Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Postgrado
Maestría en Ciencias - Mención Matemática

ESTADO DE COEXISTENCIA PARA SISTEMAS PERIÓDICOS COMPETITIVOS DEL TIPO KOLMOGOROV

Lcdo. Andy El Achouche El Maaz

Barquisimeto, Venezuela
2010

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Postgrado
Maestría en Ciencias - Mención Matemática

ESTADO DE COEXISTENCIA PARA SISTEMAS PERIÓDICOS COMPETITIVOS DEL TIPO KOLMOGOROV

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister Scientiarum Mención Matemática

Autor: Lcdo. Andy El Achouche El Maaz
Tutor: Dr. Francisco Montes de Oca

Barquisimeto, Venezuela
2010

A la memoria de mi padre
Mahmoud El Achouche (1929-2008)

Agradecimientos

A Dios por acompañarme siempre.

A toda mi familia por su gran apoyo y muy especialmente a mi madre, hermana y cuñado.

A mi tutor el Dr. Francisco Montes de Oca por su ayuda y formación durante toda la maestría, y por enseñarme que con trabajo, esfuerzo y dedicación se pueden alcanzar las metas.

A mi segundo hogar, La Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" y a todo el personal que hacen vida dentro de ella.

A los profesores Javier Hernández, Malon Mendoza, Miguel Vivas, Alexander Carrasco, Victor Bernal, Freddy Jimenez, Julio Ysaccura, Neptalí Romero, Fernando Villafañe, Sergio Muñoz, Wilmer Colmenarez gracias por su orientación, formación académica y valiosa amistad.

A mis amigos los profesores José Soto, Oswaldo Troncoso, Elvis Aponte, Jesus Silva, Maria linares, Jorge, Dexy, Yves, Erik, Minoru, Adriana. Gracias por su apoyo.

A Teodoro Cordero por suministrar la mayoría de las referencias usadas en este trabajo.

A todas esas personas que no menciono y que de una u otra manera estuvieron involucrados en este trabajo, a todos mil gracias.

"ESTADO DE COEXISTENCIA PARA SISTEMAS PERIÓDICOS COMPETITIVOS DEL TIPO KOLMOGOROV"

Resumen

Los modelos ecológicos han sido objeto de amplio estudio en la matemática moderna, especialmente los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales de la forma $x_i' = x_i F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La versión especial de dos especies es llamado modelo de Kolmogorov o ecuación de Kolmogorov. En este trabajo desarrollaremos en detalle el articulo "Coexistence states for periodic competitive Kolmogorov systems" de Anna Battauz y Fabio Zanolin [4], en el cual se considera un sistema de Kolmogorov

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_i' & = & x_i h_i(t, x_1, \ldots, x_N) \\ i & = & 1, \ldots, N \end{array} \right. , \tag{1}$$

donde para cada $i = 1, \ldots, N$, $h_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua la cual es T-periódica ($T > 0$) en la variable t. Este sistema generaliza los sistemas competitivos del tipo Lotka-Volterra

$$x_i' = x_i \left[a_i(t) - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t) x_j \right]; \quad i = 1, \ldots, N$$

donde se supone que las funciones a_i, $b_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y T-periódicas, $a_i(t) > 0$, $b_{ij}(t) \geq 0$ sobre $[0, T]$. Aquí se utilizará como herramienta principal la teoría de Grado Topológico para garantizar la existencia de una solución positiva y T-periódica para el sistema (1).

Índice

Agradecimientos **1**

Resumen **1**

1. Introducción **3**

2. Preliminares **8**

2.1. Grado Topológico de una función en $\mathbb{R}^n$ 8

2.2. Propiedades del Grado Topológico en $\mathbb{R}^n$ 11

2.3. Grado Topológico en Espacios de Banach 12

3. Existencia de solución para sistemas de Kolmogorov **21**

4. Existencia de un estado de coexistencia **34**

Referencias **55**

Capítulo 1
Introducción

Este trabajo trata acerca de la existencia de soluciones periódicas positivas para una clase de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales han sido consideradas como relevantes por sus multiples aplicaciones a la dinámica poblacional. Más precisamente, estudiaremos el sistema de Kolmogorov

$$x_i' = x_i h_i(t, x_1, \ldots, x_N); \quad i = 1, \ldots, N \tag{1.1}$$

el cual fue estudiado por Anna Battauz y Fabio Zanolin en [4], y generaliza los sistemas competitivos del tipo Lotka-Volterra

$$x_i' = x_i \left[a_i(t) - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t) x_j \right]; \quad i = 1, \ldots, N \tag{1.2}$$

donde se supone que las funciones $a_i,\ b_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y T-periódicas, $a_i(t) > 0$, $b_{ij}(t) \geq 0$ sobre $[0, T]$.
Observe que al hacer

$$h_i(t, x_1, \ldots, x_N) = a_i(t) - \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t) x_j \ , \tag{1.3}$$

entonces las funciones h_i serían continuas y T-periódicas ya que los a_i y los b_{ij} también lo son. Así es natural estudiar el sistema (1.1) bajo la siguiente hipótesis.

(H_1) Para cada $i = 1, \ldots, N$, $h_i : \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}_+)^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función [1] continua la cual es T-periódica $(T > 0)$ en la variable t.

La suposición de un periodo común para todas las funciones $h_i(\cdot, x)$ es, tal vez, una fuerte restricción, la cual sin embargo ha sido considerada por varios autores (ver por

[1] Desde aquí en adelante denotaremos por: $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ y $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$.

ejemplo [3], [5], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [13], [18], [21] y las referencias allí dentro) y que se justifica por las muchas aplicaciones en la descripción del comportamiento de N-especies $x_1, \ldots, x_N$ en un medio ambiente periódico debido a fluctuaciones temporales.

Observe además que para cada i e j con $i \neq j$ tenemos que si $h_i(t, x_1, \ldots, x_N)$ es como en (1.3) entonces debido a que $b_{ij}(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, T]$, se tiene que

$$\frac{\partial h_i(t, x_1, \ldots, x_N)}{\partial x_j} = -b_{ij}(t) \leq 0,$$

así la función h_i es decreciente en la variable x_j. Esto induce a pensar en la siguiente condición para el sistema (1.1). Supongamos también

(H_2) La función h_i es decreciente en la variable x_j para cada i e j con $i \neq j$ (con $i, j = 1, \ldots, N$).

Ahora en lo que respecta al comportamiento de la i-ésima componente, en ausencia de las otras competidoras, se consideran algunas suposiciones que se hacen a la hora de estudiar el modelo logístico, es decir, denotando por e_i al i-ésimo elemento de la base ortogonal estándar de $\mathbb{R}^N$, definimos para $s \in \mathbb{R}$

$$h_{ii}(t, s) := h_i(t, se_i) = h_i(t, 0, \ldots, 0, s, 0, \ldots, 0)$$

y supondremos que

$$\limsup_{s \to +\infty} h_{ii}(t, s) \leq h_{i,\infty}(t) \quad \text{uniformemente en} \quad t \in [0, T] \tag{1.4}$$

donde $h_{i,\infty} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y T-periódica que definiremos posteriormente.

Además sabemos por [15] que si la condición del tipo Landesman-Lazer

$$\int_0^T h_i(t, 0)dt > 0 > \int_0^T h_{i,\infty}(t)dt, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N \tag{1.5}$$

se cumple, entonces, para cada $i = 1, \ldots, N$ la ecuación

$$u' = uh_{ii}(t, u) \tag{1.6}$$

tiene solución positiva y T-periódica.

Estas condiciones son satisfechas para el sistema Lotka-Volterra (1.2). En efecto: Como las funciones a_i y b_{ij} son continuas y T-periódicas entonces ellas son acotadas. Denotando por g^M al máximo y g_L al mínimo de la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre el intervalo $[0, T]$ tenemos que

$$\limsup_{s\to+\infty} h_{ii}(t,s) = \limsup_{s\to+\infty}[a_i(t) - b_{ii}(t)s] \leq \limsup_{s\to+\infty}[a_i^M - b_{ii}^L s] = -\infty$$

por lo tanto basta con tomar $h_{i,\infty}(t) = -1$, para todo $t \in \mathbb{R}$ para que de esta forma tener que la condición (1.4) es satisfecha y además

$$\int_0^T h_{i,\infty}(t)dt = -T < 0 < T\,\overline{a}_i = \int_0^T h_i(t,0)dt,$$

donde $\overline{a}_i$ denota el promedio de la función a_i sobre $[0, T]$, es decir

$$\overline{a}_i = \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)dt.$$

El objetivo de este trabajo es probar la existencia de un estado de coexistencia para el sistema (1.1) con $N = 3$, es decir, estudiaremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_1h_1(t,x_1,x_2,x_3) \\ x_2' &= x_2h_2(t,x_1,x_2,x_3) \\ x_3' &= x_3h_3(t,x_1,x_2,x_3) \end{cases} \tag{1.7}$$

bajo las hipótesis (H_1), (H_2), (1.4), (1.5) y además

(H_3^*) Para $i = 1, 2, 3$, existen constantes positivas m_i y funciones continuas y T-periódicas $\gamma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\int_0^T \gamma_i \geq 0$, tales que, para cualquier $\varepsilon > 0$, las funciones

$$\phi_{\varepsilon,1}(t) := \inf_{\substack{\varepsilon\leq x_1\leq 1/\varepsilon \\ 0\leq x_2\leq 1/\varepsilon}} \{m_1h_1(t,x_1,x_2,0) - h_2(t,x_1,x_2,0)\}$$

$$\phi_{\varepsilon,2}(t) := \inf_{\substack{\varepsilon\leq x_2\leq 1/\varepsilon \\ 0\leq x_3\leq 1/\varepsilon}} \{m_2h_2(t,0,x_2,x_3) - h_3(t,0,x_2,x_3)\}$$

$$\phi_{\varepsilon,3}(t) := \inf_{\substack{\varepsilon\leq x_3\leq 1/\varepsilon \\ 0\leq x_1\leq 1/\varepsilon}} \{m_3h_3(t,x_1,0,x_3) - h_1(t,x_1,0,x_3)\}$$

Satisfacen $\phi_{\varepsilon,i}(t) \geq \gamma_i(t)$, $\forall\, t \in [0, T]$ y $\phi_{\varepsilon,i} \neq \gamma_i$.

En [2], Ahmad estudio el siguiente sistema

$$\begin{cases} u' = u[a(t) - b(t)u - c(t)v] \\ v' = v[d(t) - e(t)u - f(t)v] \end{cases} \tag{1.8}$$

bajo las condiciones

$$a_L f_L > c_M d_M \quad \text{y} \quad b_M d_M \leq a_L e_L. \tag{1.9}$$

La hipótesis (H_3^*) es una extensión de (1.9) y la cual implica

$$\overline{d}b(t) \leq \overline{a}e(t) \quad \text{y} \quad \overline{a}f(t) \geq \overline{d}c(t), \tag{1.10}$$

siendo esta última desigualdad estricta sobre un conjunto de medida positiva.

Esta información puede ser recopilada de la siguiente manera:

(H_3') Existe $m > 0$ y una función continua y T-periódica $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\int_0^T \gamma \geq 0$ y tal que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\phi_\varepsilon(t) := \inf_{\substack{0 \leq u \leq 1/\varepsilon \\ \varepsilon \leq v \leq 1/\varepsilon}} \{m\mathcal{U}(t,u,v) - \mathcal{V}(t,u,v)\}$$

satisface $\phi_\varepsilon(t) \geq \gamma(t)$, para todo $t \in [0,T]$ y $\phi_\varepsilon \neq \gamma$.

En efecto:
Como en el sistema (1.8), $a(t) > 0$ y $d(t) > 0$, para todo $t \in [0,T]$, entonces podemos tomar $m = \dfrac{\overline{d}}{\overline{a}} > 0$ y $\gamma(t) = \dfrac{\overline{d}a(t)}{\overline{a}} - d(t)$, para así tener que, $\int_0^T \gamma(t)dt = \dfrac{\overline{d}\overline{a}T}{\overline{a}} - \overline{d}T = 0$.
Además observe que,

$$\begin{aligned} m\mathcal{U}(t,u,v) - \mathcal{V}(t,u,v) &= m[a(t) - b(t)u - c(t)v] - [d(t) - e(t)u - f(t)v] \\ &= ma(t) - mb(t)u - mc(t)v - d(t) + e(t)u + f(t)v \\ &= ma(t) - d(t) + u(e(t) - mb(t)) + v(f(t) - mc(t)) \\ &= \frac{\overline{d}a(t)}{\overline{a}} - d(t) + u\left(\frac{\overline{a}e(t) - \overline{d}b(t)}{\overline{a}}\right) + v\left(\frac{\overline{a}f(t) - \overline{d}c(t)}{\overline{a}}\right) \\ &\geq \gamma(t) \quad \text{si} \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad \varepsilon \leq v \leq \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

esta última desigualdad se tiene por (1.10), así, $\gamma(t)$ es cota inferior del conjunto $\{m\mathcal{U}(t,u,v) - \mathcal{V}(t,u,v) : \; 0 \leq u \leq \frac{1}{\varepsilon} \;\; \text{y} \;\; \varepsilon \leq v \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$, para todo $t \in [0,T]$, por lo tanto $\phi_\varepsilon(t) \geq \gamma(t)$, para todo $t \in [0,T]$. Además $\phi_\varepsilon \neq \gamma$, ya que si $\phi_\varepsilon = \gamma$, para todo $t \in [0,T]$, entonces debe ocurrir que

$$\overline{a}e(t) - \overline{d}b(t) = 0 \quad \text{y} \quad \overline{a}f(t) - \overline{d}c(t) = 0$$

teniendo de la última ecuación una contradicción.

Ahora, al generalizar la condición (H_3') para el sistema (1.7) obtenemos la hipótesis (H_3^*) escrita anteriormente.

Finalmente bajo estas condiciones se puede enunciar y posteriormente demostrar el resultado principal de la publicación [4] el cual es el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Supongamos* (H_1), (H_2), *(1.4) y (1.5). Entonces el sistema (1.7) tiene al menos un estado de coexistencia (T-periódico) sí* (H_3^*) *se cumple. Más aún, existe un conjunto compacto* $K \subset (\mathbb{R}^+)^3$ *que contiene todos los estados de coexistencia (T-periódicos) de el sistema (1.7).*

Capítulo 2
Preliminares

En este capítulo presentaremos algunas definiciones y resultados que son necesarios en el desarrollo del presente trabajo. Tales resultados son obtenidos principalmente de [1], [9], [14], [16], [17], [19] y [20] y sus pruebas pueden ser vistas allí.

§2.1. Grado Topológico de una función en $\mathbb{R}^n$

Aquí $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotará un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$. $\overline{\Omega}$ denotará su clausura y $\partial\Omega$ su frontera. Consideraremos los puntos x en $\mathbb{R}^n$ como matrices $n \times 1$, escribimos $x = col(x_1, \ldots, x_n)$, al vector columna de componentes $(x_1, \ldots, x_n)$. Además diremos que una función

$$f : O \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

es suave si existe un conjunto abierto $G \supset O$ y una función $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que si $F = col(F_1, \ldots, F_k)$, entonces F_j tiene derivada parcial continua de todos los órdenes para $1 \leq j \leq k$ y $F|_O = f$ es decir, $F(x) = f(x)$, para todo $x \in O$.

Definición 2.1. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función suave. Diremos que $q \in \mathbb{R}^k$ es un *valor regular* de f si $x \in f^{-1}(q) \cap \Omega$ implica que la matriz

$$\begin{aligned} Df(x) = f'(x) &= \begin{bmatrix} D_1 f_1(x) & \cdots & D_n f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_k(x) & \cdots & D_n f_k(x) \end{bmatrix} \\ &= [D_1 f, \ldots, D_n f] \end{aligned}$$

tiene rango k $(k \leq n)$ o si $q \notin f(\Omega)$. En particular, si $k = n$, $\det f'(x) \neq 0$, para todo

$x \in f^{-1}(q)$, entonces q es un *valor regular*. Un elemento q es llamado un *valor singular* o *crítico* si este no es un valor regular.

