# Espacios de Orlicz y algunas de sus propiedades geométricas

*Mireya R. Bracamonte P.*

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto 2009

# Espacios de Orlicz y algunas de sus propiedades geométricas

Por

*Mireya R. Bracamonte P.*

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de agregado en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto 2009

# Agradecimiento

Detrás de cada meta que he alcanzado siempre hay personas que me han mostrado su apoyo y que sobre todo que han creído en mí.

Son seres especiales que siempre han tratado de animarme a seguir adelante para culminar de forma exitosa mis proyectos; brindándome, de diferentes maneras, su solidaridad, apoyo incondicional y amor.

Quiero agradecer de todo corazón, en principio a Dios Todopoderoso, por guiarme en cada momento, sin su bendición no sería posible la culminación de este proyecto.

A mis hijas: Adriana, Anabel y Gabriela; porque el tiempo utilizado para la realización de este trabajo les pertenece; y por brindarme su amor, confianza y comprensión.

A mi madre: Josefa, porque sin su apoyo incondicional sería imposible la realización de todos mis proyectos y continua respaldándome para alcanzar mis objetivos.

Deseo agradecer y expresar mi gratitud al Dr. Diomedes Bárcenas por el apoyo recibido de su parte, puesto que todo el estudio que he realizado en este tema lo he hecho bajo su dirección.

Finalmente, a mis amigos, por su apoyo incondicional, su paciencia, cariño y por confiar en mí.

*Mireya R. Bracamonte P.*

# RESUMEN

En los espacios clásicos $L^p$ la función $t^p$ juega un papel muy importante papel, que habían sido introducidos por F. Riesz en 1910 y 1913 respectivamente. Una generalización natural de estos espacios es sustituir esta función por otra función $M$. Esta fue presentada por W. Orlicz en 1932, en el artículo : Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B en Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, 8 / 9, 207-220, donde la función $M$ presenta una condición adicional (la cual posteriormente será llamada condición $\Delta_2$ para $M$ ), y él mismo presenta su generalización en 1936.
Al intentar substituir ésta función por una función general $M$, y W. Orlicz comprobó las restricciones que se deberían imponer a $M$ para que el conjunto de las funciones tales $\int_\Omega M(f(x))dx < \infty$, sea un espacio de Banach y en este proceso, surgen las definiciones de *funciones de Orlicz* o $N-$*funciones*.

En este trabajo se presenta un estudio detallado de las $N-$funciones que es de interés independientemente del resto del trabajo, en la medida en que se aplican ampliamente en diversas ramas de las matemáticas. Seguido de la descripción de la clase de Orlicz, sus características ante la presencia y ausencia de la condición $\Delta_2$. Además, se describen los funcionales necesarios para describir el espacio de Banach que es llamado *espacio Orlicz*.

Finalmente se incluyen algunas nociones topológicas y geométricas de los mismos, que nos permitan aplicar nociones e intuiciones geométricas al estudio estos espacios.

# Índice general

# Lista de Símbolos

Capitulo 1

| | |
|---|---|
| $p_+$ | Derivada por la derecha de $p$ |
| $p_-$ | Derivada por la izquierda de $p$ |
| $M_1 \prec M_2$ | $M_2$ es más fuerte que $M_1$ |
| $M_1 \sim M_2$ | $M_1$ y $M_2$ son equivalentes |
| $M \in \Delta_2$ | $M$ satisface la condición $\Delta_2$ |

Capitulo 2

Capitulo 3

| | |
|---|---|
| $Ext\, A$ | Conjunto de puntos extremales de $A$ |
| $S_X$ | Esfera unitaria de un espacio $X$ |
| $S_{L_M}$ | Esfera unitaria de $L_M$ |
| $\varrho_M(x)$ | Módulo de $x$ |
| $B_{L_M}$ | Bola unitaria del espacio $L_M$ |
| $\overline{co}\, Ext\, B_X$ | Cápsula convexa cerrada del conjunto de puntos extremales |

# Introducción

El análisis funcional consolida la idea del estudio de los espacios abstractos como puntos. En consecuencia, es posible aplicar nociones e intuiciones geométricas al estudio de los conjuntos de tales puntos. Sin embargo el punto de vista analítico es esencial, por lo tanto, es claro que para que tal planteamiento sea aprovechable debemos disponer de resultados ciertos en las situaciones abstractas, que luego sean aplicables a casos concretos.

Dentro de estas ideas, la teoría de los espacios de Banach comenzó a consolidarse, como parte del análisis funcional, con la aparición del libro de Stefan Banach, "Théorie des opérations linéaires" publicado en 1932. Y esta teoría de Banach, recibió un rápido desarrollo, teniendo en cuenta el número de personas que trabajamos en este ámbito, así como la importancia de los resultados obtenidos.

Cerca de esta fecha, 1932, W. Orlicz presenta el concepto de los espacios de Orlicz y aparece 10 años después uno de los libros pioneros en el estudios de los espacios de Orlicz, *Convex functions and Orlicz spaces* [10] y mas recientemente encontramos [16].

Estos espacios ha estado inspirados por el importante papel que juegan las funciones $t^p$, en la definición de los espacios $L^p$ y $l^p$, que habían sido introducidos por F. Riesz en 1910 y 1913 respectivamente. Es natural intentar substituir ésta función por una función general $M$, y W. Orlicz comprobó las restricciones que se deberían imponer a $M$ para que el conjunto de las funciones tales $\int_\Omega M(f(x))dx < \infty$, sea un espacio de Banach y en este proceso, surgen las definiciones de *funciones de Orlicz* o $N-$*funciones.*

Sin embargo, no fue sino hasta los últimos veinte años que la teoría de la geometría de los espacios de Orlicz fue desarrollado extensamente.
La investigación de las propiedades geométricas de los espacios de Banach, es decir, propiedades que son invariantes con respecto a isometrías lineales, se remontan a 1936, cuando J.A. Clarkson introduce la noción de espacios rotundos y espacios uniformemente rotundos, en los cuales demuestra que los espacios $L_p$ con $1 < p < \infty$ son ejemplos de éstos. Entre estas dos nociones de espacios rotundos y uniformemente rotundos, se han encontrado, recientemente, una gran cantidad de propiedades geométricas, cuyas aplicaciones, se encuentran generalmente en la teoría de aproximación y teoría de la probabilidad.

Con el objetivo de presentar un estudio detallado de algunas de estas propiedades geométricas para los espacios de Orlicz, se presenta este trabajo, el cual está dirigido principalmente a estudiantes de los últimos semestres de la licenciatura en ciencias matemáticas y estudiantes de post-grado.

En busca que el material sea de fácil lectura; se ha perdido gran parte de la autonomía en su lectura, dada la gran cantidad de temas involucrados y las limitaciones físicas para presentar el mismo. Por esta razón, las personas que deseen realizar una lectura debe tener conocimientos básicos en teoría de la medida y análisis funcional en general.

El trabajo se encuentra dividido en capítulos, en el *primero* se estudia la clase de funciones convexas y puede decirse que es de interés independientemente del resto del trabajo, en la medida en que funciones convexas se aplican ampliamente en diversas ramas de las matemáticas.
Sin embargo, por ser básicas para nuestro trabajo; se hace un estudio detallado de las funciones convexas incluyendo operaciones, comparaciones entre ellas y las condiciones de $\Delta_2$ y $\nabla_2$. Para el estudio de esta última propiedad se hacen presente las $N-$funciones $M$ y $N$ que guardan una relación de complementariedad como la guardan los exponentes conjugados en los espacios de Lebesgue.
En el *segundo* capítulo se describen la clase de Orlicz, sus características ante la presencia y ausencia de la condición $\Delta_2$. Seguidamente se describen los funcionales necesarios para describir el espacio de Banach que es llamado *espacio Orlicz.* Se incluyen en este capítulo algunas nociones geométricas como la existencia de subespacios $l_p$ y $c_0$, dado que son los espacios más simples con base incondicional. Además, de presentar ciertas propiedades de las que también gozan los espacios que los contienen.

Finalmente, en el último capítulo se introducen algunas propiedades geométricas, así como propiedades topológicas, que no necesita ser conservado si la norma se sustituye por una equivalente.

*Mireya Bracamonte.* (*Octubre, 2009* )

Capítulo 1

# $N$-funciones, *una clase especial de funciones convexas.*

Las $N-$funciones fueron introducidas por Orlicz y Birnbaum en 1931, pero gran parte de la labor para desarrollar el tema fue realizada por Krasnoselskii y Ritickii [10] y Luxemburg [11] en los años cincuenta y principios de los sesenta.

## 1.1. Funciones Convexas.

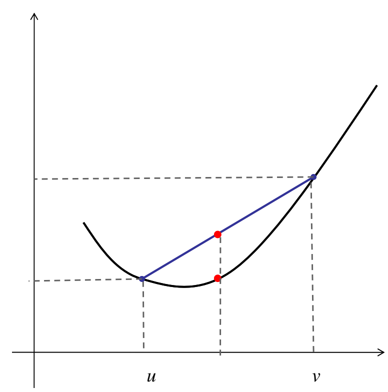
**Definición 1.1** *Una función $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada* ***convexa*** *si*

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{M(u)+M(v)}{2}, \tag{1.1}$$

*para todo $u, v \in \mathbb{R}$.*

Si además, ambos lados de la ecuación (1.1) no son iguales para $u \neq v$, entonces decimos que $M$ es **estrictamente convexa**.

La convexidad de una función significa que el punto medio de la cuerda que conecta dos puntos en el gráfico de la función $M(u)$ está por encima del correspondiente punto de la gráfica, lo cual puede apreciarse geométricamente.




Entonces

$$M(x) \leq M(u) + \frac{M(v)-M(u)}{v-u}(x-u).$$

Así, cada cuerda se encuentra encima del gráfico de la función, esto es, dados $u_1, u_2$ $(u_1 < u_2)$ números reales, la cuerda tendrá por ecuación

$$y(x) = \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1}(x-u_1) + M(u_1), \tag{1.2}$$

para la cual tenemos que $M(x) \leq y$ para todo $x \in [u_1, u_2]$.
En consecuencia, si $x = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ para algún $\lambda \in [0,1]$ se tiene que $x \in [u_1, u_2]$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}
M[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] &\leq y(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)\\
&\leq \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1}(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 - u_1) + M(u_1)\\
&\leq \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1}(\lambda u_1 + u_2 - \lambda u_2 - u_1) + M(u_1)\\
&\leq \frac{M(u_2)\lambda u_1 + u_2 M(u_2) - \lambda u_2 M(u_2) - u_1 M(u_2) - M(u_1)\lambda u_1 + \lambda u_2 M(u_1)}{u_2-u_1}\\
&\leq \frac{u_2(M(u_2) - \lambda M(u_2) + \lambda M(u_1)) - u_1(-M(u_2)\lambda + M(u_2) + \lambda M(u_1))}{u_2-u_1}\\
&\leq \frac{(u_2-u_1)(M(u_2) - \lambda M(u_2) + \lambda M(u_1))}{u_2-u_1},
\end{aligned}$$

esto es,

$$M[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] \leq \lambda M(u_1) + (1-\lambda)M(u_2) \tag{1.3}$$

es satisfecho para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.
Esta desigualdad es llamada **desigualdad de Jensen**.

La desigualdad de Jensen puede también ser aprovechada analíticamente. En efecto, supongamos que la desigualdad (1.3) no es satisfecha para todo $\lambda \in [0,1]$. Entonces el máximo valor $M_0$ de la función continua

$$f(\lambda) := M[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] - \lambda M(u_1) - (1-\lambda)M(u_2), \tag{1.4}$$

sobre $[0,1]$ debe ser positivo, $M_0 > 0$. Sea $\lambda_0$ el menor del argumento de $f(\lambda)$ tal que $f(\lambda_0) = M_0$. Por lo cual, existe $\delta > 0$ de tal forma que

$$[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta] \subseteq [0,1] \quad \text{y} \quad f(\lambda) > 0, \qquad (\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]).$$

Entonces consideramos

$$\begin{aligned}
u_1* &:= (\lambda_0 - \delta)u_1 + (1 - \lambda_0 + \delta)u_2\\
u_2* &:= (\lambda_0 + \delta)u_1 + (1 - \lambda_0 - \delta)u_2.
\end{aligned}$$

Como $M$ es convexa tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{u_1 * + u_2 *}{2}\right) &\leq \frac{M(u_1*) + M(u_2*)}{2}\\
M\left(\lambda_0 u_1 + (1-\lambda_0)u_2\right) &\leq \frac{M((\lambda_0 - \delta)u_1 + (1 - \lambda_0 + \delta)u_2) + M((\lambda_0 + \delta)u_1 + (1 - \lambda_0 - \delta)u_2)}{2}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(\lambda_0-\delta)+f(\lambda_0+\delta) &= M((\lambda_0-\delta)u_1+(1-\lambda_0+\delta)u_2)-(\lambda_0-\delta)M(u_1)-(1-\lambda_0+\delta)M(u_2) \\ &+ M((\lambda_0+\delta)u_1+(1-\lambda_0-\delta)u_2)-(\lambda_0+\delta)M(u_1)-(1-\lambda_0-\delta)M(u_2) \\ &= M((\lambda_0-\delta)u_1+(1-\lambda_0+\delta)u_2)+M((\lambda_0+\delta)u_1+(1-\lambda_0-\delta)u_2) \\ &- 2[\lambda_0 M(u_1)+(1-\lambda_0)M(u_2)]. \end{aligned}$$

De lo cual tendremos

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda_0-\delta)+f(\lambda_0+\delta)}{2} &= \frac{M((\lambda_0-\delta)u_1+(1-\lambda_0+\delta)u_2)+M((\lambda_0+\delta)u_1+(1-\lambda_0-\delta)u_2)}{2} \\ &- [\lambda_0 M(u_1)+(1-\lambda_0)M(u_2)]. \end{aligned}$$

Y en consecuencia

$$\begin{aligned} M\left(\lambda_0 u_1+(1-\lambda_0)u_2\right) &\leq \frac{M((\lambda_0-\delta)u_1+(1-\lambda_0+\delta)u_2)+M((\lambda_0+\delta)u_1+(1-\lambda_0-\delta)u_2)}{2} \\ &= \frac{f(\lambda_0-\delta)+f(\lambda_0+\delta)}{2}+\lambda_0 M(u_1)+(1-\lambda_0)M(u_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$M\left(\lambda_0 u_1+(1-\lambda_0)u_2\right) \leq \frac{f(\lambda_0-\delta)+f(\lambda_0+\delta)}{2}+\lambda_0 M(u_1)+(1-\lambda_0)M(u_2),$$

$$\begin{aligned} M\left(\lambda_0 u_1+(1-\lambda_0)u_2\right)-\lambda_0 M(u_1)-(1-\lambda_0)M(u_2) &\leq \frac{f(\lambda_0-\delta)+f(\lambda_0+\delta)}{2} \\ f(\lambda_0) &\leq \frac{f(\lambda_0-\delta)+f(\lambda_0+\delta)}{2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ahora bien, $\lambda_0-\delta<\lambda_0$, por lo tanto, de la forma como hemos elegido a $\lambda_0$ se tiene que $f(\lambda_0-\delta)<M_0$, por lo tanto

$$f(\lambda_0) \leq \frac{f(\lambda_0-\delta)+f(\lambda_0+\delta)}{2}<M_0.$$

Lo cual es una contradicción, concluyendo la demostración de (1.3).

**Afirmación 1.1** *Si $u_1\neq u_2$, la igualdad en (1.3) es alcanzada cuando $\lambda=0$ y $\lambda=1$ o para todo $\lambda\in[0,1]$.*

**Demostración.**
Es claro que la igualdad se alcanza para $\lambda=0$ y $\lambda=1$. Ahora, se define $f$ como en (1.4) y supongamos que la igualdad en (1.3) se alcanza para algún $\lambda_0\in(0,1)$. Esto significa que $f(\lambda_0)=0$. Vamos a demostrar que en este caso, $f(\lambda)=0$ para todo $\lambda\in[0,1]$.

Note que si $\lambda = \dfrac{a+b}{2} \in [0,1]$

$$\begin{aligned} M\left[\frac{a+b}{2}u_1 + \left(1 - \frac{a+b}{2}\right)u_2\right] &= M\left[\frac{au_1 + (1-a)u_2 + bu_1 + (1-b)u_2}{2}\right] \\ &\leq \frac{M\left[au_1 + (1-a)u_2\right] + M\left[bu_1 + (1-b)u_2\right]}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Esto nos garantiza que $f$ es convexa y por lo tanto, satisface la desigualdad de Jensen. Supongamos ahora que para algún $\lambda_1 \in (0,1)$ tendremos $f(\lambda_1) < 0$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_0) &= f\left(\frac{1-\lambda_0}{1-\lambda_1}\lambda_1 + \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{1-\lambda_1}\right) \\ &\leq \frac{1-\lambda_0}{1-\lambda_1}f(\lambda_1) + \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{1-\lambda_1}f(1) \\ &= \frac{1-\lambda_0}{1-\lambda_1}f(\lambda_1) < 0. \end{aligned}$$

Lo que contradice el supuesto de que $f(\lambda_0) = 0$. ♦

Como consecuencia inmediata de lo anterior tenemos el siguiente lema.

**Lema 1.1** ***(Caso discreto de la desigualdad de Jensen)*** *Una función de valores reales $M$ definida sobre un intervalo $I$ es convexa si y sólo si para todo $x_1, x_2, ..., x_n$ en $I$ y todos los escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ en $[0,1]$ con $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ se tiene que*

$$M\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k M(x_k).$$

La desigualdad anterior es estricta si la función $M$ es estrictamente convexa, todos los puntos $x_k$ son distintos y todos los escalares $\lambda_k$ son positivos.

**Definición 1.2** *Si $-M$ es una función convexa (respectivamente, estrictamente convexa) entonces se dice que $M$ es **cóncava** (respectivamente, estrictamente cóncava). Si una función es simultáneamente cóncava y convexa, se dice que es **afín**.*

**Proposición 1.1** **(i)** *Adición de funciones convexas definidas sobre un mismo dominio es una función convexa. Si una de las funciones es estrictamente convexa, la suma es estrictamente convexa.*

**(ii)** *La multiplicación de funciones (estrictamente) convexas por un escalar resulta una función (estrictamente ) convexa.*

**(iii)** *La restricción de toda función ( estrictamente ) convexa a un sub-intervalo de su dominio es también (estrictamente ) convexa.*

**(iv)** *Si $M : I \to \mathbb{R}$ es una función (estrictamente ) convexa y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es( respectivamente creciente) no-decreciente, entonces $g \circ M$ es una función (estrictamente) convexa.*

Las siguientes proposiciones se incluyen sin demostración y pueden encontrarse en [10] la primera y la segunda en (ver [6]).

**Definición 1.3** *Una función $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada* ***uniformemente convexa*** *si para cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier $u_0 > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que*

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}, \tag{1.6}$$

*para todo $u, v \in \mathbb{R}$ que satisface $|u-v| \geq \epsilon \max\{|u|,|v|\} \geq \epsilon u_0$.*

**Proposición 1.2** *Sea $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Las siguientes son equivalencias:*

*(a)* *$M$ es convexa,*

*(b)* *Existen funciones afín $L_n(u) := a_n u + b_n$ tales que $M(u) = \sup_n L_n(u)$.*

*(c)* *Para cualquier par $u$ y $v$ en $\mathbb{R}$ y $\alpha \in [0,1]$,*

$$M(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha M(u) + (1-\alpha)M(v). \tag{1.7}$$

*(d)* *Para cualquier $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}$ y $\alpha_i \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,*

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M(u_i)$$

## 1.2. Representación por integral de funciones convexas.

**Lema 1.2** *Una función convexa continua $M$ tiene, en cada punto, derivada por la derecha $p_+$ y derivada por la izquierda $p_-$ tal que*

$$p_-(u) \leq p_+(u) \tag{1.8}$$

**Demostración.**
Sean $u \in \mathbb{R}$ y $0 < h_1 < h_2$. Entonces

$$u + h_1 = \frac{h_2 - h_1}{h_2} u + \frac{h_1}{h_2}(u + h_2),$$

y haciendo uso de (1.3) se tiene que

$$M(u+h_1) \;=\; M\left(\frac{h_2 - h_1}{h_2} u + \frac{h_1}{h_2}(u+h_2)\right) \leq \frac{h_2 - h_1}{h_2} M(u) + \frac{h_1}{h_2} M(u+h_2), \tag{1.9}$$

Entonces tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
M(u) = M\left(\frac{2u}{2}\right) = M\left(\frac{u - h_1 + u + h_1}{2}\right) &\leq \frac{M(u-h_1) + M(u+h_1)}{2} \\
M(u) + M(u) &\leq M(u-h_1) + M(u+h_1)
\end{aligned}$$

$$\frac{M(u) - M(u-h_1)}{h_1} \leq \frac{M(u+h_1) - M(u)}{h_1}. \tag{1.10}$$

De (1.9) se tiene que

$$\begin{aligned}
M(u+h_1) &\leq \frac{h_2 - h_1}{h_2} M(u) + \frac{h_1}{h_2} M(u+h_2) \\
h_2 M(u+h_1) &\leq (h_2 - h_1) M(u) + h_1 M(u+h_2)
\end{aligned}$$

De esta última desigualdad podemos obtener la desigualdad siguiente,

$$\begin{aligned}
h_2 M(u+h_1) &\leq h_2 M(u) - h_1 M(u) + h_1 M(u+h_2) \\
h_2 M(u+h_1) - h_2 M(u) &\leq -h_1 M(u) + h_1 M(u+h_2) \\
h_2[M(u+h_1) - M(u)] &\leq h_1[M(u+h_2) - M(u)]
\end{aligned}$$

$$\frac{M(u+h_1) - M(u)}{h_1} \leq \frac{M(u+h_2) - M(u)}{h_2}. \tag{1.11}$$

Procediendo de forma similar,

$$\begin{aligned}
M(u-h_1) &= M\left(\frac{h_1}{h_2}(u-h_2)+\frac{h_2-h_1}{h_2}u\right)\\
M(u-h_1) &\leq \frac{h_1}{h_2}M(u-h_2)+\frac{h_2-h_1}{h_2}M(u)\\
h_2M(u-h_1) &\leq h_1M(u-h_2)+h_2M(u)-h_1M(u)\\
h_1M(u)-h_1M(u-h_2) &\leq h_2M(u)-h_2M(u-h_1)\\
h_1[M(u)-M(u-h_2)] &\leq h_2[M(u)-M(u-h_1)]\\
\frac{M(u)-M(u-h_2)}{h_2} &\leq \frac{M(u)-M(u-h_1)}{h_1}. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

De (1.10), (1.11) y (1.12) obtenemos

$$\frac{M(u)-M(u-h_2)}{h_2} \leq \frac{M(u)-M(u-h_1)}{h_1} \leq \frac{M(u+h_1)-M(u)}{h_1} \leq \frac{M(u+h_2)-M(u)}{h_2}, \qquad (1.13)$$

y se desprende de estas desigualdades que la relación

$$\frac{M(u)-M(u-h)}{h}$$

es no decreciente cuando $h \to 0$ y, en consecuencia tiene un límite, $p_-(u)$. De forma similar,

$$\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$$

es no creciente cuando $h \to 0$ y tiene límite $p_+(u)$. Y la desigualdad (1.8) se sigue de (1.13). ♦

El procedimiento, de encontrar las desigualdades, que utilizamos aquí lo utilizaremos nuevamente, por lo tanto vamos a establecer las desigualdades que se satisfacen para $u_1 \leq u_3 \leq u_2$ donde $u_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$.
En este caso

$$\begin{aligned}
u_3 &= \frac{u_2-u_3}{u_3-u_1}u_1+\frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}u_2,\\
M(u_3) &\leq \frac{u_2-u_3}{u_3-u_1}M(u_1)+\frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}M(u_2).
\end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que

$$M(u_3)(u_2-u_1) \leq (u_2-u_3)M(u_1)+(u_3-u_1)M(u_2), \tag{1.14}$$

de la cual obtenemos las dos desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
M(u_3)(u_2-u_1)-(u_2-u_3)M(u_1) &\leq (u_3-u_1)M(u_2)\\
M(u_3)(u_2-u_1)-(u_2-u_1+u_1-u_3)M(u_1) &\leq (u_3-u_1)M(u_2)\\
M(u_3)(u_2-u_1)-(u_2-u_1)M(u_1)-(u_1-u_3)M(u_1) &\leq (u_3-u_1)M(u_2)\\
M(u_3)(u_2-u_1)-(u_2-u_1)M(u_1) &\leq (u_3-u_1)M(u_2)+(u_1-u_3)M(u_1)\\
(u_2-u_1)[M(u_3)-M(u_1)] &\leq (u_3-u_1)[M(u_2)-M(u_1)]\\
\frac{M(u_3)-M(u_1)}{u_3-u_1} &\leq \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1}.
\end{aligned}$$

Nuevamente de (1.14)

$$\begin{aligned}
-(u_2-u_3)M(u_1)-(u_3-u_1)M(u_2) &\leq -M(u_3)(u_2-u_1)\\
-(u_2-u_3)M(u_1)+(u_1-u_3)M(u_2) &\leq -M(u_3)(u_2-u_1)\\
-(u_2-u_3)M(u_1)+(u_1-u_2+u_2-u_3)M(u_2) &\leq -M(u_3)(u_2-u_1)\\
-(u_2-u_3)M(u_1)+(u_1-u_2)M(u_2)+(u_2-u_3)M(u_2) &\leq -M(u_3)(u_2-u_1)\\
-(u_2-u_3)M(u_1)+(u_2-u_3)M(u_2) &\leq (u_2-u_1)M(u_2)-M(u_3)(u_2-u_1)\\
(u_2-u_3)[M(u_2)-M(u_1)] &\leq (u_2-u_1)[M(u_2)-M(u_3)]\\
\frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1} &\leq \frac{M(u_2)-M(u_3)}{u_2-u_3}.
\end{aligned}$$

Resumiendo, si $u_1 \leq u_3 \leq u_2$ se tiene que

$$\frac{M(u_3)-M(u_1)}{u_3-u_1} \leq \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1} \leq \frac{M(u_2)-M(u_3)}{u_2-u_3}. \tag{1.15}$$

**Lema 1.3** *La derivada por la derecha $p_+$ de una función convexa continua $M$ es una función continua por la derecha y no decreciente.*

**Demostración.**
Sean $u_1, u_2$ tales que $u_1 < u_2$. Podemos elegir un $h$ suficientemente pequeño de forma que $u_1+h < u_2-h$ y, en virtud de (1.15) tenemos que

$$\frac{M(u_1+h)-M(u_1)}{h} \leq \frac{M(u_2)-M(u_2-h)}{h}.$$

Pasando al límite, se obtiene

$$p_+(u_1) \leq p_-(u_2). \tag{1.16}$$

De esta desigualdad y (1.8) resulta que

$$p_+(u_1) \leq p_+(u_2). \tag{1.17}$$

Con lo cual queda demostrada la monotonía de $p_+$. Como se ha demostrado en el transcurso del lema (1.2), para todos los $h > 0$ tenemos que

$$p_+(u) \leq \frac{M(u+h) - M(u)}{h}.$$

Manteniendo $h$ fijo y pasando al límite cuando $u \to u_0^+$, se obtiene que

$$\lim_{u \to u_0^+} p_+(u) \leq \frac{M(u_0+h) - M(u_0)}{h} \tag{1.18}$$

en virtud de la continuidad de $M$. El lado izquierdo de este límite existe por la monotonía de $p_+$. Y haciendo $h \to 0$ en (1.18), obtenemos

$$\lim_{u \to u_0^+} p_+(u) \leq p_+(u_0).$$

Por otra parte, $p_+(u) \geq p_+(u_0)$ para $u \geq u_0$ en virtud de lo cual

$$\lim_{u \to u_0^+} p_+(u) \geq p_+(u_0).$$

Así,

$$\lim_{u \to u_0^+} p_+(u) = p_+(u_0).$$

Esta igualdad nos garantiza que la función $p_+$ es continua a la derecha. ♦

**Lema 1.4** *La derivada por la izquierda $p_-$ de una función convexa continua $M$ es una función continua por la izquierda y no decreciente.*

La demostración es similar a la demostración del lema anterior, por tal razón se omite.

