];U) \quad (U = L^2(\Omega, \mathbb{R}^m))$ y $B \in L(U,Z)$ con $Z = L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. La notación estandar $z_t(x)$ define una función de $[-\tau, 0]$ en $\mathbb{R}^n$ (con x fijo) por $z_t(x)(s) = z(t + s, x), -\tau \leq s \leq 0$. Aquí $\tau \geq 0$ es el máximo retardo, el cual se supone que es finito. Se supone que el operador $L : L^2([-\tau, 0]; Z) \longrightarrow Z$ es lineal y acotado y $\phi_0 \in Z,\ \phi \in L^2([-\tau, 0]; Z)$.

Como un caso particular se considera el siguiente sistema controlado de ecuaciones parciales parabólicas con retardo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t} &= D\Delta z + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_i z(t-h_i,x) + Bu(t), \quad t>0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \eta} &= 0, \quad t>0, \quad x \in \partial\Omega, \\ z(0,x) &= \phi_0(x), \quad x \in \Omega, \\ z(s,x) &= \phi(s,x), \quad s \in [-\tau,0), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

donde $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_p$ representa los puntos de retardo, $\tau = h_p$, B, $A_i \in L(\mathbb{R}^n)$, $i = 1,2,\ldots p$, u pertenece a $L^2([0,r];U)$ $(U = L^2(\Omega,\mathbb{R}^n))$ y $\phi_0 \in Z$, $\phi \in L^2([-\tau,0];Z)$ con $Z = U$ y el operador $L : ([-\tau,0];Z) \longrightarrow Z$ viene dado por $L\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_i\varphi(-h_i,\cdot)$..

4.2. Formulación Abstracta del Problema

En esta sección considerando las misma hipótesis presentadas en el formulación abstracta del problema del capítulo anterior, se obtiene que el sistema (4.1.1) puede ser escrito como una ecuación diferencial funcional abstracta en Z:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = -Az(t) + Lz_t + Bu(t), \quad t>0, \\ z(0) = \phi_0, \\ z(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau,0), \end{cases} \tag{4.2.1}$$

donde $u \in L^2([0,r];U)$ y $B : U \to Z$.

En consecuencia se tiene que: La ecuación (4.2.1) puede ser escrita como una ecuación diferencial ordinaria en el espacio de Hilbert $\mathbb{M}_2([-\tau,0];Z) = Z \oplus L^2([-\tau,0];Z)$ como sigue:

$$\begin{cases} \dfrac{dW(t)}{dt} = \Lambda W(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t>0, \\ W(0) \;\; = W_0, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Λ es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definido por:

$$T(t)\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(t) \\ W(t+\cdot) \end{pmatrix}, \tag{4.2.3}$$

donde $W(\cdot)$ es la única solución moderada del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = -Az(t) + Lz_t, \quad t > 0, \\ z(0) = \phi_0, \\ z(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{4.2.4}$$

y $\mathcal{B} : U \longrightarrow \mathbb{M}_2$, viene dada por $\mathcal{B}u = (Bu, 0)^T$.

4.3. Controlabilidad Aproximada del Sistema

Para todo $W_0 \in \mathbb{M}_2$ y $u \in L^2([0,r];U)$ la ecuación (4.2.2) admite una, y sólo una, solución dada por:

$$W(t) = T(t)W_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{B}u(t)ds,\ 0 \leq t \leq r. \tag{4.3.1}$$

***Definición* 4.3.1.** *El sistema (4.2.2) es aproximadamente controlable en* $[0,r]$*, si para todo* $W_0, W_1 \in \mathbb{M}_2$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe un control* $u \in L^2([0,r];U)$ *tal que la correspondiente solución* $W(t)$ *de (4.3.1) satisfase*

$$\| W(r) - W_1 \| < \epsilon.$$

Considérese los siguientes operadores lineales $\mathcal{B}^r : L^2([0,r];U) \to \mathbb{M}_2, \quad L_{\mathcal{B}} : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$, definido por

$$\mathcal{B}^r u = \int_0^r T(s)\mathcal{B}u(s)ds \ \text{ y } \ L_{\mathcal{B}}W = \mathcal{B}^r(\mathcal{B}^r)^*W = \int_0^r T(s)\mathcal{B}\mathcal{B}^*T^*(s)W ds.$$

Entonces, el siguiente teorema puede ser encontrado en forma general para la ecuación de evolución en [5].