Lema 2.1. *Sea $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave. Si $q \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de $f|_{\Omega}$ y $q \notin f(\partial\Omega)$, entonces $f^{-1}(q)$ es un conjunto finito.*

Definición 2.2. Sea $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave. Sea q un valor regular de $f|_{\Omega}$ tal que $q \notin f(\partial\Omega)$. Definamos:

$$\begin{aligned} f^{-1}(q)^{+} &= \{x \in f^{-1}(q) \cap \overline{\Omega} : J_f(x) > 0\} \\ f^{-1}(q)^{-} &= \{x \in f^{-1}(q) \cap \overline{\Omega} : J_f(x) < 0\} \end{aligned}$$

Si denotamos como $\#A$ el número de elementos de A y J_f a la matriz jacobiana, definimos

$$d(f, \Omega, q) = \#f^{-1}(q)^{+} - \#f^{-1}(q)^{-} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(q) \cap \overline{\Omega}} sgn[J_f(x)] \\ 0 \text{ si } f^{-1}(q) \cap \overline{\Omega} = \phi \end{cases}$$

El número entero $d(f, \Omega, q)$ es llamado *Grado Topológico (de Brouwer)* de f con respecto a Ω y q

Teorema 2.1 (Caso especial de la invarianza de la homotopía)**.** *Sea $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave, Ω abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $f(x) = H(x, 0)$; $g(x) = H(x, 1)$, para todo $x \in \Omega$. Supongamos que $q \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular para $H|_{\Omega \times (0,1)}$, $f|_{\Omega}$ y $g|_{\Omega}$ y también que $q \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Entonces*

$$d(f, \Omega, q) = d(g, \Omega, q).$$

Ahora presentaremos una serie de resultados para debilitar la definición 2.2 y las hipótesis del teorema 2.1.

Lema 2.2. *Supongamos que* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función suave,* q *es un valor regular de* $f|_\Omega$ *y* $q \notin f(\partial\Omega)$. *Entonces existe un entorno* V *de* q *tal que si* $p \in V$ *y* p *es un valor regular de* $f|_\Omega$ *entonces* $f(x) \neq p$, *para todo* $x \in \partial\Omega$ *y* $d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega, q)$

Lema 2.3. *Supongamos que* $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es suave y que* $H(x, s) \neq q$, *para todo* $x \in \partial\Omega$ *y todo* $s \in [0, 1]$. *Si* $f(x) = H(x, 0)$, $g(x) = H(x, 1)$ *para todo* $x \in \partial\Omega$ *y si* q *es un valor regular de* $f|_\Omega$ *y* $g|_\Omega$ *entonces* $d(f, \Omega, q) = d(g, \Omega, q)$

Lema 2.4. *Supongamos que* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función suave. Si* q *es un valor regular de* $f|_\Omega$ *y* $q \notin f(\partial\Omega)$ *entonces* 0 *es un valor regular de* $g(x) = f(x) - q$ *y* $d(f, \Omega, q) = d(f - q, \Omega, 0)$

Lema 2.5. *Supongamos que* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es suave y* $q \notin f(\partial\Omega)$. *Si* q_1, q_2 *son valores regulares de* $f|_\Omega$ *tal que* $|q_k - q| < dist(q, f(\partial\Omega))$, *entonces* $d(f, \Omega, q_1) = d(f, \Omega, q_2)$

Ahora podemos definir $d(f, \Omega, q)$, pero sin la condición de que q sea un valor regular.

Definición 2.3. Si $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave y $q \notin f(\partial\Omega)$, entonces definimos:

$$d(f, \Omega, q) = d(f, \Omega, q_1)$$

donde q_1 es cualquier valor regular de $f|_\Omega$ tal que $|q_1 - q| < \rho = dist(q, f(\partial\Omega))$

El siguiente lema es una versión del teorema 2.1 pero sin la hipótesis de que q sea un valor regular.

Lema 2.6. *Sea* $H : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función suave. Supongamos que* $q \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. *Si* $f(x) = H(x, 0)$, $g(x) = H(x, 1)$, *entonces*

$$d(f, \Omega, q) = d(g, \Omega, q)$$

El siguiente lema nos permite extender la definición de grado topológico para funciones f, continuas y tales que $q \notin f(\partial\Omega)$.

Lema 2.7. *Sea $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua tal que $q \notin f(\partial\Omega)$. Sea $f_k : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funciones suaves, k=1,2; tales que $|f(x) - f_k(x)| < dist(f(\partial\Omega), q)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ y $k = 1, 2$. Entonces $d(f_1, \Omega, q) = d(f_2, \Omega, q)$*

Así, podemos definir $d(f, \Omega, q)$ para funciones continuas tales que $q \notin f(\partial\Omega)$, y también dar una versión del teorema 2.1 para funciones continuas.

Definición 2.4. Sea $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ con $q \notin f(\partial\Omega)$. Si f_1 es cualquier función suave con $\|f - f_1\|_\infty < dist(f(\partial\Omega), q)$, definimos:

$$d(f, \Omega, q) = d(f_1, \Omega, q)$$

Teorema 2.2 (Teorema de la invarianza de la homotopía)**.** *Sea $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Supongamos que $H(x, s) \neq q$ para todo $(x, s) \in \partial\Omega \times [0, 1]$. Entonces, si $f(x) = H(x, 0)$ y $g(x) = H(x, 1)$ se tiene que*

$$d(f, \Omega, q) = d(g, \Omega, q)$$

§2.2. Propiedades del Grado Topológico en $\mathbb{R}^n$

Los siguientes teoremas son resultados clásicos e importantes de la teoría de grado topológico en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.3. *Si $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $q \notin f(\partial\Omega)$ y $d(f, \Omega, q) \neq 0$, entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = q$.*

Teorema 2.4 (Teorema de Punto Fijo de Brouwer)**.** *Sea* $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$*. Si* $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ *es una función continua, entonces existe* $x_0 \in \overline{B}$ *tal que* $f(x_0) = x_0$*.*

Teorema 2.5 (Teorema de Excisión)**.** *Sea* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *y supongamos que* $d(f, \Omega, q)$ *está definido. Si* A *es un subconjunto compacto de* $\overline{\Omega}$ *tal que* $f(x) \neq q$*, para todo* $x \in A$*, entonces*

$$d(f, \Omega, q) = d(f, \Omega \setminus A, q)$$

Teorema 2.6. *Supongamos que* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función continua y* $p \notin f(\partial\Omega)$*. Entonces para todo* $q \in \mathbb{R}^n$*,*

$$d(f, \Omega, p) = d(f - q, \Omega, p - q)$$

(donde $f - q$ *denota la función* $x \longmapsto f(x) - q$*)*

§2.3. Grado Topológico en Espacios de Banach

La extensión del concepto de grado topológico a espacios de dimension infinita tiene serios problemas debido al hecho de que conjuntos cerrados y acotados no necesariamente son conjuntos compactos. Esta es una de las razones por las cuales la noción de grado topológico es extendida para funciones de la forma $I - K$, donde I es la identidad y K es un operador compacto.

Para extender la definición de grado topológico a espacios de dimensión infinita necesitamos algunos resultados del grado topológico en espacios de dimensión finita.

§ Perturbaciones finito dimensional de la Identidad en un Espacio de Banach

Sean E un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y $\Omega \subset E$ un subconjunto no vacío, abierto y acotado en E. Sean $F : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ una función continua y $F(\overline{\Omega})$ un subconjunto de un

subespacio, de dimensión finita, de E
El operador definido por:

$$f(x) = x + F(x) = (I + F)(x)$$

es llamado *Perturbación finito dimensional de la identidad I en E.*

Sean $y \in E$ y E^* un subespacio finito dimensional de E con $y \in E^*$ y $F(\overline{\Omega}) \subset E^*$. Supongamos que $y \notin f(\partial\Omega)$ y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para E^*; definimos el operador lineal $T : E^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} c^i e_i\right) = col(c^1, \ldots, c^n)$$

T es biyectiva con T y T^{-1} continua.
Consideremos el operador

$$T \circ F \circ T^{-1} : T(\overline{\Omega} \cap E^*) \longrightarrow \mathbb{R}^n \ ,$$

ahora como $y \notin f(\partial\Omega)$ y $\partial T(\overline{\Omega} \cap E^*) = T(\partial\Omega \cap E^*)$ entonces

$$x + T \circ F \circ T^{-1}(x) \neq T(y), \quad \text{para todo} \quad x \in T(\partial\Omega \cap E^*),$$

ahora si denotamos por Ω_0 al subconjunto abierto $T(\Omega \cap E^*)$ de $\mathbb{R}^n$ y por f^* a la función continua $f^*(x) = x + T \circ F \circ T^{-1}(x)$ definida en $T(\overline{\Omega} \cap E^*)$ y $y_0 = T(y)$, entonces el grado topológico $d(f^*, \Omega_0, y_0)$ esta definido.

El siguiente teorema establece la no dependencia del subespacio E^* escogido o de la base seleccionada de E^*.

Teorema 2.7. *Sea Ω un subconjunto no vacío, abierto y acotado de E y sea $F : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ una función continua. Sea y un punto en E y supongamos que y y $F(\overline{\Omega})$ están contenidos en los subespacios finito dimensionales E_1 y E_2. Sea $\{p_1, \ldots, p_n\}$ una base* *para* E_1 *y* $\{q_1, \ldots, q_m\}$ *una base para* E_2. *Además, supongamos que* T_1 *y* T_2 *son las transformaciones lineales acotadas, definidas por:*

$$\begin{aligned} T_1\left(\sum_{i=1}^{n} c^i p_i\right) &= col(c^1, \ldots, c^n) \in \mathbb{R}^n \\ T_2\left(\sum_{i=1}^{m} d^i q_i\right) &= col(d^1, \ldots, d^m) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Además supongamos que $y \notin f(\partial\Omega)$, *donde* $f(x) = x + F(x)$.
Definamos

$$f_i(z) = z + T_i \circ F \circ T_i^{-1}(z), \quad \Omega_i = T_i(\Omega \cap E_i), \quad y_i = T_i(y), \quad i = 1, 2.$$

Entonces

$$d(f_1, \Omega_1, y_1) = d(f_2, \Omega_2, y_2)$$

Definición 2.5. Sean E y F espacios reales de Banach y M un subconjunto no vacío de E. El Operador $T : M \longrightarrow F$ es *compacto o completamente continuo* si:

1. T es continuo

2. Para cada subconjunto acotado A de M, $T(A)$ es un subconjunto relativamente compacto de F, esto es $\overline{T(A)}$ es compacto.

Teorema 2.8. *Supongamos que* E *y* F *son espacios de Banach.* M *un subconjunto acotado de* E *y* $T : M \longrightarrow F$ *es compacto. Dado* $\varepsilon > 0$, *existe un operador continuo* $T_\varepsilon : M \longrightarrow F$ *cuyo rango* $T_\varepsilon(M)$ *está contenido en un subespacio finito dimensional tal que*

$$\|T(u) - T_\varepsilon(u)\| < \varepsilon, \quad (u \in M).$$

Ahora retornando la situación descrita al comienzo de esta sección. Sean E un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y $\Omega \subset E$ un subconjunto no vacío, abierto y acotado de E. Sea $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ una función completamente continua. Consideremos la función $f(x) = x + F(x) = (I + F)(x)$ y $q \notin f(\partial\Omega)$. Sea T_ε una aproximación de T dada por el teorema 2.8, definiremos el *grado topológico* de $I + T_\varepsilon$ relativo a un subconjunto apropiado, finito dimensional de Ω.

Teorema 2.9. *Sean Ω un subconjunto no vacío, abierto y acotado de E y f una perturbación compacta de la identidad en E (es decir, $f = I+F$, $F : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ completamente continua). Sea $q \in E$ tal que $q \notin f(\partial\Omega)$. Entonces existe un entero d con la propiedad siguiente:*
Si $H : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ es continua y su rango está contenido en un espacio finito dimensional que también contiene al punto q y

$$\sup_{x\in\Omega} \|F(x) - H(x)\| \leq \frac{1}{2} \inf_{x\in\partial\Omega} \|f(x) - q\|$$

entonces $h(x) = x + H(x)$ satisface que $q \notin H(\partial\Omega)$ y $d(h, \Omega, q) = d$.

Observación 2.1. Ahora podemos presentar una versión del teorema de la invarianza de la homotopía del grado topológico para perturbaciones finito dimensionales de la identidad en un espacio de Banach. Específicamente:
Sean h_1, h_2 perturbaciones finito dimensionales en un espacio de Banach, $h_i : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ y sea $q \notin h_i(\partial\Omega)$, $i = 1, 2$. Además sea $H(x,t)$ continua en $\overline{\Omega}\times[a,b]$, $K(x,t) = x+H(x,t)$, donde $K(x,a) = h_1$, $K(x,b) = h_2(x)$, para $x \in \overline{\Omega}$. $K(\overline{\Omega}, t)$ está contenida en un espacio finito dimensional E^* de E, para cada $t \in [a,b]$ y supongamos que $q \notin K(\partial\Omega \times [a,b])$. Entonces

$$d(h_1, \Omega, q) = d(h_2, \Omega, q).$$

Teorema 2.10. *Sea Ω un subconjunto no vacío, abierto y acotado de E y sea $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ una perturbación completamente continua de la identidad en E, ($f = I + F$).*

Además, sea $q \in E$ tal que $q \notin f(\partial\Omega)$. Sean $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \inf_{x\in\partial\Omega} \|f(x) - q\|$ y T_ε una aproximación de F. Entonces

$$d(I + T_\varepsilon, \Omega, q) = d,$$

donde d es el entero cuya existencia está garantizada por el teorema 2.9.

Definición 2.6. Sean Ω un subconjunto no vacío, abierto y acotado en E y $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ una perturbación compacta de la identidad en E. Supongamos que $q \notin f(\partial\Omega)$. Definimos $d(f, \Omega, q)$ como el entero d cuya existencia se sigue de el teoremas 2.9 y del teorema 2.10. $d(f, \Omega, q)$ es llamado el *grado topológico de Leray-Schauder* de f en q relativo a Ω.

§ Propiedades del grado topológico de Leray-Schauder

En la extensión del grado topológico de espacios finito dimensionales a espacios de dimensión infinita se nota una diferencia sustancial en la clase de funciones para las cuales se define el grado topológico, sin embargo, todas las propiedades permanecen válidas.

Teorema 2.11. *Si $q \in \Omega$, entonces $d(I, \Omega, q) = 1$ y*
Si $p \notin \overline{\Omega}$, entonces $d(I, \Omega, p) = 0$.

Teorema 2.12. *Sea $\Omega \subset E$ un conjunto no vacío, abierto y acotado, y sea $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ una perturbación compacta de la identidad en E. Además, sea $q \in E$ tal que $q \notin F(\partial\Omega)$ y supongamos que $d(f, \Omega, q) \neq 0$. Entonces la ecuación*

$$f(x) = x + F(x) = q$$

tiene al menos una solución.

Teorema 2.13. *Sea $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ una perturbación compacta de la identidad en E y sea $q \notin f(\partial\Omega)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda perturbación compacta $g : \overline{\Omega} \longrightarrow E$, de la identidad en E, $d(g, \Omega, q)$ está definido y además*

$$d(f, \Omega, q) = d(g, \Omega, q^*),$$

siempre que $\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left\{\|f(x)-g(x)\|+\|q-q^*\|\right\}<\varepsilon$.

Teorema 2.14 (Teorema de la invarianza de la homotopía). *Sea* $H:\overline{\Omega}\times[0,1]\longrightarrow E$ *una función compacta tal que* $h(x,t)=x+H(x,t)\neq q$, *para todo* $x\in\partial\Omega$ *y* $t\in[0,1]$. *Entonces*

$$d(h(\cdot,0),\Omega,q)=d(h(\cdot,1),\Omega,q).$$

Teorema 2.15 (Excisión). *Sea* $f:\overline{\Omega}\longrightarrow E$ *una perturbación compacta de la identidad en* E. *Si* $q\notin f(\partial\Omega)$ *y si* A *es un subconjunto compacto de* $\overline{\Omega}$ *tal que* $f(x)\neq q$, *para todo* $x\in A$, *entonces*

$$d(f,\Omega,q)=d(f,\Omega\setminus A,q).$$

Teorema 2.16 (Leray-Schauder). *Sea* $f=I-\lambda K$ *un operador lineal compacto de* E *en* E *tal que* $\dfrac{1}{\lambda}$ *no es un valor propio de* K. *Entonces* $d(f,B(0,r),0)=(-1)^\beta$, *donde* β *es la suma de las multiplicidades de todos los valores propios del operador* K *que tienen el mismo signo de* λ *y son mayores que* $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right|$.