Tenemos entonces que una función convexa es diferenciable excepto posiblemente en un conjunto numerable.

**Lema 1.5** *Una función convexa $M$ es absolutamente continua y satisface la condición Lipschitz en todo intervalo finito.*

**Demostración.**

Consideremos el intervalo $[a,b]$, y sean $a < u_1 < u_2 < b$. Por (1.15), tenemos que

$$\frac{M(u_1) - M(a)}{u_1 - a} \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{M(b) - M(u_2)}{b - u_2}.$$

De lo cual obtenemos la desigualdad

$$p_+(a) \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq p_-(b),$$

lo cual significa que $\left|\frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1}\right|$ es acotado para todo $u_1, u_2$ en el intervalo $[a,b]$. ♦

**Teorema 1.6** *Toda función convexa $M$ que satisface la condición $M(a) = 0$ puede ser representada en la forma*

$$M(u) = \int_a^u p(t)dt, \tag{1.19}$$

*donde $p(t)$ es una función continua por la derecha no decreciente.*

**Demostración.**

Los lemas anteriores nos garantizan que la función $M$ tiene derivada en casi todas parte. En efecto, por (1.16) y (1.8), tenemos para $u_2 > u_1$

$$p_-(u_2) \geq p_+(u_1) \geq p_-(u_1). \tag{1.20}$$

Puesto que la función $p_-$ es monótona, es continua al menos casi siempre. Consideremos $u_1$ un punto de continuidad de la función $p_-$. Haciendo paso al límite en (1.20) cuando $u_2 \to u_1$, obtenemos que

$$p_-(u_1) \geq p_+(u_1) \geq p_-(u_1),$$

esto es

$$p_-(u_1) = p_+(u_1).$$

De forma semejante, tenemos que $M' = p = p_+$ casi siempre.
Ya que el lema (1.5) nos garantiza que la función $M$ es absolutamente continua, ésta es la integral indefinida de su derivada. ♦

## 1.3. $N$-funciones.

Podemos encontrar en [16] que W.H. Young en su estudio de series de Fourier, analiza ciertas funciones convexas $M : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ que satisface las condiciones

- $M(x) = M(-x)$,
- $M(0) = 0$, y
- $\lim\limits_{x\to\infty} M(x) = +\infty$.

Y en [10] encontramos la definición de $N$-función.

**Definición 1.4** *Una función $M$ es llamada una* **N- *función*** *si admite una representación de la forma*

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt, \tag{1.21}$$

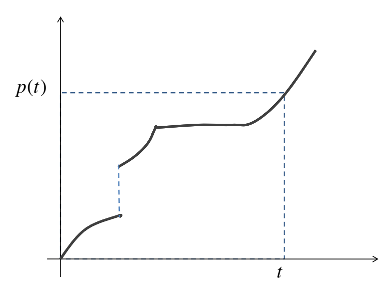
*donde la función $p(t)$ es continua a la derecha para $t > 0$, positiva para $t > 0$ y no decreciente que cumpla las condiciones*

$$p(0) = 0, \qquad p(\infty) := \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty. \tag{1.22}$$

*A la función $p$ se le llama* ***densidad****.*

La $N$-función es llamada **función de Orlicz** en algunos textos como [6].

En términos generales, las condiciones descritas antes significan que la función $p$ debe tener el gráfico de la forma que se muestra en la figura.




**Ejemplo 1.1** *Como ejemplo de $N$-función se encuentran*

- $M_1(u) := \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ *para* $\alpha > 1$,
- $M_2(u) := e^{u^2} - 1$.

*Para la primera* $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}$ *y, para la segunda,* $p_2(t) = M_2'(t) := 2te^{t^2}$.

## Propiedades de las $N$-funciones.

Se sigue de la representación (1.21) que una $N$-función $M$ satisface las siguientes propiedades:

1. $M$ es continua,
2. $M$ es estrictamente creciente para valores positivos del argumento,

3. $M$ es convexa. En efecto, si $0 \leq u_1 < u_2$ la monotonía de $p$, garantiza que

$$
\begin{aligned}
2\left[\int_0^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt - \int_0^{u_1} p(t)dt\right] &= 2\int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt \\
&= \int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt + \int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt \\
&\leq \int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt + \int_{\frac{u_1+u_2}{2}}^{u_2} p(t)dt.
\end{aligned}
$$

De donde,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt - \int_0^{u_1} p(t)dt &\leq \frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt + \int_{\frac{u_1+u_2}{2}}^{u_2} p(t)dt\right] \\
\int_0^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt &= \int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt + \int_{\frac{u_1+u_2}{2}}^{u_2} p(t)dt\right].
\end{aligned}
$$

Y como consecuencia,

$$
\begin{aligned}
M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) &= \int_0^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt \\
&\leq \int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt + \int_{\frac{u_1+u_2}{2}}^{u_2} p(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{u_1} p(t)dt + \int_0^{u_2} p(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{2}[M(u_1) + M(u_2)].
\end{aligned}
$$

En el caso de $u_1, u_2$ arbitrarios, tendremos que

$$
\begin{aligned}
M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) &= \int_0^{\left|\frac{u_1+u_2}{2}\right|} p(t)dt \\
&= M\left(\frac{|u_1+u_2|}{2}\right) \\
&\leq M\left(\frac{|u_1|+|u_2|}{2}\right) \\
&\leq \frac{M(|u_1|) + M(|u_2|)}{2} \\
&= \frac{M(u_1) + M(u_2)}{2}.
\end{aligned}
$$

4.

$$M(\epsilon u) \leq \epsilon M(u) \quad \text{si} \quad 0 \leq \epsilon \leq 1. \tag{1.23}$$

En efecto, como $M$ es convexa, para $u, 0 \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$M(\epsilon u) = M(\epsilon u + (1-\epsilon)0) \leq \epsilon M(u) + (1-\epsilon)M(0) = \epsilon M(u).$$

5. De la primera condición de (1.22) garantiza que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{M(t)}{t} = 0, \tag{1.24}$$

mientras que de la segunda condición de (1.21) se sigue que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t} = \infty. \tag{1.25}$$

Esto dado que para $u > 0$, tenemos que

$$\frac{M(u)}{u} = \frac{1}{u} \int_0^u p(t)dt \geq \frac{1}{u} \int_{u/2}^u p(t)dt \geq p\left(\frac{u}{2}\right).$$

6.

$$\frac{M(t)}{t} > \frac{M(s)}{s} \qquad (t > s > 0). \tag{1.26}$$

En efecto, note que para una $N$-función la igualdad se cumple en (1.23) sólo si $\epsilon = 0$ o $\epsilon = 1$ o $u \neq 0$ y que para algún $\epsilon \in (0,1)$ se cumple la igualdad en (1.23). Entonces, se sigue que la igualdad se cumple en (1.23) para todo $\epsilon \in [0,1]$.

En consecuencia, para $\epsilon \in [0,1]$, $\frac{M(\epsilon u)}{\epsilon u} = \frac{M(u)}{u}$. Utilizando paso al límite cuando $\epsilon \to 0$ en la ecuación, se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{M(\epsilon u)}{\epsilon u} = \frac{M(u)}{u},$$

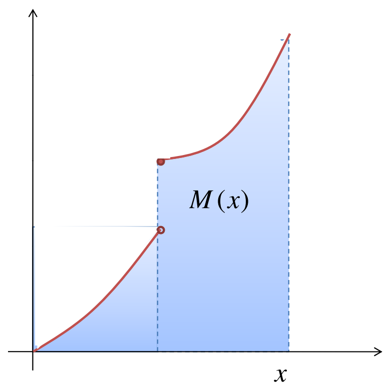
con lo cual se contradice (1.24).

Así,

$$M(\epsilon u) < \epsilon M(u) \qquad (0 < \epsilon < 1, u \neq 0). \tag{1.27}$$

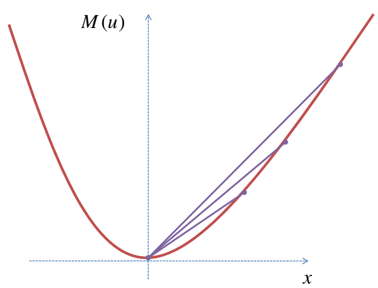
Con dicha desigualdad se obtiene que $\frac{M(u)}{u}$ es estrictamente creciente para valores positivos de $u$, haciendo $\epsilon = \frac{s}{t}$ en (1.16).

Observe que $M(x) = \int_0^x p(t)\,dt$ representa el área bajo la cura de $y = p(x)$ de $x = 0$ a $x = t$.




Con estas propiedades, se describe suficientemente la gráfica de una $N$-función. La propiedad (1.24) implica que el eje $X$ es tangente al gráfico de la $N$-función en el origen. Mientras que las propiedades (1.26) y (1.25) caracterizan la variación de la pendiente de la cuerda que une el origen con un punto que se mueve en el gráfico de la $N$-función.

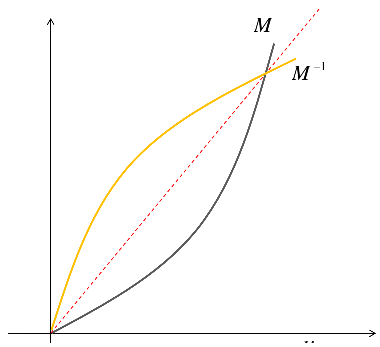
El gráfico puede tener saltos o segmentos rectilíneos. Los saltos corresponden a los puntos de discontinuidad de la función $p$ y los segmentos rectilíneos a los intervalos donde $p$ es constante.



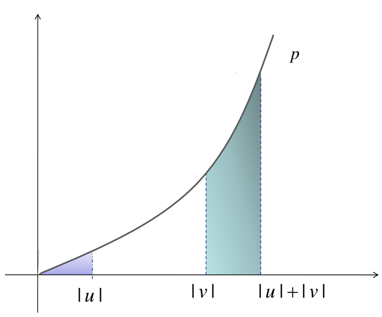

## 1.4. $N$-Funciones inversas, complementarias y operaciones.

Denotaremos por $M^{-1}(v)$ ( $0 \leq v < \infty$) la función inversa de la $N$-función $M$ considerada para valores no negativos del argumento. Esta función no es convexa, puesto que, en virtud de la desigualdad (1.3), tenemos para $u_i = M^{-1}(v_i)$ (i=1,2) y $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned}
M[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] &\leq \lambda M(u_1) + (1-\lambda)M(u_2)\\
M[\lambda M^{-1}(v_1) + (1-\lambda)M^{-1}(v_2)] &\leq \lambda M(M^{-1}(v_1)) + (1-\lambda)M(M^{-1}(v_2))\\
M[\lambda M^{-1}(v_1) + (1-\lambda)M^{-1}(v_2)] &\leq \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2\\
\lambda M^{-1}(v_1) + (1-\lambda)M^{-1}(v_2) &\leq M^{-1}[\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2]
\end{aligned}$$




La monotonía de la derivada por la derecha $p$ de la $N$-función $M$ implica la desigualdad



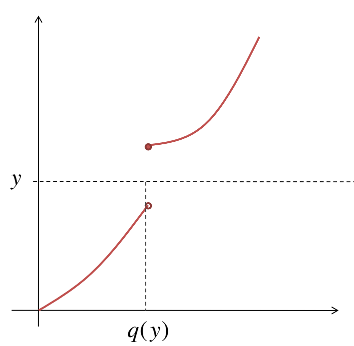

$$\begin{aligned} M(u)+M(v) &= \int_0^{|u|} p(t)dt + \int_0^{|v|} p(t)dt \\ &\leq \int_0^{|u|} p(t)dt + \int_{|u|}^{|v|+|u|} p(t)dt \\ &= \int_0^{|v|+|u|} p(t)dt = M(|u|+|v|). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Supongamos que $a = M(u)$, $b = M(v)$ son números no negativos arbitrarios. Se sigue de (1.28) que

$$M^{-1}(a+b) \leq M^{-1}(a) + M^{-1}(b). \tag{1.29}$$

**Definición 1.5** *Sea $p$ una función positiva para $t \geq 0$, continua a la derecha para cada $t \geq 0$, no-decreciente y que satisface las condiciones (1.22). Se define la función $q$ como*

$$\begin{aligned} q : [0, +\infty) &\rightarrow [0, +\infty) \\ q(y) &= \sup_{p(x) \leq y} x \end{aligned}$$



Es fácil verificar que $q$ satisface las mismas propiedades de la función $p$, es decir, es positiva para $s > 0$, continua a la derecha para $s \geq 0$, no decreciente y satisface las condiciones

$$q(0) = 0, \qquad \lim_{s \to \infty} q(s) = \infty. \tag{1.30}$$

Podemos entonces definir

$$N(y) = \int_0^{|y|} q(t)dt,$$

a la cual se le llama $N$- **función complementaria** de $M$.
De la definición de $q$ se tienen las desigualdades

$$q[p(t)] \geq t \quad \text{y} \quad p[q(s)] \geq s, \tag{1.31}$$

Además, para $\epsilon > 0$, se obtiene que

$$q[p(t) - \epsilon] \leq t \quad \text{y} \quad p[q(s) - \epsilon] \leq s. \tag{1.32}$$

En el caso en que $p$ sea continua, monótona creciente entonces $q$ es la función inversa ordinaria de $p$. En el caso general, $q$ es llamado inversa por la derecha de $p$. La función $p$ es, a su vez, la inversa por la derecha de $q$.
Es usual llamar a las $N$-funciones

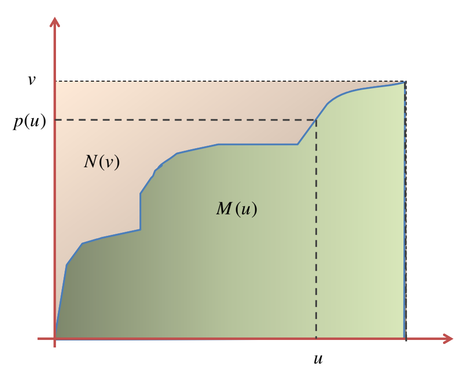
$$M(u) := \int_0^{|u|} p(t)dt, \qquad N(v) := \int_0^{|v|} q(s)ds$$

$N$-funciones **mutuamente complementarias** e indicadas como $(M, N)$.

**Ejemplo 1.2**

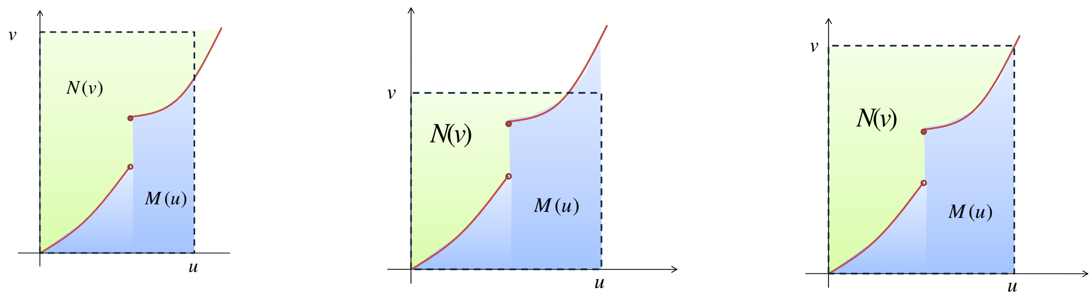
- *La complementaria de* $M(t) = \frac{t^p}{p}$ *es* $N(x) = \frac{s^{p'}}{p'}$ *para* $1 < p < \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
- *La complementaria de* $M(t) = e^t - t - 1$ *es* $N(s) = Ln(s+1)(s+1) - s$.

La relación entre $M, N, p, q$ es descrita en el siguiente gráfico,



## 1.5. Desigualdad de Young

Esta sección se dedica a la desigualdad de Young por ser fuente de muchas de las desigualdades básicas.
Es fácil observar de las figuras




que

$$uv \leq M(u) + N(v). \tag{1.33}$$

$$uv = M(u) + N(v) \iff u = q(|v|)Sign\, v \quad \text{ó} \quad v = p(|u|)Sign\, u. \tag{1.34}$$

Así,

$$|u|p(|u|) = M(u) + N[p(|u|)] \tag{1.35}$$

y

$$|v|q(|v|) = M[q(|v|)] + N(v). \tag{1.36}$$

La desigualdad anterior podemos reescribirla como

$$N(v) \geq vu - M(u),$$

y como la igualdad ocurre si $N(v) = u$ se tiene que

$$N(v) = \max_{u \geq 0}(uv - m(u)),$$

que usualmente también es usada como definición de la función complementaria.

**Ejemplo 1.3** *Sean $M$ una $N$-función. Consideremos la $N$-función complementaria $N_1$ de $M_1$ definida por*

$$M_1(u) = aM(bu) \qquad (a, b > 0).$$

*Sea $p$ la derivada por la derecha de $M$. Entonces la derivada por la derecha de $M_1$ es $p_1(t) = ab\,p(bt)$ y la inversa por la derecha es*

$$q_1(s) := \frac{1}{b} q\left(\frac{y}{ab}\right),$$

*de $N$. donde $q$ es la derivada por la derecha.*

Por consiguiente,

$$N_1(v) = \int_0^{|u|} \int q_1(s)ds = \int_0^{|v|} \frac{q\left(\frac{s}{ab}\right)}{b} ds = a \int_0^{\frac{|v|}{ab}} q(s)ds,$$

es decir,

$$N_1(v) = aN\left(\frac{|v|}{ab}\right). \tag{1.37}$$

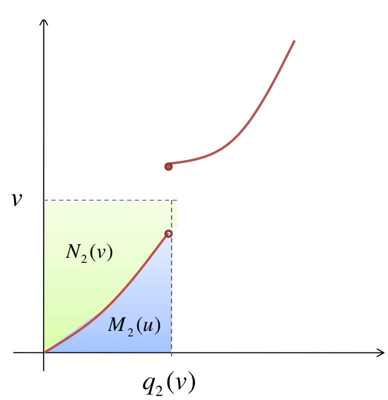
**Ejemplo 1.4** *Sean $N_1, N_2$ dos $N$-funciones complementarias de $M_1$ y $M_2$ respectivamente. Supongamos que*

$$M_1(u) \leq M_2(u) \qquad (u \geq u_0 \geq 0).$$

*Consideremos la relación entre $N_1$ y $N_2$.*

Por (1.33) y (1.34),

$$M_2(q_2(v)) + N_2(v) \;\; = \;\; vq_2(v) \leq M_1(q_2(v)) + N_1(v) \qquad\qquad (v \geq 0).$$



Por consiguiente,

$$M_2(q_2(v)) + N_2(v) \leq M_1(q_2(v)) + N_1(v) \leq M_2(q_2(v)) + N_1(v) \qquad (q_2(v) \geq u_0).$$

Obtenemos

$$N_2(v) \leq N_1(v) \qquad (q_2(v) \geq u_0).$$

**Definición 1.6** *Una función convexa $Q$ es llamada **parte principal de una N-función** $M$ si $Q(u) = M(u)$ para valores grandes del argumento.*

**Teorema 1.7** *Supongamos que la función convexa $Q$ satisface la condición*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{Q(u)}{u} = \infty. \tag{1.38}$$

*Entonces $Q$ es la parte principal de una $N$-función $M$.*

**Demostración.**
Se deriva d la condición dada en (1.38) que $\lim_{u\to\infty} Q(u) = \infty$, pues en caso contrario este límite resultaría ser cero. Esto nos garantiza la existencia de $u_0 \geq 0$ de forma que $Q$ sea convexa y positiva para $u \geq u_0$, y en virtud del teorema (1.6) $Q$ admite una representación de la forma

$$Q(u) = Q(u_0) + \int_{u_0}^{u} p(t)dt, \tag{1.39}$$

donde $p$ es no decreciente y continua a la derecha.
Note que $p$ no puede ser acotada, pues de ser $p(u) \leq b < \infty$ implica que

$$\begin{aligned} Q(u) &= Q(u_0) + \int_{u_0}^{u} p(t)dt \leq Q(u_0) + \int_{u_0}^{u} bdt = Q(u_0) + b(u_1 - u_0), \\ \frac{Q(u)}{u} &= \frac{Q(u_0) + b(u_1 - u_0)}{u}, \\ \lim_{u\to\infty} \frac{Q(u)}{u} &= \lim_{u\to\infty} \frac{Q(u_0) + b(u_1 - u_0)}{u} = b, \end{aligned}$$

lo cual contradice (1.38).
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $p(u)$ es positivo para $u \geq u_0$, y ya que $p$ crece indefinidamente, podemos hallar $u_1 > u_0 + 1$ tal que

$$p(u_1) > p(u_0 + 1) + Q(u_0). \tag{1.40}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
Q(u_1) &= Q(u_0) + \int_{u_0}^{u_1} p(t)dt \\
&= Q(u_0) + \int_{u_0}^{u_0+1} p(t)dt + \int_{u_0+1}^{u_1} p(t)dt \\
&\leq Q(u_0) + p(u_0+1) + (u_1 - u_0 - 1)p(u_1) \\
&< p(u_1) + (u_1 - u_0 - 1)p(u_1) \\
&= (u_1 - u_0)p(u_1) \\
&\leq u_1 P(u_1). \qquad (1.41)
\end{aligned}$$

Esto nos garantiza que $\alpha := \dfrac{u_1 p(u_1)}{Q(u_1)} > 1$ y definimos

$$M(u) := \begin{cases} \dfrac{Q(u_1)}{u_1^\alpha}|u|^\alpha & \text{para} \quad |u| \leq u_1, \\ Q(u) & \text{para} \quad |u| \geq u_1. \end{cases}$$

Esta es una $N$-función cuya derivada por la derecha está dada por

$$M'_+(u) := \begin{cases} \dfrac{\alpha Q(u_1)}{u_1^\alpha} u^{\alpha-1} & \text{para} \quad 0 \leq u \leq u_1, \\ p(u) & \text{para} \quad u \geq u_1. \end{cases}$$

♦

## 1.6. Comparación de $N$-funciones.

Puesto que el crecimiento de una $N$-función, cuando $u \to \infty$, juega un papel muy importante dentro del estudio de los espacios de Orlicz, es conveniente considerar ordenes parciales entre clases de $N$-funciones, los cuales presentamos a continuación.
Con esta herramienta adicional, podemos considerar la siguiente proposición relacionada con $N-$funciones inversas

**Proposición 1.3** *Sean $(M,N)$ un par de $N$-funciones complementarias . Entonces $M$ y $N$ son crecientes, sus inversas $M^{-1}$, $N^{-1}$ están definidas de forma única y*

**(i)** $M(a) + M(b) \leq M(a+b)$, $\quad M^{-1}(a+b) \leq M^{-1}(a) + M^{-1}(b)$, *para* $a, b \in \mathbb{R}^+$,

**(ii)** $a < M^{-1}(a)N^{-1}(a) \leq 2a$, *para* $a > 0$.

**Demostración.**

Teniendo presente que $M(x) = \int_0^x p(t)dt$ y $N(x) = \int_0^x q(t)dt$ se tiene

$$\begin{aligned} M(a) + M(b) &= \int_0^a p(t)dt + \int_0^b p(t)dt \\ &= \int_0^a p(t)dt + \int_a^{a+b} p(t-a)dt \\ &\leq \int_0^a p(t)dt + \int_a^{a+b} p(t)dt \\ &= \int_0^{a+b} p(t)dt \\ &= M(a+b). \end{aligned}$$

Para la segunda parte de (i) hacemos $x = M^{-1}(y)$ y si $\alpha = M(a)$ y $\beta = M(b)$ entonces $\alpha + \beta = M(a) + M(b) \leq M(a+b)$, en consecuencia

$$M^{-1}(\alpha + \beta) \leq a + b = M^{-1}(a) + M^{-1}(b).$$

Para demostrar la segunda parte consideramos $a > 0$.

$$\frac{M(a)}{a} = \frac{1}{a} \int_0^a p(x)dx = \frac{1}{a}(a-0)p(\zeta),$$

para algún $\zeta \in [0, a]$, por el Teorema de Valor medio para integrales de Lebesgue.
Así,

$$\begin{aligned} N\left(\frac{M(a)}{a}\right) &= \int_0^{\frac{M(a)}{a}} q(y)dy \\ &= \frac{M(a)}{a} q(\xi) \end{aligned}$$

para algún $\xi \in \left[0, \frac{M(a)}{a}\right]$.
Note que $0 < \xi < \frac{M(a)}{a} = p(\zeta)$.

$$\begin{aligned} N\left(\frac{M(a)}{a}\right) &= \int_0^{\frac{M(a)}{a}} q(t)dt \\ &= \frac{M(a)}{a} q(\xi) \\ &< \frac{M(a)}{a} q(p(\zeta)) \\ &\leq \frac{M(a)}{a} a \\ &= M(a). \end{aligned}$$

Haciendo $M(a) = \alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{M^{-1}(a)} &< N^{-1}(\alpha) \\ \alpha &< N^{-1}(\alpha)M^{-1}(a) \qquad (1.42) \end{aligned}$$

Por otra parte, la desigualdad de Young, si $\alpha = M(a)$ y $\beta = N(b)$ entonces

$$M^{-1}(\alpha)N^{-1}(\beta) \leq \alpha + \beta,$$

así, para $\alpha = \beta$

$$M^{-1}(\alpha)N^{-1}(\alpha) \leq 2\alpha. \qquad (1.43)$$

Con lo cual concluye la demostración. ♦

**Definición 1.7** *Diremos que $M_2$ es **más fuerte** que $M_1$ o que $M_2$ **domina globalmente** a $M_1$, lo denotaremos por*

$$M_1 \prec M_2 \quad \textit{ó} \quad M_2 \succ M_1 \qquad (1.44)$$

*si existe una constante $k$ tal que*

$$M_1(u) \leq M_2(ku) \qquad (\textit{para todo } u). \qquad (1.45)$$

Diremos que las $N$-funciones $M_1$ y $M_2$ son**comparables** si se satisface alguna de las relaciones

$$M_1 \prec M_2 \quad \text{ó} \quad M_2 \prec M_1.$$

Es fácil verificar que esta relación de orden satisface la transitividad, esto es, si $M_1 \prec M_2$ y $M_2 \prec M_3$ implica que $M_1 \prec M_3$. Entonces, el conjunto de las $N$-funciones con la relación de orden $\prec$ definida en (1.44) es un conjunto parcialmente ordenado.