***Teorema* 4.3.1.** *El sistema (4.2.2) es aproximadamente controlable en* $[0, r]$ *si, y sólo si, cualquiera de las siguientes condiciones se tienen:*

a) $\overline{Rang(\mathcal{B}^r)} = \mathbb{M}_2$.

b) $\mathcal{B}^* T^*(s) z = 0, \ \forall s \in [0, r] \Longrightarrow z = 0$.

c) $L_{\mathcal{B}} > 0$.

En el capítulo anterior fue probado que el semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, asociado a (4.2.2) puede ser representado como sigue

$$T(t)W = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) Q_j W, \quad W \in \mathbb{M}_2, \quad t \geq 0, \tag{4.3.2}$$

donde

$$Q_j \quad = \quad \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_j \end{pmatrix},$$

con $(\widetilde{P}_j \phi)(s) = P_j \phi(s), \phi \in L^2([-\tau, 0]; Z), \ s \in [-\tau, 0)$, y $\{T_j(t)\}_{t \geq 0}$ es una familia de semigrupos fuertemente continuos en $M_2^j = Q_j \mathbb{M}_2$ definido por

$$T_j(t) \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} W^j(t) \\ W^j(t + \cdot) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2^j,$$

donde $W^j(\cdot)$ es la única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} = -\lambda_j D w(t) + L_j w_t, \quad t > 0, \\ w(0) = w_j^0, \\ w(s) = w_j(s), \quad s \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{4.3.3}$$

y $L_j = L\widetilde{P}_j$. El generador infinitesimal del semigrupo viene dado por

$$\Lambda_j \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_j D w_j^0 + L_j w_j(\cdot) \\ \dfrac{\partial w_j(\cdot)}{\partial s} \end{pmatrix}$$

con

$$D(\Lambda_j) = \left\{ \begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2^j : w_j \ es \ a.c., \ \frac{\partial w_j(\cdot)}{\partial s} \in L^2([-\tau, 0]; P_j Z) \ \text{ y } \ w_j(0) = w_j^0 \right\}.$$

***Teorema* 4.3.2.** *(condición necesaria para controlabilidad aproximada) Si el sistema (4.2.2) es aproximadamente controlable en* $[0, r]$*, entonces cada uno de los siguientes sistemas es aproximadamente controlable en* $[0, r]$

$$y' = Q_j \Lambda y + Q_j \mathcal{B} u(t); \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{4.3.4}$$

Demostración .

Supóngase por reducción al absurdo que el sistema (4.2.2) es aproximadamente controlable en $[0, r]$ y que existe J tal que el sistema

$$y' = Q_J \Lambda y + Q_J \mathcal{B} u(t); \quad y \in Rang(Q_J),$$

no es aproximadamente controlable en $[0, r]$. Entonces, existe $V_J \in Rang(Q_J)$ tal que:

$$(Q_J \mathcal{B})^* T_J^*(t) V_J = 0, \quad t \in [0, r] \text{ y } V_J \neq 0. \tag{4.3.5}$$

Por otro lado, de la parte (b) del Teorema 4.3.1 se tiene que:

$$\mathcal{B}^* T^*(t) W = 0, \quad \forall t \in [0, r] \Longrightarrow W = 0.$$

Ahora bien, haciendo $W = Q_J V_J = V_J$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^* T^*(t) W &= \mathcal{B}^* \sum_{k=1}^{\infty} T_k^* Q_k W \\
&= \mathcal{B}^* T_J^*(t) Q_J V_J \\
&= (Q_J \mathcal{B})^* T_J^*(t) W \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esto implica que $V_J = 0$, lo cual es contradicción con lo supuesto (4.3.5). □

***Teorema* 4.3.3.** *(condicion suficiente para controlabilidad aproximada)*
Supóngase que $P_j B B^* = B B^* P_j, \quad j = 1, 2, \ldots$*. Entonces, la controlabilidad aproximada de todos siguientes sistemas en* $[0, r]$

$$y' = Q_j \Lambda y + Q_j \mathcal{B} u(t); \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{4.3.6}$$

implica la controlabilidad aproximada del sistema (4.2.2) en $[0, r]$*.*

Demostración

Supóngase que cada uno de los sistemas (4.3.6) es aproximadamente controlable en $[0,r]$ y defina el operador

$$\mathcal{B}_j^r : L^2(0,r;U) \longrightarrow Rang(Q_j), \quad L_{\mathcal{B}_j} : Rang(Q_j) \longrightarrow Rang(Q_j),$$

por

$$\mathcal{B}_j^r u = \int_0^r T_j(s)\mathcal{B}_j u(s)ds, \quad L_{\mathbf{B_j}} = \mathcal{B}_j^r(\mathcal{B}_j^r)^*.$$

donde $\mathcal{B}_j = Q_j\mathcal{B}$. Entonces,

$$L_{\mathcal{B}_j} y = \int_0^r T_j(s)\mathcal{B}_j\mathcal{B}_j^* T_j^*(s) y ds, \quad y \in Rang(Q_j).$$