Teorema 2.17 (Teorema de Continuación). *Sea* $\Omega\subset C_T$ *un abierto y acotado que satisface las siguientes condiciones:*

1. *No existe* $x(\cdot)\in\partial\Omega$ *tal que*

$$x'=f(t,x;\lambda),\qquad \lambda\in[0,1); \tag{2.1}$$

2. $d(f_0,\Omega\cap\mathbb{R}^N,0)\neq 0$

Entonces

$$\begin{aligned} x'&=F(t,x),\\ x(0)&=x(T),\end{aligned}$$

tiene al menos una solución $x(\cdot)\in\overline{\Omega}$.
Aquí, $f(t,x;0)=f_0(x)$ *y* $f(t,x;1)=F(t,x)$.

Demostración. Ver [1], página 51. □

Nota 1. C_T denota el espacio de las funciones continuas y T-periódicas. En la condición 2 del teorema anterior se identifica vectores de $\mathbb{R}^N$ con funciones constantes, por tal motivo, tiene sentido escribir $\Omega \cap \mathbb{R}^N$.

Teorema 2.18 (Poincaré-Miranda)**.** *Sea C un cubo n-dimensional y sea $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua que satisface la siguiente condición:*

$$f_i(x) \leq 0, \quad f_i(y) \geq 0, \quad para \;\; i = 1, \dots, n,$$

donde x y y son puntos en caras opuestas del cubo C y $f = (f_1, \dots, f_n)$. Entonces $f(x) = 0$, tiene al menos una solución en C.

Definición 2.7. Si $g : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una función continua tal que, para algún conjunto abierto $\Omega \subset D$, $g^{-1}(0) \cap \Omega$ es compacto, entonces definimos el entero

$$d(g, \Omega) := \deg(g, O, 0),$$

donde O es cualquier conjunto abierto y acotado tal que $g^{-1}(0) \cap \Omega \subset O \subset \overline{O} \subset \Omega$ y "deg" es el grado de Brouwer.

Veamos que $d(g, \Omega)$ está bien definido, es decir, que es independiente del conjunto abierto y acotado O.
En efecto:
Sean O_1 y O_2 dos abiertos y acotados tales que

$$g^{-1}(0) \cap \Omega \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset \Omega \quad \text{y} \quad g^{-1}(0) \cap \Omega \subset O_2 \subset \overline{O}_2 \subset \Omega,$$

los conjuntos $\overline{O_2 - O_1}$ y $\overline{O_1 - O_2}$ son compactos (ya que estos son cerrados y acotados) y además

$$(O_1 \cup O_2) - (\overline{O_2 - O_1}) = O_1 \quad \text{y} \quad (O_1 \cup O_2) - (\overline{O_1 - O_2}) = O_2,$$

en efecto:
Supongamos que $x \in O_1$, entonces $x \in O_1 \cup O_2$.
Afirmación: $x \notin (\overline{O_2 - O_1})$, ya que al suponer que $x \in (\overline{O_2 - O_1})$, entonces por definición de clausura tenemos que toda vecindad N_x de x satisface que $N_x \cap (O_2 - O_1) \neq \phi$,

en particular si $N_x = O_1$, se tiene $O_1 \cap O_2 \cap O_1^c \neq \phi$, esta contradicción prueba que $x \notin (\overline{O_2 - O_1})$ y como $x \in O_1 \cup O_2$, entonces $x \in (O_1 \cup O_2) - (\overline{O_2 - O_1})$.
Supongamos ahora que $x \in (O_1 \cup O_2) - (\overline{O_2 - O_1})$, entonces $x \in (O_1 \cup O_2)$ y
$x \notin (\overline{O_2 - O_1})$, lo segundo implica que, existe una vecindad V_x de x tal que
$V_x \cap (O_2 - O_1) = \phi$, pero como $x \in V_x$, entonces $x \notin (O_2 - O_1)$, de esta manera $x \in (O_1 \cup O_2^c)$ y como también $x \in (O_1 \cup O_2)$, entonces

$$x \in \big[(O_1 \cup O_2^c) \cap (O_1 \cup O_2)\big] = \big[O_1 \cup (O_2^c \cap O_2)\big] = (O_1 \cup \phi) = O_1$$

con esto queda demostrado que $(O_1 \cup O_2) - (\overline{O_2 - O_1}) = O_1$, análogamente se demuestra que $(O_1 \cup O_2) - (\overline{O_1 - O_2}) = O_2$.
Ahora

$$\begin{aligned} \deg(g, O_1, 0) &= \deg(g, (O_1 \cup O_2) - (\overline{O_2 - O_1}), 0) \\ &= \deg(g, O_1 \cup O_2, 0), \quad \text{por el Teorema (2.5);} \end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned} \deg(g, O_2, 0) &= \deg(g, (O_1 \cup O_2) - (\overline{O_1 - O_2}), 0) \\ &= \deg(g, O_1 \cup O_2, 0), \quad \text{por el Teorema (2.5);} \end{aligned}$$

así, $\deg(g, O_1, 0) = \deg(g, O_2, 0)$. Esto prueba la buena definición de $d(g, \Omega)$.

Definición 2.8. A las soluciones positivas y T-periódicas del sistema (1.1) serán llamados estados de coexistencia.

Definición 2.9. Sea E un conjunto de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ todas con el mismo dominio $X \subset \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que el conjunto E es equicontinuo en x_0 cuando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ cualquiera que sea } f \in E$$

Definición 2.10. Un conjunto E de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que es equicontinuo cuando E es equicontinuo en todos los puntos $x_0 \in X$.

Teorema 2.19. *Sea E un conjunto de funciones diferenciables en un intervalo I y sea c una constante positiva tal que $|f'(x)| \leq c$, para toda $f \in E$ y todo $x \in I$. Entonces E es equicontinuo.*

Demostración. Sea $x_0 \in I$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$ luego.
Si $x \in I$ y es tal que $|x - x_0| < \delta$, entonces por el teorema del valor medio tenemos que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| < \varepsilon,$$

para toda $f \in E$, por lo tanto E es equicontinuo.

$\square$

Teorema 2.20 (Ascoli-Arzela)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Entonces toda sucesión equicontinua y simplemente acotada de funciones $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ posee una subsucesión uniformemente convergente.*

Capítulo 3

Existencia de solución para sistemas de Kolmogorov

En este capítulo se enuncia y demuestra dos lemas preparativos los cuales a pesar de que el teorema central esta enunciado para dimensión tres, estos lemas pueden ser demostrados para cualquier dimensión. Para ello consideremos la siguiente familia de sistemas

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i h_i^*(t, x_1, \ldots, x_N; \lambda), \quad \lambda \in [0,1] \\ i &= 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde, para cada $i = 1, \ldots, N$, $h_i^* : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+)^N \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua la cual es T-periódica ($T > 0$) en la variable t y tal que

$$h_i^*(t, x; 1) = h_i(t, x), \quad \forall\, t \in [0, T], \ \forall\, x \in (\mathbb{R}_+)^N.$$

Así como en [1], supondremos que para $\lambda = 0$ el sistema (3.1) es autónomo, así que

$$h_i^*(t, x; 0) = h_i^0(x),$$

donde $h^0 = (h_1^0, \ldots, h_N^0) : (\mathbb{R}_+)^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una función continua.
De aquí en adelante, se usará la siguiente notación:
Dado cualquier conjunto de indices $J = \{j_1, \ldots, j_r\} \subset \{1, \ldots, N\}$, con $r \geq 1$, definimos para $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$x_J := (x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}) \in \mathbb{R}^{|J|} = \mathbb{R}^r.$$

Recíprocamente, para cualquier $y \in \mathbb{R}^r$,

$$y^J := (z_1, \ldots, z_N),$$

donde $z_i = y_i$ para los $i \in J$ y $z_i = 0$ para los $i \notin J$.

Ahora uno de los resultados importantes al cual haremos referencia es el siguiente lema, que juega un rol importante en la demostración del teorema central. Por tal motivo será enunciado y demostrado a continuación.

Lema 3.1. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis*

(K_0) *Para todo* $\lambda \in [0,1]$*, existe* $\ell \in \{1,\dots,N\}$ *tal que* $\int\limits_0^T h_\ell^*(t,0;\lambda)dt \neq 0$.

(K_1) *Existe* $M > 0$ *tal que para cualquier solución positiva, T-periódica de (3.1) satisface que* $x_i(t) \leq M$*, para todo* $t \in [0,T]$ *e* $i = 1,\dots,N$.

(K_2) *Para cada* $J = \{j_1,\dots,j_r\} \subset \{1,\dots,N\}$*, con* $1 \leq r \leq N-1$ *y cada solución positiva, T-periódica* $y(\cdot)$ *de el subsistema reducido*

$$y'_{j_i} = y_{j_i} h^*_{j_i}(t, y^J; \lambda); \quad \lambda \in [0,1], \quad i = 1,\dots,r, \tag{3.2}$$

existe $v \notin J$ *tal que* $\int\limits_0^T h_v^*(t, y^J(t); \lambda)dt \neq 0$.

Entonces, existe un conjunto compacto $K \subset (\mathbb{R}^+)^N$ *tal que cualquier solución positiva, T-periódica* $x(\cdot)$ *de (3.1), satisface que* $x(t) \in K$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*. Si además suponemos que se satisface la siguiente condición*

(K_3) $d(h^0, (\mathbb{R}^+)^N) \neq 0$

Entonces, existe un estado de coexistencia para el sistema (1.1).

Demostración. Probemos primero que existe un conjunto compacto $K \subset (\mathbb{R}^+)^N$ tal que cualquier solución positiva, T-periódica $x(\cdot)$ de (3.1) satisface que $x(t) \in K$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para ello supongamos por reducción al absurdo que para todo conjunto compacto K existe una solución positiva y T-periódica $x(\cdot)$ de (3.1) tal que $x(t_\star) \notin K$, para algún $t_\star \in \mathbb{R}$. En particular para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tomando $K = \left[\frac{1}{n}, n\right]^N$, existe una solución $x_n(\cdot)$ positiva y T-periódica de (3.1), para algún $\lambda = \lambda_n \in [0,T]$, tal que $x_n(\mathbb{R}) \not\subset \left[\frac{1}{n}, n\right]^N$.
Con esto demostraremos varias afirmaciones que nos llevarán a una contradicción.

Afirmación 1. (K_1) implica que, para $n > M$, existe $i = i_n \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\min\limits_{[0,T]}(x_n)_i < \dfrac{1}{n}$.

En efecto:

Si $\min\limits_{[0,T]}(x_n)_i \geq \dfrac{1}{n}$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, entonces

$$\frac{1}{n} \leq \min_{[0,T]}(x_n)_i \leq (x_n)_i \leq M < n,$$

para todo $i = 1, \dots, N$, luego $x_n(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{1}{n}, n\right]^N$ lo cual es una contradicción. Y esto demuestra la veracidad del enunciado.

Afirmación 2. (K_1) implica que, $|(x_n)_i|_\infty \leq M$ y $|(x_n')_i|_\infty \leq ML$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, donde

$$L := \max_{i=1,\dots,N}\Big(\sup\big\{|h_i^*(t, z; \lambda)| : \ \ t \in [0,T], \ \ z \in [0, M]^N, \ \ \lambda \in [0,1]\big\}\Big)$$

En efecto:

por (K_1) sabemos que existe $M > 0$ tal que cualquier solución positiva, T-periódica de (3.1) satisface que $x_i(t) \leq M$, para todo $t \in [0, T]$ y para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, en particular para la solución $x_n(\cdot)$ tenemos que

$$|(x_n)_i|_\infty = \max\big\{|(x_n)_i(t)| : \ t \in [0,T]\big\} \leq M$$

y como $(x_n')_i = (x_n)_i h_i^*(t, x_{,1}, \dots, x_N; \lambda)$, entonces por definición de L se tiene

$$|(x_n')_i|_\infty = |(x_n)_i|_\infty |h_i^*(t, x_1, \dots, x_N; \lambda)|_\infty \leq ML.$$

Como la sucesión de los $\lambda_n \in [0, T]$, entonces $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y por lo tanto esta posee una subsucesión convergente digamos $\lambda_{n_k} \longrightarrow \overline{\lambda}$, cuando $k \longrightarrow +\infty$, con estos indices $(x_n')_i$ también es acotada, así por el teorema 2.19 se tiene que la familia de las $(x_n)_i$ es equicontinua y además uniformemente acotada en virtud de la afirmación 2. Así por el teorema 2.20 (de Arzela-Ascoli) $(x_n)_i$ posee una sub subsucesión que llamaremos nuevamente x_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = u(t), \quad \text{ uniformemente con respecto a } \quad t \in \mathbb{R}$$

Afirmación 3. u es una solución T-periódica de (3.1) con $\lambda = \overline{\lambda}$, (es decir: solución de $x_i' = x_i h_i^*(t, x; \lambda)$), y es tal que $\text{mín}\, u_k = 0$, para algún $k \in \{1, \ldots, N\}$. Y además $u_k \geq 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, N\}$.

En efecto:
Como x_n es solución de (3.1), entonces $(x_n)_i$ satisface la ecuación integral

$$(x_n)_i(t) = (x_n)_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} (x_n)_i(s) h_i^*(s, x_n(s); \lambda_n) ds$$

y al tomar límite cuando $n \to +\infty$ y teniendo en cuenta $h_i^*(t, x_n(t); \lambda_n)$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}$ a $h_i^*(t, u(t); \overline{\lambda})$ se tiene

$$u_i(t) = u_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_i(s) h_i^*(s, u(s); \overline{\lambda}) ds$$

y por tanto u es solución de (3.1).

u es T-periódica ya que los x_n lo son, en efecto:

$$u(t+T) = \lim_{n\to\infty} x_n(t+T) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = u(t).$$

Además, como los $(x_n)_k > 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, N\}$, entonces

$$u_k = \lim_{n\to\infty} (x_n)_k \geq 0.$$

Veamos que $\text{mín}\, u_k = 0$, para algún $k \in \{1, \ldots, N\}$.
En efecto:
Supongamos por reducción al absurdo que $\text{mín}\, u_k > 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, N\}$ y sea

$$\alpha = \min_{k=1,\ldots,N} \left(\min_{t\in[0,T]} u_k(t) \right).$$

Como $\alpha > 0$, entonces por la propiedad arquimediana, existe un entero $P_1 \geq 1$ tal que $\dfrac{1}{P_1} < \alpha$. Ahora tomando $P = \text{máx}\{M, P_1\}$ se tiene que:
Si $n > P$, entonces $n > M$ y $n > M$. Como $n > M$, entonces por la afirmación 1, existe $k \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $\text{mín}\, u_k < \dfrac{1}{n}$; y como también $n > P_1$, entonces $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{P_1} < \alpha \leq \text{mín}\, u_k < \dfrac{1}{n}$ con esta contradicción queda demostrado que $\text{mín}\, u_k = 0$,

para algún $k \in \{1, \dots, N\}$ y con esto se completa la prueba de la afirmación 3.

Para un índice arbitrario $i \in \{1, \dots, N\}$, consideramos la i-ésima ecuación en (3.1), con $\lambda = \lambda_n$ y usando la periodicidad de la solución positiva x_n, obtenemos que

$$\int_0^T h_i^*(t, x_n(t); \lambda_n)dt = \int_0^T \frac{(x_n')_i(t)}{(x_n)_i(t)}dt = 0,$$

y tomando límite cuando $n \longrightarrow +\infty$ y teniendo en cuenta que $h_i^*(t, x_n(t); \lambda_n)$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}$ a $h_i^*(t, u(t); \overline{\lambda})$ obtenemos que

$$\int_0^T h_i^*(t, u_1(t), \dots, u_N(t); \overline{\lambda})dt = 0, \qquad \forall i = 1, \dots, N. \tag{3.3}$$

Afirmación 4. Existen conjuntos no vacíos J y S, con $\{1, \dots, N\} = J \cup S$ y tales que

$$\begin{aligned} \min u_j > 0 \quad &\text{si} \quad j \in J \\ \min u_k = 0 \quad &\text{si} \quad k \in S \end{aligned}$$

En virtud de la afirmación 3 tenemos que $S \neq \phi$.
Para probar que $J \neq \phi$, necesitaremos hacer uso de la siguiente afirmación.