**Ejemplo 1.5** *Si $\alpha, \alpha_i$ son números reales mayores que la unidad y $\alpha_1 < \alpha_2$ definimos las $N$-funciones $M_1(u) := |u|^{\alpha_1}$ y $M_2(u) := |u|^{\alpha_2}$ y $M(u) := |u|^{\alpha}(|Ln|u|| + 1)$ entonces, estas $N$-funciones satisfacen la relación $M_1 \prec M_2$, además, $M_i \prec M(u) \prec M_{i+\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ arbitrario.*

**Definición 1.8** *Si $M_1$ y $M_2$ son $N-$funciones, diremos que $M_2$ **domina** a $M_1$ **cerca de infinito**, y lo expresamos como $M_1 \preceq M_2$ si existen constantes positivas $t_0$ y $k$ tal que*

$$M_1(t) \leq M_2(kt) \qquad (t \geq t_0).$$

*Diremos que $M_1$ y $M_2$ son **equivalente cerca de infinito** si existen constantes positivas $t_0$, $k_1$ y $k_2$ de manera que*

$$M_2(k_1 t) \leq M_1(t) \leq M_2(k_2 t) \qquad (t \geq t_0).$$

*Finalmente, si $M_2$ domina a $M_1$ cerca de infinito pero no son equivalentes cerca de infinito, diremos que $M_1$ **crece esencialmente menos rápido** que $M_2$ cerca de infinito.*

**Definición 1.9** *Diremos que dos $N$-funciones $M_1$ y $M_2$ son* ***equivalentes*** *y escribimos $M_1 \sim M_2$ si $M_1 \prec M_2$ y $M_2 \prec M_1$.*

Y es claro que la relación de equivalencia en este conjunto es transitiva. En virtud de los cual el conjunto formado por todas las $N$-funciones puede ser dividido en clases de funciones equivalentes.
Como consecuencia inmediata de la definición de $N$-funciones, $M_1$ y $M_2$ son equivalentes, si y sólo si, existen constantes positivas $k_1$, $k_2$ y $u_0$ tales que

$$M_1(k_1 u) \leq M_2(u) \leq M_1(k_2 u) \qquad (u \geq u_0). \tag{1.46}$$

De estas desigualdades, se desprende, en particular, que la $N$-function $M$ es equivalente a la $N$-función $M(ku)$ para una constante arbitraria $k > 0$.

**Teorema 1.8** *Supongamos que $M_1 \preceq M_2$. Entonces las correspondientes $N$-funciones complementarias satisfacen $N_2(v) \prec N_1(v)$.*

**Demostración.**
Por hipótesis, existen $a > 0$ y $u_0$ de manera que

$$M_1(u) \leq M_2(au) \qquad (u \geq u_0 \geq 0). \tag{1.47}$$

Definimos $M(u) := M_2(au)$.La función $N$, denotará la complementaria de $M$, igual a $N_2\left(\frac{v}{a}\right)$ en virtud a (1.37).
La desigualdad (1.47) puede re-escribirse de forma que $M_1(u) \leq M(u)$ $(u \geq u_0)$. Entonces, existe una $v_0 > 0$ tal que $N(v) \leq N_1(v)$ $(v \geq v_0)$ de lo cual se obtiene que $N_2(v) \leq N_1(av)$ $(\ v \geq v_0/a)$. ♦

**Corolario 1.9** *Si las $N$-funciones $M_1$ y $M_2$ son equivalentes, entonces las $N$-funciones complementarias, correspondientes, también son equivalentes.*

### 1.6.1. Criterio de equivalencia.

Un conjunto $F$ sobre la recta real es llamado **conjunto de medida completa** si el conjunto de puntos que no pertenecen a $F$ tienen medida cero.
Vamos a definir dos $N$-funciones,

$$M_1(u) := \int_0^{|u|} p_1(t)dt, \qquad\qquad M_2(u) := \int_0^{|u|} p_2(t)dt. \tag{1.48}$$

**Lema 1.10** *Supongamos que existe una constante $k > 0$, $u_0 > 0$ y un conjunto $F$ de medida completa tal que $p_1(u) \leq p_2(ku)$ $(u \geq u_0, u \in F)$. Entonces las $N$-funciones*

$$M_1(u) := \int_0^{|u|} p_1(t)dt, \qquad M_2(u) := \int_0^{|u|} p_2(t)dt,$$

*satisfacen la relación $M_1(u) \prec M_2(u)$.*

**Demostración.**
Por hipótesis tenemos que

$$p_1(u) \leq p_2(ku) \qquad (u \geq u_0, u \in F),$$

así, integrando tendremos que

$$\int_{u_0}^{|u|} p_1(t)dt \leq \int_{u_0}^{|u|} p_2(kt)dt.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} M_1(u) - M_1(u_0) &= \int_0^{|u|} p_1(t)dt - \int_0^{u_0} p_1(t)dt \\ &= \int_{u_0}^{|u|} p_1(t)dt \\ &\leq \int_{u_0}^{|u|} p_2(kt)dt \\ &= \frac{1}{k}\int_{ku_0}^{k|u|} p_2(t)dt \\ &= \frac{1}{k}\left[\int_0^{k|u|} p_2(t)dt - \int_0^{ku_0} p_2(t)dt\right] \\ &= \frac{1}{k}[M_2(ku) - M_2(ku_0)] \\ &< \frac{1}{k}M_2(ku) \qquad (u \geq u_0). \end{aligned} \tag{1.49}$$

Note que $\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) M_1$ crece indefinidamente, entonces podemos elegir $u_1 \geq u_0$ de forma que

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) M_1(u) \geq M_1(u_0) \quad \text{para} \quad u \geq u_1 \geq u_0,$$

Sustituyendo esta última desigualdad en (1.49) se obtiene

$$\frac{1}{k}M_1(u) \leq M_1(u) - M_1(u_0) \leq \frac{1}{k}M_2(ku),$$

con lo cual hemos obtenido lo deseado, esto es,

$$M_1(u) \leq M_2(ku) \qquad (u \geq u_1).$$

♦

Se sigue del lema (1.10) que $M_1 \prec M_2$ si se cumple que $p_1[\alpha q_2(\beta u)] < u$ para valores grandes de $u$.

**Lema 1.11** *Sea*

$$\lim_{\substack{u\to\infty \\ u\in F}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} = b > 0, \tag{1.50}$$

*donde $F$ es un conjunto de medida completa. Entonces $M_1 \sim M_2$.*

**Demostración.**
En virtud de (1.50) existe $u_0 > 0$ tal que para $u \geq u_0$, $u \in F$, tendremos que $\dfrac{p_1(u)}{p_2(u)} - b < b$, ó equivalentemente $p_1(u) \leq 2bp_2(u)$. Integración entre $u_0$ y $u$, obtenemos que para $u \geq u_0$

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u} p_1(t)dt &\leq 2b\int_{u_0}^{u} p_2(t)dt \\ M_1(u) - M_1(u_0) &\leq 2b[M_2(u) - M_2(u_0)]. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Por otra parte, del hecho de que $\lim\limits_{u\to\infty} M_2(u) = \infty$, para $K = M_1(u_0) - 2bM(u_0)$ existe $u_1$ de manera que

$$u \geq u_1 \implies M_2(u) > M_1(u_0) - 2bM(u_0). \tag{1.52}$$

De (1.51) y (1.52) obtenemos que

$$M_1(u) \leq 2bM_2(u) + M_1(u_0) - 2bM_2(u_0) < [2b+1]M_2(u) \quad \text{para} \quad u \geq \max\{u_0, u_1\}. \tag{1.53}$$

Ahora bien, como $b > 0$, usando las propiedades de convexidad de $M_2$ y (1.53)

$$\begin{aligned} M_2(u) &= M_2\left(\frac{(2b+1)u}{2b+1}\right) \leq \frac{M_2((2b+1)u)}{2b+1}, \\ M_1(u) &< [2b+1]M_2(u) \leq M_2((2b+1)u), \qquad (\text{para } u \geq \max\{u_0, u_1\}) \end{aligned}$$

lo cual nos garantiza que $M_1 \prec M_2$. La relación $M_2 \prec M_1$ de obtiene de forma similar. ♦

Sólo los valores de las funciones $p_1$ y $p_2$ para valores grandes del argumento juegan un papel importante en las condiciones del lema precedente. Aquí, como también en varios otros casos, al considerar la derivada por la derecha de $p$ de la $N$-función $M$, es importante disponer de una fórmula para la función $p$, sólo para los grandes valores de $u$.
En este sentido, vamos a hacer uso de la siguiente definición: una función $\varphi$ se llama la **parte principal** de la función $p$, si $\varphi(u)$ y $p(u)$ coinciden a grandes valores del argumento.

**Teorema 1.12** *Suponga que $N-$funciones*

$$M_1(u) := \int_0^{|u|} p_1(t)dt, \quad y \quad M_2(u) := \int_0^{|u|} p_2(t)dt,$$

*y las $N-$funciones*

$$N_1(u) := \int_0^{|u|} q_1(t)dt, \quad y \quad N_2(u) := \int_0^{|u|} q_2(t)dt,$$

*complementarías de las primeras dadas, respectivamente. Suponga, además que, existe un conjunto $F_1$ de medida completa tal que*

$$\lim_{\substack{v\to\infty \\ v\in F_1}} \frac{p_1[q_2(v)]}{v} = b > 0. \tag{1.54}$$

*Entonces $M_1 \sim M_2$.*

**Demostración.**
Presentamos la notación $q_2(v) = u$. Entonces, por (1.31) se tiene que

$$p_2(u) = p_2[q_2(v)] \geq v, \tag{1.55}$$

y por (1.32), obtenemos que

$$p_2(u - \epsilon) \leq v \tag{1.56}$$

para $\epsilon > 0$ arbitrario.

Sea $F$ el subconjunto de $F_1$ formado por los puntos donde $p_1$ y $p_2$ son continuos. Dado que una función monótona tiene a lo más un número contable de puntos de la discontinuidad, tenemos que $F$ es también un conjunto de medida completa.
Entonces, de (1.55) que

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} \leq \frac{p_1(u)}{v} = \frac{p_1[q_2(v)]}{v},$$

de lo que se deduce, en virtud de (1.54), que

$$\overline{\lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in F_1}}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} \leq b. \tag{1.57}$$

Se desprende de (1.56) que para todo $u \in F$

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{p_1(u)}{p_2(u-\epsilon)} \geq \frac{p_1(u)}{v} = \frac{p_1[q_2(v)]}{v}$$

de lo que se deduce, en virtud de 1.54, que

$$\lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in F}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} \geq b. \tag{1.58}$$

Se desprende de las desigualdades (1.57) y (1.58) que

$$\lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in F}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} = b.$$

La última desigualdad y Lema (1.11) implica que $M_1 \sim M_2$. ♦

## 1.7. La condición $\Delta_2$.

**Definición 1.10** *Diremos que la $N-$función $M$ satisface la condición $\Delta_2$ para valores grandes de $u$, o cerca de infinito, si existes constantes $K > 0$ y $u_0 \geq 0$ tales que*

$$M(2u) \leq KM(u) \qquad (u \geq u_0). \tag{1.59}$$

**Observación 1.1** *Es fácil ver que $K > 2$ en la medida en que, en virtud de (1.24), $M(2u) > 2M(u)$ para $u \neq 0$.*

Si una $N-$función satisface la condición $\Delta_2$ es equivalente a satisfacer la desigualdad

$$M(\lambda u) \leq K(\lambda)M(u) \tag{1.60}$$

para valores grandes $u$, donde $\lambda$ puede ser cualquier número mayor a la unidad.
De hecho, sea $2^n \geq \lambda$. Entonces de (1.59), con $u \geq u_0$, se tiene que

$$M(\lambda u) \leq M(2^n u) \leq K^n M(u) = K(\lambda)M(u).$$

Por el contrario, si $2 \leq \lambda^n$, entonces se sigue de (1.60) que

$$M(2u) \leq M(\lambda^n u) \leq K^n(\lambda)M(u).$$

**Ejemplo 1.6** *La $N-$función $M(u) := a|u|^\alpha$ $(\alpha > 1)$ es un ejemplo de las $N-$funciones que satisfacen la condición $\Delta_2$ para todos los valores de $u$ puesto que*

$$M(2u) = a|2u|^\alpha = a2^\alpha|u|^\alpha = 2^\alpha M(u).$$

*Otro ejemplo típico de $N-$funciones que satisfacen la condición $\Delta_2$ es $M(t) := (1+|t|)log(1+|t|) - |t|$.*

**Ejemplo 1.7** *Por otra parte, las $N-$funciones $\varphi(t) := e^{|t|} - |t| - 1$ y $\phi(t) := e^{|t|^p} - 1$ con $p > 1$ no satisfacen la condición de $\Delta_2$.*

**Observación 1.2** *Es fácil demostrar que si $M$ satisface la condición $\Delta_2$ entonces cualquier $N-$función equivalente a $M$, también cumple esta condición.*

Es útil tener una herramienta a mano que nos permita determinar si una $N$-función dada satisface la condición $\Delta_2$, la misma está dada en el siguiente teorema.

**Teorema 1.13** *Una condición necesaria y suficiente para que una $N-$función $M$ satisfaga la condición $\Delta_2$ es que existan constantes $\alpha$ y $u_0$ tales que, para $u \geq u_0$,*

$$\frac{up(u)}{M(u)} < \alpha, \tag{1.61}$$

*donde $p$ es la derivada por la derecha de $M$.*

**Demostración.**
Supongamos que se satisface (1.61), entonces

$$\begin{aligned} \frac{p(t)}{M(t)} &< \frac{\alpha}{t} \\ \int_u^{2u} \frac{p(t)}{M(t)}dt &< \int_u^{2u} \frac{\alpha}{t}dt = \alpha Ln(2). \end{aligned}$$

O equivalentemente para $u \geq u_0$ se tiene que $\dfrac{M(2u)}{M(u)} < 2^\alpha$. Quedando demostrada la suficiencia de la condición (1.61).
Si suponemos existen constantes $K$ y $u_0$ de manera que $M(2u) \leq KM(u)$ para $u \geq u_0$. Entonces,

$$KM(u) \geq M(2u) = \int_0^{2u} p(t)dt > \int_u^{2u} p(t)dt \geq up(u),$$

con lo cual se obtiene (1.61) para $u \geq u_0$ y $\alpha = K$. ♦

En lo que sigue, si $M$ satisface la condición $\Delta_2$ escribiremos $M \in \Delta_2$.

**Teorema 1.14** *Las siguientes son equivalencias.*

*(1)* $M \in \Delta_2$,

*(2) Existen* $l > 1$, $u_0 > 0$ *y* $K > 1$ *tales que*

$$M(lu) \leq KM(u) \qquad (u > u_0), \tag{1.62}$$

*(3) Para cualquier* $l_1 > 1$ *y* $u_1 > 0$, *existen* $K' > 0$ *tal que*

$$M(l_1 u) \leq K'M(u) \qquad (u > u_1), \tag{1.63}$$

*(4) Para cualquier* $l_2 > 1$ *y* $u_2 > 0$ *existe* $\epsilon \in (0,1)$ *tal que*

$$M((1+\epsilon)u) \leq l_2 M(u) \qquad (u > u_2), \tag{1.64}$$

*(5) Para cada* $l_3 > 1$, *existen* $v_0 > 0$ *y* $\delta > 0$ *tal que*

$$N(l_3 v) \geq (l_2 + \delta)N(v) \qquad (v > v_0), \tag{1.65}$$

*(6) Existen* $l_3 > 1$, $v_0 > 0$ *y* $\delta > 0$ *tal que (1.65) se cumple.*

**Demostración.**

*(1)⟹(2)* Sea $l > 1$, entonces la función $\psi(x) := 2^x$ es creciente, luego $\psi(log_2 l) = l$. Sea $n$ un entero tal que $n \geq log_l 2$, para el cual se tiene que $2^n > l$. Entonces, como $M \in \Delta_2$ existen constantes $K$ y $u_0 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} M(2u) &\leq KM(u) && (u > u_0), \\ M(lu) &\leq M(2^n u) \leq K^n M(u) && (u > u_0). \end{aligned}$$

*(2)⟹(3)* Sean $l_1 > 1$ y $u_1 > 0$. Usando la monotonía de la función exponencial $l^x$ podemos elegir un entero $n$ de forma que $l^n > l_1$. Por la (1.62)

$$M(l_1 u) \leq M(l^n u) \leq K^n M(u) \qquad (u > u_0).$$

Así, $u_0$ y $K'$ son los candidatos a satisfacer la desigualdad deseada. Sin embargo, debemos considerar el caso en que $u_1 < u_0$, entonces elegimos

$$K' = \text{máx}\left\{K^n, \text{máx}\left\{\frac{M(l_1 u)}{M(u)} : u \in [u_1, u_0]\right\}\right\}.$$

*(3)*$\Longrightarrow$*(4)* Sean $l_1 > 1$, $u_2 > 0$.

Por *(3)* existe $K_1' > 0$ tal que

$$M(l_2 u) \leq K_1' M(u) \qquad (u > u_2). \tag{1.66}$$

y $K_2' > 0$ tal que

$$M(2u) \leq K_2' M(u) \qquad (u > u_2). \tag{1.67}$$

Consideramos $K' = \text{mín}\{K_1', K_2'\}$ Note que, dado que $l_2 > 1$

$$M(u) = M\left(\frac{l_2 u}{l_2}\right) < \frac{1}{l_2} M(l_2 u) < \frac{1}{l_2} K_1' M(u) \leq \frac{1}{l_2} K' M(u).$$

Así, de esta desigualdad y (1.67) obtenemos que $K' > l_2$.

Sea $\epsilon := \dfrac{l_2 - 1}{K' - 1}$. Entonces, $\epsilon \in (0,1)$ y la convexidad de $M$ nos garantiza que

$$\begin{aligned}
M[(1+\epsilon)u] &= M[(1-\epsilon)u + \epsilon(2u)] \\
&\leq (1-\epsilon)M(u) + \epsilon M(2u)] \\
&\leq (1-\epsilon)M(u) + \epsilon K' M(u)] \\
&= [(1-\epsilon) + K']M(u) \\
&= l_2 M(u).
\end{aligned}$$

*(4)*$\Longrightarrow$*(5)* Sea $l_3 > 1$. Para $v_0 > 0$existe $\epsilon \in (0,1)$ tal que

$$M[(1+\epsilon)u] \leq l_3 M(u) \qquad u \geq q(v_0)$$

Hacemos

$$M_1(u) = \frac{1}{l_3} M((1+\epsilon)u),$$

de lo cual obtenemos, haciendo uso del ejemplo (1.3) se obtiene que

$$N_1(v) = \frac{1}{l_3} N\left(\frac{v l_3}{1+\epsilon}\right).$$

Ahora, como $M_1(u) \leq M(u)$ para $u \geq q(v_0)$, por el ejemplo (1.4) se tiene que $N(v) \leq N_1(v)$ para $v \geq q^{-1}(q(v_0))$, es decir,

$$N(v) \leq \frac{1}{l_3} N\left(\frac{v l_3}{1+\epsilon}\right) \qquad v \geq v_0.$$

De lo cual obtendremos lo deseado mediante la siguiente cadena de desigualdades.

$$l_3N(v) \leq N\left(\frac{vl_3}{1+\epsilon}\right) \leq \left(\frac{1}{1+\epsilon}\right) N(l_3v) \qquad v \geq v_0.$$

Esto es equivalente a

$$N(l_3v) \geq (1+\epsilon)l_3N(v).$$

Así, si hacemos $\delta = \epsilon l_3$ se obtiene (1.65).

*(5)*$\Longrightarrow$*(6)* Es trivial.

