Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemática

Métodos de Sumabilidad en Espacios de Banach

Br. Yhon Meza
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemática

Tutor: Dr. Ebner Pineda

Área de Conocimiento: Análisis.

Dedicatoria

Al nombre sobre todo nombre *“Jesús”* Dios y hombre verdadero, principio y fin. A María madre de Dios y madre nuestra quien me ayudó y me ayuda siempre en este camino. A mis padres y esposa y en especial a mi madre y mi hijo Miguel Alejandro Te amo hijo.

“Cristo y yo mayoría aplastante”.

Agradecimientos

A mi padre *Dios todopoderoso*, uno y trino pilar de mi existencia y a mi madre celestial *María*, madre de Dios por llevarme de la mano por el camino del bien.

A mis padres terrenales Herminda y victor Manuel gracias por darme la vida y por acompañarme y animarme siempre. Este y todos los triunfos que vienen son de ustedes... ¡los amo!

A mi esposa Maria Andreina, por tu amor y apoyo incondicional. Eres uno de mis grandes pilares, “te amo”.

A mis hermanos Carolina, Paola, Javier y Alexander gracias por estar siempre a mi lado. Han sido mi inspiración.

A toda mi famila por su apoyo incondicional

A mi tutor Ebner Pineda por su paciencia y dedicación, desde que comencé este camino, muchas gracias.

Al profesor Ismael Huerta, que más que un profesor es un guía, que me ha brindado conocimientos durante toda la carrera.

Resumen

Sea $\mathcal{M}$ una matriz doblemente infinita de números complejos:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} & \dots \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \dots \\ & & \vdots & & \\ \alpha_{m0} & \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} & \dots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Dada una sucesión (s_n) en un espacio de Banach E, se definirá otra sucesión $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ mediante la formula

$\sigma_m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} s_n \quad y \quad m = 0, 1, 2, ...$

Si $\sigma_m \to s$ en E diremos que (s_n) $\big($ ó la serie cuya sucesión de sumas parciales es $(s_n)\big)$ es sumable a s por medio de la matriz $\mathcal{M}$ o que es $\mathcal{M}$-sumable a s.

Nos preguntamos que condiciones sobre la matriz $\mathcal{M}$ garantizarán que si la sucesión (s_n) converge en E y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, entonces (s_n) es $\mathcal{M}$-sumable a s.

Diremos que la matriz $\mathcal{M}$ es un Método regular de sumabilidad sobre E si se cumple que para toda sucesión (s_n) que converge a s en E se tiene que (s_n) es $\mathcal{M}$-sumable a s.

En este trabajo estudiaremos y desarrollaremos detalladamente la sección 12.5 de [5] pero adaptando los resultados a espacios de Banach arbitrarios.

Índice general

Dedicatoria I

Agradecimientos III

Resumen V

1. Introducción 1

2. Preliminares 3
- 2.1. Espacios vectoriales . . . 3
- 2.2. Espacios métricos . . . 4
  - 2.2.1. Espacios normados . . . 5
- 2.3. Sucesiones . . . 5
  - 2.3.1. Convergencia de Sucesiones . . . 6
- 2.4. Completitud . . . 8
- 2.5. Series . . . 8
  - 2.5.1. Convergencia de series . . . 9

3. Métodos de Sumabilidad en Espacios de Banach 13
- 3.1. Método de las Medias Aritméticas . . . 21
- 3.2. Método de Abel . . . 24

1 Introducción

El propósito de este trabajo especial de grado es extender la teoría de Métodos de sumabilidad en el plano complejo a los espacios de Banach. Como por ejemplo el Método de Cesáro y de Abel para lo cuales se redefinirán y demostraran en espacios de Banach algunos teoremas tales como:

Teorema

Sean $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach, $(s_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en E, M una matriz infinita y $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ en E donde esta se definirá en el capítulo 3.

Si las componentes de la matriz M cumple lo siguiente:

1. Existe $B > 0$, tal que $(\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}|) \leq B$, para todo $m \in \mathbb{N}$.
2. $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} = 1$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{m\to+\infty} \alpha_{mn} = 0$.

Entonces M es un Método regular de sumabilidad.

Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ una serie de elementos de E. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ es no tangencial Abel sumable con suma s, entonces tal serie es Abel sumable con suma s.

Teorema de Abel-Stolz

Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de elementos de E converge a $s \in E$, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ es no tangencial Abel sumable y Abel sumable con suma s.

Teorema

Si $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ es una serie de elementos de E sumable por el Método de Cesáro con suma $s \in E$, entonces $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ es Abel sumable y no tangencial Abel sumable con suma s.

Teorema Tauberiano

Si una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ de elementos en E es Abel sumable con suma $s \in E$ y $u_n = o(\frac{1}{n})$ cuando $n \to +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge a s.

Adicionalmente veremos un ejemplo de serie no convergente, la cual es Cesáro Sumable, por tanto Abel sumable y Abel no tangencial sumable y otro ejemplo en donde no hay convergencia usual de una serie, sin embargo es no tangencial Abel sumable.

2 Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar el marco conceptual sobre el que se ubica el trabajo. A continuación introduciremos un conjunto de definiciones y algunas propiedades de los objetos matemáticos que lo sustentan: teoría de espacios de Banach y nociones elementales de series y sucesiones. Gran parte de las demostraciones de los enunciados son omitidas; las mismas pueden encontrarse en libros de topología de espacios métricos y de series y sucesiones en espacios de Banach, por ejemplo [6] y [9].

2.1. Espacios vectoriales

Definición 2.1. *Sea E un conjunto no vacío. Diremos que E es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, si existen dos operaciones binarias $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$, con las siguientes propiedades algebraicas:*

(1) E es un grupo abeliano con respecto a la suma, es decir:

(1.1) Para todo $x, y \in E$: $x + y = y + x$.

(1.2) Para todo $x, y, z \in E$: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(1.3) Existe un único $\oslash \in E$, tal que para todo $x \in E$ se cumple: $x + \oslash = x = \oslash + x$.

(1.4) Para todo $x \in E$, existe un único $-x \in E$, tal que: $x + (-x) = \oslash = (-x) + x$.

(2) La multiplicación por escalar verifica:

(2.1) Para todo $x \in E$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha(\beta.x) = (\alpha.\beta)x$.

(2.2) Para todo $x \in E$: $1.\ x = x = x.1$, (1 la identidad en $\mathbb{K}$).

(2.3) Para todo $x \in E$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $x(\alpha + \beta) = x.\alpha + x\beta$.

(2.4) Para todo $x, y \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.

Adicionalmente un espacio vectorial E cumple;

$$\text{Para todo } x \in E,\ 0.x = \oslash = x.0 \text{ (0 es el elemento neutro de } \mathbb{K}.)$$

Por otro lado, siempre que no se especifique el campo $\mathbb{K}$, entenderemos que se trata de $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1. *El conjunto $\mathbb{R}$, sobre el campo $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar.*

Ejemplo 2.2. *El conjunto $\mathbb{C}$, sobre el campo $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar.*

2.2. Espacios métricos

Definición 2.2. *Un espacio métrico es un par (M, d), donde M es un conjunto no vacío y $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una función llamada métrica en M que satisface los siguientes axiomas:*

(1) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in M$.

(2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$.

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$.

Se dice que el axioma (3) es la propiedad de simetría que debe tener cualquier noción de distancia; y el axioma (4) se conoce como desigualdad triangular.

Ejemplo 2.3. *La métrica euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) se define como*

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

2.2.1. Espacios normados

Definición 2.3. *Un espacio normado es un par* $(E, \|.\|)$ *formado por un espacio vectorial* E *y una función* $\|.\| : E \to \mathbb{R}$*, llamada norma con las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$*, para todo* $x \in E$*.*

2. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = \emptyset$*.*

3. $\|\alpha.x\|$=$|\alpha|.\|x\|$*, para todo* $x \in E$ *y todo escalar* α*.*

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*, para todo* $x, y \in E$*.*