Afirmación 5. $\max u_k = 0$, para todo $k \in S$

En efecto:
Consideremos la k-ésima ecuación en (3.1), con $\lambda = \lambda_n$ y sea $t_0 \in [0, T]$ el valor donde $(x_n)_k$ alcanza el mínimo, es decir $(x_n)_k(t_0) = \min\limits_{t \in [0,T]} (x_n)_k(t)$.
Luego como

$$(x_n')_k(t) = (x_n)_k(t) h_k^*(t, x_n(t); \lambda_n) \leq (x_n)_k(t)|h_k^*(t, x_n(t); \lambda_n)|,$$

entonces al despejar se tiene

$$(x_n')_k(t) - (x_n)_k(t)|h_k^*(t, x_n(t); \lambda_n)| \leq 0,$$

luego, integrando de t_0 a t obtenemos que

$$(x_n)_k(t)e^{-\int_{t_0}^t |h_k^*(s, x_n(s); \lambda_n)|ds} - (x_n)_k(t_0) \leq 0,$$

ahora, usando la monotonía de la integral y de la función exponencial se sigue que

$$(x_n)_k(t) \leq (x_n)_k(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} |h_k^*(s,x_n(s);\lambda_n)|ds} \leq \text{mín}(x_n)_k e^{\int_0^T |h_k^*(s,x_n(s);\lambda_n)|ds},$$

de esto y la definición de L se tiene

$$(x_n)_k(t) \leq \text{mín}(x_n)_k e^{TL},$$

esto implica que

$$\text{máx}(x_n)_k \leq \text{mín}(x_n)_k e^{TL},$$

luego tomando límite cuando $n \longrightarrow +\infty$ se sigue que

$$\text{máx}\, u_k \leq \text{mín}\, u_k e^{TL},$$

si $k \in S$, entonces $\text{mín}\, u_k = 0$, por lo tanto, como las componentes de u son mayores o iguales que cero, (por ser límite de la x_n cuyas componentes son positivas)tenemos que

$$\text{máx}\, u_k = 0, \quad \text{siempre que} \quad k \in S \tag{3.4}$$

Esto prueba la afirmación 5.

Para terminar de probar que $J \neq \phi$, supongamos por reducción al absurdo que $J = \phi$, así $S = \{1, \ldots, N\}$ y

$$0 = \text{mín}\, u_k \leq u_k \leq \text{máx}\, u_k = 0, \quad \text{para todo} \quad k \in S = \{1, \ldots, N\}$$

lo cual implica que $u \equiv 0$, y al sustituir $u \equiv 0$ en (3.3) se contradice la hipótesis (K_0). Esto prueba la afirmación 4.

Con la suposición inicial hemos probado las 5 afirmaciones anteriores, ahora llegaremos a una contradicción para concluir que existe un conjunto compacto $K \subset (\mathbb{R}^+)^N$ tal que cualquier solución positiva, T-periódica $x(\cdot)$ de (3.1) satisface que $x(t) \in K$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sea $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$, para algún $1 \leq r \leq N-1$ y observe que de acuerdo con el significado de u_J, esta es una solución positiva T-periódica de el subsistema reducido

$$y'_{j_i} = y_{j_i} h^*_{j_i}(t, y^J, \overline{\lambda}), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Note también que, consistentemente con la notación introducida anteriormente, tenemos que para los $k \notin J$, $u_k = 0$ y así $(u_J)^J = u$.

Ahora según la hipótesis (K_2), existe un índice $v \in S$ tal que

$$\int_0^T h_v^*(t, u(t); \overline{\lambda})dt \neq 0,$$

esto claramente contradice la ecuación (3.3) que habíamos encontrado anteriormente.

Así hemos probado la afirmación inicial. Por lo tanto existe un conjunto compacto $K \subset (\mathbb{R}^+)^N$ que contiene a todas las soluciones positivas T-periódicas de la familia de sistemas (3.1).

Afirmación 6. El compacto K contiene al conjunto $A = \{x \in (\mathbb{R}^+)^N : \ \ h^0(x) = 0\}$.

En efecto:
Recordemos que $h_i^*(t, x; 0) = h_i^0(x)$, es decir que para $\lambda = 0$ la familia (3.1) se reduce al siguiente sistema el cual es autónomo.

$$x_i' = x_i h_i^0(x), \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.5}$$

Sea $x \in (\mathbb{R}^+)^N$.
Si $x \in A$, entonces x es un equilibrio de (3.5), así x es una solución positiva y T-periódica de (3.5) y por lo tanto $x \in K$. Esto último es porque K contiene a todas las soluciones positivas y T-periódicas de (3.1), para todo $\lambda \in [0, 1]$, en particular para $\lambda = 0$.
Por lo tanto $A \subset K$.

Ahora se buscará usar la hipótesis (K_3) para garantizar la existencia de un estado de coexistencia para el sistema (1.1).
Para ello tomemos un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $K \subset (\varepsilon, \varepsilon^{-1})^N$ y veamos lo siguiente

Afirmación 7. $\deg\left(col(x_i h_i^0)_{1\leq i\leq n}, (\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})^N, 0\right) = \deg\left(h^0, (\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})^N, 0\right)$

En efecto:

Recordemos que $\quad \deg(f,D,q)=\sum\limits_{x\in f^{-1}(q)} sgn[J_f(x)]$

$$J\begin{pmatrix} x_1h_1^0 \\ \vdots \\ x_Nh_N^0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1h_1^0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_1h_1^0}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_Nh_N^0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_Nh_N^0}{\partial x_N} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} h_1^0+x_1\frac{\partial h_1^0}{\partial x_1} & \cdots & x_1\frac{\partial h_1^0}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N\frac{\partial h_N^0}{\partial x_1} & \cdots & h_N^0+x_N\frac{\partial h_N^0}{\partial x_N} \end{vmatrix}$$

Definamos la función $F(x)=xh^0(x)$, sea $\overline{x}\in F^{-1}(0)=\{x\in(\mathbb{R}^+)^N:\ \ h^0(x)=0\}$. Así

$$J_F(\overline{x})=\begin{vmatrix} \overline{x}_1\frac{\partial h_1^0(\overline{x})}{\partial x_1} & \cdots & \overline{x}_1\frac{\partial h_1^0(\overline{x})}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{x}_N\frac{\partial h_N^0(\overline{x})}{\partial x_1} & \cdots & \overline{x}_N\frac{\partial h_N^0(\overline{x})}{\partial x_N} \end{vmatrix} = (\overline{x}_1\overline{x}_2\cdots\overline{x}_N)J_{h^0}(\overline{x})$$

Como los x_i son positivos, entonces $sgn[J_F(\overline{x})]=sgn[J_{h^0}(\overline{x})]$ de esta manera se cumple que $\deg\left(col(x_ih_i^0)_{1\leq i\leq n},(\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon})^N,0\right)=\deg\left(h^0,(\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon})^N,0\right)$.

Afirmación 8. $\deg\left(h^0,(\varepsilon,\varepsilon^{-1})^N,0\right)=d\left(h^0,(\mathbb{R}^+)^N\right)\neq 0$

Esta igualdad se obtiene directamente de la definición 2.7 haciendo

$$g=h^0,\quad \Omega=(\mathbb{R}^+)^N,\quad O=(\varepsilon,\tfrac{1}{\varepsilon})^N,\quad D=(\mathbb{R}_+)^N,\quad g^{-1}(0)\cap\Omega={h^0}^{-1}(0)\cap(\mathbb{R}^+)^N$$

el conjunto ${h^0}^{-1}(0)\cap(\mathbb{R}^+)^N$ es compacto ya que es cerrado (por ser la imagen inversa de un cerrado mediante una función continua) y esta contenido en el compacto K. Finalmente por (K_3) tenemos que $d\left(h^0,(\mathbb{R}^+)^N\right)\neq 0$.

Considere también el conjunto ω_ε en el espacio C_T de las funciones $x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^N$ continuas y T-periódicas (dotado con la norma del supremo $|\cdot|_\infty$), definido por

$$\omega_\varepsilon:=\{x\in C_T:\varepsilon<x_i(t)<\varepsilon^{-1},\forall t\in\mathbb{R},\forall i=1,\ldots,N\}$$

Afirmación 9. El conjunto ω_ε es abierto y acotado en C_T.

En efecto:
Veamos primero que ω_ε es abierto en C_T.
Sea x una función continua y T-periódica tal que $x \in \omega_\varepsilon$ y sea $x_{M_i} = \sup\{x_i(t) : \ t \in \mathbb{R}\}$ y $x_{L_i} = \text{ínf}\{x_i(t) : \ t \in \mathbb{R}\}$,
así, $x_{L_i} \leq x_i(t) \leq x_{M_i}$, para todo $t \in \mathbb{R}$; entonces tomando

$$\delta = \min_{i=1,\ldots,N} \left\{ x_{L_i} - \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} - x_{M_i} \right\},$$

se tiene que, dado $y \in B_\delta(x)$, es decir $|y-x|_\infty < \delta$, tenemos que, para cada $i = 1, \ldots, N$

$$|y_i(t) - x_i(t)| \leq \max_{\mathbb{R}} \left\{ |y_1(t) - x_1(t)|, \ldots, |y_N(t) - x_N(t)| \right\} = |y - x|_\infty < \delta,$$

de esta manera

$$\varepsilon = \varepsilon - x_{L_i} + x_{L_i} \leq -\delta + x_{L_i} \leq -\delta + x_i(t) < y_i(t) < \delta + x_i(t) \leq \delta + x_{M_i} \leq \frac{1}{\varepsilon} - x_{M_i} + x_{M_i} = \frac{1}{\varepsilon},$$

así, $\varepsilon < y_i(t) < \dfrac{1}{\varepsilon}$, para todo $i = 1, \ldots, N$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, con lo que se concluye que $y \in \omega_\varepsilon$ y por lo tanto ω_ε es abierto en C_T.

También es claro que ω_ε es acotado ya que es imposible tener una función continua y T-periódica y cuya norma sea infinito.

Ahora identificando cada elemento de $\mathbb{R}^N$ con una función continua y T-periódica (funciones constantes) se tiene que $\omega_\varepsilon \cap \mathbb{R}^N = (\varepsilon, \varepsilon^{-1})^N$, luego, por la escogencia del ε, sabemos que para cualquier $\lambda \in [0, 1]$, no existe solución positiva y T-periódica x de (3.1) con $x \in \partial\omega_\varepsilon$.

Finalmente, usando el teorema 2.17 tenemos que existe por lo menos una solución $\widetilde{x}$ para (3.1) con $\lambda = 1$ y $\widetilde{x} \in \omega_\varepsilon$.
Ahora como $\widetilde{x} \in \omega_\varepsilon$ entonces esta es positiva. Así concluimos que el sistema (1.1) tiene un estado de coexistencia.

□

Otro resultado que usaremos para demostrar el teorema central es el siguiente lema:

Lema 3.2. *Supongamos que se cumplen las hipótesis* (H_2)*, (1.4), (1.5), entonces las condiciones* (K_0) *y* (K_1) *en el lema 3.1 son satisfechas.*

Demostración. Para probar este lema, tomemos para cada $i = 1, \dots, N$

$$h_i^*(t, z; \lambda) := \lambda h_i(t, z) + (1 - \lambda)\frac{1}{T}\int_0^T h_i(t, z)dt, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ z \in (\mathbb{R}_+)^N, \tag{3.6}$$

así tenemos que

$$h_i^0(z) := h_i^*(t, z; 0) = \frac{1}{T}\int_0^T h_i(t, z)dt, \quad z \in (\mathbb{R}_+)^N.$$

En primer lugar, de la definición de $h_i^*(t, z; \lambda)$ en la ecuación (3.6) se tiene que, para $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\int_0^T h_i^*(t, 0; \lambda)dt &= \lambda \int_0^T h_i(t, 0)dt + (1 - \lambda)\frac{1}{T}\int_0^T h_i(t, 0)dt \int_0^T ds \\
&= \lambda \int_0^T h_i(t, 0)dt + \int_0^T h_i(t, 0)dt - \lambda \int_0^T h_i(t, 0)dt \\
&= \int_0^T h_i(t, 0)dt > 0, \quad \text{para todo } \ i = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

esto último se tiene por la primera condición de la ecuación (1.5), por lo tanto ya se tiene garantizada la validez de la propiedad (K_0).

Ahora para verificar que la hipótesis (K_1) es satisfecha, veamos de antemano que de la ecuación (1.4) y de la segunda condición de la ecuación (1.5), existen $R > 0$ y funciones $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, con cada $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, T-periódica y tal que $\overline{\sigma}_i := \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_i < 0$ y $h_{ii}(t, s) \leq \sigma_i(t)$, para todo $s \geq R$.
En efecto:
Sea $\bar{t} \in [0, T]$, fijo pero arbitrario, y fijemos un $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{T}\int_0^T h_{i,\infty}(t)dt + \varepsilon_0 < 0, \quad \text{para todo } \ i = 1, \dots, N.$$

Entonces, para ese $\varepsilon_0 > 0$ y ese $\bar{t} \in [0, T]$, existe un $R_i(\bar{t}, \varepsilon_0) > 0$ tal que

$$\sup_{s \geq R_i(\bar{t}, \varepsilon_0)} h_{ii}(\bar{t}, s) < \limsup_{s \to \infty} h_{ii}(\bar{t}, s) + \varepsilon_0,$$

así, tenemos que

$$h_{ii}(\bar{t},s) < \limsup_{s\to\infty} h_{ii}(\bar{t},s) + \varepsilon_0 \leq h_{i,\infty}(\bar{t}) + \varepsilon_0,$$

para todo $s \geq R_i(\bar{t},\varepsilon_0)$,
esto es,

$$h_{ii}(\bar{t},s) < h_{i,\infty}(\bar{t}) + \varepsilon_0, \quad \text{para todo } \ s \geq R_i(\bar{t},\varepsilon_0),$$

luego, por continuidad, tenemos que, existe $\delta(\bar{t}) > 0$ tal que $h_{ii}(t,s) < h_{i,\infty}(t) + \varepsilon_0$, para todo $t \in \big(\bar{t} - \delta(\bar{t}), \bar{t} + \delta(\bar{t})\big) \cap [0,T]$ y para todo $s \geq R_i(\bar{t},\varepsilon_0)$,
de esta manera,

$$\bigcup_{\bar{t}\in[0,T]} \big(\bar{t} - \delta(\bar{t}), \bar{t} + \delta(\bar{t})\big)$$

es un cubrimiento abierto del conjunto compacto $[0,T]$, por lo tanto este posee un subcubrimiento finito, digamos

$$\bigcup_{j=1}^{m} \big(t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)\big),$$

ahora, tomando $R_i = \max\{R_i(t_1,\varepsilon_0), \ldots, R_i(t_m,\varepsilon_0)\} > 0$ se tiene que:
Si $t \in [0,T]$ y $s \geq R_i$, entonces $t \in \big(t_{j_0} - \delta(t_{j_0}), t_{j_0} + \delta(t_{j_0})\big) \cap [0,T]$ y $s \geq R_i \geq R_i(t_{j_0},\varepsilon_0)$, para algún $j_0 \in \{1,\ldots,m\}$, por lo tanto, $h_{ii}(t,s) < h_{i,\infty}(t) + \varepsilon_0$,
finalmente, tomando $R = \max\{R_1,\ldots,R_N\} > 0$ se tiene que:

$$h_{ii}(t,s) < h_{i,\infty}(t) + \varepsilon_0,$$

para todo $t \in [0,T]$, todo $s \geq R$ y todo $i = 1,\ldots,N$.