*(6)*$\Longrightarrow$*(1)* Hagamos $\beta := \dfrac{l_3+\delta}{l_3}$. Entonces de (1.65) se tiene que

$$\begin{aligned} N(l_3v) &\geq (l_3+\delta)N(v) & (v \geq v_0) \\ \frac{1}{l_3}N(l_3v) &\geq \frac{l_3\delta}{l_3}N(v) & (v \geq v_0) \\ \frac{1}{\beta l_3}N(l_3v) &\geq N(v) & (v \geq v_0). \end{aligned}$$

Podemos hallar un entero $n$ tal que $\beta^n > 2$, si hacemos

$$N_1(v) := \frac{1}{\beta l_3}N(l_3v),$$

obtenemos que

$$M_1(u) = \frac{1}{\beta l_3}N(\beta u).$$

Además, como

$$N(v) \leq N_1(v) \quad \text{para} \quad v \geq v_0.$$

Entonces $M_1(u) \leq M(u)$, esto es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta l_3}M(u\beta) &\leq M(u) \\ M(u\beta) &\leq \beta l_3 M(u), \end{aligned}$$

así,

$$M(2u) < M(\beta^n u) \quad \leq \quad \beta^n l_3^n M(u).$$

♦

**Observación 1.3** *Sea $v = 0$ en (1.6). La condición* (6) *en el teorema 1.14 demuestra que $N-$funciones satisfacen la condición $\nabla_2$.*

En la teoría de geometría de espacios de Orlicz, la rotundidad del espacio está relacionada a a convexidad de la $N-$función que lo genera. En general una $N$-función puede no ser estrictamente convexa, y aunque sea, puede no ser uniformemente convexa. Sin embargo, todavía tenemos lo siguiente:

**Lema 1.15** *Sean $M$ una $N-$función y $\epsilon > 0$, existe una $N-$función $M_1$ estrictamente convexa tal que*

$$M(u) \leq M_1(u) \leq (1+\epsilon)M(u) \qquad (u \in \mathbb{R}).$$

**Demostración.**
Si $M$ es afín sobre un intervalo $[a, b]$ y no lo es bien sea en $[a-\delta, b]$ ó $[a, b+\delta]$ para cada $\delta > 0$, entonces llamaremos a $[a, b]$ intervalo estructural afín de $M$.
Sean $\{[a_k, b_k]\}_k$ todos los intervalos estructurales afín de $M$. Entonces $p$ es una constante sobre cada $[a_k, b_k)$, definimos una función estrictamente creciente $p_1(t)$ con $p(t) \leq p_1(t) \leq (1+\epsilon)p(t)$. Consideremos $[a_1, b_1]$. Si $p(b_1) > p(a_1)$, entonces hacemos $b_1' := b_1$ y $\beta_1 = \min\{p(b_1), (1+\epsilon)p(a_1)\}$. Si $p(b_1) = p(a_1)$, entonces elegimos $b_1' > b_1$ de manera que $p(b_1') < (1+\epsilon)p(a_1)$. Ya que $p$ es continua en $b_1$ en este caso, tal $b_1'$ debe existir. Sobre le intervalo $[a_1, b_10)$, definimos $p_1(t)$ como función afín y $p_1(a_1) = p(a_1)$, $\lim_{t \to b_1'^-} p_1(t) = \beta_1$.
En lo siguiente, elegimos el primer intervalo $[a_{k(1)}, b_{k(1)}]$ en $\{[a_k, b_k]\}_k$ tal que $[a_{k(1)}, b_{k(1)}] \setminus [a_1, b_1'] \neq \emptyset$ y definimos $p_1(t)$ sobre $[a_{k(1)}, b_{k(1)}')$ por la misma vía pero $b_{k(1)} \leq b_{k(1)}' \leq a_1$ si $b_k' \leq a_1$. Así, por inducción, $p_1(t)$ es definida sobre $\bigcup_t [a_k, b_k')$.
Finalmente, hacemos $p_1(t) = p(t)$ en cualquier otro caso. Completamos la demostración haciendo $M_1(u) := \int_0^{|u|} p_1(t)dt$. ♦

**Lema 1.16** *Para cualquier $N-$función $M$ y $\epsilon > 0$, existe otra $N-$función $M_1$ tal que*

$$M(u) \leq M_1(u) \leq (1+\epsilon)M(u)$$

*y que su derivada por la derecha $p_1$ es continua. Además, si $M$ es estrictamente convexa, entonces también lo es $M_1$.*

**Demostración.**
Tomemos $\epsilon_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \leq \epsilon$. Ya que $p$ es monótona, sus puntos de discontinuidad son a lo mas

numerables, digamos $(b_n)$. Como $p$ está definida sólo sobre $[0, +\infty)$, $p$ es continua a la derecha y $p(0) = 0$, podemos ver que cada $b_n$ es positivo.
Sea $b_1' := b_1$, luego elegimos $a_1 \in (0, b_1')$ tal que

$$(b_1' - a_1)p(b_1') < \epsilon_1 M(b_1')$$

y definimos $p_1$ sobre $[a_1, b_1']$ afín y

$$p_1(a_1) = p(a_1), \qquad p_1(b_1') = p(b_1').$$

Sea $b_2'$ el primer punto $b_2' \in \{b_n\} - (a_1, b_1']$ y elegimos $a_2 \in (0, b_2) - [a_1, b_1']$ tal que

$$(b_2' - a_2)p(b_2') < \epsilon_2 M(b_2').$$

Entonces definimos $p_1$ sobre $[a_2, b_2']$ como afín y

$$p_1(a_2) = p(a_2), \qquad p_1(b_2') = p(b_2').$$

Así, haciendo uso de la inducción podemos definir $p_1$ sobre $\bigcup\limits_k [a_k, b_k']$. Para los demás $t \geq 0$, hacemos $p_1(t) = p(t)$.
Claramente, $p_1(t) \geq p(t)$, es continua y estrictamente creciente si lo es $p$.
Además,

$$\begin{aligned}
0 \leq M_1(u) - M(u) &= \int_0^{|u|} [p_1(t) - p(t)]dt \\
&= \sum_{b_k' \leq |u|} \int_{a_k}^{b_k'} [p_1(t) - p(t)]dt \\
&\leq \sum_{b_k' \leq |u|} (b_k' - a_k)p_1(b_1')p_1(b_1') \\
&\leq \sum_{b_k' \leq |u|} \epsilon_k M(b_k') \\
&\leq \epsilon M(u).
\end{aligned}$$

♦

De los lemas 1.15 y 1.16, obtenemos el siguiente teorema

**Teorema 1.17** *Para cualquier $N-$función $M$ y $\epsilon > 0$, existe una $N-$función $M_1$ tal que*

$$M(u) \leq M_1(u) \leq (1 + \epsilon)M(u) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

*y ambas $M_1$ y su complementaria son estrictamente convexas.*

## 1.8. La condición $\nabla_2$.

Dado que las complementarías de una $N-$función, también lo es, surge como inquietud natural la siguiente pregunta: Dada una $N-$función $M$, ¿cómo se puede determinar si la $N-$función $N$, complementaria a $M$ satisface la condición $\Delta_2$?
La respuesta a esta inquietud se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 1.18** *Una condición necesaria y suficiente para que la $N$-función complementaría $N$ de $M$ satisfaga la condición $\Delta_2$ es que existan constantes $L > 1$ y $v_0 \geq 0$ tales que*

$$N(v) \leq \frac{1}{2L} N(Lu) \qquad (v \geq v_0). \tag{1.68}$$

**Demostración.**
Supongamos se satisface la condición (1.68). Hacemos $N1(v) := \dfrac{N(Lu)}{2L}$. En virtud de la ecuación (1.37), la $N-$ función complementaría $M_1$ de $N_1$ está definida por $M_1(u) := \dfrac{M(2u)}{2L}$. Entonces, la desigualdad (1.68) puede re-escribirse de forma $N(v) \leq N_1(v)$. De ello se deduce, en virtud del Ejemplo 1.4, que $M_1(u) \leq M(u)$ ó, de forma equivalente, que $M(2u) \leq 2LM(u)$ para valores grandes del argumento. De forma similar se demuestra que (1.59) implica (1.68). ♦

En el caso en que la $N-$función complementaría de $M$ satisfaga la condición $\Delta_2$ decimos que $M$ satisface la condición $\nabla_2$ y escribimos $M \in \nabla_2$.

**Observación 1.4** *Una $N-$función satisface la condición $\Delta_2$ si su derivada es convexa hacia abajo para valores grandes del argumento.Además, una función es convexa hacia abajo si la función inversa es convexa. Así, la $N-$ función $M$ satisface la condición $\Delta_2$ si la $N$-función complementaría $N$ tiene derivada convexa.*

Capítulo 2

# Espacios de Orlicz.

En este capítulo se presenta el espacio de Banach de funciones medibles introducido por W. Orlicz en [19] los cuales tienen ricas estructuras topológica y geométrica, además de poseer propiedades peculiares que no poseen los espacios clásicos $L^p$.
Estos espacios son una generalización de los espacios de Lebesgue $L^p$ cuando el papel que desempeña la función convexa $t^p$ es reemplazado por una función convexa general $M$.
Estos espacios son llamados de esta forma en honor a Władysław Orlicz.
De ahora en adelante, siempre por denotaremos por $(\Omega, \Sigma, \mu)$ el espacio de Euclidiano con la medida de Lebesgue con $0 < \mu(\Omega) < \infty$, y por $M$, $N$ un par de funciones complementarias una de la otra.

## 2.1. Clase de Orlicz.

Sea $M$ una $N$-función. La **clase de Orlicz** $K_M(\Omega)$ es el conjunto de toda las clases de funciones medibles de valores reales $u$, definidas sobre $\Omega$, para las cuales

$$\varrho_M(u) := \int_\Omega M[u(x)]dx < \infty.$$

En este sentido, las funciones que se diferencian sólo en un conjunto de medida cero no se consideran distintas.

**Observación 2.1** *Todas las funciones acotadas, pero no todas las funciones sumables,*[1] *pertenecen a la clase $K_M$. Es fácil ver que toda función en la clase $K_M$ es integrable.*

**Afirmación 2.1** *La clase de Orlicz $K_M(\Omega)$ siempre es un conjunto convexo, gracias a la convexidad de $M$, dado que*

$$\int_\Omega M(\lambda u + (1-\lambda)v)(x)dx \quad \leq \quad \int_\Omega [\lambda M(u(x)) + (1-\lambda)M(v(x))]dx.$$

*Sin embargo, esta clase no tiene por que ser siempre un espacio vectorial, puesto que pueden existir $u \in K_M(\Omega)$ y $\lambda > 0$ de forma que $\lambda u \notin K_M(\Omega)$.*

**Definición 2.1** *Diremos que el par $(M, \Omega)$, con $M$ y $\Omega$ como antes, es $\Delta-$**regular** si ocurre una de las siguientes condiciones:*

*(a) $M$ satisface la condición $\Delta_2$ globalmente, o*

[1] Una función medible se dice *sumable* si la integral de Lebesgue de su valor absoluto existe y es finita.

*(b) $M$ satisface la condición $\Delta_2$ cerca de infinito y $\Omega$ tiene volumen finito.*

**Lema 2.1** *La clase de Orlicz $K_M(\Omega)$ es un espacio vectorial si y sólo si $(M,\Omega)$ es $\Delta-$regular.*

**Demostración.**
Supongamos que $K_M(\Omega)$ es un espacio vectorial y que $(M,\Omega)$ no es $\Delta-$regular. Sea $t_0 > 0$. Para cada $n > 0$ existe $t_n$ de manera que

(i) $M(2t_n) \geq 2^n M(t_n)$, y

(ii) $t_n \geq t_0 > 0$ si $\mu(\Omega) < \infty$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t_n \neq t_m$ si $m \neq n$.
Consideramos $\Omega_n$ la sucesión de subconjuntos disjuntos de $\Omega$ de manera que

$$\mu\,\Omega_n := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n M(t_n)} & \text{si} \quad \mu(\Omega) = \infty \\ \dfrac{M(t_0)\mu(\Omega)}{2^n M(t_n)} & \text{si} \quad \mu(\Omega) < \infty. \end{cases}$$

Sea

$$u(x) := \begin{cases} t_n & \text{si} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n. \end{cases}$$

Así,

$$M(u(x)) = \begin{cases} M(t_n) & \text{si} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n. \end{cases}$$

En este caso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M(u(x))dx &= \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n} A(t_n)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M(t_n)dx \\ &= M(t_n)\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} dx \\ &= M(t_n)\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\Omega_n\right) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} M(t_n).\dfrac{1}{2^n M(t_n)} & \text{si} \quad \mu(\Omega) = \infty \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} M(t_n)\dfrac{M(t_0)\mu(\Omega)}{2^n M(t_n)} & \text{si} \quad \mu(\Omega) < \infty. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mu(\Omega) = \infty \\ M(t_0)\mu(\Omega) & \text{si} \quad \mu(\Omega) < \infty. \end{cases}$$

Esto nos garantiza que $u \in K_M(\Omega)$.
Sin embargo,

$$A(2u(x)) = \begin{cases} M(2t_n) & \text{si} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n \end{cases}$$

y $A(2t_n) \geq 2^n M(t_n)$.
En cuyo caso,

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(2u(x))dx &= \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n} A(2t_n)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M(2t_n)\mu(\Omega_n) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n M(t_n)\mu(\Omega_n) \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n M(t_n).\dfrac{1}{2^n M(t_n)} & \text{si} \quad \mu(\Omega) = \infty \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n M(t_n)\dfrac{M(t_0)\mu(\Omega)}{2^n M(t_n)} & \text{si} \quad \mu(\Omega) < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta última integral no es finita, es decir, $2u(x) \notin K_M(\Omega)$, lo cual contradice el supuesto inicial de que la clase de Orlicz es un espacio vectorial.

Supongamos ahora que $(M, \Omega)$ es $\Delta-$regular. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $u \in K_M(\Omega)$. La convexidad de $M$ nos garantiza que si $|\lambda| \leq 1$ entonces $\lambda u \in K_M(\Omega)$, dado que

$$\begin{aligned} M(|\lambda u(x)|) &\leq |\lambda| M(|u(x)|) \\ \int_\Omega M(|\lambda u(x)|)dx &\leq |\lambda| \int_\Omega M(|u(x)|)dx \leq \int_\Omega M(|u(x)|)dx < \infty. \end{aligned}$$

En el caso en que $|\lambda| > 1$, elegimos constantes $K(|\lambda|)$ y $t_0 > 0$ tales que, para $u \in K_M(\Omega)$,

$$\begin{aligned} M(|\lambda u(x)|) &\leq K(|\lambda|) M(|u(x)|) \\ \int_\Omega M(|\lambda u(x)|) dx &\leq K(|\lambda|) \int_\Omega M(|u(x)|) dx < \infty. \end{aligned}$$

Con lo cual se garantiza que $\lambda u \in K_M(\Omega)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
Y en cuanto a la clausura con respecto a la suma, se sigue de forma inmediata de la afirmación 2.1 haciendo, para $u \in K_M(\Omega)$ $u(x) = \lambda u(x) + (1-\lambda) u(x)$. ♦

En nuestro caso, sólo consideremos la parte (b) de la definición 2.1 dado que estamos suponiendo que $\Omega$ tiene volumen finito.
Una intima relación entre el conocido espacio de Lebesgue $L^1$ y la clase de Orlicz está dada por la siguiente proposición.

**Proposición 2.1** *Toda función acotada pertenece a toda clase de Orlicz y toda función $u \in L^1(\Omega)$ pertenece a alguna clase de Orlicz.*

**Demostración.**
Si $M$ es un $N-$función y $u$ es una función acotada sobre $\Omega$, existe una constante $K > 0$ de manera que $|u(x)| \leq K$, en ese caso,

$$\int_\Omega M(|u(x)|) dx \leq \int_\Omega M(K) dx = M(K) \mu(\Omega) < \infty.$$

Lo cual implica que $u \in K_M(\Omega)$. Como esto es válido para cualquier $N-$función, queda demostrada la primera parte de la proposición.

Ahora, cuando $u \in L^1(\Omega)$ hacemos

$$\Omega_n := \{x \in \Omega : n-1 \leq |u(x)| < n\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \mu(\Omega_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{\Omega_n} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} (n-1) dx + \int_{\Omega_n} dx \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |u(x)| dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} dx \\ &= \int_\Omega |u(x)| dx + \int_\Omega dx < \infty. \end{aligned}$$

Es bien conocido, que podemos elegir una sucesión de números reales creciente $\{\alpha_k\}$ de manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n n\mu(\Omega_n) < \infty.$$

Establecemos entonces,

$$p(x) := \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \alpha_n & \text{si} \quad n \leq x < n+1 \qquad (n = 1, 2, ...) \end{cases}$$

La función $p$ así definida satisface las condiciones necesarias para que

$$M(u) := \int_0^{|u|} p(x)dx$$

sea una $N-$función.
Ahora bien,

$$M(n) = \int_0^n p(x)dx \leq n\,\alpha_n,$$

con lo cual se garantiza que $u \in K_M(\Omega)$ dado que

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(|u(x)|)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M(|u(x)|)dx \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M(n)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\Omega_n)M(n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\Omega_n)n\alpha_n < \infty. \end{aligned}$$

♦

Entonces hemos demostrado $L^1$ es la unión de todas las clases de Orlicz.

### 2.1.1. Comparación entre clases de Orlicz.

Las clases de Orlicz $K_{M_1}$ y $K_{M_2}$ determinadas por $N-$funciones distintas son, generalmente, distintas. Sin embargo, en algunos caso podemos compararlas unas con otras, como es el caso que expresa el siguiente teorema.

**Teorema 2.2** *La inclusión*

$$K_{M_1} \subseteq K_{M_2} \tag{2.1}$$

*se cumple, si y sólo si, existen constantes positivas $u_0$ y $A$ de manera que*

$$M_2(u) \leq AM_1(u) \qquad (u \geq u_0). \tag{2.2}$$

**Demostración.**
Supongamos que no se cumple (2.2), entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $u_n$ tal que

$$M_2(u_n) > 2^n M_1(u_n) \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{2.3}$$

Dividimos $\Omega$ en subconjuntos disjuntos $\Omega_n$ tales que

$$\mu\,\Omega_n = \frac{M_1(u_1)\mu\,\Omega}{2^n M_1(u_n)} \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Definimos ahora,

$$u(x) := \begin{cases} u_n & \text{si} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \bigcup\limits_n \Omega_n. \end{cases}$$

La función $u \in K_{M_1}$ dado que

$$\begin{aligned} \int_\Omega M_1(u(x))dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M_1(u(x))dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M_1(u_n)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\,(\Omega_n) M_1(u_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(u_1)\mu\,\Omega}{2^n M_1(u_n)} M_1(u_n) \\ &= M_1(u_1)\mu\,\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

Sin embargo, $u \notin K_{M_2}$ dado que, en virtud (2.3) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} M_2(|u(x)|)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M_2(|u(x)|)dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M_2(u_n)dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mu\,(\Omega_n)M_2(u_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_1(u_1)\mu\,\Omega}{2^n M_1(u_n)}M_2(u_n) \\
&> \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_1(u_1)\mu\,\Omega}{2^n M_1(u_n)}2^n M_1(u_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}M_1(u_1)\mu\,\Omega,
\end{aligned}
$$

y esta última diverge. ♦

Como consecuencia inmediata de este teorema tenemos que dos $N-$funciones $M_1$ y $M_2$ determinan una misma clase de Orlicz si y sólo si, existen constantes $A, B$ y $u_0$ tales que

$$AM_2(u) \leq M_1(u) \leq BM_2(u) \qquad (u \geq u_0).$$

### 2.1.2. Cuando $M$ no satisface la condición $\Delta_2$.

Detengamos ahora un poco para examinar el caso en que la $N-$función $M$ no satisface la condición $\Delta_2$.

Sea $u \in K_M$. La totalidad de las funciones $u_\beta(x) = \beta u(x)$ $(0 \leq \beta < \infty)$ es usualmente llamado **rayo** que pasa a través de $u$.

Si la función $u$ es acotada, entonces es claro que el rayo completo $u_\beta$ pertenece a la clase $K_M$.

En virtud del Lema 2.1 existen funciones para las que parte de los "rayos" pertenece a $K_M(\Omega)$, sin embargo no todo el rayo pertenece a esta clase.

Denotemos por $\beta_0$ el número tal que $\beta u \in K_M(\Omega)$ para $\beta < \beta_0$ y $\beta u \notin K_M(\Omega)$ para $\beta > \beta_0$.

La pregunta obligatoria es: ¿ $\beta_0 u \in K_M(\Omega)$ o no ?. La respuesta, ambos casos pueden ocurrir, veamos.

Suponga que la $N-$función $M$ no satisface la condición $\Delta_2$ y $\mu\,(\Omega) < \infty$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n$ tal que

$$M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right] > 2^n M(u_n) \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{2.4}$$

Sean $\Omega_n$ conjuntos disjuntos de $\Omega$ tales que

$$\mu(\Omega_n) = \frac{\mu(\Omega)}{2^n M(u_n)} \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{2.5}$$

Definimos ahora la función

$$u_*(x) := \begin{cases} u_n & \text{si} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n. \end{cases}$$

La función $u_* \in K_M(\Omega)$ puesto que

$$\begin{aligned} \int_\Omega M[u_*(x)]dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M[u_*(x)]dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M[u_n]dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M[u_n]\mu(\Omega_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M[u_n] \frac{\mu(\Omega)}{2^n M(u_n)} \\ &= \mu(\Omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $\beta < 1$ se tiene que

$$M[\beta u_*(x)] \leq M[u_*(x)],$$

por lo tanto, $\beta u_* \in K_M(\Omega)$ cuando $\beta < 1$. Veamos que no sucede lo mismo si $\beta > 1$.
En efecto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \dfrac{1}{n} < \beta$ para $n > n_0$. Entonces, en virtud de (2.4) y (2.5) se tiene que, para $n > n_0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} M[\beta u_*(x)]dx &= \int_{\Omega_n} M[\beta u_n]dx \\ &= \mu(\Omega_n) M[\beta u_n] \\ &> \mu(\Omega_n) M\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n\right] \\ &> \frac{\mu(\Omega)}{2^n M(u_n)} 2^n M(u_n) \\ &= \mu(\Omega). \end{aligned}$$

De lo cual se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} M[\beta u_*(x)]dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M[\beta u_*(x)]dx\\ &\geq \sum_{n>n_0}\int_{\Omega_n} M[\beta u_*(x)]dx\\ &> \sum_{n>n_0}\mu\,(\Omega),\end{aligned}$$

la cual diverge.

Ahora construimos una función $u_{**}$ tal que $\beta u_{**}\in K_M$ para $\beta<1$ pero $\beta u_{**}\notin K_M$ para $\beta\geq 1$. Sea

$$u_{**}(x) := \begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n & \text{si} \quad x\in\Omega_n\\ \quad 0 & \text{si} \quad x\notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n.\end{cases}$$

En virtud de (2.4) y (2.5), se tiene para $\beta\geq 1$, que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} M\left[\beta u_{**}(x)\right]dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M\left[\beta u_{**}(x)\right]dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M\left[\beta\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]dx\\ &> \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} 2^n M(u_n)dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}2^n M(u_n)\mu\,(\Omega_n)dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}2^n M(u_n)\frac{\mu\,(\Omega)}{2^n M(u_n)}dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu\,(\Omega),\end{aligned}$$

esta última diverge, cumpliendo así nuestro objetivo de demostrar que $\beta u_{**}\notin K_M$ para $\beta\geq 1$.

Supongamos ahora que $\beta < 1$, existe $n_1$ tal que $1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{\beta}$ para todo $n > n_1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n} M[\beta u_{**}(x)]dx &= \int_{\Omega_n} M\left[\beta\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]dx \\
&= \mu(\Omega_n)M\left[\beta\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right] \\
&< \mu(\Omega_n)M(u_n) \\
&> \frac{\mu(\Omega)}{2^n M(u_n)}M(u_n) \\
&= \frac{\mu(\Omega)}{2^n}.
\end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} M[\beta u_{**}(x)]dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M[\beta u_{**}(x)]dx \\
&< \sum_{n>n_0}\frac{\mu(\Omega)}{2^n} < \infty.
\end{aligned}$$

Así, $\beta u_{**} \in K_M$ para $\beta < 1$, como deseamos.

## 2.2. Espacios de Orlicz.

Independientemente de que la clase de Orlicz sea o no un espacio vectorial, podemos definir el espacio de Orlicz $L_M(\Omega)$ como se muestra a continuación.
Si $M$ y $N$ son $N-$funciones complementarias entre sí. Nosotros denotaremos por $L_M(\Omega)$ al espacio de todas las funciones $u$ que satisfacen la condición

$$(u,v) := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx < \infty$$

para todo $v \in L_N$.
En este sentido, las funciones que se diferencian sólo en un conjunto de medida cero no se consideran distintas, al igual que en el caso de la definición de Orlicz clases.
Se sigue inmediatamente de la definición de $L_M$ que es un conjunto lineal. En virtud de la desigualdad de Young (1.33), para todo par de funciones $u \in L_M$, $v \in L_N$, se tiene que

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \leq \int_{\Omega}[M(u(x)) + N(v(x))]dx = \varrho_M(u) + \varrho_N(v), \tag{2.6}$$

de lo que se deduce que $K_M(\Omega) \subseteq L_M(\Omega)$.

**Teorema 2.3** *Suponga que* $u \in L_M(\Omega)$*. Entonces*

$$\sup_{\varrho_N(v)\le 1} |(u,v)| = \sup_{\varrho_N(v)\le 1} \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| < \infty.$$

**Demostración.**
Supongamos que la afirmación contenida en el teorema no es cierto. Entonces podemos elegir $u_0 \in L_M(\Omega)$ de manera que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\varrho_N(v_k) \le 1 \quad \text{y} \quad \left| \int_\Omega u_0(x)v_k(x) \right| > 2^k. \tag{2.7}$$

Consideramos la sucesión creciente de funciones

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}|v_k(x)|, \qquad (n = 1, 2, ...).$$

En virtud a la convexidad de $N$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega N(g_n(x))dx &= \int_\Omega N\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}|v_k(x)|\right) dx \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_\Omega N(|v_k(x)|)dx \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1.
\end{aligned}$$

Además, en virtud de (2.7), tendremos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega u_0(x)g_n(x)dx \right| &= \left| \int_\Omega u_0(x) \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}|v_k(x)|\right] dx \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_\Omega u_0(x)|v_k(x)|dx \right| \\
&\ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_\Omega u_0(x)|v_k(x)|dx \\
&> \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} 2^k = n. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

La sucesión de funciones monótona $(g_n)$ converge en casi todas partes sobre $\Omega$ a la función $g(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|v_k(x)|$. Y dado que las sucesión $N[g_n(x)]$ también es creciente, haciendo paso al límite en la desigualdad $\int_\Omega N(g_n(x))dx < 1$, obtenemos, en virtud del teorema de Levi [2]

$$\int_\Omega N[g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega N[g_n(x)]dx \leq 1,$$

así $g \in L_N$.
La sucesión monótona de funciones sumables $u_0 g_n$ para $n = 1, 2, ...$ converge en casi todas partes a la función $u_0 g$. En virtud del mencionado teorema de Levi y (2.8)

$$\int_\Omega u_0(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_0(x)g(x)dx = \infty,$$

lo cual contradice la condición de que $u_0 \in L_M$. ♦

La afirmación demostrada nos permite introducir la norma de Orlicz.

## 2.3. Norma de Orlicz.

**Definición 2.2** *Para cada $u \in L_M$, se define la norma de Orlicz*

$$\|u\|^o_{L_M(\Omega)} := \sup \left\{ \left| \int_\Omega u(t)v(t)dt \right| : \varrho_N(v) \leq 1 \right\}.. \tag{2.9}$$

Se sigue de la definición que (2.9) satisface los axiomas:

1) $\|u\|^o_{L_M(\Omega)} = 0$ si y sólo si, $u(x) = 0$ casi siempre,

2) $\|\alpha u\|^o_{L_M(\Omega)} = |\alpha| \|u\|^o_{L_M(\Omega)}$;

3) $\|u + v\|^o_{L_M(\Omega)} \leq \|u\|^o_{L_M(\Omega)} + \|v\|^o_{L_M(\Omega)}$.

Es fácil verificar que $(L_M(\Omega), \|u\|^o_{L_M(\Omega)})$ y $(E_M(\Omega), \|u\|^o_{L_M(\Omega)})$ son espacios de Banach.