La propiedad (4) se conoce como desigualdad triangular. Ahora ilustraremos esta definición con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.4. $\mathbb{R}^n$ *(n≥1) es un espacio normado con la norma euclidiana que se define como sigue,*

$$\|x\|_e = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$*.*

Ejemplo 2.5. $C_0([a, b])$ *el conjunto de las funciones continuas definidas sobre* $[a, b]$ *a valores en* $\mathbb{R}$*, es un espacio normado con norma,*

$$\|f\| = \text{máx}\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

Ejemplo 2.6. *Todo espacio normado* $(E, \|.\|)$ *es métrico, donde la métrica a considerar es* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *dada por,* $d(x, y) = \|x - y\|$*.*

2.3. Sucesiones

Definición 2.4. *Sea* M *un conjunto no vacío. Una sucesión en* M *es una función* $X : \mathbb{N} \to M$*, donde* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...., n...\}$*. Además, cada elemento* $X(n)$ *es denotado por* x_n *y a tal sucesión la denotaremos como* $(x_n)_{n\geq 0}$*.*

Definición 2.5. *La restricción de una sucesión a un subconjunto infinito* $N_1 \subset \mathbb{N}$ *es llamada subsucesión de* $(x_n)_{n\geq 0}$*.*

2.3.1. Convergencia de Sucesiones

Definición 2.6. *Sean (M, d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en M y $b \in M$. Diremos que $(x_n)_{n\geq 0}$ Converge a b o que b es límite de $(x_n)_{n\geq 0}$, denotado como $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ o $x_n \to b$, si cumple lo siguiente:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists k = k(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geq k \Rightarrow d(x_n, b) < \epsilon.$$

Observación 2.1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, entonces b es único y lo llamaremos el límite de la sucesión, además diremos que una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ en M es convergente en M, si existe un $b \in M$ tal que $x_n \to b$.*

Definición 2.7. *Una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ en un espacio métrico (M, d) es acotada si existe un $B > 0$, tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(x_n, x_m) \leq B$.*

Proposición 2.1. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Definición 2.8. *Sean $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ una función y $a \in M$. Diremos que f es continua en a si,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon, a) > 0 : x \in M,\ d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Teorema 2.1. *Sean $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ una función y $b \in M$. f es continua en b si y sólo si $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge a $f(b)$, para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ en M convergente a b.*

La prueba se puede ver con detalles en [6] (página 125).

Definición 2.9. *Sean $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ una función, $a \in M$ y $b \in N$. Diremos que b es límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, denotado por $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ si:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : x \in M,\ 0 < d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), b) < \epsilon.$$

Proposición 2.2. *Sean $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ una función, $a \in M$ y $b \in N$. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, si y sólo si $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge a b, para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ en M con límite a.*

La prueba es analoga a la del teorema (2.1).

Definición 2.10. *Sea* $(x_n)_{n\geq 0}$ *una sucesión en un espacio métrico* (M,d)*. Diremos que* $(x_n)_{n\geq 0}$ *es de Cauchy si,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} :\ n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Teorema 2.2. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Proposición 2.3. *Sean* $(x_n)_{n\geq 0}$ *una sucesión en un espacio métrico* (M,d) *y* $b \in M$*.* $(x_n)_{n\geq 0}$ *converge a* b *si y sólo si* $(x_{2n})_{n\geq 0}$ *y* $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ *convergen a* b*.*

Definición 2.11. *Sean* $(x_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión en un espacio normado* $(E, \|.\|)$ *y* $(y_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathbb{K}$ *donde* $y_n \neq 0$ *para todo* $n \geq 1$*. Diremos que* $x_n = o(y_n)$*, cuando* $n \to +\infty$ *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \oslash$*.*

Proposición 2.4. *Sean* $(s_n^k)_{n\geq 0}$ *y* b_k *con* $k \in A = \{1, 2, 3...m\}$ *sucesiones y elementos respectivamente en un espacio normado* $(E, \|.\|)$*. Si* $(s_n^k)_{n\geq 0}$ *converge a* b_k *para todo* $k \in A$*, entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} s_n^k = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k$*.*

Demostración: De la definición de convergencia de una sucesión obtenemos para cada $k \in A$ lo que sigue, dado $\epsilon > 0$ existe $N_k = N_k(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq N_k$ se cumple,

$$\|s_n^k - b_k\| < \frac{\epsilon}{m}.$$

Ahora, como A es finito, entonces tomando N=$\max\{N_k : k \in A\}$ se tiene que, dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se cumple,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=1}^{m} s_n^k - \sum_{k=1}^{m} b_k\| &= \|\sum_{k=1}^{m} s_n^k - b_k\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \|s_n^k - b_k\| \\
&< \sum_{k=1}^{m} \frac{\epsilon}{m} \\
&= m\frac{\epsilon}{m} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} s_n^k = \sum_{k=1}^{m} b_k$. $\square$

2.4. Completitud

Definición 2.12. *Un espacio métrico* (M, d) *se dice completo, si toda sucesión de Cauchy en* M *es convergente en* M.