Por lo tanto, del Teorema 4.3.1 parte (c) (o Teorema 4.1.7 de [6]) se tiene que

$L_{\mathcal{B}_j} > 0, \ j = 1, 2, \ldots$.

Por otro lado, si $P_j BB^* = BB^* P_j$, entonces $Q_j\mathcal{B}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}\mathcal{B}^* Q_j$, y así

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}} W &= \int_0^r \left(\sum_{j=1}^{\infty} T_j(s) Q_j)\mathcal{B}\mathcal{B}^*(\sum_{k=1}^{\infty} T_k^*(s) Q_k W \right) ds \\
&= \int_0^r \sum_{j=1}^{\infty} T_j(s)\mathcal{B}_j\mathcal{B}_j^* T_j^*(s) Q_j W ds \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^r T_j(s)\mathcal{B}_j\mathcal{B}_j^* T_j^*(s) Q_j W ds \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j} Q_j W.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $L_{\mathcal{B}} > 0$. y por tanto el sistema (4.2.2) es aproximadamente controlable en $[0,r]$. $\square$

Como una consecuencia del Teorema 4.3.3 y el Teorema 4.2.10 de [6] se puede probar el siguiente teorema.

***Teorema* 4.3.4.** *El sistema (4.1.2) es aproximadamente controlable en* $[0, r]$ *si, y sólo si,*

$$\begin{aligned} Rang(\Delta_j(\lambda) : B_j) &= n\gamma_j, \\ Rang(P_j A_p : B_j) &= n\gamma_j, \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_j(\lambda) = \lambda I_{R(P_j)} - \lambda_j P_j D - \sum_{i=1}^{p} P_j A_j e^{-\lambda h_j}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Capítulo 5

Conclusiones y Aplicaciones

Este trabajo genera un número importante de problemas abiertos, ya que la fórmula de variación de parámetros no sólo permite el estudio de la controlabilidad, si no que además se puede hacer estudio de la estabilidad, existencia de soluciones acotadas y del comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. En particular, este trabajo puede ser generalizado a una clase grande de ecuaciones de reacción-difusión funcionales en un espacio de Hilbert Z de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = \mathcal{A}z(t) + Lz_t + Bu(t), \ z \in Z, \ u \in U, \ t > 0, \\ z(0) = \phi_0, \\ z(s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{5.0.7}$$

donde $\mathcal{A}$ viene dado por

$$\mathcal{A}z = \sum_{j=1}^{\infty} A_j P_j z, \qquad z \in D(\mathcal{A}), \tag{5.0.8}$$

Z y U son espacios de Hilbert, $L : L^2([-\tau, 0]; Z) \longrightarrow Z$ es lineal y acotado, $B \in L(U, Z)$, el control u pertenece a $L^2([0, r]; U)$ y $\phi_0 \in Z$, $\phi \in L^2([-\tau, 0]; Z)$. Algunos ejemplos de esta clase son los siguientes sistemas conocidos de ecuaciones diferenciales parciales con retardo:

***Ejemplo* 1.** *La ecuación que modela la cuerda amortiguada flexible:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2\alpha\dfrac{\partial^3 z}{\partial t\partial x^2} + z(t-\tau,x) + u(t,x) \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ z(t,1) &= z(t,0) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,t) = 0, \\ z(0,x) &= \phi_0(x), \quad \dfrac{\partial z}{\partial t}(0,x) = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ z(s,x) &= \phi(s,x), \quad \dfrac{\partial z}{\partial t}(s,x) = \psi(s,x), \quad s \in [-\tau,0), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{5.0.9}$$

donde $\alpha > 0$, $u \in L^2([0,r];L^2[0,1])$, $\phi_0, \psi_0 \in L^2[0,1]$ *y* $\phi, \psi \in L^2([-\tau,0];L^2[0,1])$.