**Observación 2.2** *Entre las propiedades evidentes de la norma de Orlicz observemos que para $u, v \in L_M(\Omega)$ y $|u(x)| \leq |v(x)|$ casi en todas partes sobre $\Omega$, entonces $\|u\|^o_{L_M(\Omega)} \leq \|v\|^o_{L_M(\Omega)}$.*

**Ejemplo 2.1** *Consideremos el caso en que la $N-$función considerada sea $M(u) := \dfrac{|u|^\alpha}{\alpha}$ con $\alpha > 1$. La $N-$función complementaria de $M$ en este caso es $N(v) := \dfrac{|v|^\beta}{\beta}$ donde $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.*

[2] Teorema de Levi: Si una sucesión monótona creciente de funciones medibles $\varphi_1, \varphi_2, ...$ converge en casi todas partes sobre $\Omega$ a la función $\varphi$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)dx$.

Si $u_1 \in L_M(\Omega)$ y

$$\|u_1\|_\alpha := \left( \int_\Omega |u_1(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} = 1. \tag{2.10}$$

Entonces, haciendo uso de la desigualdad de Hölder, se tiene, para $v \in L_N(\Omega)$, arbitraría que satisfaga $\int_\Omega N(|v(x)|)dx \leq 1$, que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u_1(x)v(x)dx \right| &\leq \left( \int_\Omega |u_1(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left( \int_\Omega |v(x)|^\beta dx \right)^{1/\beta} \\ &= \left( \int_\Omega |u_1(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left( \beta \int_\Omega \frac{|v(x)|^\beta}{\beta} dx \right)^{1/\beta} \\ &\leq \beta^{1/\beta}. \end{aligned}$$

Así,

$$\|u_1\|^o_{L_M(\Omega)} = \sup \left\{ \int_\Omega u_1(x)v(x)dx : \varrho_N(v) \leq 1 \right\} \leq \beta^{1/\beta}. \tag{2.11}$$

Por otro lado, para la función $v_0(x) = \beta^{1/\beta} |u_1(x)|^{\alpha-1} Sgn\, u_1(x)$, la cual satisface la condición $\varrho_N(v_0) \leq 1$, tenemos que

$$\int_\Omega u_1(x)v_0(x)dx = \beta^{1/\beta} \int_\Omega |u_1(x)|^\alpha dx = \beta^{1/\beta}.$$

De esta igualdad y (2.11) obtenemos que $\|u_1\|^o_{L_M(\Omega)} = \beta^{1/\beta}$.

**Observación 2.3** *Suponga ahora que $u$ es una función arbitraría en $L_M(\Omega)$. La condición (2.10) la satisface la función $u_1(x) := \dfrac{u(x)}{\|u\|_\alpha}$. Entonces*

$$\|u_1\|^o_{L_M(\Omega)} = \beta^{1/\beta} \left( \int_\Omega |u(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha}. \tag{2.12}$$

*Así, la norma definida sobre el espacio de Orlicz $L_M(\Omega)$ difiere de la norma habitual en el espacio $L^\alpha(\Omega)$ por el producto de una constante.*

**Teorema 2.4** *El espacio de Orlicz $(L_M(\Omega), \|\cdot\|^o)$ un espacio de Banach.*

**Demostración.**
Supongamos que la sucesión de funciones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_M(\Omega)$ es una sucesión de Cauchy. Esto es,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|^o_{L_M(\Omega)} = 0, \tag{2.13}$$

lo cual significa que, para cada $v \in L_N(\Omega)$ arbitrario el cual satisface la condición $\varrho_N(v) \leq 1$, tendremos que

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_\Omega |u_n(x) - u_m(x)||v(x)|dx = 0.$$

De esto se sigue que la sucesión $u_n$ $(n = 1, 2, ...)$ converge en medida. Entonces, existe una subsucesión $u_{n_k}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}$ converge en casi todas partes a alguna función $u_0$.
Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. En virtud de (2.13), podemos elegir $\kappa(\epsilon)$ de manera que

$$\int_\Omega |u_{n_{k+p}} - u_{n_k}||v(x)|dx < \epsilon \qquad k + p > \kappa(\epsilon),$$

para todo $v \in L_N(\Omega)$ que satisfaga la condición $\varrho_N(v) \leq 1$.
Aplicando límite a ambos lados de esta última desigualdad, cuando $p \to \infty$, obtenemos, en virtud del teorema de Fatou, que

$$\underline{\lim_{p\to\infty}} \int_\Omega |u_{n_{k+p}} - u_{n_k}||v(x)|dx = \int_\Omega \underline{\lim_{p\to\infty}} |u_{n_{k+p}} - u_{n_k}||v(x)|dx < \epsilon \qquad k + p > \kappa(\epsilon),$$

$$\int_\Omega |u_0(x) - u_{n_k}(x)||v(x)|dx < \epsilon \qquad k + p > \kappa(\epsilon), \tag{2.14}$$

y todo $v \in L_N$ que satisface la condición $\varrho_N(v) \leq 1$. Se sigue de (2.14) que $u_0 - u_{n_k} \in L_M(\Omega)$. En consecuencias, también tenemos que $u_0 \in L_M(\Omega)$; y en segundo lugar, se desprende de (2.14) que

$$\|u_0 - u_{n_k}\|^o_{L_M(\Omega)} \leq \epsilon,$$

es significa que la subsucesión $u_{n_k}$ $(k = 1, 2, ...)$ converge en norma a $u_0$. Ya que $u_{n_k}$ $(k = 1, 2, ...)$ de $u_n$ entonces, la sucesión inicial converge a $u_0$. ♦

Como ya se ha comentado, la clase $K_M(\Omega)$ está contenida en el espacio de Orlicz $L_M(\Omega)$. A este respecto, en virtud de (2.6), para cualquier función $u \in L_M$, se tiene que

$$\|u\|^o_{L_M} = \sup_{\varrho_N(v)} |(u, v)| \leq \varrho_M(u) + 1. \tag{2.15}$$

**Lema 2.5** *Sea $p$ la derivada por la derecha de la $N-$función $M$. Suponga además que $u \in L_M(\Omega)$ y $\|u\|^o_{L_M} \leq 1$. Entonces la función $v_o(x) := p(|u(x)|)$ pertenece a $L_N$ y $\varrho_N(v_o) \leq 1$.*

**Demostración.**
Veamos primero que para cualquier función $v \in L_N$ se satisface

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq \begin{cases} \|u\|^o_{L_M} & \text{si} \quad \varrho_N(v) \leq 1 \\ \|u\|^o_{L_M}\varrho_N(v) & \text{si} \quad \varrho_N(v) > 1. \end{cases} \tag{2.16}$$

La primera desigualdad de (2.16) es obvia. Para obtener la segunda, nos damos cuenta se desprende de la ecuación (1.27) con $\varrho_N(v) > 1$ que

$$N\left[\frac{v(x)}{\varrho_N(v)}\right] \leq \frac{N[v(x)]}{\varrho_N(v)},$$

de modo que tendremos

$$\int_\Omega N\left[\frac{v(x)}{\varrho_N(v)}\right] dx \leq \int_\Omega \frac{N[v(x)]}{\varrho_N(v)} = \frac{1}{\varrho_N(v)} \int_\Omega N[v(x)] \frac{N[v(x)]}{\varrho_N(v)} = 1.$$

Por consiguiente

$$\left| \int_\Omega u(x) \frac{v(x)}{\varrho_N(v)} dx \right| \leq \|u\|^o_{L_M},$$

de lo cual se obtiene la segunda desigualdad en (2.16).
Supongamos ahora que $\|u\|^o_{L_M} \leq 1$. Definimos

$$u_n(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad |u(x)| \leq n \\ 0 & \text{si} \quad |u(x)| > n. \end{cases}$$

Dado que las funciones $u_n$ son acotadas y $p$ creciente, tendremos que $p(|u_n|)$ es acotada y por lo tanto $p(|u_n|) \in L_N$.

Supongamos que la afirmación en el lema no se cumple. Entonces podemos hallar $n_o$ tal que

$$\int_\Omega N[p(|u_{n_o}(x)|)] dx > 1.$$

Haciendo uso de la igualdad (1.35), tendremos que

$$\begin{aligned} N[p(|u_{n_o}(x)|)] &< M[u_{n_o}(x)] + N[p(|u_{n_o}(x)|)] \\ &= M[u_{n_o}(x)] + |u_{n_o}(x)| p(|u_{n_o}(x)|) - M[u_{n_o}(x)] \\ &= |u_{n_o}(x)| p(|u_{n_o}(x)|). \end{aligned}$$

Integrando en esta desigualdad y haciendo uso de (2.16), obtendremos que

$$\begin{aligned} 1 < \int_\Omega N[p(|u_{n_o}(x)|)] dx &< \int_\Omega |u_{n_o}(x)| p(|u_{n_o}(x)|) dx \\ &\leq \|u_{n_o}\|^o_{L_M(\Omega)} \int_\Omega N[p(|u_{n_o}(x)|)] dx, \end{aligned}$$

lo cual implica que $1 < \|u_{n_o}\|^o_{L_M(\Omega)}$ con lo que contradice la desigualdad

$$\|u_{n_o}\|^o_{L_M(\Omega)} \leq \|u\|^o_{L_M(\Omega)} \leq 1.$$

♦

**Lema 2.6** *Supongamos que* $\|u\|^o_{L_M(\Omega)} \leq 1$. *Entonces* $u \in L_M(\Omega)$ *y*

$$\varrho_M(u) \leq \|u\|^o_{L_M(\Omega)}. \tag{2.17}$$

**Demostración.**
Definamos $v_o(x) := p(|u(x)|)\, sgn\, u(x)$. En virtud del lema 2.5, tendremos que $v_o \in L_N$ y $\varrho_N(v_o) \leq 1$. La igualdad (1.35) garantiza que

$$\begin{aligned} |u(x)|p(|u(x)|) &= M(u(x)) + N[p(|u(x)|)] \\ u(x)\, sgn\, u(x) p(|u(x)|) &= M(u(x)) + N[p(|u(x)|)] \\ u(x)v_o(x) &= M(u(x)) + N[v_o(x)]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_\Omega M[u(x)]dx &\leq \int_\Omega M[u(x)]dx + \int_\Omega N[v_o(x)]dx \\ &= \int_\Omega [u(x)v_o(x) - N[v_o(x)]]dx + \int_\Omega N[v_o(x)]dx \\ &= \int_\Omega u(x)v_o(x)dx \\ &\leq \|u\|^o_{L_M(\Omega)}. \end{aligned}$$

♦

De este lema obtenemos que para cada $u \in L_M(\Omega)$ no nulo se tiene que $\dfrac{u}{\|u\|^o_{L_M(\Omega)}} \in L_M(\Omega)$ y

$$\varrho_M\left(\frac{u}{\|u\|^o_{L_M(\Omega)}}\right) \leq 1. \tag{2.18}$$

Lo cual es equivalente a

$$\int_\Omega M\left[\frac{u(x)}{\|u\|^o_{L_M(\Omega)}}\right] dx \leq 1. \tag{2.19}$$

**Teorema 2.7** *La desigualdad*

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq \|u\|^o_{L_M(\Omega)}\|v\|^o_{L_N(\Omega)} \tag{2.20}$$

*se cumple para cualquier par de funciones* $u \in L_M(\Omega)$ *y* $v \in L_N(\Omega)$.

**Demostración.**
Sean $u \in L_M(\Omega)$ y $v \in L_N(\Omega)$. Si alguna de ellas es nula, es evidente que se cumple la igualdad, en caso contrario, que ninguna sea nula, en virtud de la ecuación (2.19) tendremos que

$$\varrho_N\left(\frac{v}{\|v\|^o_{L_N(\Omega)}}\right) = \int_\Omega N\left[\frac{v}{\|v\|^o_{L_N(\Omega)}}\right] \leq 1.$$

Entonces

$$\int_\Omega u(x)\frac{v}{\|v\|^o_{L_N(\Omega)}} \leq \|u\|^o_{L_M(\Omega)},$$

de lo cual se obtiene inmediatamente (2.20). ♦

**Observación 2.4** *Se deduce de la desigualdad (2.19) que el espacio de Orlicz $L_M$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de la clase de Orlicz $K_M$.*

**Observación 2.5** *Si cambiamos $\Omega$ por $\mathbb{N}$ y consideramos $\mu$ como la medida de conteo sobre $2^{\mathbb{N}}$, entonces obtenemos un espacio de sucesiones Orlicz. En este caso los espacios son denotados por $l_M$ y $h_M$, respectivamente.*

La $\Delta$-regularidad da lugar a un espacio de Orlicz "mucho mejor". Ya hemos visto

**Proposición 2.2** $K_M(\Omega) = L_M(\Omega)$ *si y sólo* $(M, \Omega)$ *es* $\Delta-$*regular.*

**Demostración.**
Si ambos conjuntos son iguales significa que la clase de Orlicz es un subespacio, en cuyo caso el lema 2.1 nos garantiza que $(M, \Omega)$ es $\Delta-$regular. Recíprocamente, si $(M, \Omega)$ es $\Delta-$regular se sigue que la clase es un espacio vectorial y al ser el espacio de Orlicz el menor subespacio que lo contiene se tiene que $K_M(\Omega) = L_M(\Omega)$. ♦

**Teorema 2.8** *(Desigualdad de Jensen).* $\int_\Omega M(|u(x)|)dx < \infty$, *entonces*

$$M\left(\frac{1}{\mu\,\Omega}\int_\Omega |u(x)|dx\right) \leq \frac{1}{\mu\,\Omega}\int_\Omega M(|u(x)|)dx.$$

**Demostración.**
Por la proposición 1.2, existen $k_n, b_n \in \mathbb{R}$ de forma que $M(x) = \sup_n\{k_n x + b_n\}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{\mu\,\Omega}\int_{\Omega}|u(x)|dx\right) &= \sup_n\left\{k_n\left[\frac{1}{\mu\,\Omega}\int_{\Omega}|u(x)|dx\right]+b_n\right\}\\
&= \sup_n\left\{\frac{1}{\mu\,\Omega}\left[\int_{\Omega}k_n|u(x)|\right]dx+b_n\mu\,\Omega\right\}\\
&= \sup_n\left\{\frac{1}{\mu\,\Omega}\left[\int_{\Omega}(k_n|u(x)|+b_n)dx\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mu\,\Omega}\left[\int_{\Omega}\sup_n(k_n|u(x)|+b_n)dx\right]\\
&= \frac{1}{\mu\,\Omega}\left[\int_{\Omega}M(|u(x)|)dx\right].
\end{aligned}$$

♦

## 2.4. Convergencia modular.

Se dice que una sucesión de funciones en $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $L_M(\Omega)$ convergente modularmente a una función $u_0 \in L_M$ si

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}M[u_n(x)-u_0(x)]dx=0.$$

Se sigue de (2.18) que toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en norma de Orlicz de $L_M$ a alguna función $u_0$ es también convergente en módulo a $u_0$.
El recíproco, generalmente no es cierto. De hecho, si suponemos que la $N-$función $M$ no satisface la condición $\Delta_2$, entonces existe una sucesión monótona creciente de números $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$M(2u_n) > \frac{2^n}{\mu\,(\Omega)}M(u_n) \qquad (n=1,2,\cdots).$$

En este sentido, podemos suponer que $M(u_1)>1$. Para cada $n$, podremos construir un sistema de conjuntos disjuntos $\Omega_k^(n) \subseteq \Omega$ $(K=1,2,\cdots)$ para los cuales

$$\mu\,(\Omega_k^{(n)}) = \frac{1}{n}\frac{\mu\,(\Omega)}{2^k M(u_k)} \qquad (k=1,2,\cdots),$$

y definimos

$$u_n(x) := \begin{cases} u_k & \text{si} \quad x\in\Omega_k^{(n)} \qquad (k=1,2,\cdots)\\ 0 & \text{si} \quad x\notin \bigcup\limits_{k=1}^{n}\Omega_k^{(n)}. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} M[u_n(x)]dx &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega_k^{(n)}} M[u_n(x)]dx\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega_k^{(n)}} M[u_k]dx\\ &= \sum_{k=1}^{n} M[u_k]\mu\,(\Omega_k^{(n)})\\ &< \frac{\mu\,(\Omega)}{n},\end{aligned}$$

esto es,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} M[u_n(x)]dx = 0,$$

de lo que se deduce que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en módulo a cero.
Si la sucesión también fuese convergente a cero en norma, entonces, en virtud a la ecuación (2.18), la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} M[2u_n(x)]dx \leq \lim_{n\to\infty}\|2u_n\|^{o}_{L_M(\Omega)} = 0,$$

considerando que se cumplen, al mismo tiempo, tenemos que

$$\int_{\Omega} M[2u_n(x)]dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega_k^{(n)}} M[2u_n(x)]dx = \sum_{k=1}^{n} M[2u_k]\,\mu\,(\Omega_k^{(n)}) > 1.$$

De esta contradicción nos conduce a concluir la demostración de que la sucesión $(u_n)$ no converge a norma.

**Teorema 2.9** *Sea $M$ una $N-$función que satisface la condición $\Delta_2$. Entonces la convergencia en norma es equivalente a la convergencia modular.*

**Demostración.**
Es necesario sólo demostrar que la convergencia modular implica la convergencia en norma. Sea $u_n \in L_M(\Omega) = K_M$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ y

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} M[u_n(x) - u_o(x)]dx = 0. \tag{2.21}$$

Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que $\dfrac{1}{2^{k-1}} < \epsilon$.

Ya que $M \in \Delta_2$ se sigue de (2.21) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega M[2^k(u_n(x) - u_o(x))]dx = 0.$$

En este caso, podemos elegir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega M[2^k(u_n(x) - u_o(x))]dx < 1 \quad \text{para} \quad n \geq n_0.$$

Luego, por la ecuación (2.15), para $n \geq n_0$, tendremos que

$$\|2^k(u_n - u_0)\|^o_{L_M(\Omega)} \leq \varrho_M(2^k(u_n - u_0)) < 2,$$

de lo que se tiene

$$\|(u_n - u_0)\|^o_{L_M(\Omega)} < \frac{1}{2^{k-1}} < \epsilon \qquad (n \geq n_0).$$

♦

**Observación 2.6** *En el sentido de la convergencia modular, un conjunto de funciones acotadas es denso en casi todas partes en la clase de Orlicz $K_M(\Omega)$, esto es, para toda función $u \in L_M(\Omega)$ podemos construir una sucesión de funciones acotadas $(u_n)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega M[u_n(x) - u(x)]dx = 0.$$

*Las funciones $u_n$ pueden, por ejemplo, ser definidas por la igualdad*

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & si \quad |u(x)| \leq n, \\ 0 & si \quad |u(x)| > n. \end{cases}$$

Se sigue de la igualdad (2.7) que para todo conjunto $\mathfrak{N}$ de funciones, $\mathfrak{N} \subseteq K_M$, que son acotados en módulo, esto es, las que satisfacen la condición

$$\int_\Omega M[u(x)]dx \leq a \qquad (u \in \mathfrak{N}),$$

también es acotada en norma, $\|u\|^o_{L_M(\Omega)} \leq b$ $(u \in \mathfrak{N})$, donde $b = b(a)$ sólo depende de la constante $a$.

El recíproco, generalmente no es cierto por el hecho de que no toda función en el espacio de Orlicz $L_M$ pertenece a la clase de Orlicz $K_M$.

Sin embargo, si una $N-$función $M$ satisface la condición $\Delta_2$, entonces se cumple la siguiente afirmación:

**Afirmación 2.2** *Si una $N-$función $M$ satisface la condición $\Delta_2$, todo conjunto $\mathfrak{N} \subseteq L_M = K_M$, el cual es acotado en norma, también es acotado en módulo.*

**Demostración.**
Sea $\|u\|^o_{L_M} \leq a$ para todo $u \in \mathfrak{N}$. Como $M$ satisface la condición $\Delta_2$, existen constantes $u_0$ y $K$ tales que

$$M(au) \leq KM(u) \qquad (u \geq u_0).$$

Luego,

$$M(au) < M(au) + M(au_0) \leq KM(u) + M(au_0) \quad \text{para todo} \quad u.$$

Haciendo uso de la desigualdad (2.19) tendremos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M[u(x)]dx &= \int_\Omega M\left[a\frac{u(x)}{a}\right]dx \\
&\leq \int_\Omega \left[KM\left(\frac{u(x)}{a}\right) + M(au_0)\right]dx \\
&= K\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{a}\right)dx + \int_\Omega M(au_0)dx \\
&\leq K\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\|u\|^o_{L_M}}\right)dx + M(au_0)\mu(\Omega) \\
&\leq K + M(au_0)\mu(\Omega).
\end{aligned}$$

Y esta última constante es la buscada, con lo cual concluye la demostración. ♦

## 2.5. La norma de Luxemburg.

El conjunto $L_M(\Omega)$ puede transformarse en un nuevo espacio de Banach con una norma distinta a la norma introducida antes.

**Definición 2.3** *Definamos el funcional de Minkowski sobre $L_M(\Omega)$, el cual es llamado **norma de Luxemburg**, por:*

$$\|u\|_{L_M(\Omega)} := \sup\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)dx \leq 1\right\}. \tag{2.22}$$

El ínfimo en (2.22) se alcanza para las funciones $u$ con $\|u\|_{L_M(\Omega)} > 0$. En efecto, note que cuando $\lambda$ decrece hacia $\|u\|_{L_M(\Omega)}$ en la desigualdad

$$\int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)dx \leq 1, \tag{2.23}$$

se obtiene por convergencia monótona

$$\int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_M(\Omega)}}\right)dx \leq 1. \tag{2.24}$$

Además, la igualdad puede que no se cumpla en (2.24), pero si se cumple la igualdad en (2.23), entonces $\|u\|_{L_M(\Omega)} = \lambda$.
Es muy fácil ver que la igualdad se cumple en (2.24) si la $N-$función $M$ satisface la condición $\Delta_2$. Pero si ésta condición no se cumple, entonces se puede encontrar funciones de manera que $\varrho_M\left(\frac{u}{\|u\|_{L_M}}\right) < 1$.
De igual forma, es fácil observar que la igualdad

$$\int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{k_0}\right)dx = 1 \tag{2.25}$$

siempre implica que $k_0 = \|u\|_{L_M}$.
Para verificar que $\|\cdot\|_{L_M}$ satisface las condiciones de norma, note que

$$\int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx \leq 1 \tag{2.26}$$

es satisfecha por un $k$ arbitrario si, y sólo si, $u(x) = 0$ en casi todas partes de $\Omega$. Entonces, $\|u\|_{L_M} = 0$ si y sólo si $u(x) = 0$ en casi todas parte.
Además, la igualdad $\|\alpha u\|_{L_M} = \alpha\|u\|_{L_M}$ se desprende de las relaciones evidentes

$$\|\alpha u\|_{L_M} = \inf_{\varrho_M(\alpha u/\lambda)\leq 1} \lambda = |\alpha| \inf_{\varrho_M(u/\lambda)\leq 1} \lambda = |\alpha|\|u\|_{L_M}.$$

Finalmente para verificar que se cumple la desigualdad triangular

$$\|u_1 + u_2\|_{L_M} \leq \|u_1\|_{L_M} + \|u_2\|_{L_M},$$

obsérvese que si una de las funciones $u_1$ o $u_2$ es nula, se cumple trivialmente la igualdad.
En el caso en que

$$\|u_1\|_{L_M} < 0 \quad \text{y} \quad \|u_2\|_{L_M} > 0,$$

entonces, en virtud a (1.3), tendremos que

$$M\left[\frac{u_1(x) + u_2(x)}{\|u_1\|_{L_M} + \|u_2\|_{L_M}}\right] \leq \frac{\|u_1\|_{L_M}}{\|u_1\|_{L_M} + \|u_2\|_{L_M}} M\left[\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{L_M}}\right] + \frac{\|u_2\|_{L_M}}{\|u_1\|_{L_M} + \|u_2\|_{L_M}} M\left[\frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{L_M}}\right],$$

y en virtud de (2.24),

$$M\left[\frac{u_1(x) + u_2(x)}{\|u_1\|_{L_M} + \|u_2\|_{L_M}}\right] \leq 1,$$

de lo cual se sigue la desigualdad triangular.

**Ejemplo 2.2** *Encontremos la norma de la función característica de un conjunto* $\Upsilon \subseteq \Omega < \infty$, $\mathcal{X}_\Upsilon$ *con* $\mu(\Upsilon) \neq 0$.

Note que para $\kappa := \dfrac{1}{M^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu(\Upsilon)}\right)}$, tendremos que

$$\int_\Omega M\left(\frac{|\mathcal{X}_\Upsilon(x)|}{\kappa}\right) dx \;=\; 1$$

en cuyo caso

$$\|\mathcal{X}_\Upsilon(x)\|_{L_M} = \frac{1}{M^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu(\Upsilon)}\right)}. \tag{2.27}$$

**Teorema 2.10** *La esfera unitaria de* $L_M$ *con respecto a la norma de Luxemburg coincide con el conjunto de todas las funciones* $u \in L_M$ *para las cales* $\varrho_M(u) \leq 1$. *Por otra parte, se desprende de* $\|u\|_{L_M} \leq 1$ *que* $\varrho_M(u) \leq \|u\|_{L_M}$ *y se sigue de* $\|u\|_{L_M} > 1$ *que* $\varrho_M(u) \geq \|u\|_{L_M}$.

**Demostración.**
Supongamos que $\|u\|_{L_M} \leq 1$. Entonces, en virtud de (1.27) y (2.24), tenemos que

$$\frac{1}{\|u\|_{L_M}} \int_\Omega M\left[|u(x)|\right] dx \leq \int_\Omega M\left[\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_M}}\right] dx \leq 1,$$

es decir,

$$\varrho_M(u) = \int_\Omega M\left[|u(x)|\right] dx \leq \|u\|_{L_M}.$$

En el otro caso, cuando $\|u\|_{L_M} > 1$, en virtud de ( 1.27), se tiene que

$$\frac{1}{\|u\|_{L_M} - \epsilon} \int_\Omega M\left[|u(x)|\right] dx \geq \int_\Omega M\left[\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_M} - \epsilon}\right] dx > 1,$$

para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de lo que se deduce que

$$\varrho_M(u) = \int_\Omega M\left[|u(x)|\right] dx > \|u\|_{L_M} - \epsilon,$$

y en consecuencia

$$\varrho_M(u) = \int_\Omega M\left[|u(x)|\right] dx > \|u\|_{L_M}.$$

♦

**Teorema 2.11** *Dada $u \in L_M$ y $v \in L_N$ se tiene que*

*(1)* $\langle u, v \rangle := \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|^o_{L_M} \|v\|_{L_N}$.