Definamos, para cada $i = 1,\ldots,N$, $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma,
$\sigma_i(t) := h_{i,\infty}(t) + \varepsilon_0$, así tenemos que,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_i := \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_i(t)dt &= \frac{1}{T}\int_0^T h_{i,\infty}(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0 dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T h_{i,\infty}(t)dt + \varepsilon_0 < 0, \end{aligned}$$

además, para cada $i = 1,\ldots,N$,

$$h_{ii}(t,s) < h_{i,\infty}(t) + \varepsilon_0 := \sigma_i(t),$$

para todo $t \in [0,T]$ y para todo $s \geq R$. Ahora, por la periodicidad de las h_{ii} y de las σ_i, tenemos que $h_{ii}(t,s) < \sigma_i(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $s \geq R$, de esto se tiene,

$$\begin{aligned} h_{ii}^*(t,s;\lambda) &= \lambda h_{ii}(t,s) + (1-\lambda)\frac{1}{T}\int_0^T h_{ii}(t,s)dt \\ &< \lambda\sigma_i(t) + (1-\lambda)\overline{\sigma}_i, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y todo } s \geq R, \end{aligned}$$

luego, si $x(\cdot)$ es cualquier solución positiva y T-periódica del sistema (3.1) para algún $\lambda \in [0,1]$, entonces usando el hecho de que h_i^* es decreciente en la variable x_j para cada $i \neq j$, (esto por la hipótesis (H_2)), tenemos que

$$\frac{x_i'(t)}{x_i(t)} \leq h_{ii}^*(t, x_i(t);\lambda) < \lambda\sigma_i(t) + (1-\lambda)\overline{\sigma}_i \ , \tag{3.7}$$

para todo t tal que $x_i(t) \geq R$. La desigualdad (3.7) no se puede cumplir para todo $t \in [0,T]$, ya que si se cumpliera tendríamos la siguiente contradicción:

$$\begin{aligned} 0 &= \ln[x_i(T)] - \ln[x_i(0)] \\ &= \ln[x_i(t)]\Big|_0^T \\ &= \int_0^T \frac{x_i'(t)}{x_i(t)}dt \\ &< \int_0^T [\lambda\sigma_i(t) + (1-\lambda)\overline{\sigma}_i]dt \\ &= T\overline{\sigma}_i < 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, existe $\widetilde{t_i} \in [0,T]$ tal que $x_i(\widetilde{t_i}) < R$.

Notación: Aquí denotaremos por $|\cdot|_1$ a la norma definida sobre el conjunto de las funciones continuas en $[0,T]$, de la siguiente manera:

$$|f|_1 = \int_0^T |f(t)|dt$$

Afirmación: Existe $M := Re^{\text{máx}\{|\sigma_i|_1 : i=1,\ldots,N\}}$ tal que, para cualquier solución positiva y T-periódica de (3.1) se cumple que $x_i(t) \leq M$, para todo $t \in [0,T]$ y todo $i = 1,\ldots,N$.
En efecto:
Supongamos que existe una solución positiva y T-periódica $x(t)$ de (3.1), que existe un índice $i \in \{1,\ldots,N\}$ y un $t_i \in [0,T]$ tal que $x_i(t_i) > M$, entonces como $M \geq R$ y

$x_i(\widetilde{t_i}) < R$, entonces existe t_i^* entre los puntos $\widetilde{t_i}$ y t_i tal que $x_i(t_i^*) = R$. Como las x_i son T-periódicas, entonces existe $t_i'' \in [t_i^*, t_i^* + T]$ tal que

$$x_i(t_i'') > M. \tag{3.8}$$

Ahora, sea $A := \{t \in [t_i^*, t_i''] : \ x_i(t) = R\}$, A es no vacío ya que $x_i(t_i^*) = R$, también esta acotado superiormente, por lo tanto podemos tomar $t_i' = \sup\{t \in [t_i^*, t_i''] : \ x_i(t) = R\}$ el cual pertenece al conjunto A, ya que este es cerrado. Ahora si $t \in [t_i', t_i'']$, entonces $x_i(t)$ tiene tres posibilidades, $x_i(t) > R$, $x_i(t) = R$ o $x_i(t) < R$, si ocurre lo ultimo, es decir si $x_i(t) < R$, y como también $x_i(t_i'') > R$, entonces existe un $\widehat{t_i} \in (t, t_i'')$ tal que $x_i(\widehat{t_i}) = R$, esto contradice el hecho de que t_i' es el supremo del conjunto A, por lo tanto si $t \in [t_i', t_i'']$, entonces $x_i(t) \geq R$, luego de la desigualdad (3.7) tenemos que

$$x_i'(t) - x_i(t)[\lambda\sigma_i(t) + (1-\lambda)\overline{\sigma}_i] \leq 0 \ , \qquad \text{para todo } t \in [t_i', t_i''],$$

y al integrar de t_i' a t_i'' y tomando en cuanta que

$$\int_{t_i'}^{t_i''} (\lambda\sigma_i(t) + (1-\lambda)\overline{\sigma}_i)dt \leq \int_{t_i'}^{t_i''} \lambda\sigma_i(t)dt \leq \int_{t_i'}^{t_i''} |\sigma_i(t)|dt \leq \int_0^T |\sigma_i(t)|dt = |\sigma_i|_1,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} x_i(t_i'') &\leq x_i(t_i')e^{\int_{t_i'}^{t_i''} (\lambda\sigma_i(t)+(1-\lambda)\overline{\sigma}_i)dt} \\ &= Re^{\int_{t_i'}^{t_i''} (\lambda\sigma_i(t)+(1-\lambda)\overline{\sigma}_i)dt} \\ &\leq Re^{|\sigma_i|_1}, \end{aligned}$$

de esta forma

$$x_i(t_i'') \leq Re^{|\sigma_i|_1} \leq Re^{\text{máx}\{|\sigma_i|_1 : \, i=1,\ldots,N\}} = M$$

esto contradice la desigualdad (3.8), así queda demostrada la afirmación y por lo tanto la condición (K_1) del lema 3.1 también es satisfecha. Esto completa la demostración de este lema. $\square$

Capítulo 4

Existencia de un estado de coexistencia

Ahora pasaremos a enunciar y demostrar el teorema central de este trabajo.

Teorema 1.1. Supongamos que se satisfacen (H_1), (H_2), (1.4) y (1.5). Entonces el sistema (1.7) tiene al menos un estado de coexistencia (T-periódico) sí (H_3^*) se cumple. Más aún, existe un conjunto compacto $K \subset (\mathbb{R}^+)^3$ que contiene todos los estados de coexistencia (T-periódicos) de el sistema (1.7).

Demostración. Para probar este teorema se hará uso del lema 3.2 y del lema 3.1.

Por el lema 3.2 sabemos que las condiciones (K_0) y (K_1) del lema 3.1 son satisfechas. En particular para el caso $N = 3$.

Veamos ahora que se cumple la condición (K_2), para ello demostremos primero que no existe solución T-periódica del sistema (3.1) que tenga la forma $(x_1, x_2, 0)$, $(0, x_2, x_3)$ $(x_1, 0, x_3)$ con $x_i > 0$, para $i = 1, 2, 3$.
Consideremos solo el primer caso, los otros son similares.
Supongamos por reducción al absurdo, que existe un par (x_1, x_2), donde los $x_i > 0$, T-periódicos para $i = 1, 2$ y tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t)h_1^*(t, x_1(t), x_2(t), 0; \lambda), \\ x_2'(t) & = & x_2(t)h_2^*(t, x_1(t), x_2(t), 0; \lambda), \end{array} \right. \tag{4.1}$$

para algún $\lambda \in [0,1]$. Luego para m_1 y γ_1 dado en (H_3^*), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &\leq \phi_{\varepsilon,1}(t), \quad \forall t \in [0,T] \\
&= \inf_{\substack{\varepsilon \leq x_1 \leq 1/\varepsilon \\ 0 \leq x_2 \leq 1/\varepsilon}} \{m_1 h_1(t,x_1,x_2,0) - h_2(t,x_1,x_2,0)\}, \quad \forall t \in [0,T] \\
&\leq m_1 h_1(t,x_1(t),x_2(t),0) - h_2(t,x_1(t),x_2(t),0), \quad \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

y para, $x_1 \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ y $x_2 \in [0, 1/\varepsilon]$.
Como $\phi_{\varepsilon,1}$ y γ_1 son continuas y no son idénticamente iguales, entonces existe $t_0 \in (0,T)$ tal que $\gamma_1(t_0) < \phi_{\varepsilon,1}(t_0)$. Nuevamente por continuidad podemos encontrar un $\alpha > 0$ suficientemente pequeño tal que $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset [0,T]$ y además $\gamma_1(t) < \phi_{\varepsilon,1}(t)$, para todo $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. Así, integrando sobre el intervalo $[0,T]$ y usando la definición de h^0 se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^T \gamma_1(t)dt \\
&< m_1 \int_0^T h_1(t,z_1,z_2,0)dt - \int_0^T h_2(t,z_1,z_2,0)dt \\
&= m_1 T h_1^0(z_1,z_2,0) - T h_2^0(z_1,z_2,0) \\
&= T\big(m_1 h_1^0(z_1,z_2,0) - h_2^0(z_1,z_2,0)\big)
\end{aligned}$$

y como $T > 0$ se tiene que $m_1 h_1^0(z_1,z_2,0) - h_2^0(z_1,z_2,0) > 0$ de modo que

$$m_1 h_1^0(x_1(t),x_2(t),0) - h_2^0(x_1(t),x_2(t),0) > 0$$

para todo $t \in [0,T]$.
Usando la desigualdad anterior y el sistema (4.1) se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \left(m_1 \frac{x_1'(t)}{x_1(t)} - \frac{x_2'(t)}{x_2(t)}\right) dt \\
&= \int_0^T \big(m_1 h_1^*(t,x_1(t),x_2(t),0;\lambda) - h_2^*(t,x_1(t),x_2(t),0;\lambda)\big)dt \\
&= \lambda \int_0^T \big(m_1 h_1(t,x_1(t),x_2(t),0) - h_2(t,x_1(t),x_2(t),0)\big)dt \\
&+ (1-\lambda) \int_0^T \big(m_1 h_1^0(x_1(t),x_2(t),0) - h_2^0(x_1(t),x_2(t),0)\big)dt \\
&> \lambda \int_0^T \big(m_1 h_1(t,x_1(t),x_2(t),0) - h_2(t,x_1(t),x_2(t),0)\big)dt \\
&\geq \lambda \int_0^T \gamma_1(t)dt \;\geq\; 0,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.
Este argumento, repetido para los otros subsistemas 2×2, nos llevan a la conclusión de que no existen soluciones positivas, T-periódicas para cualquiera de los subsistemas de (3.2) con $J = \{1, 2\}$, $J = \{2, 3\}$ o $J = \{3, 1\}$.

Supongamos que $J = \{1\}$, $J = \{2\}$ o $J = \{3\}$, nuevamente discutiremos sólo el primer caso, los otros son similares.
Así, sea $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una solución T-periódica de

$$x_1' = x_1 h_1^*(t, x_1, 0, 0; \lambda), \quad \text{para algún} \ \ \lambda \in [0, 1], \tag{4.2}$$

de la definición de $\phi_{\varepsilon,1}(t)$ en (H_3^*) tenemos que,

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &\leq \phi_{\varepsilon,1}(t), \quad \text{para todo} \ \ t \in [0, T] \\ &= \inf_{\substack{\varepsilon \leq x_1 \leq 1/\varepsilon \\ 0 \leq x_2 \leq 1/\varepsilon}} \{m_1 h_1(t, x_1, x_2, 0) - h_2(t, x_1, x_2, 0)\} \\ &\leq m_1 h_1(t, x_1, x_2, 0) - h_2(t, x_1, x_2, 0) \end{aligned}$$

por lo tanto, $\gamma_1(t) \leq m_1 h_1(t, x_1, x_2, 0) - h_2(t, x_1, x_2, 0)$, para todo $\varepsilon \leq x_1 \leq 1/\varepsilon$ y todo $0 \leq x_2 \leq 1/\varepsilon$. En particular para $x_2 = 0$ se tiene que,

$$m_1 h_1(t, x_1(t), 0, 0) \geq \gamma_1(t) + h_2(t, x_1(t), 0, 0). \tag{4.3}$$

Luego, razonando como antes se tiene que esta desigualdad se cumple estrictamente sobre un conjunto de medida positiva. Ahora integrando (4.3) sobre $[0, T]$ se tiene

$$m_1 h_1^0(x_1(t), 0, 0) > h_2^0(x_1(t), 0, 0), \quad \text{para todo} \ \ t \in [0, T]. \tag{4.4}$$

Finalmente de la ecuación (4.2) y de las desigualdades (4.3) y (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T m_1 \frac{x_1'(t)}{x_1(t)} dt = \int_0^T m_1 h_1^*(t, x_1(t), 0, 0; \lambda) dt \\
&= \lambda \int_0^T m_1 h_1(t, x_1(t), 0, 0) dt + (1-\lambda) \int_0^T m_1 h_1^0(x_1(t), 0, 0) dt \\
&> \lambda \int_0^T \gamma_1(t) dt + \lambda \int_0^T h_2(t, x_1(t), 0, 0) dt + (1-\lambda) \int_0^T h_2^0(x_1(t), 0, 0) dt \\
&\geq 0 + \int_0^T \left(\lambda h_2(t, x_1(t), 0, 0) + (1-\lambda) \frac{1}{T} \int_0^T h_2(t, x_1(t), 0, 0) dt \right) dt \\
&= \int_0^T h_2^*(t, x_1(t), 0, 0; \lambda) dt.
\end{aligned}$$

Así tenemos probado que si $J = \{1\}$, entonces la condición sobre el promedio es satisfecha para $\ell = 2$. Repitiendo el mismo argumento para los otros J podemos completar la prueba de la validez de (K_2).

Veamos que se cumple la condición (K_3).
Recordemos primero una lista de propiedades que cumple h^0 y que vienen de lo supuesto sobre h en el teorema 1.1.
La aplicación $h^0 : (\mathbb{R}_+)^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es continua, esto proviene de la siguiente desigualdad:

$$|h_i^0(z_1) - h_i^0(z_2)| = \frac{1}{T} \left| \int_0^T \big(h_i(t, z_1) - h_i(t, z_2)\big) dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |h_i(t, z_1) - h_i(t, z_2)| dt$$

y del hecho de que h es continua.

h_i^0 es decreciente en la variable x_j para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$, esto se tiene directamente ya que h_i es decreciente en la variable x_j para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$.

Además de la ecuación (1.5) sabemos que, para $i = 1, 2, 3$, $\int_0^T h_i(t, 0) dt > 0$, por lo tanto,

$$h_i^0(0, 0, 0) = \frac{1}{T} \int_0^T h_i(t, 0) dt > 0.$$

También se tiene que existen r y R con $0 < r < R$ tales que $h_i^0(se_i) > 0$, si $0 \leq s \leq r$; $h_i^0(se_i) < 0$, si $s \geq R$.
En efecto:

Como $h_1^0(0,0,0) > 0$, entonces por continuidad existe un $r_1 > 0$ tal que para cualquier $(x,y,z) \in B_{r_1}(0,0,0) := \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 : \ ||(x,y,z)||_\infty < r_1\}$ se tiene que $h_1^0(x,y,z) > 0$. De igual forma, como $h_2^0(0,0,0) > 0$ y $h_3^0(0,0,0) > 0$, entonces existen un $r_2 > 0$ y un $r_3 > 0$ tales que $h_2^0(x,y,z) > 0$ y $h_3^0(x,y,z) > 0$ para todo $(x,y,z) \in B_{r_2}(0,0,0)$ y todo $(x,y,z) \in B_{r_3}(0,0,0)$ respectivamente. Ahora tomando $0 < r < \text{mín}\{r_1, r_2, r_3\}$ se tiene que, para cualquier $(x,y,z) \in \overline{B_r}(0,0,0) = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 : \ ||(x,y,z)||_\infty \leq r\}$ se cumple que $h_i^0(x,y,z) > 0$, para $i = 1,2,3$, en particular, $h_i^0(se_i) > 0$, si $0 \leq s \leq r$. Por otro lado como, $h_{ii}(t,s) \leq \sigma_i(t)$, para todo $s \geq R$, esto es, $h_i(t, se_i) \leq \sigma_i(t)$, para todo $s \geq R$, entonces al integrar sobre $[0,T]$, obtenemos

$$\int_0^T h_i(t, se_i)dt \leq \int_0^T \sigma_i(t)dt,$$

de esta manera,

$$h_i^0(se_i) \leq \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_i(t)dt = \overline{\sigma}_i < 0,$$

por lo tanto $h_i^0(se_i) < 0$, para todo $s \geq R$.
En resumen tenemos que

$$\begin{aligned} h_i^0(se_i) &> 0, \quad \text{si} \quad 0 \leq s \leq r, \\ h_i^0(se_i) &< 0, \quad \text{si} \qquad s \geq R. \end{aligned}$$

luego el teorema del Valor Intermedio implica que para cada $i = 1,2,3$ existe una primera raíz (positiva) $\overline{u}_i > r$ de la función a valores reales $s \mapsto h_i^0(se_i)$, es decir, $h_i^0(\overline{u}_i e_i) = 0$ y $h_i^0(se_i) > 0$, para cada $s \in [0, \overline{u}_i)$.