Definición 2.13. *Un espacio vectorial normado* $(E, \|.\|)$ *se dice que es de Banach, si* E *es completo con la métrica inducida por la norma* $\|.\|$.

Ejemplo 2.7. $C_0([a, b])$ *el conjunto de las funciones continuas definidas sobre* $[a, b]$ *a valores en* $\mathbb{R}$, *es un espacio de Banach con la norma,*

$$\|f\| = \text{máx}\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Ejemplo 2.8. $C_0([0, 1])$ *el conjunto de las funciones continuas definidas sobre* $[0, 1]$ *a valores en* $\mathbb{R}$, *no es un espacio de Banach con la norma,*

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Ejemplo 2.9. *El espacio* $\mathbb{C}^n$ *y* $\mathbb{R}^n$ *con* $(n \geq 1)$ *es de Banach con la norma euclidiana.*

Ejemplo 2.10. *Sea* (M, d) *un espacio métrico donde* d *es la métrica cero uno que se define como sigue,*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \;\; si\; x = y \\ 1 \;\; si\; x \neq y \end{cases}$$

Entonces M no es completo.

2.5. Series

Definición 2.14. *Sea* $(x_n)_{n\geq 0}$ *una sucesión en un espacio vectorial* E. *Llamaremos serie de los* x_n *al símbolo* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Ahora dado $k \in \mathbb{N}$ *definamos a* $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$*, entonces diremos que* $(s_k)_{k\geq 0}$ *es la sucesión de sumas parciales de la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *.*

2.5.1. Convergencia de series

Definición 2.15. *Una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *en un espacio vectorial* E*, converge (o tiene como suma) a* $b \in E$*, si la sucesión de sumas parciales* $(s_n)_{n\geq 0}$ *converge a* b*, en tal caso escribiremos* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = b$*.*

Observación 2.2. *Sea* C *el conjunto de las series convergentes en un espacio vectorial normado* $(E, \|.\|)$ *sobre el campo* $\mathbb{K}$*, entonces* C *es un espacio vectorial sobre el campo* $\mathbb{K}$*.*

Definición 2.16. *Sea* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *una serie en un espacio vectorial normado* $(E, \|.\|)$*. Se dice que la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *converge absolutamente en* E *si la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$ *converge en* $\mathbb{R}$*.*

Teorema 2.3. *Sea* $(E, \|.\|)$ *un espacio vectorial normado.* E *es un espacio de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Para la prueba ver [10] (página 49)

Teorema 2.4 (Producto de Cauchy en E)**.** *Sea* E *un espacio de Banach sobre un campo* $\mathbb{K}$ *y sean* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *una serie de elementos de* E *y* $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ *una serie de elementos en el campo* $\mathbb{K}$*, las cuales convergen a* $A \in E$ *y* $B \in \mathbb{K}$ *respectivamente. Si una de esta series converge absolutamente, entonces* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ *converge, donde* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *y además* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = AB$*.*

Demostración: Supongamos sin perdida generalidad que la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolutamente, es decir $\sum_{k=0}^{+\infty} \|a_k\| = D > 0$, luego definamos $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $d_n = B - B_n$ y $e_n = \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}$. Entonces,

$$\begin{aligned} C_p &= \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{n} f_n(k). \end{aligned}$$

donde

$$f_n(k) = \begin{cases} a_k b_{n-k} \text{ si } n \geq k \\ 0 \text{ si } n < k \end{cases}$$

Así, desarrollando la doble suma que define a C_p obtenemos que,

$$\begin{aligned} C_p &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{n=k}^{p} f_n(k) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{n=k}^{p} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{n=k}^{p} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{m=0}^{p-k} b_m \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k B_{p-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k (B - d_{p-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k B - \sum_{k=0}^{p} a_k d_{p-k} = A_p B - e_p. \end{aligned}$$

Para completar la demostración, es suficiente probar que $\lim_{p\to+\infty} e_p = 0$.