***Ejemplo* 2.** *La ecuación de onda fuertemente amortiguada con condiciones de borde de Dirichlet*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta(-\Delta)^{1/2}\dfrac{\partial w}{\partial t} + \gamma(-\Delta)w = Lw_t + u(t,x), & t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ w(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ w(0,x) = \phi_0(x), \quad \dfrac{\partial z}{\partial t}(0,x) = \psi_0(x), \quad x \in \Omega, \\ w(s,x) = \phi(s,x), \quad \dfrac{\partial z}{\partial t}(s,x) = \psi(s,x), \quad s \in [-\tau,0), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.0.10}$$

donde Ω *es un dominio acotado en* $\mathbb{R}^N$, $u \in L^2([0,r];L^2(\Omega))$, $\phi_0, \psi_0 \in L^2(\Omega)$ *y* $\phi, \psi \in L^2([-\tau,0];L^2(\Omega))$ *y* $\tau \geq 0$ *es el máximo retardo, el cual se supone finito. Se asume que el operador* $L : L^2([-\tau,0];Z) \longrightarrow Z$ *es lineal y acotado y* $Z = L^2(\Omega)$.

***Ejemplo* 3.** *La ecuación de la placa de termoelasticidad con condiciones de borde* *de Dirichlet*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta^2 w + \alpha \Delta\theta = L_1 w_t + u_1(t,x) \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \beta\Delta\theta - \alpha\Delta\dfrac{\partial w}{\partial t} = L_2\theta_t + u_2(t,x) \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \\ \theta = w = \Delta w = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \\ w(0,x) = \phi_0(x), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}(0,x) = \psi_0(x), \quad \theta(0,x) = \xi_0(x) \quad x \in \Omega, \\ \\ w(s,x) = \phi(s,x), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}(s,x) = \psi(s,x), \quad \theta(0,x) = \xi(s,x), \quad s \in [-\tau, 0), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.0.11}$$

donde Ω *es un dominio acotado en* $\mathbb{R}^N$, $u_1, u_2 \in L^2([0,r]; L^2(\Omega))$, $\phi_0, \psi_0, \xi_0 \in L^2(\Omega)$ *y* $\phi, \psi, \xi \in L^2([-\tau, 0]; L^2(\Omega))$ *y* $\tau \geq 0$ *es el máximo retardo, el cual se supone finito. Se asume que los operadores* $L_1, L_2 : L^2([-\tau, 0]; Z) \longrightarrow Z$ *son lineales y acotados y* $Z = L^2(\Omega)$.

Bibliografía

[1] H.T. Banks " The representation of solutions of linear functional differential equations" J. Diff. Eqns., 5 (1969).

[2] A. Bátkai and S. Piazzera " Semigroups and Linear Partial Differential Equations with Delay" Journal of Mathematical Analysis and Applications. 264, 1-20(2001).

[3] J.G. Borisovich and A.S. Turbabin "On the Cauchy problem for linear nonhomegeneous differential equations with retarded arguments" Soviet Math. Dokl., 10 (1969), pp. 401-405

[4] A. Carrasco and H. Leiva "Variation Constant Formula for Functional Partial Parabolic Equations", Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2007(2007), No. 130, pp. 1-20.

[5] R.F. Curtain and A.J. Pritchard, "Infinite Dimensional Linear Systems", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 8. Springer Verlag, Berlin (1978).

[6] R.F. Curtain and H.J. Zwart, "An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory", Tex in Applied Mathematics, Vol. 21. Springer Verlag, New York (1995).

[7] A.E. Ize and A. Ventura , "Asymptotic behavior of a perturbed neutral funcional differential equation related to the solution of the unperturbed linear system", Pacific J. Math., Vol. 1. pp. 57-91 (1984)

[8] D.Henry "Geometric theory of semilinear parabolic equations", Springer, New York (1981).

[9] H. Leiva , "A Lemma on C_0-Semigroups and Aplications PDEs Systems", Questions Mathematics 26 (2003), pp 247-265.

[10] H. Leiva and H. Zambrano “Rank condition for the controllability of a linear time-varying system” International Journal of Control, Vol. 72, 920-931(1999)

[11] J. Lopez G. and R. Pardo San Gil“Coexistence in a Simple Food Chain with Diffusion” J. Math. Biol. (1992) 30: 655-668.

[12] Luiz A. F. de Oliveira “On Reaction-Diffusion Systems” E. Journal of Differential Equations, Vol. 1998(1998), N0. 24, pp. 1-10.

[13] J. Wu (1996), “Theory and Applications of Partial Functional Differential Equatios”, Springer Verlag, Applied Math. Science Vol 119..