Más aún, como una consecuencia de (H_3^*), existen tres constantes $m_i > 0$, con $i = 1,2,3$ tales que

(A_1) $m_1 h_1^0(x_1, x_2, 0) > h_2^0(x_1, x_2, 0), \quad \forall x_1 > 0$ y $\forall x_2 \geq 0$

(A_2) $m_2 h_2^0(0, x_2, x_3) > h_3^0(0, x_2, x_3), \quad \forall x_2 > 0$ y $\forall x_3 \geq 0$

(A_3) $m_3 h_3^0(x_1, 0, x_3) > h_1^0(x_1, 0, x_3), \quad \forall x_3 > 0$ y $\forall x_1 \geq 0$

En efecto:

Por (H_3^*), existe m_1 y γ_1 tales que

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &\leq \phi_{\varepsilon,1}(t), \quad \forall t \in [0,T] \\
&= \inf_{\substack{\varepsilon \leq x_1 \leq 1/\varepsilon \\ 0 \leq x_2 \leq 1/\varepsilon}} \{m_1 h_1(t,x_1,x_2,0) - h_2(t,x_1,x_2,0)\}, \quad \forall t \in [0,T] \\
&\leq m_1 h_1(t,x_1,x_2,0) - h_2(t,x_1,x_2,0), \quad \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

y para $x_1 \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ y $x_2 \in [0, 1/\varepsilon]$.
Ahora, como $\phi_{\varepsilon,1}$ y γ_1 son continuas y no son idénticamente iguales, entonces existe $t_0 \in (0,T)$ tal que $\gamma_1(t_0) < \phi_{\varepsilon,1}(t_0)$. Nuevamente por continuidad podemos encontrar un $\xi > 0$ suficientemente pequeño tal que $(t_0-\xi, t_0+\xi) \subset [0,T]$ y además $\gamma_1(t) < \phi_{\varepsilon,1}(t)$, para todo $t \in (t_0-\xi, t_0+\xi)$. Así, integrando sobre el intervalo $[0,T]$ y usando la definición de h^0 se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^T \gamma_1(t)dt \\
&< m_1 \int_0^T h_1(t,x_1,x_2,0)dt - \int_0^T h_2(t,x_1,x_2,0)dt \\
&= m_1 T h_1^0(x_1,x_2,0) - T h_2^0(x_1,x_2,0) \\
&= T(m_1 h_1^0(x_1,x_2,0) - h_2^0(x_1,x_2,0))
\end{aligned}$$

y como $T > 0$ se concluye que $m_1 h_1^0(x_1,x_2,0) - h_2^0(x_1,x_2,0) > 0$, para todo $x_1 > 0$ y para todo $x_2 \geq 0$.
Análogamente se demuestran (A_2) y (A_3).

Al sustituir en (A_1), x_1 por $\overline{u}_1$ y x_2 por 0 se tiene que $h_2^0(\overline{u}_1, 0, 0) < 0$; similarmente obtenemos $h_3^0(0, \overline{u}_2, 0) < 0$ y $h_1^0(0,0,\overline{u}_3) < 0$, haciendo en (A_2), $x_2 = \overline{u}_2$ y $x_3 = 0$, y en (A_3) haciendo $x_3 = \overline{u}_3$ y $x_1 = 0$.

Ahora procederemos con el cálculo del siguiente grado topológico, $d\big(h^0, (\mathbb{R}^+)^3\big)$, para ello usaremos dos homotopías.
Primero veamos que el conjunto $A = \{x \in (\mathbb{R}_+)^3 : \; h^0(x) = 0\}$ es no vacío, esto se tiene porque, para cada $i = 1,2,3$, $h_i^0(0,0,0) > 0$ y también $h_i^0(R,R,R) \leq h_i^0(Re_i) < 0$, luego por el teorema 2.18, $h^0(x) = 0$ tiene al menos una solución en $(0,R)^3$. Más aún, todas las soluciones de $h^0(x) = 0$ en $(\mathbb{R}_+)^3$ están contenidas en $(0,R)^3$.

Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_+)^3$ solución de $h^0(x) = 0$, entonces $0 = h_1(x_1, x_2, x_3) \leq h_1(x_1, 0, 0)$, lo cual implica que $x_1 < R$, análogamente $x_2 < R$ y $x_3 < R$. Por otro lado, como $h_i^0(0, 0, 0) > 0$, entonces alguna de las componentes de x es positiva. Si $x_1 > 0$, entonces $x_3 > 0$.
En efecto: Supongamos que $x_3 = 0$, entonces $0 = h_2^0(x_1, x_2, 0) < m_1 h_1^0(x_1, x_2, 0) = 0$, esta contradicción prueba que $x_3 > 0$. También si $x_3 > 0$, entonces $x_2 > 0$, porque al suponer que $x_2 = 0$, entonces $0 = h_1^0(x_1, 0, x_3) < m_3 h_3^0(x_1, 0, x_3) = 0$, así $x_2 > 0$. Por lo tanto si $x_1 > 0$, entonces x_2 y x_3 son positivas. De forma similar se demuestra que si $x_2 > 0$, entonces $x_1 > 0$ y $x_3 > 0$, y también si $x_3 > 0$, entonces $x_2 > 0$ y $x_1 > 0$.

Afirmación: Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_+)^3$ es solución de $h^0(x) = 0$, entonces $x_1 > \delta_1$. Supongamos que para todo $\delta > 0$, existe un $x_\delta = (x_{\delta_1}, x_{\delta_2}, x_{\delta_3})$ solución de $h^0(x) = 0$ tal que $x_1 \leq x_{\delta_1}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}) \in (0, R)^3 \subset [0, R]^3$ solución de $h^0(x) = 0$ tal que $x_{n_1} \leq \dfrac{1}{n}$. Como $[0, R]^3$ es compacto, entonces $x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}) \longrightarrow (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, pero como $x_{n_1} \leq \dfrac{1}{n}$, entonces $\overline{x}_1 = 0$. Por otro lado como x_n es solución de $h^0(x) = 0$, se tiene que $h^0(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}) = 0$, luego tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos que $h^0(0, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = 0$, esto contradice el hecho de que las soluciones de $h^0(x) = 0$ están contenidas en $(0, R)^3$.
Similarmente podemos encontrar un $\delta_2 > 0$ y un $\delta_3 > 0$ con la propiedad anterior. Finalmente tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ se tiene ahora que todas las soluciones de $h^0(x) = 0$ en $(\mathbb{R}_+)^3$ están contenidas en $(\delta, R)^3$.
Ahora para un $0 < \varepsilon_1 < \text{mín}\left\{\delta, \frac{1}{R}\right\}$ tenemos que el siguiente conjunto el cual es abierto y acotado contiene a todos los ceros de h^0 cuyas componentes son positivas

$$\Omega_{\varepsilon_1} := \left\{x = (x_1, x_2, x_3) : \varepsilon_1 < x_i < \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad i = 1, 2, 3\right\}$$

(la existencia de tal conjunto esta garantizada por la primera parte del Lema 3.1).
Por lo anterior tenemos que si $x = (x_1, x_2, x_3)$ es tal que $h^0(x) = 0$, entonces x debe estar en $(\delta, R)^3$, de esta forma cada x_i, con $i = 1, 2, 3$, satisface que $\delta < x_i < R$, por lo tanto $\dfrac{1}{x_i} > \dfrac{1}{R} \geq \text{mín}\left\{\delta, \frac{1}{R}\right\} > \varepsilon_1$, así $x_i < \dfrac{1}{\varepsilon_1}$; también $x_i > \delta \geq \text{mín}\left\{\delta, \frac{1}{R}\right\} > \varepsilon_1$, en consecuencia $\varepsilon_1 < x_i < \dfrac{1}{\varepsilon_1}$ y por lo tanto $x \in \Omega_{\varepsilon_1}$. También es claro que Ω_{ε_1} es abierto y acotado.

Ahora para $\mu \in [0,1]$ y $\lambda \in [0,1]$ consideremos las siguientes familias de sistemas en $(\mathbb{R}_+)^3$ y veamos que estos tienen solución en $(\mathbb{R}_+)^3$.

$$\begin{aligned} h_1^0(x_1, \mu x_2, x_3) &= 0 \\ h_2^0(x_1, x_2, \mu x_3) &= 0 \\ h_3^0(\mu x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)h_1^0(x_1, 0, x_3) + \lambda(R - x_1 - \eta x_3) &= 0 \\ (1-\lambda)h_2^0(x_1, x_2, 0) + \lambda(R - \eta x_1 - x_2) &= 0 \\ (1-\lambda)h_3^0(0, x_2, x_3) + \lambda(R - \eta x_2 - x_3) &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $\eta \geq \dfrac{R}{\delta}$. Comencemos estudiando la familia (4.5). Es claro que si $\mu = 1$, entonces el sistema (4.5) tiene solución en $(\mathbb{R}_+)^3$, ya que en este caso (4.5) es igual al sistema $h^0(x) = 0$ el cual ya se probó que tiene solución en $[0, R]^3$. Si $\mu = 0$, entonces el sistema (4.5) toma la forma

$$\begin{aligned} h_1^0(x_1, 0, x_3) &= 0 \\ h_2^0(x_1, x_2, 0) &= 0 \\ h_3^0(0, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

y como para cada $i = 1, 2, 3$, $h_i^0(0,0,0) > 0$ y también

$$\begin{aligned} h_1^0(R, 0, R) \leq h_1^0(R, 0, 0) = h_1^0(Re_1) < 0 \\ h_2^0(R, R, 0) \leq h_2^0(0, R, 0) = h_2^0(Re_2) < 0 \\ h_3^0(0, R, R) \leq h_3^0(0, 0, R) = h_3^0(Re_3) < 0 \end{aligned}$$

entonces por el teorema 2.18, el sistema (4.7) tiene al menos una solución en $(0, R)^3$. Ahora para $\mu \in (0,1)$ el sistema (4.5) se convierte en

$$\begin{aligned} h_{1\mu}^0(x_1, \mu x_2, x_3) &= 0 \\ h_{2\mu}^0(x_1, x_2, \mu x_3) &= 0 \\ h_{3\mu}^0(\mu x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

para este caso, sea $\mu \in (0,1)$, fijo pero arbitrario y nuevamente sean $x = (0,0,0)$ y $y = (R, R, R)$, estos vectores son tales que

$$h_{1\mu}^0(0, \mu 0, 0) > 0, \quad h_{2\mu}^0(0, 0, \mu 0) > 0, \quad h_{1\mu}^0(\mu 0, 0, 0) > 0,$$

y también

$$
\begin{aligned}
h^0_{1\mu}(R,\mu R,R) &\leq h^0_{1\mu}(R,0,0) < 0\\
h^0_{2\mu}(R,R,\mu R) &\leq h^0_{2\mu}(0,R,0) < 0\\
h^0_{3\mu}(\mu R,R,R) &\leq h^0_{3\mu}(0,0,R) < 0
\end{aligned}
$$

de esta forma el teorema 2.18 también implica que (4.8) tiene al menos una solución en $(0,R)^3$.

Veamos ahora que (4.6) también tiene solución en $(\mathbb{R}_+)^3$. Primero, para $\lambda = 0$, el sistema (4.6) es igual al sistema (4.7) y este sistema ya tiene al menos una solución en $(0,R)^3$, por lo tanto, para $\lambda = 0$, (4.6) también tiene solución allí. Para $\lambda = 1$, el sistema (4.6) es de la forma

$$
\begin{aligned}
R - x_1 - \eta x_3 &= 0\\
R - \eta x_1 - x_2 &= 0\\
R - \eta x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

el cual se puede escribir como $M\mathbf{x} = \mathbf{R}$, donde $\mathbf{x} = col(x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{R} = col(R,R,R)$ y

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \eta\\ \eta & 1 & 0\\ 0 & \eta & 1 \end{pmatrix}
$$

ahora como $\det(M) = 1 \neq 0$, entonces este sistema tiene solución, es decir, para $\lambda = 1$, (4.6) tiene también solución. Ahora tomemos $\lambda \in (0,1)$ fijo pero arbitrario y llamemos

$$
\begin{aligned}
T_{1\lambda}(x_1,0,x_3) &= (1-\lambda)h^0_1(x_1,0,x_3) + \lambda(R - x_1 - \eta x_3)\\
T_{2\lambda}(x_1,x_2,0) &= (1-\lambda)h^0_1(x_1,x_2,0) + \lambda(R - \eta x_1 - x_2)\\
T_{3\lambda}(0,x_2,x_3) &= (1-\lambda)h^0_1(0,x_2,x_3) + \lambda(R - \eta x_2 - x_3)
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

tomando nuevamente los vectores $(0,0,0)$ y (R,R,R) se tiene:

$$
\begin{aligned}
T_{1\lambda}(0,0,0) &= (1-\lambda)h^0_1(0,0,0) + \lambda R > 0\\
T_{2\lambda}(0,0,0) &= (1-\lambda)h^0_2(0,0,0) + \lambda R > 0\\
T_{3\lambda}(0,0,0) &= (1-\lambda)h^0_3(0,0,0) + \lambda R > 0
\end{aligned}
$$

y también,

$$
\begin{aligned}
T_{1\lambda}(R,R,R) &= (1-\lambda)h^0_1(R,0,R) + \lambda(R - R - \eta R) \leq (1-\lambda)h^0_1(R,0,0) - \lambda\eta R < 0\\
T_{2\lambda}(R,R,R) &= (1-\lambda)h^0_2(R,R,0) + \lambda(R - \eta R - R) \leq (1-\lambda)h^0_2(0,R,0) - \lambda\eta R < 0\\
T_{3\lambda}(R,R,R) &= (1-\lambda)h^0_3(0,R,R) + \lambda(R - \eta R - R) \leq (1-\lambda)h^0_3(0,0,R) - \lambda\eta R < 0
\end{aligned}
$$

nuevamente, el teorema 2.18 implica que (4.9) tiene solución en $(0, R)^3$, por lo tanto (4.6) tiene al menos una solución en $(0, R)^3$, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$.

Veamos ahora que todas las soluciones en $(\mathbb{R}_+)^3$ de (4.5) y (4.6) están contenidas en el conjunto $(0, R)^3$.
Es claro que el vector nulo no puede ser solución de (4.5) para algún $\mu \in [0, 1]$, porque $h_i^0(0, 0, 0) > 0$. Esto implica que si $z = (z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{R}_+)^3$ es una solución del sistema (4.5) para algún $\mu \in [0, 1]$, entonces por lo menos algún z_i, con $i = 1, 2, 3$, es positivo.
Si $z_1 > 0$, entonces $z_3 > 0$.
En efecto:
Supongamos que $z_3 = 0$, entonces usando (A_1) y el hecho de que h_1 es decreciente en la segunda componente se tiene

$$0 = h_2^0(z_1, z_2, 0) < m_1 h_1^0(z_1, z_2, 0) \leq m_1 h_1^0(z_1, \mu z_2, 0) = m_1 0 = 0,$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $z_3 > 0$. Y también si $z_3 > 0$, entonces $z_2 > 0$, nuevamente si suponemos que $z_2 = 0$, entonces usando ahora (A_3) y el hecho de que h_3 es decreciente en la primera componente se tiene

$$0 = h_1^0(z_1, 0.z_3) < m_3 h_3^0(z_1, 0, z_3) \leq m_3 h_3^0(\mu z_1, 0, z_3) = m_3 0 = 0,$$

esta contradicción prueba que $z_2 > 0$. Luego si $z_1 > 0$, entonces z_3 y z_2 son positivas. Análogamente si $z_2 > 0$, entonces $z_1 > 0$ y $z_3 > 0$ y también si $z_3 > 0$, entonces $z_2 > 0$ y $z_1 > 0$.