*(2)* $\|u\|_{L_M} < \|u\|^o_{L_M} \leq 2\|u\|_{L_M}$, *para* $u \neq 0$.

**Demostración.**
Es claro que la igualdad se cumple cuando uno de las dos funciones es nula. En el caso en que ambas sean no nulas, El teorema 2.10 nos garantiza que

$$\int_\Omega N \left[ \frac{v(x)}{\|v\|_{L_N}} \right] dx \leq 1,$$

en cuyo caso

$$\|u\|^o_{L_N} := \sup_{\varrho_N(v) \leq 1} \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \geq \left| \int_\Omega u(x) \frac{v(x)}{\|v\|_{L_N}} dx \right|,$$

de lo cual se obtiene la desigualdad de la primera parte del teorema. Esta desigualdad recibe el nombre de **Desigualdad de Hölder**.
Para demostrar la segunda parte, de (2.15) y (2.24) obtenemos que

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_{L_M(\Omega)}} \right\|^o_{L_M(\Omega)} \leq \int_\Omega M \left[ \frac{u(x)}{\|u\|_{L_M(\Omega)}} dx \right] + 1 < 2.$$

Esto es, $\|u\|_{L_M} < \|u\|^o_{L_M} \leq 2\|u\|_{L_M}$.

Por otro lado, del teorema (2.6) se tiene que $\varrho_M \left( \frac{u(x)}{\|u\|^o_{L_M(\Omega)}} \right) \leq 1$ lo cual implica $\|u\|_{L_M} < \|u\|^o_{L_M}$. ♦

**Observación 2.7** *Note que de (1) y (2) obtenemos la desigualdad que generalmente es llamada* ***desigualdad de Hölder***

$$\langle u, v \rangle := \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|^o_{L_M} \|v\|_{L_N} < 2\|u\|_{L_M} \|v\|_{L_N} \tag{2.28}$$

Al igual que en los espacios $L^p$ hay inmersiones elementales que se van a cumplir de forma análoga para los espacios de Orlicz.

**Teorema 2.12 (Teoremas de inmersión para espacios de Orlicz)** *La inmersión* $L_B(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega)$ *se cumple si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

*(a) B domina a A globalmente, o*

*(b) $B$ domina a $A$ cerca de infinito y $\mu(\Omega) < \infty$.*

**Demostración.**
Si $A(t) \leq B(kt)$ para todo $t \geq 0$ y $u \in L_B(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k\|u\|_{L_B(\Omega)}}\right)dx \leq \int_\Omega B\left(k\frac{|u(x)|}{k\|u\|_{L_B(\Omega)}}\right)dx = \int_\Omega B\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_B(\Omega)}}\right)dx \leq 1.$$

Esto significa que $u \in L_A(\Omega)$ y $\|u\|_{L_A(\Omega)} \leq k\|u\|_{L_B(\Omega)}$.
En el otro caso, en que $B$ domine a $A$ cerca de infinito, existen constantes $t_0$ y $\mathcal{K}$ tales que $A(t) \leq B(\mathcal{K}t)$ para todo $t \geq t_0$. Hacemos $t_1 := A^{-1}\left(\dfrac{1}{2\mu(\Omega)}\right)$, entonces para $t \geq t_1$ puede ocurrir que

- $t_0 \leq t_1 \leq t$, en cuyo caso

$$A(t) \leq B(kt).$$

- $t_1 \leq t \leq t_0$ entonces

$$A(t) \leq A(t_0) = \frac{A(t_0)}{B(kt)}B(kt) \leq \frac{A(t_0)}{B(kt_1)}B(kt)$$

De lo cual obtenemos que para $t \geq t_1$

$$A(t) \leq \text{máx}\left\{1, \frac{A(t_0)}{B(kt_1)}\right\}B(kt) = k_1 B(kt).$$

Si $u \in L_B(\Omega)$ es dado, sean

$$\Omega'(u) := \left\{x \in \Omega : \frac{|u(x)|}{2k_1 k\|u\|_{L_B(\Omega)}} < t_1\right\} \quad \text{y} \quad \Omega''(u) = \Omega - \Omega'(u).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{2k_1 k\|u\|_{L_B(\Omega)}}\right)dx &= \int_{\Omega'(u)} A\left(\frac{|u(x)|}{2k_1 k\|u\|_{L_B(\Omega)}}\right)dx + \int_{\Omega''(u)} A\left(\frac{|u(x)|}{2k_1 k\|u\|_{L_B(\Omega)}}\right)dx \\
&\leq \int_{\Omega'(u)} A(t_1)dx + \int_{\Omega''(u)} k_1 B\left(k\frac{|u(x)|}{2k_1 k\|u\|_{L_B}(\Omega)}\right)dx \\
&\leq \int_{\Omega'(u)} A\left[A^{-1}\left(\frac{1}{2\mu(\Omega)}\right)\right]dx + \int_{\Omega''(u)} k_1\frac{1}{2k_1}B\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_B(\Omega)}}\right)dx \\
&= \frac{1}{2\mu(\Omega)}\int_{\Omega'(u)} dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega''(u)} B\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_B(\Omega)}}\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2\mu(\Omega)}\mu(\Omega) + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Esto implica que $u \in L_A(\Omega)$ y $\|u\|_{L_A(\Omega)} \leq 2k_1k\|u\|_{L_B(\Omega)}$.
Recíprocamente, supongamos que no se cumplen ni las hipótesis (a) ni (b). Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $t_n > 0$ tal que $A(t_n) > B(nt_n)$.
Hacemos $\Omega_n$ el subdominio de $\Omega$ con volumen $\dfrac{1}{B(nt_n)}$ y definimos

$$u_n(x) := \begin{cases} nt_n & \text{si} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega - \Omega_n. \end{cases}$$

Tendremos entonces que

$$\begin{aligned} \int_\Omega A\left[\frac{|u_n(x)|}{n}\right] dx &= \int_{\Omega_n} A\left[\frac{nt_n}{n}\right] dx \\ &= \int_{\Omega_n} A(t_n) dx \\ &= A(t_n)\mu\left(\Omega_n\right) \\ &> B(nt_n)\mu\left(\Omega_n\right) \\ &= B(nt_n)\frac{1}{B(nt_n)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Con esto se tiene que $\|u_j\|_{L_A(\Omega)} > n$ para cada $n$ y $\|u_j\|_{L_B(\Omega)} = 1$ dado que

$$\int_\Omega B(|u_n(x)|)dx = \int_\Omega B(nt_n)dx = B(nt_n)\mu\left(\Omega_n\right) = 1.$$

Por lo tanto $L_B$ no está inmerso en $L_A$. ♦

## 2.6. El espacio $E_M(\Omega)$.

**Definición 2.4** *Definimos la clausura en $L_M(\Omega)$ del conjunto de todas las funciones acotada con soporte acotado en $\overline{\Omega}$ por $E_M(\Omega)$.*

Es claro que $E_M(\Omega) \subseteq K_M(\Omega) \subseteq L_M(\Omega)$.
El siguiente ejemplo nos muestra además que $E_M$ puede ser subespacio propio de $L_M$.

**Ejemplo 2.3** *Sean $\epsilon > 0$, $F \in \sum$ con $\mu(F) > 0$ y supongamos que $M \notin \Delta_2$. Entonces el teorema 1.14 nos garantiza que existe una sucesión $\alpha_k \nearrow +\infty$ tal que $M(\alpha_1) \geq \dfrac{\epsilon}{\mu(F)}$ y*

$$M\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)\alpha_k\right) > 2^k M(\alpha_k) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

*Seleccionamos una sucesión de conjuntos* $\{F_k\}$ *de subconjuntos distintos de* $F$ *de manera que*

$$M(\alpha_k)\mu(F_k) = 2^{-k}\epsilon \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

*y definimos*

$$u_n(t) := \sum_{k=n+1}^{\infty} M(\alpha_k)\mu(F_k) = 2^{-n}\epsilon < \infty.$$

*Entonces* $u_n \in L_M$*. Sin embargo, para* $l > 1$*, sea* $n_0 \in \mathbb{N}$ *que satisfaga* $l \geq 1 + \dfrac{1}{n_0}$*, entonces para todo* $n \geq n_0$*,*

$$\varrho_M(lu_n) > \sum_{k=n+1}^{\infty} M\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)\alpha_k\right)\mu(F_k) > \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k M(\alpha_k)\mu(F_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \epsilon = \infty.$$

*Esto nos demuestra que* $u_n \notin E_M$ $(n \in \mathbb{N})$*.*

Como ya hemos señalado, el conjunto de funciones acotadas es denso en la clase de Orlicz $K_M$ en el sentido de la convergencia modular. Se sigue del teorema 2.9 que el conjunto de funciones acotas es densa en el espacio de Orlicz $L_M = K_M$ en el caso en que $M$ satisfaga la condición $\Delta_2$. Así, si $M$ satisface la condición $\Delta_2$ entonces los espacios $E_M$ y $L_M$ coinciden.

En el caso en que $M$ no satisface la condición $\Delta_2$ $E_M$ es un subconjunto propio de $L_M$.

Supongamos que $u_0 \in E_M$ y $u_1$ es una función acotada tal que $\|u_0 - u_1\|_{L_M} < \dfrac{1}{2}$. Entonces, en virtud a (2.16),

$$\int_\Omega M[2u_0 - 2u_1]dx \leq 2\|u_0 - u_1\|_{L_M} < 2\frac{1}{2} = 1.$$

Esto significa que $2u_0 - 2u_1 \in L_M$. Ya que las funciones acotadas pertenecen a $L_M$, se sigue de la convexidad del conjunto $L_M$ que la función $u_0 = \dfrac{1}{2}[2u_0 - 2u_1] + \dfrac{1}{2}2u_1$ también pertenece a $L_M$.

**Lema 2.13** $E_M(\Omega)$ *es el máximo subespacio lineal de* $K_M(\Omega)$*.*

**Demostración.**

Sea $S$ un subespacio lineal de $K_M(\Omega)$ y $u \in S$. Entonces $\lambda u \in S \subseteq K_M(\Omega)$ para todo escalar $\lambda$. Si $\epsilon > 0$ y $u_n$ se define por

$$u_n(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad |u(x)| \leq n \,\text{y}\, |x| \leq n, x \in \Omega \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{2.29}$$

Esta sucesión converge a $u$ en casi todas partes de $\Omega$. Entonces $u_n/\epsilon$ converge a $u/\epsilon$ en módulo en $L_M(\Omega)$. Entonces, para valores suficientemente grandes de $n$ tendremos que

$$\int_\Omega M\left[\frac{|u_n(x)-u(x)|}{\epsilon}\right]dx \leq 1$$

y así, $u_n$ converge a $u$ en norma en $L_M(\Omega)$. Así, $S \subseteq E_M(\Omega)$. ♦

**Teorema 2.14** *Sea $\Omega$ de volumen finito y suponga que $A$ es una $N$-función que crece esencialmente mas lento que la $N-$función $B$ cerca de infinito. Entonces*

$$L_B(\Omega) \hookrightarrow E_A(\Omega).$$

**Demostración.**
El teorema 2.12 se establece que $L_B(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega)$, entonces sólo resta verificar que $L_B(\Omega) \subseteq E_A(\Omega)$. Ya que $L_B(\Omega)$ es el espacio vectorial generado por $K_B(\Omega)$ y $E_A(\Omega)$ es el máximo subespacio lineal contenido en $K_A(\Omega)$, es suficiente garantizar que $\lambda u \in K_A(\Omega)$ cuando $u \in K_B(\Omega)$ y $\lambda$ es un escalar.
Por hipótesis, existen un número positivo $t_0$ tal que $A(|\lambda|t) \leq B(t)$ para todo $t \geq t_0$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A(|\lambda u(x)|)dx &= \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq t_0\}} A(|\lambda u(x)|)dx + \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|>t_0\}} A(|\lambda u(x)|)dx \\
&\leq \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq t_0\}} A(|\lambda|t_0)dx + \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|>t_0\}} B(|u(x)|)dx \\
&\leq A(|\lambda|t_0)\mu(\Omega) + \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|>t_0\}} B(|u(x)|)dx < \infty.
\end{aligned}$$

de donde el teorema se siguiente. ♦

**Teorema 2.15** *Suponga que $M \in \Delta_2$ y $u_n, u \in L_M(\Omega)$.*

*(1)* $\varrho_M(u_n) \to \infty$ *implica que* $\|u_n\|_{L_M(\Omega)} \to \infty$.

*(2)* $\|u\|_{L_M(\Omega)} < 1$ *implica que* $\varrho_M(u) = 1$.

*(3) Para cualquier $\epsilon > 0$ , existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L_M(\Omega)} \geq \epsilon \Longrightarrow \varrho_M(u) \geq \delta.$$

*(4) Para $\epsilon \in (0,1)$, existe $\delta \in (0,1)$ tal que*

$$\varrho_M(u) \leq 1-\epsilon \Longrightarrow \|u\|_{L_M(\Omega)} \leq 1-\delta.$$

*(5) Para cualquier* $\epsilon \in (0,1)$ *existe* $\delta \in (0,1)$ *tal que*

$$\varrho_M(u) > 1 + \epsilon \Longrightarrow \|u\|_{L_M(\Omega)} > 1 + \delta.$$

**Demostración.**

(1) Supongamos que la afirmación es falsa, que existe $0 < L < \infty$ tal que $\|u_n\|_{L_M(\Omega)} < L$ para todo $n \geq n_0$. Como $M \in \Delta_2$ podemos elegir $t_0 \geq 0$ y $K \geq 1$ tal que

$$M(Lt) \leq KM(t) \qquad (t \geq t_0).$$

Entonces $\|u_n\|_{L_M(\Omega)} \leq L$ implica que $\varrho_M(u_n/L) \leq 1$ para todo $n \geq n_0$, y así,

$$\begin{aligned}
\varrho_M(u_n) &= \varrho_M(u_n \mathcal{X}_G) + \varrho_M(u_n \mathcal{X}_{\Omega-G}) \\
&\leq \varrho_M(u_0 \mathcal{X}_G) + \varrho_M(u_n \mathcal{X}_{\Omega-G}) \\
&\leq \int_\Omega M(u_0 \mathcal{X}_G(x))dx + \int_\Omega M(u_n \mathcal{X}_{\Omega-G}(x))dx \\
&= \int_G M(u_0)dx + \int_\Omega M(u_n \mathcal{X}_{\Omega-G}(x))dx \\
&= \mu(G)M(u_0) + \int_\Omega M\left(L\frac{u(x)\mathcal{X}_{\Omega-G}(x)}{L}\right)dx \\
&\leq \mu(G)M(u_0) + K\int_\Omega M\left(\frac{u_n(x)\mathcal{X}_{\Omega-G}(x)}{L}\right)dx \\
&\leq \mu(G)M(u_0) + K,
\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$, donde $G := \{x \in \Omega : |u(x)| \leq u_0\}$, lo cual contradice la hipótesis.

(2) Se sigue de la continuidad de $\varrho_M(u/\lambda)$ como función de $\lambda$ sobre $(0, +\infty)$ ya que $u \in L_M = E_M$.

(3) Es consecuencia inmediata de los teoremas 2.9 y 2.11.

(4) Si la (4) no se cumple, entonces existen $\epsilon > 0$ y $u_n \in L_M$ tales que $\varrho_M(u_n) < 1 - \epsilon$ y $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq \|u_n\|_{L_M(\Omega)}$. Hacemos $a_n := \dfrac{1}{\|u_n\|_{L_M(\Omega)}} - 1$. Note que si $n \to \infty$ entonces

$a_n \to 0$. Además, (1) nos garantiza que $L := \sup_n \varrho_M(2u_n) < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
1 &= \varrho_M(\frac{u_n}{\|u_n\|}) \\
&= \varrho_M \left( \frac{2u_n}{\|u_n\|_{L_M(\Omega)}} - 2u_n + u_n - \frac{u_n}{\|u_n\|_{L_M(\Omega)}} \right) \\
&= \varrho_M \left[ 2u_n \left( \frac{1}{\|u_n\|_{L_M(\Omega)}} - 1 \right) + u_n - u_n \left( \frac{1}{\|u_n\|_{L_M(\Omega)}} - 1 \right) \right] \\
&= \varrho_M \left[ 2u_n a_n + u_n - u_n a_n \right] \\
&= \varrho_M \left[ a_n 2u_n + (1 - a_n) u_n \right] \\
&\le a_n \varrho_M \left[ 2u_n \right] + (1 - a_n) \varrho_M \left[ 2u_n \right] \\
&\le a_n L + (1 - a_n) \varrho_M \left[ u_n \right] \\
&< a_n L + (1 - a_n)(1 - \epsilon).
\end{aligned}$$

El lado derecho de esta desigualdad tiende a $1 - \epsilon$ cuando $n \to \infty$, lo cual es absurdo.

(5) se verifica de manera similar a (4). ♦

**Lema 2.16** *Suponga que $M \in \Delta_2$. Entonces para cualquier $L > 0$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\varrho_M(u) \le L, \quad \varrho_M(v) \le \delta \quad \Longrightarrow \quad |\varrho_M(u + v) - \varrho_M(u)| < \epsilon. \tag{2.30}$$

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L > 1$ y $1 > \epsilon > 0$ y definimos

$$h := \sup\{\varrho_M(2u + 2v) : \varrho_M(u) \le L, \qquad \varrho_N(v) \le 1\}.$$

Como $M \in \Delta_2$ entonces $L < h < \infty$. Sea $\beta = \epsilon/h$. Por el teorema 2.15, existe $\delta > 0$ tal que

$$\varrho_M(u) \le \delta \quad \Longrightarrow \quad \|u\| \le \text{mín}\{\beta/2, \epsilon/2\}.$$

Por consiguiente, si $\varrho_M(u) \leq L$ y $\varrho_N(v) \leq \delta$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\varrho_M(u+v) &= \varrho_M(u - \beta u + \beta u + \beta v/\beta) \\
&= \varrho_M((1-\beta)u + \beta(u + v/\beta) \\
&\leq (1-\beta)\varrho_M(u) + \beta\varrho_M(u + v/\beta) \\
&= (1-\beta)\varrho_M(u) + \beta\varrho_M\left[\frac{1}{2}(2u) + \frac{1}{2}2v/\beta\right] \\
&\leq (1-\beta)\varrho_M(u) + \beta\frac{1}{2}\left[\varrho_M(2u) + \varrho_M(2v/\beta)\right] \\
&\leq \varrho_M(u) + \beta\frac{1}{2}h + \|v\|_{L_M} \\
&= \varrho_M(u) + \frac{\epsilon}{h}\frac{1}{2}h + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \varrho_M(u) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\varrho_M(u) \;=\; \varrho_M[(u+v) - v] \leq M(u+v) - \epsilon.$$

♦

## 2.7. Dualidad en espacios de Orlicz.

Por conveniencia, de ahora en adelante escribiremos $L^o_M(L_M, \|\cdot\|^o_{L_M})$, $L_M(L_M, \|\cdot\|_{L_M})$, $E^o_M(E_M, \|\cdot\|^o_{L_M})$ y $E_M(E_M, \|\cdot\|_{L_M})$.

**Lema 2.17** *Dado $v \in L_N(\Omega)$, el funcional lineal $F_v$ definido por*

$$F_v(u) := \int_\Omega u(x)v(x)dx \tag{2.31}$$

*pertenece al espacio dual $(L_M(\Omega))^*$ y su norma $\|F_v\|$ en el espacio satisface*

$$\|v\|_{L_N(\Omega)} \leq \|F_v\| \leq 2\|v\|_{L_N(\Omega)}. \tag{2.32}$$

**Demostración.**

Por la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$|F_v(u)| \leq 2\|u\|_{L_M(\Omega)}\|v\|_{L_N(\Omega)},$$

se cumple para todo $u \in L_M(\Omega)$, confirmando así que $F_v$ es acotado y en consecuencia

$$\|F_v\| \leq 2\|v\|_{L_N(\Omega)},$$

la segunda parte de la desigualdad en (2.32).
Para establecer la otra desigualdad consideramos en caso en que $v \neq 0$, dado que en el caso contrario no hay nada que demostrar, y llamaremos $\mathcal{K} := \|F_v\| > 0$.
Sea

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{N\left[\dfrac{|v(x)|}{\mathcal{K}}\right]}{\dfrac{v(x)}{\mathcal{K}}} & \text{si} \quad v(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad v(x) = 0. \end{cases}$$

Si $\|u\|_{L_M(\Omega)} > 1$ podemos elegir $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $1 < \|u\|_{L_M(\Omega)} - \epsilon < \|u\|_{L_M(\Omega)}$. En este caso,

$$\int_\Omega M(|u(x)|)dx \quad \geq \quad (\|u\|_{L_M(\Omega)} - \epsilon) \int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_M(\Omega)} - \epsilon}\right) dx,$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{\|u\|_{L_M(\Omega)} - \epsilon} \int_\Omega M(|u(x)|)dx \quad \geq \quad \int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_M(\Omega)} - \epsilon}\right) dx > 1.^3$$

Si hacemos que $\epsilon \to 0^+$

$$\frac{1}{\|u\|_{L_M(\Omega)}} \int_\Omega M(|u(x)|)dx \quad \geq \quad \int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_M(\Omega)}}\right) dx > 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_M(\Omega)} &< \int_\Omega M(|u(x)|)dx \\ &= \int_\Omega M\left(\left|\frac{N\left[\dfrac{|v(x)|}{\mathcal{K}}\right]}{\dfrac{v(x)}{\mathcal{K}}}\right|\right) dx \\ &\leq \int_\Omega N\left[\frac{|v(x)|}{\mathcal{K}}\right] dx \\ &= \int_\Omega u(x)\frac{v(x)}{\mathcal{K}} dx \\ &= \frac{1}{\mathcal{K}} \int_\Omega u(x)v(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|F_v\|}F_v(u)\\
&= \frac{1}{\|F_v\|}|F_v(u)|\\
&\leq \frac{1}{\|F_v\|}\|F_v\|\|u\|_{L_M(\Omega)}\\
&= \|u\|_{L_M(\Omega)}.^4
\end{aligned}$$

De esta contradicción se obtiene que $\|u\|_{L_M(\Omega)} \leq 1$.
Así,

$$\begin{aligned}
\|F_v\| &= \sup_{\|\widetilde{u}\|_{L_M(\Omega)}\leq 1} |F_v(\widetilde{u})|\\
&\geq |F_v(u)|\\
&\geq \left| \int_\Omega \frac{N\left[\dfrac{|v(x)|}{\|F_v\|}\right]}{\dfrac{v(x)}{\|F_v\|}} v(x)dx \right|\\
&\geq \left| \int_\Omega N\left[\frac{|v(x)|}{\|F_v\|}\right]\|F_v\|dx \right|,
\end{aligned}$$

y de inmediato

$$1 \geq \left| \int_\Omega N\left[\frac{|v(x)|}{\|F_v\|}\right] dx \right|. \tag{2.33}$$

Es decir, $\|v\|_{L_N(\Omega)} \leq \|F_v\|$, completando la demostración. ♦

**Observación 2.8** *El lema anterior también se cumple cuando $F_v$ es restringido a $E_M(\Omega)$. Para obtener la primera de la desigualdad de (2.32) consideramos $\|F_v\|$ la norma de $F_v$ en $[E_M(\Omega)]^*$ y $u$ es reemplazada por $\mathcal{X}_n u$ donde $\mathcal{X}_n$ es la característica de $\Omega_n := \{x \in \Omega : |x| \leq n \, y \, |u(x)| \leq n\}$. Evidentemente, $\mathcal{X}_n u$ pertenece a $E_M(\Omega)$, con $\|\mathcal{X}_n u\|_{E_M(\Omega)} \leq 1$, y (2.33) se convierte en*

$$\int_\Omega \mathcal{X}_n(x) N\left[\frac{|v(x)|}{\|F_v\|}\right] dx \leq 1.$$

*Ya que $\mathcal{X}_n$ crece hacia la unidad en casi todas partes sobre $\Omega$ cuando $n \to \infty$, obtenemos (2.33) nuevamente, y $\|v\|_{E_M(\Omega)} \leq \|F_v\|$ como antes.*

**Teorema 2.18** *El dual del espacio $E_M(\Omega)$ es isomorfo y homeomorfo a $L_N(\Omega)$.*

**Demostración.**
Ya hemos verificado que para cualquier $v \in L_N(\Omega)$ define un funcional lineal acotado $F_v$ a través de (2.31) sobre $L_M(\Omega)$ y también sobre $E_M(\Omega)$, y en ambos casos la norma de este funcional difiere de $\|v\|_{L_N(\Omega)}$ como máximo en un factor de 2. Resta entonces demostrar que todo funcional lineal sobre $E_M(\Omega)$ es de la forma $F_v$ para algún $v$.
Sea $F \in [E_M(\Omega)]^*$. Definimos una medida compleja $\lambda$ sobre los subconjuntos medibles de $\Omega$ que tienen volumen finito por

$$\lambda(S) := F(\mathcal{X}_S),$$

donde $\mathcal{X}_S$ es la función característica de $S$.
Note que

$$\int_\Omega M\left[\left|\mathcal{X}_S(x)M^{-1}\left(\frac{1}{\mu\,(S)}\right)\right|\right] = \left\{\begin{array}{cc} \int_S M\left[\left|M^{-1}\left(\frac{1}{\mu\,(S)}\right)\right|\right] & \text{si} \quad x \in S \\ 0 & \text{si} \quad x \notin S. \end{array}\right. = 1. \tag{2.34}$$