Por otro lado, como la sucesión $(d_n)_{n\geq 0}$ converge a 0, entonces $(d_n)_{n\geq 0}$ es acotada, es decir existe $M > 0$ tal que, $|d_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También por la convergencia de la sucesión $(d_n)_{n\geq 0}$ se tiene para $\dfrac{\epsilon}{2D}$ que existe $N_1(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq N_1$ se cumple, $|d_n| < \dfrac{\epsilon}{2D}$; mientras que por la convergencia absoluta de la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ obtenemos para $\frac{\epsilon}{2M}$ que existe $N_2(\epsilon)$ tal que para $n \geq N_2$ se cumple que,

$$\begin{aligned} |\sum_{k=0}^{+\infty} \|a_k\| - \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|a_k\| \\ &< \frac{\epsilon}{2M}. \end{aligned}$$

Luego, tomando $N = N(\epsilon) = \max\{N_1, N_2\}$ obtenemos,

$$\begin{aligned} p > 2N \Rightarrow \|e_p\| &\leq \sum_{k=0}^{N} \|a_k d_{p-k}\| + \sum_{k=N+1}^{p} \|a_k d_{p-k}\| \\ &< \frac{\epsilon}{2D} \sum_{k=0}^{N} \|a_k\| + M \sum_{k=N+1}^{p} \|a_k\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2D} \sum_{k=0}^{+\infty} \|a_k\| + M \sum_{k=N+1}^{+\infty} \|a_k\| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\lim_{p \to +\infty} e_p = \oslash$. Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = AB.$$

$\square$

Proposición 2.5. *Sea* $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ *una serie de elementos en* $\mathbb{C}$. *Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \text{ para todo } |z| < 1.$$

3 Métodos de Sumabilidad en Espacios de Banach

En este capítulo trataremos métodos de sumabilidad, para ello consideremos un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$. Ahora, antes de introducir los métodos enunciaremos y demostraremos un teorema general, para esto necesitamos la siguiente información.

Dada una matriz infinita

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & . & . & . & \alpha_{0n} & . & . & . \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & . & . & . & \alpha_{1n} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{m0} & \alpha_{m1} & . & . & . & \alpha_{mn} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_{mn} \in \mathbb{C}$ para $m, n \in \mathbb{N}$ y $(s_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en E, entonces definamos a la sucesión $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ por,

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} s_n, \text{ para todo m} \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Definición 3.1. *Sean $(s_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en E, M una matriz infinita y $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ definida como antes. Se dice que $(s_n)_{n\geq 0}$ es sumable con límite s por medio de la matriz M, siempre que $\sigma_m \in E$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{m\to+\infty} \sigma_m = s \in E$.*

Definición 3.2. *Una serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ de elementos de E es sumable con suma s por medio de la matriz M, si la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ de sumas parciales de tal serie es sumable con límite s por medio de la matriz M.*

Definición 3.3. *Sean M una matriz con componentes α_{mn} donde $m, n \in \mathbb{N}$ y E un espacio de Banach. Se dice que M es un Método regular de sumabilidad sobre E, si toda sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ convergente con límite $s \in E$, es sumable por medio de la matriz M con límite s.*

Ahora, enunciaremos el siguiente teorema general.

Teorema 3.1. *Sean $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach y M una matriz infinita con componentes α_{mn} y $m, n \in \mathbb{N}$. Ahora, supongamos que las componentes de la matriz M cumplen lo siguiente:*

1. *Existe $B > 0$, tal que $(\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}|) \leq B$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

2. $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} = 1$.

3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$; $\lim_{m\to+\infty} \alpha_{mn} = 0$.*

Entonces M es un Método regular de sumabilidad sobre E.

Demostración: Sea $(s_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en E que converge a $s \in E$ y demostremos que la sucesión $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ definida como en (3.1) converge a s. Probemos primero que $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ es una sucesión en E. En efecto, por la definición de la sucesión $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ obtenemos para cada m $\in \mathbb{N}$,

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} s_n.$$

De aquí y del hecho que E es un espacio vectorial se obtiene para cada $m \in \mathbb{N}$ que σ_m es una serie de elementos de E.