Por otro lado, de la primera ecuación de (4.5) y usando la monotonía de la segunda y tercera variable tenemos que

$$0 = h_1^0(z_1, \mu z_2, z_3) \leq h_1^0(z_1, 0, 0)$$

con esto se concluye que $z_1 < R$. Similarmente podemos ver que $z_2 < R$ y $z_3 < R$. Por lo tanto, tenemos verificado que la familia de sistemas (4.5) en $(\mathbb{R}_+)^3$, tiene todas estas soluciones contenidas en $[0, R]^3$ y no tiene soluciones sobre la frontera de $[0, R]^3$.
Más aún, las componentes de las soluciones de (4.5) son todas mayores de δ.
En efecto:

Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_+)^3$ una solución fija de (4.5) para algún $\mu \in [0,1]$, y supongamos que $x_{i_0} \leq \delta$ para algún $i_0 \in \{1,2,3\}$; como $\mu \in [0,1]$, entonces $\mu x_2 \leq x_2$, $\mu x_3 \leq x_3$ y $\mu x_1 \leq x_1$ y por la monotonía de h_1^0, h_2^0 y h_3^0 con respecto a la segunda, tercera y primera variable respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} h_1^0(x_1,x_2,x_3) \leq h_1^0(x_1,\mu x_2,x_3) &= 0 \\ h_2^0(x_1,x_2,x_3) \leq h_2^0(x_1,x_2,\mu x_3) &= 0 \\ h_3^0(x_1,x_2,x_3) \leq h_3^0(\mu x_1,x_2,x_3) &= 0 \end{aligned}$$

además, $h_i^0(0,0,0) > 0$, para todo $i = 1,2,3$, luego por el teorema 2.18, tenemos que existe una solución de $h^0(x) = 0$, digamos $v = (v_1, v_2, v_3)$ la cual esta contenida en el rectángulo $C = (0, x_1] \times (0, x_2] \times (0, x_3]$; en particular para i_0 se tiene que $v_{i_0} \leq x_{i_0} \leq \delta$, lo cual es una contradicción, porque las componentes de las soluciones del sistema $h^0(x) = 0$ son todas mayores que δ. Esto prueba que si $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_+)^3$ es solución de (4.5) entonces $x_i > \delta$, para todo $i = 1,2,3$.

Veamos ahora que todas las soluciones de (4.6) están contenidas en $[0,R]^3$, para ello. Supongamos que $z = (z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{R}_+)^3$ es una solución de (4.6) para algún $\lambda \in (0,1]$ (el caso $\lambda = 0$ convierte al sistema (4.6) en el sistema (4.5) y este ya fue estudiado). Comencemos probando que $z_1 < R$ para ello supongamos por absurdo que $z_1 \geq R$, ahora como h_1^0 es no creciente en la tercera variable y $z_3 \geq 0$ entonces

$$h_1^0(z_1, 0, z_3) \leq h_1^0(z_1, 0, 0) < 0$$

y como z es solución de (4.6) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(R - z_1 - \eta z_3) + (1-\lambda)h_1^0(z_1, 0, z_3) \\ &< \lambda(R - z_1 - \eta z_3) + (1-\lambda)0 \\ &= \lambda(R - z_1 - \eta z_3) \end{aligned}$$

y como $\lambda \in (0,1]$ y $-\eta z_3 \leq 0$ entonces

$$0 < R - z_1 - \eta z_3 \leq R - z_1 \leq z_1 - z_1 = 0$$

luego lo supuesto es falso y en consecuencia tenemos que $z_1 < R$.

Similarmente, podemos mostrar que $z_2 < R$ y $z_3 < R$.

Luego como $h_i^0(0,0,0) > 0$, tenemos que $z \neq 0$.
En efecto: si suponemos que $z = (0,0,0)$, entonces z no sería solución de (4.6). Ya que si $z = (0,0,0)$ es solución de (4.6) se tendría que:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\lambda)h_i^0(0,0,0) + \lambda(R - 0 - \eta 0) \\ &= (1-\lambda)h_i^0(0,0,0) + \lambda R \\ &> (1-\lambda)0 + 00 \\ &= 0 \end{aligned}$$

así tenemos que $z_1 \neq 0$ y por lo tanto podemos suponer que $z_1 > 0$.
Afirmación: Si $z_1 > 0$, entonces $z_2 > 0$ y $z_3 > 0$.
Primero supongamos por absurdo que $z_2 = 0 = z_3$, así de la tercera ecuación de (4.6) se tiene la siguiente contradicción

$$\begin{aligned} 0 = (1-\lambda)h_3^0(0,0,0) + \lambda(R - \eta 0 - 0) &= (1-\lambda)h_3^0(0,0,0) + \lambda R \\ &> (1-\lambda)0 + 00 = 0. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $z_2 > 0$ y $z_3 = 0$. Ya teníamos probado que $z_1 < R$ y esto implica que $\lambda < 1$ ya que si $\lambda = 1$, entonces de la primera ecuación de (4.6) tendríamos que $z_1 = R$ lo cual no puede ocurrir, por lo tanto $\lambda < 1$ y nuevamente de la primera ecuación de (4.6) se tiene ahora que $h_1^0(z_1,0,0) < 0$ y esto implica que $z_1 > \overline{u}_1$ pues $h_1^0(\overline{u}_1,0,0) = 0$ y $h_1^0(s,0,0) > 0$ para cada $s \in [0,\overline{u}_1)$.
Ahora por la monotonía de h_2^0 con respecto a la primera variable y usando la condición (A_1) tenemos que:

$$h_2^0(z_1,z_2,0) \leq h_2^0(\overline{u}_1,z_2,0) < m_1 h_1^0(\overline{u}_1,z_2,0) \leq m_1 h_1^0(\overline{u}_1,0,0) = 0,$$

así de la segunda ecuación de (4.6) se tiene que $R - \eta z_1 - z_2 > 0$, ya que

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(R - \eta z_1 - z_2) + (1-\lambda)h_2^0(z_1,z_2,0) \\ &< \lambda(R - \eta z_1 - z_2) + (1-\lambda)0 \\ &= \lambda(R - \eta z_1 - z_2) \\ &\leq R - \eta z_1 - z_2 \qquad \text{ya que } \ \lambda \in (0,1] \\ &< R - \eta z_1 \end{aligned}$$

luego $z_1 < \dfrac{R}{\eta}$, esto se tiene para $z_1 > \overline{u}_1 > \delta$ y así tenemos una contradicción ya que

$$\eta \geq \frac{R}{\delta}, \tag{4.10}$$

en efecto: si $\eta \geq \dfrac{R}{\delta}$, entonces $\dfrac{R}{\eta} > z_1 > \overline{u}_1 > \delta \geq \dfrac{R}{\eta}$.

De igual manera, si suponemos por absurdo que $z_2 = 0$ y $z_3 > 0$, se tiene que $\lambda < 1$ ya que $z_3 < R$. Luego de la tercera ecuación de (4.6) tenemos que $h_3^0(0,0,z_3) < 0$.
Esto implica que $z_3 > \overline{u}_3$.
Ahora por la monotonía de h_3^0 con respecto a la tercera variable y usando la condición (A_3) tenemos que

$$h_1^0(z_1,0,z_3) \leq h_1^0(z_1,0,\overline{u}_3) < m_3 h_3^0(z_1,0,\overline{u}_3) \leq m_3 h_3^0(0,0,\overline{u}_3) = 0$$

así de la primera ecuación de (4.6) obtenemos que $(R - z_1 - \eta z_3) > 0$ con $z_3 > \overline{u}_3 > \delta$ y de esto se sigue que $z_3 < \dfrac{R}{\eta}$ y nuevamente usando (4.10) llegamos a una contradicción.
Por lo tanto tenemos probado que $z_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$ cuando $z_1 > 0$.

De la misma manera se puede chequear que si $z_2 > 0$ o $z_3 > 0$, entonces todas las otras componentes son positivas.

De esta forma tenemos demostrado que el sistema (4.6) en $(\mathbb{R}_+)^3$ tiene todas estas soluciones contenidas en $[0,R]^3$ y no tiene soluciones sobre la frontera de $[0,R]^3$.
Afirmación: Existe $\beta_1 > 0$ tal que para todo $\lambda \in [0,1]$, si $x_\lambda = (x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, x_{3\lambda})$ es solución de (4.6), entonces $x_{1\lambda} > \beta_1$.
En efecto:
Supongamos que para cada $\beta > 0$, existe un $\lambda_\beta \in [0,1]$ y una x_{λ_β} solución de (4.6) tal que $x_{1\lambda_\beta} \leq \beta$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $\lambda_n \in [0,1]$ y una $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) \in [0,R]^3$ solución de (4.6) tal que $x_{1n} \leq \dfrac{1}{n}$; como $[0,R]^3$ y $[0,1]$ son compactos, entonces podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$ y λ_n convergen a $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \in [0,R]^3$ y a $\overline{\lambda} \in [0,1]$, respectivamente, pero como $x_{1n} \leq \dfrac{1}{n}$, entonces $\overline{x}_1 = 0$. Ahora reemplazando x_n y λ_n en (4.6) y luego tomando límite cuando

n tiende a infinito, se tiene que

$$\begin{aligned}(1-\overline{\lambda})h_1^0(0,0,\overline{x}_3)+\overline{\lambda}(R-\eta\overline{x}_3) &= 0\\ (1-\overline{\lambda})h_2^0(0,\overline{x}_2,0)+\overline{\lambda}(R-\overline{x}_2) &= 0\\ (1-\overline{\lambda})h_3^0(0,\overline{x}_2,\overline{x}_3)+\overline{\lambda}(R-\eta\overline{x}_2-\overline{x}_3) &= 0\end{aligned}$$

es decir, el vector $(0,\overline{x}_2,\overline{x}_3)$ es solución de (4.6), lo cual es una contradicción, ya que las componentes de las soluciones de (4.6) son todas positives. esto prueba la existencia de un $\beta_1>0$ tal que para cualquier $\lambda\in[0,1]$, si $x_\lambda=(x_{1\lambda},x_{2\lambda},x_{3\lambda})$ es solución de (4.6), entonces $x_{1\lambda}>\beta_1$. Análogamente se puede probar la existencia de un $\beta_2>0$ y un $\beta_3>0$ tal que $x_{2\lambda}>\beta_2$ y $x_{3\lambda}>\beta_3$. Luego tomando $\beta=\min\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}>0$ se tiene que, para cualquier $\lambda\in[0,1]$, si $x_\lambda=(x_{1\lambda},x_{2\lambda},x_{3\lambda})$ es solución de (4.6), entonces $x_{i\lambda}>\beta$, para todo $i=1,2,3$.

Finalmente tomando $0<\varepsilon<\min\{\varepsilon_1,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ se tiene[1] que todas las soluciones del sistema $h^0(x)=0$, de (4.5) y de (4.6) están contenidos en Ω_ε.

Ahora, sea $g(x_1,x_2,x_3):=col(h_1^0(x_1,0,x_3),h_2^0(x_1,x_2,0),h_3^0(0,x_2,x_3))$ y $H_1:\overline{\Omega}_\varepsilon\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dada por

$$H_1(x_1,x_2,x_3,\mu):=col(h_1^0(x_1,\mu x_2,x_3),h_2^0(x_1,x_2,\mu x_3),h_3^0(\mu x_1,x_2,x_3))$$

donde $(x_1,x_2,x_3)\in\overline{\Omega}_\varepsilon$ es decir $\varepsilon\le x_i\le\dfrac{1}{\varepsilon}$. H_1 así definida es continua (ya que las h_i^0 lo son) y Ω_ε es abierto, acotado y además

$$\begin{aligned}H_1(x_1,x_2,x_3,0) &= g(x_1,x_2,x_3),\\ H_1(x_1,x_2,x_3,1) &= h^0(x_1,x_2,x_3),\end{aligned}$$

también $H_1(x_1,x_2,x_3)\neq 0$, para todo $(x_1,x_2,x_3,s)\in\partial\Omega_\varepsilon\times[0,1]$ porque todas las soluciones de (4.5) están contenidas en Ω_ε. Ahora el teorema 2.2 implica que

$$\deg(h^0,\Omega_\varepsilon,0)=\deg(g,\Omega_\varepsilon,0).$$

[1] Recordar también que $0<\varepsilon_1<\min\left\{\delta,\frac{1}{R}\right\}$

Nuevamente por la invarianza de la homotopía de el Grado de Brouwer, tenemos que

$$\deg(g,\Omega_\varepsilon,0) \underset{a}{=} \deg(q-f,\Omega_\varepsilon,0) \underset{b}{=} -\deg(f,\Omega_\varepsilon,R\mathbf{1})$$

donde $q=R\mathbf{1}$, $\mathbf{1}=col(1,1,1)=e_1+e_2+e_3$, $f:\overline{\Omega}_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función definida por $f(x_1,x_2,x_3)=M\mathbf{x}$,

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \eta \\ \eta & 1 & 0 \\ 0 & \eta & 1 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{x}=col(x_1,x_2,x_3)$.

Para a: Sea $H_2:\overline{\Omega}_\varepsilon\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida de la siguiente manera

$$H_2(x_1,x_2,x_3,\lambda)=\begin{pmatrix}(1-\lambda)h_1^0(x_1,0,x_3)+\lambda(R-x_1-\eta x_3)\\ (1-\lambda)h_2^0(x_1,x_2,0)+\lambda(R-\eta x_1-x_2)\\ (1-\lambda)h_3^0(0,x_2,x_3)+\lambda(R-\eta x_2-x_3)\end{pmatrix}_{3\times 1}$$

claramente $H_2(x_1,x_2,x_3,0)=g(x_1,x_2,x_3)$ y

$$\begin{aligned} H_2(x_1,x_2,x_3,1) &= \begin{pmatrix} R-x_1-\eta x_3 \\ R-\eta x_1-x_2 \\ R-\eta x_2-x_3\end{pmatrix}_{3\times 1} \\ &= \begin{pmatrix} R\\ R\\ R\end{pmatrix}_{3\times 1} - \begin{pmatrix} x_1+\eta x_3 \\ \eta x_1+x_2 \\ \eta x_2+x_3\end{pmatrix}_{3\times 1} \\ &= \begin{pmatrix} R\\ R\\ R\end{pmatrix}_{3\times 1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \eta \\ \eta & 1 & 0 \\ 0 & \eta & 1\end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}_{3\times 1} = q-f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

además H_2 así definida es continua y también $H_2(x_1,x_2,x_3,s)\neq 0$, para todo $(x_1,x_2,x_3,s)\in\partial\Omega_\varepsilon\times[0,1]$. Luego por el teorema (2.2) (teorema de la invarianza de la homotopía) se tiene que $\deg(g,\Omega_\varepsilon,0)=\deg(q-f,\Omega_\varepsilon,0)$ esto prueba la igualdad a.
Ahora de la definición de grado topológico tenemos que

$$\deg(q-f,\Omega_\varepsilon,0)=-\deg(f-q,\Omega_\varepsilon,0)$$

luego del teorema (2.6) se tiene que $-\deg(f-q,\Omega_\varepsilon,0) = -\deg(f,\Omega_\varepsilon,q)$ estas igualdad prueba b.

Luego, como $\det(M) = 1+\eta^3 > 0$ y la ecuación $M\mathbf{x} = R\mathbf{1}$ tiene como única solución $\mathbf{x} = (\eta+1)^{-1}R\mathbf{1}$ la cual es positiva en todas sus componentes, se tiene que

$$\deg(q-f,\Omega_\varepsilon,0) = -\deg(f,\Omega_\varepsilon,q) = -sgn(\det(M)) = -1$$

Por lo tanto, ya tenemos probado que

$$d(h^0,(\mathbb{R}^+)^3) \neq 0$$

luego haciendo uso del lema (3.1) se tiene que el sistema (1.7) tiene un estado de coexistencia.