Esto implica que $\|\mathcal{X}_S\|_{L_M(\Omega)} = M^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu\,(S)}\right)$.
Tendremos entonces

$$|\lambda(S)| = |F(\mathcal{X}_S)| \leq \|F\|\|\mathcal{X}_S\|_{L_M(\Omega)} = \|F\|M^{-1}\left(\frac{1}{\mu\,(S)}\right) \tag{2.35}$$

Note que si $\mu\,(S) \to 0$

$$\lim_{\mu\,(S)\to 0} \frac{M^{-1}\left[\dfrac{1}{\mu\,S}\right]}{\dfrac{1}{\mu\,S}} = \infty,$$

luego

$$\lim_{\mu\,(S)\to 0} \frac{\|F\|}{M^{-1}\left[\dfrac{1}{\mu\,S}\right]} = 0. \lim_{\mu\,(S)\to 0} \mu\,(S)\|F\|\frac{1}{\mu\,(S)M^{-1}\left[\dfrac{1}{\mu\,S}\right]}.$$

En (2.35) si hacemos que $\mu\,(S) \to 0$ se obtiene que $|\lambda(S)| = 0$ lo cual nos demuestra que la medida $\lambda$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y así por el Teorema de Radon-Nikodym (ver Teorema 1.52 en [1]) existe $v \in L^1(\Omega)$ tal que $\lambda$ puede expresarse en forma

$$\lambda(S) = \int_S v(x)dx.$$

Entonces,

$$\lambda(S) = F(\mathcal{X}_S) = \int_S v(x)dx = \int_\Omega \mathcal{X}_S(x)v(x)dx.$$

Esto demuestra lo deseado, para funciones simples. Esto es, si $u$ es una función simple
Si $u \in E_M(\Omega)$, definimos

$$u_j(x) \quad = \quad \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad |u(x)| \leq j \text{ y } |x| \leq j,\ x \in \Omega \\ 0 & \quad \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La sucesión de funciones simples medibles $u_j$ converge en casi todas partes a $u$ y satisface $|u_j(x)| \leq |u(x)|$ sobre $\Omega$. Ya que $|u_j(x)v(x)|$ converge en casi todas partes a $|u(x)v(x)|$, y por el lema de Fatou

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| &\leq \sup_j \int_\Omega |u_j v(x)|dx \\ &= \sup_j |F(|u_j| sgn\, v)| \\ &\leq \|F\| \sup_j \|u_j\|_{L_M(\Omega)} \\ &\leq \|F\| \|u\|_{L_M(\Omega)}. \end{aligned}$$

De ello se deduce que el funcional lineal

$$F_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

es acotado sobre $E_M(\Omega)$ donde $v \in L^1(\Omega)$. Además, $F_v$ y $F$ tiene los mismos valores sobre funciones simples medibles, un conjunto denso en $E_M(\Omega)$, ellos coinciden sobre $E_M(\Omega)$ y el teorema es demostrado. ♦

Una aplicación del Teorema de Hahn-Banach demuestra que si $E_M(\Omega)$ es un subespacio propio de $L_M(\Omega)$ (esto es, si $(M;\Omega)$ es no-regular), entonces existe un funcional lineal $F$ sobre $L_M(\Omega)$ que no está dado por (2.31) para cualquier $v \in L_N(\Omega)$. Como consecuencia inmediata se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.19** *$L_M(\Omega)$ es reflexivo si y sólo si $(M,\Omega)$ y $(N,\Omega)$ son $\Delta-$regulares.*

**Demostración.**
La condición de suficiencia es dada por el teorema 2.18. Por otra parte, si suponemos que $L_M$ es reflexivo entonces el subespacio cerrado $E_M$ también lo es, de donde obtenemos la siguiente cadena

$$L_M = L_M^{**} \supseteq E_M^{**} = E_M = L_N^* \supseteq E_N^* = L_M,$$

de lo cual se tiene que $L_M = E_M$ y en consecuencia $M \in \Delta_2$. De forma similar se obtiene que $M \in \nabla_2$. ♦

Sin duda alguna dentro del estudio de los espacios de Banach la reflexividad es una propiedad de gran importancia y nos introduce en el espíritu geométrico del estudio de los espacios, dado que por mucho tiempo ha existido el deseo de describir la reflexividad geométricamente, tratando de demostrar que un espacio es reflexivo si y sólo si hay una norma equivalente en el espacio que satisfaga algunas condiciones geométricas, y la noción de convexidad uniforme empujado en esa dirección.

## 2.8. Separabilidad de $E_M$.

Supongamos que $u$ es una función acotada, digamos que $|u(x)| \leq \mathcal{K}$. En virtud del teorema de Lusin (Ver Teorema 1.42 de [1]), podemos hallar una sucesión de funciones continuas con soporte compacto tales que

$$\sup_{x\in\Omega}|u_n(x)| \leq \sup_{x\in\Omega}|u(x)| \leq \mathcal{K} \quad \text{y} \quad \mu\left\{x \in \Omega : u_n(x) \neq u(x)\right\} < \frac{1}{n}.$$

Entonces, para cada $\lambda$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M\left(\frac{|u(x)-u_n(x)|}{\lambda}\right)dx &= \int_{\{x\in\Omega:u_n(x)\neq u(x)\}} M\left(\frac{|u(x)-u_n(x)|}{\lambda}\right)dx \\
&\leq \int_{\{x\in\Omega:u_n(x)\neq u(x)\}} M\left(\frac{2\mathcal{K}}{\lambda}\right)dx \\
&\leq \mu\left\{x\in\Omega : u_n(x)\neq u(x)\right\} M\left(\frac{2\mathcal{K}}{\lambda}\right) \\
&\leq \frac{1}{n} M\left(\frac{2\mathcal{K}}{\lambda}\right);
\end{aligned}$$

entonces, cuando $n \to \infty$ se tiene que $\|u - u_n\|_{L_M} \to 0$. Así, el conjunto de las funciones continuas es en todas partes denso en el espacio $E_M$.
Además, para toda función $u$, continua sobre $\Omega$, puede hallarse una sucesión de polinomios con coeficientes racionales que convergen a $u$. Es fácil ver que los polinomios también convergen con respecto a la norma de de Luxemburg. En consecuencia, el conjunto numerable de polinomios, dado que tienen coeficientes racionales, es denso en $E_M(\Omega)$, en consecuencia, $E_M(\Omega)$ es separable. Todo lo indicamos en el siguiente teorema:

**Teorema 2.20 (Aproximación por funciones en $E_M(\Omega)$)** .

*(a)* $C_0(\Omega)$ *es denso en* $E_M(\Omega)$.

*(b)* $E_M(\Omega)$ *es separable.*

Note que, dado que el espacio $E_M$ es separable, significa que $L_M = E_M$ es separable si la $N-$función $M$ satisface la condición $\Delta_2$.

## 2.9. Subespacios Isomorfos.

$l_p$ y $c_0$ son los espacios más simples con base incondicional. En particular, tienen ciertas propiedades de las que también gozan los espacios que los contienen. Por tal razón, el objetivo de esta sección es establecer los criterios para que $L_M$ tenga subespacios isomorfos a $l^\infty$, $c_0$ o $l^1$.

**Lema 2.21** *Si* $M \notin \Delta_2$, *entonces para cada* $\epsilon \in (0,1)$ *existe* $x_n = u_n \mathcal{X}_{G_n} \in L_M$, *donde* $u_n > 0$, $\mu G_n > 0$ *y* $G_i \cap G_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $n = 1, 2, ...,$ *tal que* $\varrho_M \left( \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \right) \leq \epsilon$ *y*

*(i)*

$$\frac{1}{1+\epsilon} \leq \|x_n\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq 1,$$

*(ii) para todo* $\alpha = (\alpha_n) \in l^\infty$,

$$\frac{1}{1+2\epsilon} \|\alpha\|_\infty \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| \leq \|\alpha\|_\infty.$$

**Demostración.**
Por el teorema 1.14, existe una sucesión $u_n \uparrow \infty$ y una colección $\{\Omega_n\}$ medibles tales que

$$M((1+\epsilon)u_n) > \frac{2^{n+1}}{\epsilon} M(u_n), \qquad M(u_n)\mu\left(\Omega_n\right) = \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Sea $x_n = u_n \mathcal{X}_{\Omega_n}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\varrho_M(x_n) &< \varrho_M\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) \\
&= \int_\Omega M\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)\right) dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega_k} M\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_n \mathcal{X}_{\Omega_n}(t)\right) dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega_k} M\left(u_k\right) dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega_k} M\left(u_k\right) dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} M\left(u_k\right)\mu\left(\Omega_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} M\left(u_k\right)\frac{\epsilon}{2^k M(u_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon < 1,
\end{aligned}$$

lo cual significa que $x_n \in L_M$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \in L_M$ y que

$$\|x_n\|_{L_M} \leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|_{L_M} < 1. \tag{2.36}$$

Por otra parte, para cada $n$

$$\begin{aligned}
\varrho_M((1+\epsilon)x_n) &= \int_\Omega M((1+\epsilon)x_n(t))dt \\
&= \int_\Omega M((1+\epsilon)u_n\mathcal{X}_{\Omega_n}(t))dt \\
&= \int_{\Omega_n} M((1+\epsilon)u_n)dt \\
&= M((1+\epsilon)u_n)\mu\left(\Omega_n\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M((1+\epsilon)u_n)\frac{\epsilon}{2^n M(u_n)} \\
&\geq \frac{2^{n+1}M(u_n)}{\epsilon}\frac{\epsilon}{2^n M(u_n)} \\
&= 2 > 1,
\end{aligned}
$$

de lo cual concluimos que

$$
\|x_n\|_{L_M} \geq \frac{1}{1+\epsilon}. \tag{2.37}
$$

Así, de (2.36) y (2.37) obtenemos la demostración de la primera parte del teorema, a saber,

$$
\frac{1}{1+\epsilon} \leq \|x_n\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq 1.
$$

Para verificar la segunda parte, consideramos $\alpha = (\alpha_k) \in l^\infty$. Por (i) se sigue de forma inmediata

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\|_{L_M} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha\|_\infty x_k \right\|_{L_M} \\
&= \|\alpha\|_\infty \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|_{L_M} \leq \\
&\leq \|\alpha\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, si elegimos $m \in \mathbb{N}$ de manera que $(1+2\epsilon)|\alpha_m| \geq (1+\epsilon)\epsilon\|\alpha\|_\infty$, tendremos que

$$
\begin{aligned}
\left\| (1+2\epsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\|_{L_M} &\geq \|(1+2\epsilon)\alpha_m x_m\|_{L_M} \\
&= (1+2\epsilon)|\alpha_m|\, \|x_m\|_{L_M} \\
&\geq (1+\epsilon)\|\alpha\|_\infty\, \|x_m\|_{L_M} \\
&\geq (1+\epsilon)\|\alpha\|_\infty \frac{1}{1+\epsilon} \\
&= \|\alpha\|_\infty.
\end{aligned}
$$

♦

**Definición 2.5** *Si $X$ e $Y$ son espacios de Banach, la distancia de Banach-Mazur de $X$ a $Y$ se define por*

$$
d(X,Y) := \text{ínf}\left\{ \|T\|\|t^{-1}\| : T : X \to Y \quad \text{es un isomorfismo} \right\}.
$$

**Observación 2.9** *En realidad, tal aplicación no es una distancia. Sí lo es su logaritmo. Siempre que $d(X,Y) \geq 1$, y si $X$ e $Y$ son isométricos, entonces $d(X,Y) = 1$, aunque el recíproco no es cierto.*

**Definición 2.6** *Sean $X$, $Y$ espacios de Banach. Si para cada $\epsilon > 0$, $X$ tiene un subespacio complementado isomorfo a $Y$ y el isomorfismo $T$ satisface*

$$\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} < 1 + \epsilon,$$

*entonces decimos que $Y$ es una **casi copia complementaría isométrica** de $X$.*

**Teorema 2.22** *Si $M \notin \Delta_2$, entonces $l^\infty$ es una casi copia complementada de $L_M$.*

**Demostración.**
Sea $\epsilon \in (0,1)$. Podemos construir una sucesión como en el lema 2.21, $x_n = u_n \mathcal{X}_{G_n} \in L_M$, donde $u_n > 0$, $\mu G_n > 0$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $n = 1, 2, ...$, tal que $\varrho_M \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) \leq \epsilon$ y

1. $$\frac{1}{1+\epsilon} \leq \|x_n\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq 1,$$

2. para todo $\alpha = (\alpha_n) \in l^\infty$,
$$\frac{1}{1+2\epsilon} \|\alpha\|_\infty \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| \leq \|\alpha\|_\infty.$$

Definimos

$$T[(\alpha_n)_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \qquad ((\alpha_n)_n \in l^\infty),$$

y

$$X := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_n \in l^\infty \right\},$$

Es claro que $T$ es un isomorfismo de $l^\infty$ a $X$ que además, el lema 2.21 nos garantiza que

$$\|T\| := \sup_{\|(\alpha_n)_n\|_\infty \leq 1} \|T[(\alpha_n)_n]\|_{L_M} = \sup_{\|(\alpha_n)_n\|_\infty \leq 1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|_{L_M} \leq \sup_{\|(\alpha_n)_n\|_\infty \leq 1} \|(\alpha_n)_n\|_\infty = 1.$$

y

$$\|T^{-1}\| := \sup_{\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right\|_{L_M}\leq 1} \|(\alpha_n)_n\|_\infty \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right\|_{L_M}(1+2\epsilon) = 1+2\epsilon.$$

Queda por demostrar que $X$ es un subespacio complementado de $L_M$. Para ello definimos

$$\begin{array}{rcl} P: \quad L_M & \longrightarrow & L_M \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n & \longmapsto & P(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\mu(\Omega_n)}\displaystyle\int_{\Omega_n} x(t)dt\right]\mathcal{X}_{\Omega_n}. \end{array}$$

Note que $P$ es un operador lineal tal que para $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n \in X$

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu(\Omega_n)}\int_{\Omega_n} x(t)dt\right]\mathcal{X}_{\Omega_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu(\Omega_n)}\int_{\Omega_n}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k u_k \mathcal{X}_{G_k}(t)\right]dt\right]\mathcal{X}_{\Omega_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu(\Omega_n)}\int_{\Omega_n}\left[\alpha_n u_n \mathcal{X}_{G_n}(t)\right]dt\right]\mathcal{X}_{\Omega_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu(\Omega_n)}\alpha_n u_n\int_{\Omega_n} dt\right]\mathcal{X}_{\Omega_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu(\Omega_n)}\alpha_n u_n \mu(\Omega_n)\right]\mathcal{X}_{\Omega_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n u_n \mathcal{X}_{\Omega_n}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n \\ &= x. \end{aligned}$$

En consecuencia, $P^2 = P$. Para verificar que $X$ es un subespacio complementado de $L_M$ es suficiente demostrar que $P$ es un operador lineal acotado y $P(L_M) = X$. (Ver [12] y [15]).
En efecto, sea $x \in L_M$ y $\alpha > 0$, haciendo uso de la desigualdad de Jensen

$$\varrho_M(\alpha P(x)) = \varrho_M(\alpha x) < \infty. \tag{2.38}$$

Eso implica que para cada $x \in L_M$ y $\alpha > 0$ $\alpha P(x) \in L_M$ y $\|\alpha P(x)\|_{L_M} \leq |\alpha| \|x\|_{L_M}$, en consecuencia

$$\|P\| = \sup_{\|u\|_{L_M} \leq 1} \|P(x)\|_{L_M} = \sup_{\|u\|_{L_M} \leq 1} \|x\|_{L_M} \leq 1.$$

Ahora, para demostrar que $P[L_M] = X$, como ya lo hemos indicado antes, para $x \in X$ $P(x) = x$, es decir, $X \subseteq P(L_M)$. Para verificar la otra inclusión, consideramos para $x \in L_M$

$$\alpha_n := \frac{1}{u_n \, \mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} x(t)dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} x(t)dt \right] \mathcal{X}_{\Omega_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\mu(\Omega_n)} u_n \, \mu(\Omega_n) \alpha_n \right] \mathcal{X}_{\Omega_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [u_n \alpha_n] \, \mathcal{X}_{\Omega_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in L_M. \end{aligned}$$

Note que

$$\infty > \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|_{L_M} \geq \|\alpha_k x_k\|_{L_M} = |\alpha_k| \, \|x_k\|_{L_M} \geq |\alpha_k| \frac{1}{1+\epsilon},$$

lo cual nos garantiza que $(\alpha_n)_n \in l^\infty$ y en consecuencia $P(x) \in X$. Luego, $P(L_M) \subseteq X$, completando la demostración. ♦

De forma similar se puede demostrar que

**Teorema 2.23** *Si $M \notin \Delta_2$, entonces $c_0$ es una casi copia complementada de $E_M$.*

**Corolario 2.24** $L_M$ *es separable si y sólo si $M \in \Delta_2$.*

**Teorema 2.25** *Si $M \notin \Delta_2$, entonces $L_M$ tiene un subespacio isométrico a $l^\infty$.*

**Demostración.**
Como $\epsilon_n > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \leq 1$ y conjuntos disjuntos dos a dos $\{\Omega_n\}$ medibles tales que $\mu(\Omega_n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como en el ejemplo 2.3, podemos elegir $x_n \in L_M$ tal que

$$\varrho_M(x_n \leq \epsilon_n), \qquad \|x_n\| \leq 1, \qquad Sopp\, x_n \subseteq \Omega_n.$$

De ello se deduce que

$$1 = \|x_n\|_{L_M} \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|_{L_M} \leq 1.$$

Definimos

$$X := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_n \in l^{\infty}\right\}, \quad T[(\alpha_n)_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \quad (\alpha_n)_n \in l^{\infty}.$$

Entonces para cada $(\alpha_n)_n \in l^{\infty}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|T[(\alpha_n)_n]\|_{L_M} &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\|_{L_M} \\ &\leq \|(\alpha_n)_n\|_{\infty} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|_{L_M} \\ &\leq \|(\alpha_n)_n\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \left\|T^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right]\right\|_{\infty} &= \|(\alpha_n)_n\|_{\infty} \\ &= \sup_n |\alpha_n| \\ &= \sup_n \|\alpha_n x_n\|_{L_M} \\ &\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\|_{L_M}. \end{aligned}$$

Como consecuencia

$$\|T\| = \sup_{\|(\alpha_n)_n\|_{\infty}} \|T[(\alpha_n)_n]\| \leq \sup_{\|(\alpha_n)_n\|_{\infty}} \|(\alpha_n)_n\|_{\infty} \leq 1.$$

Además,

$$\|T^{-1}\| = \sup_{\left\|\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right]\right\|_{L_M} \leq 1} \left\|T^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right]\right\|_{\infty} \leq \sup_{\left\|\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right]\right\|_{L_M} \leq 1} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\|_{L_M}$$

De donde $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ , lo que significa que $T : l^{\infty} \to X$ es una isometría. ♦

**Teorema 2.26** *Las siguientes son equivalencias:*

*(i)* $M \notin \Delta_2$

*(ii)* $L_M$ *tiene un subespacio isométrico a* $l^\infty$.

*(iii)* $l^\infty$ *es una copia casi isométrica complementada de* $L_M$.

*(iv)* $c_0$ *es una copia casi isométrica complementada de* $E_M$.

*(v)* $L_M$ *tiene un subespacio isométrico a* $C_0$.

**Notas y Observaciones.**

La mayoría del material en este capítulo han sido tomadas de [6], [10] y [16].

Capítulo 3

# Algunas propiedades geométricas de los espacios de Orlicz.

Al pensar en la bola unitaria cerrada de un espacio normado, generalmente estamos tentados en visualizar algunas bolas unitarias cerradas de los espacio Euclidiano, redondas y suaves.
Sin embargo, las bolas unitarias cerradas algunas veces no tienen tan buena forma.

El interés en las bolas de un espacio radica en que muchas propiedades de los espacios de Banach se caracterizan por su estructura y propiedades de de los puntos extremales en la esfera unitaria cerrada.

## 3.1. Rotundidad

La propiedad de rotundidad, definida en esta sección fue formulada, de forma independiente, por James Clarkson y Mark Krein. Clarkson tenía particular interés en la versión de uniformidad de esta propiedad y la establece en 1936; mientras que Krein utilizó esta propiedad en el trabajo conjunto con Naum Akhiezer en el problema de momentos.

Consideremos un subconjunto convexo $A$ de un espacio de Banach $X$. Un punto $x \in A$ es llamado **punto extremal** de $A$ si $2x = y + z$ y $y, z \in A$ implica que $y = z$. Esto es, una punto $x \in A$ es punto extremal de $A$ si no puede ser expresado como una combinación convexa de dos vectores de $A$.

Es válida la oportunidad para recordar que los puntos extremales pueden ser definidos en cualquier espacio lineal, sin necesidad de una estructura topológica o métrica. La descripción inicial de este fenómeno se le atribuye a Minkowski en su tratado de 1911 "*Gesammelte abhandlungen von hermann minkowski, unter mitwirkung von andreas speiser und hermann weyl hsg. von david hilbert* ".

El conjunto de todos los puntos extremales de $A$ es denotado por $Ext\,A$.
A menudo es conveniente saber si la desigualdad triangular es estricta para puntos no colineales en un espacio dado.

**Definición 3.1** *Si $Ext\,B_X = S_X$, decimos que el espacio es **rotundo** o **estrictamente convexo**, lo que denotamos por (R) (Ver [14]). Note entonces, que esto es equivalente a expresar que un espacio de Banach es rotundo si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ y $\|x\| = \|y\| = 1$ entonces $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$ para cada $0 < \lambda < 1$.*

Significa entonces que un espacio es rotundo si la esfera unitaria del espacio no contiene segmentos o que todo punto de la esfera es un punto extremal de la bola unitaria.
Aunque decimos que el espacio es rotundo, lo correcto es atribuirle la característica de rotundo a la norma; de hecho, si hay un par de normas equivalentes en $X$ la rotundidad puede presentarse en una de las normas y no en la otra.

**Definición 3.2** *Y si el conjunto de todos los puntos extremales fuertes de $B_X$ es igual a $S_X$, decimos que $X$ es un espacio rotundo local-uniformemente punto medio, denotaremos por (MLUR).*

Entre las caracterizaciones de espacios rotundos, que nos serán de utilidad mas tarde, se encuentra la siguiente proposición.

**Proposición 3.1** *Suponga que $X$ es un espacio normado. Entonces las siguientes son equivalencias:*

*(a) El espacio $X$ es rotundo.*

*(b) Cuando $x_1, x_2 \in X$ y $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ entonces uno de los vectores es múltiplo real no negativo del otro.*

Su demostración es relativamente sencilla y puede encontrarse en [13].

Sea $M$ una $N-$función. Un intervalo $[a, b]$ es llamado **intervalo de estructura afín** de $M$, o simplemente, SAI de $M$ si $M$ es afín sobre $[a, b]$ y no lo es sobre los intervalos $[a - \epsilon, b]$ o $[a, b + \epsilon]$ para cualquier $\epsilon > 0$. Note que esto significa entonces que $M[\lambda a + (1-\lambda)b] = \lambda M(a) + (1-\lambda)M(b)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Sean $\{[a_i, b_i]\}_i$ todos los intervalos de estructura afín de $M$. Se definen los conjuntos

$$S_M := \mathbb{R} - [\bigcup_i (a_i, b_i)] \quad \text{y} \quad S_M^0 := \mathbb{R} - [\bigcup_i [a_i, b_i]]$$

a $S_M$ se le llama el conjunto de **puntos estrictamente convexo** de $M$.

Note que si $M$ no tiene intervalos estructurales sobre un intervalo $[c, d]$, $M$ es estrictamente convexa en $[c, d]$.
Claramente, si $u, v \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$ y $\alpha u + (1 - \alpha)v \in S_M$, entonces

$$M[\alpha u + (1 - \alpha)v] < \alpha M(u) + (1 - \alpha)M(v). \tag{3.1}$$

Además, $0 \in S_M$ ya que $M(u) > 0$ si y sólo si $u \neq 0$. Por otra parte, como $\lim_{u \to 0} \frac{M(u)}{u} = 0$ y $\lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$ se pueden hallar infinitos puntos de $S_M$ cercanos al origen e infinitos puntos cercanos al infinito.

**Teorema 3.1** *$x \in Ext\, B_{L_M}$ si y sólo sí $\varrho_M(x) = 1$ y $Vol\, \{t \in \Omega : x(t) \notin S_M\} = 0$.*

**Demostración.**
*Para demostrar la condición necesaria*, consideramos $x \in Ext\, B_{L_M}$. Por la definición de punto extremal tenemos que $x \in B_{L_M}$, en cuyo caso $\|x\|_{L_M} \leq 1$. Entonces el teorema 2.10 nos garantiza que $\varrho_M(x) \leq \|x\|_{L_M} \leq 1$. Supongamos que $\varrho_M(x) < 1$ y hacemos $\epsilon = 1 - \varrho_M(x)$. Entonces, podemos elegir un conjunto medible $\Upsilon$ tal que

$$0 < \int_{\Upsilon} M(2x(t))dt \leq \epsilon.$$

Definimos

$$(y(t), z(t)) := \begin{cases} (x(t), x(t)) & t \in \Omega - \Upsilon \\ (0, 2x(t)) & t \in \Upsilon. \end{cases}$$

Entonces $y \neq z$, $y + z = 2x$ y

$$\varrho_M(y) = \int_{\Omega - \Upsilon} M(x(t)) < \int_{\Omega - \Upsilon} M(x(t)) + \int_{\Upsilon} M(2x(t)) = \varrho_M(z) < \varrho_M(x) + \epsilon = 1.$$

Esto significa que $y \neq z$ lo cual contradice, el supuesto inicial, que $x \in Ext\, B_{L_M}$, de lo cual podemos concluir lo que deseábamos, $\varrho_M(x) = 1$.