$\square$

Consideremos ahora el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' &=& x_1[a_1(t)-b_1(t)x_1-c_1(t)x_2-d_1(t)x_3] \\ x_2' &=& x_2[a_2(t)-b_2(t)x_1-c_2(t)x_2-d_2(t)x_3] \\ x_3' &=& x_3[a_3(t)-b_3(t)x_1-c_3(t)x_2-d_3(t)x_3] \end{array}\right. \tag{4.11}$$

donde $a_i, b_i, c_i, d_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y T-periódicas.

Corolario 4.1. *Supongamos que $\overline{a}_i > 0$, $b_i(t), c_i(t), d_i(t) \geq 0$, para todo $t \in [0,T]$ con $\overline{b}_1\overline{c}_2\overline{d}_3 > 0$ y supongamos que se satisfacen las siguientes desigualdades para todo $t \in [0,T]$,*

$$\begin{array}{ll} \overline{a}_1 b_2(t) \geq \overline{a}_2 b_1(t), & \overline{a}_1 c_2(t) \geq \overline{a}_2 c_1(t) \\ \overline{a}_2 c_3(t) \geq \overline{a}_3 c_2(t), & \overline{a}_2 d_3(t) \geq \overline{a}_3 d_2(t) \\ \overline{a}_3 d_1(t) \geq \overline{a}_1 d_3(t), & \overline{a}_3 b_1(t) \geq \overline{a}_1 b_3(t) \end{array}$$

y además

$$\overline{a}_1\overline{b}_2 > \overline{a}_2\overline{b}_1, \qquad \overline{a}_2\overline{c}_3 > \overline{a}_3\overline{c}_2, \qquad \overline{a}_3\overline{d}_1 > \overline{a}_1\overline{d}_3$$

Entonces, existe al menos un estado de coexistencia para el sistema (4.11) y todos estos estados de coexistencia están contenidos en un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^+)^3$

Demostración. Para probar esto, hagamos para cada $i = 1, 2, 3$

$$h_i(t, x_1, x_2, x_3) = a_i(t) - b_i(t)x_1 - c_i(t)x_2 - d_i(t)x_3$$

$h_i : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ así definida es continua por ser suma y producto de funciones continuas, además es T-periódica en la variable t ya que a_i, b_i, c_i y d_i son T-periódicas. Esto hace que (H_1) sea satisfecha.

Ahora como $\dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} = -c_1(t) \leq 0$ entonces h_1 es decreciente en la variable x_2 y como también $\dfrac{\partial h_1}{\partial x_3} = -d_1(t) \leq 0$ entonces h_1 es decreciente en la variable x_3. Análogamente h_2 es decreciente en las variables x_1 y x_3, y h_3 es decreciente en las variables x_1 y x_2, así es satisfecha la hipótesis (H_2).

Veamos ahora que la condición (1.4) es satisfecha. Observe que

$$\begin{aligned} h_{11}(t, s) &= h_1(t, s, 0, 0) \\ &= a_1(t) - b_1(t)s \\ &\leq a_{M_1} - b_{L_1}s \end{aligned}$$

Luego

$$\limsup_{s \to +\infty} h_{11}(t, s) \leq \limsup_{s \to +\infty} (a_{M_1} - b_{L_1}s) = -\infty$$

así basta tomar como $h_{i,\infty}(t)$ cualquier función constante, con constante negativa, en particular tomemos $h_{i,\infty}(t) = -1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\limsup_{s \to +\infty} h_{11}(t, s) = -\infty < -1 = h_{1,\infty}(t)$$

este límite es uniforme con respecto a t en $[0, T]$. Con esto (1.4) es satisfecha.

Luego como

$$\begin{aligned} \int_0^T h_1(t, 0)dt &= \int_0^T h_1(t, 0, 0, 0)dt \\ &= \int_0^T a_1(t)dt \\ &= T\overline{a}_1 > 0 \end{aligned}$$

y

$$\int_0^T h_{1,\infty}(t)dt = \int_0^T -1dt = -T < 0$$

por lo tanto tenemos que

$$\int_0^T h_1(t,0)dt > 0 > \int_0^T h_{1,\infty}(t)dt$$

y en consecuencia la condición (1.5) es satisfecha.

Para poder aplicar el teorema anterior sólo falta verificar que se cumple la hipótesis (H_3^*).

Dado $\varepsilon > 0$, y sean $x_1 \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ y $x_2 \in [0, 1/\varepsilon]$

tomemos $\quad m_1 = \dfrac{\overline{a}_2}{\overline{a}_1} > 0 \qquad$ y $\qquad \gamma_1(t) = \dfrac{\overline{a}_2 a_1(t)}{\overline{a}_1} - a_2(t)$

Claramente

$$\int_0^T \gamma_1(t)dt = T\overline{a}_2 - T\overline{a}_2 = 0$$

además para $t \in [0,T]$ y x_1 y x_2 como antes se tiene que

$$\begin{aligned}
m_1h_1(t,x_1,x_2,0) - h_2(t,x_1,x_2,0) &= m_1[a_1(t) - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_2] - [a_2(t) - b_2(t)x_1 - c_2(t)x_2] \\
&= m_1a_1(t) - m_1b_1(t)x_1 - m_1c_1(t)x_2 - a_2(t) + b_2(t)x_1 + c_2(t)x_2 \\
&= m_1a_1(t) - \frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_1}b_1(t)x_1 - \frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_1}c_1(t)x_2 - a_2(t) + b_2(t)x_1 + c_2(t)x_2 \\
&= m_1a_1(t) - a_2(t) - x_1\left(\frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_1}b_1(t) - b_2(t)\right) - x_2\left(\frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_1}c_1(t) - c_2(t)\right) \\
&= m_1a_1(t) - a_2(t) - x_1\left(\frac{\overline{a}_2b_1(t) - \overline{a}_1b_2(t)}{\overline{a}_1}\right) - x_2\left(\frac{\overline{a}_2c_1(t) - \overline{a}_1c_2(t)}{\overline{a}_1}\right) \\
&\geq \frac{\overline{a}_2a_1(t)}{\overline{a}_1} - a_2(t) \\
&= \gamma_1(t)
\end{aligned}$$

así $\gamma_1(t)$ es cota inferior del conjunto

$$\left\{ m_1h_1(t,x_1,x_2,0) - h_2(t,x_1,x_2,0) : \ \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{\varepsilon}; \ 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}, \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

por lo tanto

$$\gamma_1(t) \leq \inf \left\{ m_1h_1(t,x_1,x_2,0) - h_2(t,x_1,x_2,0) : \ \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{\varepsilon}; \ 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}, \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

Además $\phi_{\varepsilon,1} \neq \gamma_1$ ya que si suponemos que son iguales, entonces por las cuentas anteriores debe ocurrir que $\overline{a}_2 c_1(t) = \overline{a}_1 c_2(t)$ y $\overline{a}_1 b_2(t) = \overline{a}_2 b_1(t)$ pero esto ultimo implica que

$$\int_0^T \overline{a}_1 b_2(t)dt = \int_0^T \overline{a}_2 b_1(t)dt$$

y así tenemos que $\overline{a}_1 \overline{b}_2 = \overline{a}_2 \overline{b}_1$ y esto contradice la hipótesis del corolario.

Análogamente se procede para terminar de verificar que la condición (H_3^*) es satisfecha. Finalmente haciendo uso del teorema anterior tenemos que existe al menos un estado de coexistencia para el sistema (4.11) y además todos estos estados de coexistencia están contenidos en un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^+)^3$. □

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x_1' &=& x_1[1 - x_1 - \alpha_1(t)x_2 - \beta_1(t)x_3] \\ x_2' &=& x_2[1 - \beta_2(t)x_1 - x_2 - \alpha_2(t)x_3] \\ x_3' &=& x_3[1 - \alpha_3(t)x_1 - \beta_3(t)x_2 - x_3] \end{cases} \tag{4.12}$$

donde $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ son funciones continuas y T-periódicas, para $i = 1, 2, 3$.
Si suponemos para el sistema (4.12) que

$$0 \leq \alpha_i(t) \leq 1 \leq \beta_i(t), \quad \forall t \in [0, T], \ i = 1, 2, 3, \tag{4.13}$$

y además con

$$(1 - \overline{\alpha}_1)(1 - \overline{\alpha}_2)(1 - \overline{\alpha}_3) > 0 \quad \text{ó} \quad (\overline{\beta}_1 - 1)(\overline{\beta}_2 - 1)(\overline{\beta}_3 - 1) > 0 \tag{4.14}$$

se puede garantizar la existencia de un estado de coexistencia para el sistema (4.12). Más aún tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.2. *Sean α_i y β_i los coeficientes continuos y T-periódicos en el sistema (4.12). Supongamos que estos coeficientes satisfacen (4.13) con $\overline{\alpha}_i < \overline{\beta}_i$, para todo i. Entonces, el sistema (4.12) tiene al menos un estado de coexistencia y todos estos estados de coexistencia están contenidos en un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^+)^3$ si, y sólo si (4.14) se cumple.*

Demostración. Probemos primero el directo haciendo uso de la hipótesis (4.13). Como para cada $i = 1, 2, 3$, $0 \leq \alpha_i(t) \leq 1 \leq \beta_i(t)$ entonces

$$\int_0^T 0dt \leq \int_0^T \alpha_i(t)dt \leq \int_0^T dt \leq \int_0^T \beta_i(t)dt$$

de esta forma se tiene $0 \leq T\overline{\alpha}_i \leq T \leq T\overline{\beta}_i$ y como $T > 0$ se sigue que $0 \leq \overline{\alpha}_i \leq 1 \leq \overline{\beta}_i$ y como $\overline{\alpha}_i < \overline{\beta}_i$ entonces $\overline{\alpha}_i < 1$ ó $1 < \overline{\beta}_i$ y de este modo

$$(1 - \overline{\alpha}_i) > 0 \quad \text{ó} \quad (\overline{\beta}_i - 1) > 0$$

con esto se completa la prueba del directo del corolario.

Veamos ahora el recíproco. Para ello se debe verificar que el sistema (4.12) satisface las hipótesis del corolario 4.1, en este caso hagamos la siguiente identificación:

$$\begin{array}{lll} a_i(t) = 1 & \text{para } i = 1,2,3 & \\ b_1(t) = 1, & b_2(t) = \beta_2(t), & b_3(t) = \alpha_3(t) \\ c_1(t) = \alpha_1(t), & c_2(t) = 1, & c_3(t) = \beta_3(t) \\ d_1(t) = \beta_1(t), & d_2(t) = \alpha_2(t), & d_3(t) = 1 \end{array}$$

Claramente $\overline{a}_i = 1 > 0$ para todo $i = 1, 2, 3$.
Para cada $i = 1, 2, 3$, $b_i(t), c_i(t), d_i(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$ ya que $\alpha_i(t), \beta_i(t) \geq 0$.
Como $\overline{b}_1 = \overline{c}_2 = \overline{d}_3 = 1 > 0$, entonces $\overline{b}_1\overline{c}_2\overline{d}_3 > 0$.
con esto solo falta verificar las desigualdades del corolario 4.1.

$$\begin{array}{rcccl} \overline{a}_1 b_2(t) \geq \overline{a}_2 b_1(t) & \Leftrightarrow & b_2(t) \geq 1 & \Leftrightarrow & \beta_2(t) \geq 1 \\ \overline{a}_1 c_2(t) \geq \overline{a}_2 c_1(t) & \Leftrightarrow & 1 \geq c_1(t) & \Leftrightarrow & 1 \geq \alpha_1(t) \\ \overline{a}_2 c_3(t) \geq \overline{a}_3 c_2(t) & \Leftrightarrow & c_3(t) \geq 1 & \Leftrightarrow & \beta_3(t) \geq 1 \\ \overline{a}_2 d_3(t) \geq \overline{a}_3 d_2(t) & \Leftrightarrow & 1 \geq d_2(t) & \Leftrightarrow & 1 \geq \alpha_2(t) \\ \overline{a}_3 d_1(t) \geq \overline{a}_1 d_3(t) & \Leftrightarrow & d_1(t) \geq 1 & \Leftrightarrow & \beta_1(t) \geq 1 \\ \overline{a}_3 b_1(t) \geq \overline{a}_1 b_3(t) & \Leftrightarrow & 1 \geq b_3(t) & \Leftrightarrow & 1 \geq \alpha_3(t) \end{array}$$

lo anterior se cumple por (4.13).
Ahora, $\overline{a}_1\overline{b}_2 > \overline{a}_2\overline{b}_1 \Leftrightarrow \overline{\beta}_2 > 1$ esto ya que por (4.13) $\beta_2(t) \geq 1$ para todo $t \in [0, T]$, entonces $T\overline{\beta}_2 \geq T$ lo que implica que $\overline{\beta}_2 \geq 1$ ya que $T > 0$. Pero si $\overline{\beta}_2 = 1$ entonces se contradice la hipótesis (4.14), así tenemos que la desigualdad $\overline{a}_1\overline{b}_2 > \overline{a}_2\overline{b}_1$ es satisfecha.

Análogamente se verifica que las desigualdades $\overline{a}_2\overline{c}_3 > \overline{a}_3\overline{c}_2$ y $\overline{a}_3\overline{d}_1 > \overline{a}_1\overline{d}_3$ son satisfechas. Luego por el corolario 4.1 se tiene que existe al menos un estado de coexistencia para el sistema (4.12) y todos estos estados de coexistencia están contenidos en un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^+)^3$. Con esto se completa la demostración.

$\square$

Referencias

[1] J. Mawhin A. Capietto and F. Zanolin. Continuation theorems for periodic perturbations of autonomous syspems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 329, Páginas:41–72, 1992.

[2] Shair Ahmad. On the nonautonomous volterra-lotka competition equations. *American Mathematical Society*, Volumen 117, Número 1, Páginas:199–204, 1993.

[3] Anna Battauz. Grado topologico e applicazioni a sistemi differenziali della dinamica delle popolazioni. *Tesi di Laurea*, Università di Udine, 1996.

[4] Anna Battauz and Fabio Zonolin. Coexistence states for periodic competitive kolmogorov systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volumen 219, Número 2, Páginas:179–199, 1998.

[5] G.J. Butler and H.I. Freedman. Periodic solutions of a predator-prey system with periodic coefficients. *Math. Biosci*, 55, Páginas:27–38, 1981.

[6] J.M. Cushing. Two species competition in a periodic environment. *Math. Biol.*, 10, Páginas:385–400, 1980.

[7] J.M. Cushing. Periodic kolmogorov systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 13, Páginas:811–827, 1982.

[8] P. de Mottoni and A. Schiaffino. Competition systems with periodic coeficients: A geometric approach. *J. Math. Biol.*, 11, Páginas:319–335, 1981.

[9] Francisco Montes de Oca. *Grado Topológico y su aplicación a un problema de Dirichlet*. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, 1992.

[10] K. Gopalsamy. Global asymptotic stability in a periodic lotka-volterra system. *J. Austral. Math. Soc. Ser.*, 27, Páginas:66–72, 1985.

[11] J. K. Hale and A. S. Somolinos. Competition for fluctuating nutrient. *J. Math. Biol.*, 18, Páginas:225–280, 1983.

[12] R. Ortega J. López-Gómez and A. Tineo. The periodic predator-prey lotka-volterra model. *Differential Equations*, 1, Páginas:403–423, 1996.

[13] P. Korman. Some new results on the periodic competition model. *J. Math. Anal. Appl.*, 171, Páginas:131–138, 1992.

[14] Elon Lima. *Curso de Análise.* Volumen 1, IMPA-Brasil, Décima Edição, 2002.

[15] J. Mawhin. Topological degree methods for nonlinear boundary value problems. *CBMS 40, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 1979.

[16] Jorge Sáenz. *Cálculo Diferencial.* Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Segunda Edición, 2005.

[17] Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* IMPA-Brasil, 1979.

[18] H. Huang T. Ding and F. Zanolin. A priori bounds and periodic solutions for a class of planar system with application to lotka-volterra equations. *Discrete Continuous Dynamical Syst*, 1, Páginas:103–118, 1995.

[19] Antonio Tineo. *An Introduction To Periodic Competitive Systems.* Universidad de los Andes, 1997.

[20] Antonio Tineo y Jesús Rivero. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Universidad de los Andes, 2002.

[21] F. Zanolin. Permanence and positive periodic solutions for kolmogorov competing species system. *Results in Math.*, 21, Páginas:224–250, 1992.