Supongamos ahora que $Vol\, \{t \in \Omega :\ x(t) \notin S_M\} > 0$. Ya que $\mathbb{R} - S_M$ es la unión, a lo sumo, de una cantidad numerable de intervalos abiertos, existe un intervalo abierto $(a, b)$ tal que

$$Vol\, \{t \in \Omega : x(t) \in (a + \epsilon, b - \epsilon)\} > 0 \qquad (\epsilon > 0) \tag{3.2}$$

y $M$ afín en $[a, b]$. Dividimos el conjunto en (3.2) en dos conjuntos $A$ y $B$ tales que $Vol\, A = Vol\, B$ y definimos

$$(y(t), z(t)) := \begin{cases} (x(t), x(t)) & t \in \Omega - (A \cup B) \\ (x(t) - \epsilon, x(t) + \epsilon) & t \in A, \\ (x(t) + \epsilon, x(t) - \epsilon) & t \in B. \end{cases}$$

Entonces $y \neq z$, $y + z = 2x$ y $\varrho_M(y) = \varrho_M(z) = \varrho_M(x)$, lo cual implica que $x = y = z$ en casi todas partes. De esta contradicción se concluye que $Vol\, \{t \in \Omega :\ x(t) \in S_M\} = 0$.

Supongamos ahora que $\varrho_M(x) = 1$. Sean $y, z \in B_{L_M}$. Dado que $M$ es convexa

$$\begin{aligned} 1 &= \varrho_M(x) \\ &= \int_\Omega M(x(t))dt \\ &= \int_\Omega M\left(\frac{y(t)+z(t)}{2}\right)dt \\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{M[y(t)]+M[z(t)]}{2}\right)dt \\ &= \varrho_M(y) + \varrho_M(z) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\|y\|_{L_M} + \|z\|_{L_M}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\int_\Omega M(x(t))dt = \int_\Omega \left(\frac{M[y(t)]+M[z(t)]}{2}\right)dt \qquad \text{en casi todas partes}$$

Ahora bien, si $0 < Vol\,\Omega < \infty$ y $Vol\,\{t \in \Omega : x(t) \notin S_M\} = 0$ se sigue que $x(t) = y(t) = z(t)$ en casi todas partes, esto es, $x = y = z$. Quedando así demostrado el teorema. ♦

**Teorema 3.2** *$M \in \Delta_2$ y $M$ es estrictamente convexo entonces $L_M$ es rotundo .*

**Demostración.**
Note que si $x \in Ext\,B_{L_M}$ el teorema 3.1 nos garantiza que $\varrho_M(x) = 1$, por lo tanto, $\|x\|_{L_M} = 1$, es decir, $Ext\,B_{L_M} \subseteq S_{L_M}$.

Si $x \in S_{L_M}$, como $M \in \Delta_2$, el teorema 2.15 nos garantiza que $\varrho_M(x) = 1$. Además, dado que $M$ es estrictamente convexa, se tiene que $Vol\,\{t \in \Omega : x(t) \notin S_M\} = 0$, así, del teorema 3.1 se obtiene que $x \in Ext\,B_{L_M}$. Con lo cual concluimos, bajo estas hipótesis, que $Ext\,B_{L_M} = S_{L_M}$. ♦

**Teorema 3.3** *$L_M$ es rotundo entonces $M$ es estrictamente convexa y $M \in \Delta_2$.*

**Demostración.**
Supongamos que $M$ no es estrictamente convexo, en cuyo caso existe $a \in \mathbb{R} - S_M$.
Ahora bien, como la medida de $\Omega$ es finita, (Ver el teorema 12 de [4]), podemos hallar un conjunto medible $E$ de manera que $Vol\,(\Omega - E) < \text{mín}\left\{\frac{1}{M(a)}, Vol\,(\Omega)\right\}$.
Luego,

$$\frac{1 - Vol\,(\Omega - E)M(a)}{Vol\,(E)} > 0,$$

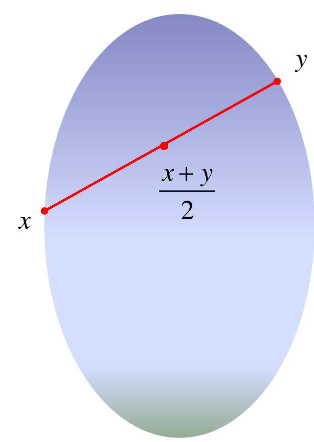
por lo tanto podemos elegir $b \in \mathbb{R}$ tal que $M(b) = \dfrac{1 - Vol\,(\Omega - E)M(a)}{Vol\,(E)}$. En consecuencia, si definimos, $x := a\mathcal{X}_{\Omega - E} + b\mathcal{X}_E$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(x(t))dt &= \int_{\Omega - E} M(a)dt + \int_E M(b)dt \\ &= Vol(\Omega - E)M(a) + Vol(E)M(b) = 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\|x\|_{L_M} = 1$. Sin embargo, si $t \in \Omega - E$ tendremos que $x(t) = a \notin S_M$, es decir, $\{t \in \Omega : x(t) \notin S_M\} \supseteq \Omega - E$, y éste último tiene medida positiva, así el teorema 3.1 garantiza que $x$ no es un punto extremal, y en consecuencia $L_M$ no es rotundo.

La segunda parte se sigue del ejemplo 2.3 y el teorema 3.1. ♦

Geométricamente, la rotundidad significa que ningún segmento puede están contenido en la esfera unitaria. Decimos que si $x, y \in S_X$ entonces su punto medio $\dfrac{x+y}{2}$ no lo está.




**Definición 3.3** *Un espacio de Banach $X$ se dice $k-$rotundo $(k \geq 1)$ y denotaremos por $(k-R)$ si $\|x_i\| = 1$ $(i = 1, 2, ..., k+1)$ y $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}\| = k + 1$ implica que $\{x_1, \cdots, x_{k+1}\}$ es linealmente dependiente.*

**Teorema 3.4** *$L_M$ es $k-$rotundo si y sólo si es rotundo.*

**Demostración.**
Se sigue de forma inmediata de la proposición 3.1. ♦
Consideremos las caracterizaciones mas comunes de espacios rotundos y las consecuencias inmediatas para los espacios de Orlicz.

**Teorema 3.5** *El espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es rotundo si y sólo si para cada $f \in X^*$ existe a lo más un punto en $B_X$ en el cual $f$ alcanza su máximo.*

**Demostración.**
Ver [13]

**Corolario 3.6** *$M \in \Delta_2$ y $M$ es estrictamente convexo si y sólo si para cada $x^* \in L_M^*$ existe a lo más un punto en $B_{L_M}$ en el cual $x^*$ alcanza su máximo.*

**Teorema 3.7** *Sean $X$ un espacio norma, $Y \subseteq X$, entonces cada $x^* \in Y^*$ admite una única extensión a $X$ que preserva la norma si y sólo si $X^*$ es rotundo.*

**Demostración.**
Ver [13]

**Corolario 3.8** *Si $Y \subseteq L_M$ entonces cada $x^* \in L_N$ admite una única extensión a $L_M$ que preserva la norma si y sólo si $M \in \Delta_2$ y $M$ es estrictamente convexa.*

**Teorema 3.9** *Si $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ son rotundos. Entonces $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ es rotundo.*

**Demostración.**
Ver [13]

**Corolario 3.10** *Si $M \in \Delta_2$ y $M$ es estrictamente convexa entonces $X := \prod_{i=1}^{n} L_{Mi}$ es rotundo.*

**Definición 3.4** *Sea $X$ une espacio normado. Definimos el módulo de convexidad de $X$ como la función*

$$\delta : [0, 2] \to [0, 1]$$

*tal que*

$$\delta(\epsilon) := \text{ínf}\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} : x, y \in S_X, \ \|x - y\| = \epsilon\}.$$

La importancia de esta función, $\delta(\epsilon)$, es hacer manejable la definición de rotundidad.

**Lema 3.11** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces $X$ es rotundo si y sólo si $\delta(2) = 1$.*

**Demostración.**
Ver [13].

**Corolario 3.12** *$M \in \Delta_2$ y $M$ es estrictamente convexa si y sólo $\delta(2) = 1$.*

**Teorema 3.13 (J.A. Clarkson)** *Cualquier espacio de Banach separable admite una norma equivalente a la norma original, con la cual el espacio es rotundo.*

**Demostración.**
Ver [13].

**Corolario 3.14** *El espacio $E_M$ admite una norma equivalente a la norma de Luxemburg, con la cual el espacio es rotundo.*

## 3.2. Propiedad $\lambda$

Sea $X$ un espacio de Banach. A cada $x \in B_X$, asociamos el número

$$\lambda(x) := \sup\{\lambda \in [0,1] : x = \lambda e + (1-\lambda)y,\ y \in B_X,\ e \in Ext\, B_X\}.$$

(a) Si $\lambda(x) > 0$, entonces llamaremos a $x$ un $\lambda$ **punto** de $B_X$.

(b) Si $\lambda(x) > 0$ para todo $x \in B_X$, entonces $X$ se dice que tiene la **propiedad** $\lambda$.

(c) Si

$$\lambda(X) := \sup\{\lambda(x) : x \in B_X\} > 0$$

se dice que $X$ tiene la **propiedad $\lambda$ uniformemente**.

Es bien conocido que si $X$ tiene la propiedad $\lambda$, entonces $B_X = \overline{co}\, Ext\, B_X$ y para cada elemento $x \in B_X$ puede ser expresado como $x = \sum \lambda_i e_i$, donde $e_i \in Ext\, B_X$ y $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Además, si $X$ tiene la propiedad $\lambda$ uniformemente, entonces la serie $x = \sum \lambda_i e_i$ converge uniformemente para todo $x \in B_X$.

**Proposición 3.2** *Sea $Ext\, B_X \neq \emptyset$. Si $x, y, z \in B_X$ y $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ para algún $\alpha \in (0,1)$. Entonces $\lambda(x) \geq \alpha\lambda(y)$. En consecuencia, $\lambda(0) = 1/2$ y*

$$\lambda(u) \geq \text{máx}\left\{\frac{1-\|u\|}{2}, \lambda\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\|u\|\right\}$$

**Demostración.**

Sea $\epsilon > 0$, existen $\beta \in [0,1]$, $e \in Ext\, B_X$ y $u \in B_X$ de manera que

$$y = \beta e + (1-\beta)u \qquad \text{y} \qquad \lambda(y) - \frac{\epsilon}{\alpha} < \beta. \tag{3.3}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha y &= \alpha\beta e + (1-\beta)\alpha u \\
x - (1-\alpha)z &= \alpha\beta e + (1-\beta)\alpha u \\
x &= \alpha\beta e + (1-\beta)\alpha u + (1-\alpha)z \\
x &= \alpha\beta e + [1-\alpha\beta]\frac{(1-\beta)\alpha u + (1-\alpha)z}{1-\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{(1-\beta)\alpha u + (1-\alpha)z}{1-\alpha\beta} \right\| &= \frac{\|(1-\beta)\alpha u + (1-\alpha)z\|}{1-\alpha\beta} \\
&\leq \frac{(1-\beta)\alpha\|u\| + (1-\alpha)\|z\|}{1-\alpha\beta} \\
&\leq \frac{(1-\beta)\alpha + 1 - \alpha}{1-\alpha\beta} \\
&= \frac{\alpha - \beta\alpha + 1 - \alpha}{1-\alpha\beta} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Eso implica que $\alpha\beta \leq \lambda(x)$. De 3.3

$$\begin{aligned}
\lambda(y) - \frac{\epsilon}{\alpha} &< \beta \\
\alpha\lambda(y) - \epsilon &< \alpha\beta \leq \lambda(x).
\end{aligned}$$

Dado que el $\epsilon$ es arbitrario, se concluye que $\alpha\lambda(y) \leq \lambda(x)$.
Note que, para $e \in Ext\, B_X$,

$$0 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{-\frac{1}{2}e}{1 - \frac{1}{2}}$$

Por lo tanto $\lambda(0) \geq \frac{1}{2}\lambda(e) = \frac{1}{2}$. Por otra parte, si $0 = \lambda e + (1-\lambda)y$ para algún $y \in B_X$, se tiene que

$$1 \geq \|y\| = \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

lo cual implica que $\lambda \leq \frac{1}{2}$, de lo cual concluimos que $\lambda(0) = \frac{1}{2}$.

Para finalizar, si $u \neq 0$ en $X$,

$$u = (1 - \|u\|)0 + \|u\| \frac{u}{\|u\|}.$$

En consecuencia,

$$\lambda(u) \geq \text{máx} \left\{ (1 - \|u\|)\lambda(0), \|u\|\lambda\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\} = \text{máx} \left\{ (1 - \|u\|)\frac{1}{2}, \|u\|\lambda\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\}.$$

♦

**Teorema 3.15** *Cualquier espacio de Orlicz $L_M$ tiene la propiedad $\lambda$.*

**Demostración.**
Por la proposición 3.2, si $x = 0$ se cumple el teorema dado que $\lambda(0) = \dfrac{1}{2}$ y sucede igual para $x \in Ext\, B_{L_M}$, en cuyo caso $\lambda(x) = 1$.
Consideramos ahora $x \in B_{L_M}$, $\|x\| = 1$ y $x \notin Ext\, B_{L_M}$. Consideramos el caso en que $\varrho_M(x) = 1$. En este caso, el teorema 3.1 nos garantiza que $\mu(\{t \in \Omega : x(t) \in \mathbb{R} - S_M\}) > 0$. Sean $([a_i, b_i])_i$ el conjunto de todos los SAIs.
Para cada $\lambda \in (0, 1)$, se define

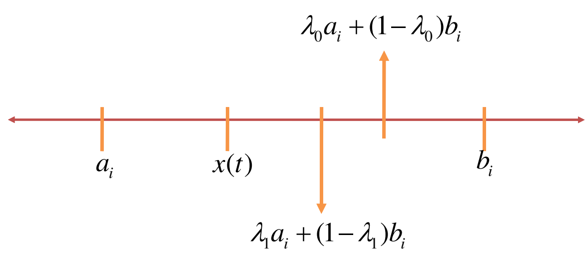
$$y_\lambda(t) := \begin{cases} b_i, & \lambda a_i + (1-\lambda)b_i < x(t) < b_i \quad \text{para algún}\, i \geq 1 \\ a_i, & a_i < x(t) \leq \lambda a_i + (1-\lambda)b_i \quad \text{para algún}\, i \geq 1 \\ x(t) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definamos la función $f(\lambda) := \varrho_M(y_\lambda)$, y veamos que es una función no decreciente.
Para $\lambda_0 \leq \lambda_1$ tendremos que $a_i + (1-\lambda_1)b_i \leq a_i + (1-\lambda_0)b_i$. Entonces para cada $t \in \Omega$ las posibilidades son:

- $x(t) \notin (a_i, b_i]$ para todo $i$, en ese caso, $y_{\lambda_0}(t) = y_{\lambda_1}(t) = x(t)$, por lo tanto,

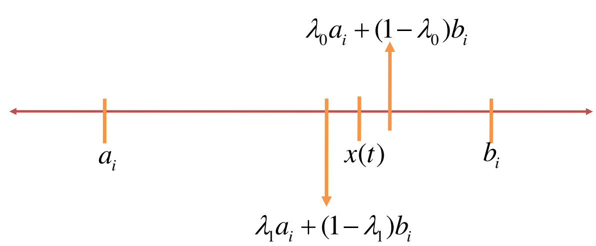
$$f(\lambda_0) = \int_\Omega M(y_{\lambda_0}(t))dt = \int_\Omega M(x(t))dt = f(\lambda_1).$$

- Si $x(t) \in (a_i, b_i]$ debemos considerar las siguientes posibilidades:




(i)
$a_i \leq x(t) \leq a_i + (1-\lambda_1)b_i \leq a_i + (1-\lambda_0)b_i$, de donde

$$y_{\lambda_0}(t) = y_{\lambda_1}(t) = a_i, \qquad \text{y así} \qquad f(\lambda_0) = \int_\Omega M(y_{\lambda_0}(t))dt = \int_\Omega M(y_{\lambda_1}(t))dt = f(\lambda_1).$$




(ii)

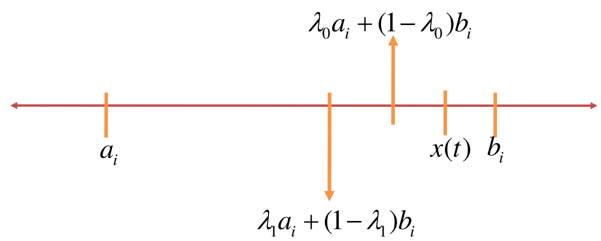
$a_i \leq a_i + (1-\lambda_1)b_i \leq x(t) \leq a_i + (1-\lambda_0)b_i$, de donde

$$y_{\lambda_1}(t) = b_i, \quad \text{y} \qquad y_{\lambda_0}(t) = a_i.$$

Entonces

$$f(\lambda_1) = \int_\Omega M(y_{\lambda_1}(t))dt = \int_\Omega M(b_i)dt \geq \int_\Omega M(a_i)dt = \int_\Omega M(y_{\lambda_0}(t))dt = f(\lambda_0).$$

(iii) Y finalmente,




$a_i \leq a_i + (1-\lambda_1)b_i \leq a_i + (1-\lambda_0)b_i \leq x(t) \leq b_i$, de donde

$$y_{\lambda_1}(t) = y_{\lambda_0}(t) = b_i.$$

Entonces

$$f(\lambda_1) = f(\lambda_0).$$

Con lo que se obtiene que $f$ es no decreciente y

$$\varrho_M(y_\lambda) \leq \left(1 + \frac{1}{1-\lambda}\right)\varrho_M(x) < \infty.$$

Hacemos entonces,

$$\sigma := \sup\{\lambda : f(\lambda) \leq 1\} \in (0,1)$$

Entonces, si definimos $\Omega_i = \{t \in \Omega : x(t) = \sigma a_i + (1+\sigma)b_i\}$ $(i \geq 1)$ entonces existe $E_i \in G_i$ $(i \geq 1)$ tal que $\varrho_M(y) = 1$, donde

$$y(t) := \begin{cases} b_i, & b_i > x(t) > \sigma a_i + (1-\sigma)b_i \quad \text{ó} \quad t \in E_i \qquad \text{para algún } i \geq 1 \\ a_i, & a_i < x(t) < \sigma a_i + (1-\sigma)b_i \quad \text{ó} \quad t \in \Omega_i - E_i \qquad \text{para algún } i \geq 1 \\ x(t) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Por el teorema 3.1 se garantiza que $y \in Ext\, B_{L_M}$. Sea $\sigma^{-1}[x-(1-\sigma)y]$ donde $\sigma \geq 1/2$. Entonces $x = (1-\sigma)y + \sigma z$ y $z(t) = y(t)$ cuando $y(t) = x(t)$. Si $y(t) = b_i$, entonces $a_i > x(t) > \sigma a_i + (1-\sigma)b_i$.

Por consiguiente,

$$b_i > x(t) \geq z(t) = \sigma^{-1}[x(t) - (1-\sigma)y(t)] \geq \sigma^{-1}[\sigma a_i + (1-\sigma)b_i - (1-\sigma)b_i] = a_i.$$

Si $y(t) = a_i$, entonces por $\sigma \geq 1/2$, también tendremos que

$$a_i < z(t) \leq \sigma^{-1}[\sigma a_i + (1+\sigma)b_i - (1-\sigma)a_i] = a_i + (\sigma^{-1} - 1)(b_i - a_i) \leq b_i.$$

Observando que $M$ es afín en cada intervalo $[a_i, b_i]$, se deduce que

$$1 = \varrho_M(x) = \varrho_M((1-\sigma)y + \sigma z) = (1-\sigma)\varrho_M(y) + \sigma\varrho_M(z) = 1 - \sigma + \sigma\varrho_M(z).$$

Esto demuestra que $\varrho_M(z) = 1$, así, $\lambda(x) \geq 1 - \sigma\sigma > 0$. De forma similar, i $0 < \sigma < 1/2$, entonces por definición de

$$z = \frac{1}{1-\sigma}(x - \sigma y),$$

podemos deducir que $\lambda(x) \geq \sigma > 0$.

Si $\varrho_M(x) < 1$, entonces para cualquier $\alpha \in (0,1)$, ya que $\varrho_M\left(\dfrac{x}{1-\sigma}\right) = \infty$, podemos seleccionar un conjunto medible $E$ tal que

$$\int_{\Omega - E} M(x(t))dt + \int_E M\left(\frac{x(t)}{1-\alpha}\right)dt = 1.$$

Sea $u = x_{|\Omega - E} + (1-\alpha)^{-1}x_{|E}$ y $v = x_{|\Omega - E}$. Entonces, $x = (1-\alpha)u + \alpha v$, $\varrho_M(u) = 1$ y $\varrho_M(v) < 1$. Así, $\lambda(u) > 0$ por la primera parte de la demostración. En consecuencia, la proposición 3.2 nos demuestra que $\lambda(x) \geq (1-\alpha)\lambda(u) > 0$. ♦

# Bibliografía


[1] Adams, Robert, *Sobolev Spaces*, Academic press, inc., Orlando, Florida,1975.

[2] J. Alexopoulos, *De La Vallée Poussin's theorem and weakly compact sets in Orlicz spaces*, QM (1994), N°17. 231 - 248.

[3] J. Alexopoulos, D. Bárcenas and V. Echandía, *Some Banach space characterizations of the $\Delta_2$ condition*, QM (2003).

[4] G. De Barra, *Introduction to Measure Theory.*New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1974.

[5] Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry*, Mathematics studies, N° 68, North-Holland, 1982.

[6] Chen Shoutao, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertationes mathematicae (Rozprawy matematyczne), Warszawa, 1996.

[7] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators part I: General theory*, Wiley Classics library edition, Wiley Interscience, 1988.

[8] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer Verlag, 1984.

[9] P. Habala, P. Hajek and V. Zizler: *Introduction to Banach spaces I, II.* Lecture Notes, Matfyzpress (Charles University, Prague) (1996).

[10] Krasnosel'skiĭ and Ya. B. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlicz spaces*, Printed in The Neherlands, P.Noordhoff LTS, 1961.

[11] W.Luxemburg, *Banach function spaces* (Thesis), Technische Hogeschool te Delft, Netherlands (1953)

[12] H. Mazaheri and M. Nasri, *Complemented Subspaces in the Normed Spaces.* International Mathematical Forum, 2, 2007, no. 16, 747 - 751.

[13] Robert E. Megginson, *An Introduction To Banach Space Theory.* graduate texts in matematics.Springer. 1998.

[14] Morrison Terry J., *FUNCTIONAL ANALYSIS.* An Introduction to Banach Space Theory. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts. 2001.

[15] Plichko Anatolij and Yost David, *Complemented and uncomplemented subspaces of Banach Spaces*. Extracta Mathematicae, Vol. 15, Núm 2, 335-371 (2000).

[16] Rao M.M and Ren Z.D, *Theory of Orlicz spaces.*Marcel Dekker, Inc. New York, 1991.

[17] TURRET,B.: *Rotundity of Orlicz spaces*. Proc.Konink.Nederl. Akad.Wet. Amsterdam, A, 79 (5) (1976). 462 - 469.

[18] Yosida Kôsaku, *Functional Analysis*. Springer - Verlag Berlin , Fourth Editión, 1974.

[19] W. Orlicz, *Ueber eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus* Bull. Intern. Acad. Pol. Ser. A, 8/9, (1932) pp $207 - 220$.

[20] T. Wang, Z. Ren and Y. Zhang, *On UR point and WUR point of Orlicz spaces*, J. Math. 13 (1993), 443-452.

# Índice alfabético

# Espacios de Orlicz y algunas de sus propiedades geométricas

*Mireya R. Bracamonte P.*

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto 2009

# Espacios de Orlicz y algunas de sus propiedades geométricas

Por

*Mireya R. Bracamonte P.*

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de agregado en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología.

Barquisimeto 2009

# RESUMEN

En los espacios clásicos $L^p$ la función $t^p$ juega un papel muy importante papel, que habían sido introducidos por F. Riesz en 1910 y 1913 respectivamente. Una generalización natural de estos espacios es sustituir esta función por otra función $M$. Esta fue presentada por W. Orlicz en 1932, en el artículo : Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B en Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, 8 / 9, 207-220, donde la función $M$ presenta una condición adicional (la cual posteriormente será llamada condición $\Delta_2$ para $M$ ), y él mismo presenta su generalización en 1936.
Al intentar substituir ésta función por una función general $M$, y W. Orlicz comprobó las restricciones que se deberían imponer a $M$ para que el conjunto de las funciones tales $\int_\Omega M(f(x))dx < \infty$, sea un espacio de Banach y en este proceso, surgen las definiciones de *funciones de Orlicz* o $N-$*funciones*.

En este trabajo se presenta un estudio detallado de las $N-$funciones que es de interés independientemente del resto del trabajo, en la medida en que se aplican ampliamente en diversas ramas de las matemáticas. Seguido de la descripción de la clase de Orlicz, sus características ante la presencia y ausencia de la condición $\Delta_2$. Además, se describen los funcionales necesarios para describir el espacio de Banach que es llamado *espacio Orlicz*.

Finalmente se incluyen algunas nociones topológicas y geométricas de los mismos, que nos permitan aplicar nociones e intuiciones geométricas al estudio estos espacios.