Ahora, sea $m \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario. Luego, de las propiedades de norma y de la definición de σ_m tenemos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\alpha_{mn} s_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| \|s_n\|. \tag{3.2}$$

Además, de la convergencia de $(s_n)_{n\geq 0}$ obtenemos que la sucesión es acotada. Es decir, existe $K > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\|s_n\| \leq K$. De esto y de la ecuación (3.2) se tiene que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \|\alpha_{mn} s_n\| &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| \|s_n\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| . K \\
&= K \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| .
\end{aligned}$$

Así, $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\alpha_{mn} s_n\| \leq K. \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}|$. De acá y de la hipótesis 1,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \|\alpha_{mn} s_n\| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| . K \\
&\leq B.K \\
&< +\infty .
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} s_n$ converge absolutamente. Esto y la completitud de E implican la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} s_n$ en E, es decir $\sigma_m \in E$ para todo $m \in \mathbb{N}$, así $(\sigma_m)_{m \geq 0}$ es una sucesión en E.

Ahora, demostremos que la sucesión $(\sigma_m)_{m \geq 0}$ converge a s, para esto reescribimos a s_n como sigue;

$$s_n = s + e_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Donde la sucesión $(e_n)_{n \geq 0}$ esta dada por $e_n = s_n - s$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí, y de la convergencia de la sucesión $(s_n)_{n \geq 0}$ a s, concluimos que la sucesión $(e_n)_{n \geq 0}$ converge a $\oslash$. Por tanto, $(e_n)_{n \geq 0}$ es acotada. Es decir, existe $K_1 > 0$ tal que $\|e_n\| \leq K_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, de la hipótesis 1 y del hecho que $(e_n)_{n\geq 0}$ es acotada obtenemos,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \|\alpha_{mn} e_n\| &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}|.\|e_n\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}|.K_1 \\ &\leq B.K_1 \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\alpha_{mn} e_n\|$ converge. Por otro lado, de la hipótesis 1 y del hecho que $s \in E$ se obtiene,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \|\alpha_{mn}.s\| &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}|.\|s\| \\ &= \|s\| \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| \\ &\leq B.\|s\| \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.s$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} e_n$ convergen absolutamente, entonces obtenemos que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.s$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} e_n$ convergen en E. Así, de la convergencia de dichas series se tiene que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.(s+e_n)$ converge y además,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.(s+e_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.s + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} e_n.$$

De acá y del hecho que $s_n = s + e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtenemos lo que sigue,

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.s_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.(s + e_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.s + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.e_n. \end{aligned}$$

Dado que m es arbitrario, entonces $\sigma_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.s + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.e_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
Además, la hipótesis 2 y el hecho que s es fijo tienen como consecuencia que,

$$\begin{aligned} \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.s &= s \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} \\ &= s.1 \\ &= s. \end{aligned}$$

Ahora, demostremos que $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.e_n = \oslash$, para esto definamos para cada $m \in \mathbb{N}$ a $p_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.e_n$, entonces por la convergencia de la sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$ a $\oslash$ tenemos que dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 = N_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_0$ se cumple,

$$\|e_n\| < \frac{\epsilon}{2B}.$$

En lo sucesivo se utilizará el ϵ anterior. Por otra parte, consideremos para cada $m \in \mathbb{N}$ a

$$\beta_m = \sum_{n=0}^{N_0} \alpha_{mn}.e_n \quad \text{y} \quad \gamma_m = \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \alpha_{mn}.e_n.$$

Así,

$$\begin{aligned} p_m &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.e_n \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \alpha_{mn}.e_n + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \alpha_{mn}.e_n \\ &= \beta_m + \gamma_m. \end{aligned}$$

Por tanto $p_m = \beta_m + \gamma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Además, de la propiedades de norma,

$$\begin{aligned} \|\gamma_m\| &= \|\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \alpha_{mn}.e_n\| \\ &\leq \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \|\alpha_{mn}.e_n\| \\ &= \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |\alpha_{mn}|.\|e_n\|. \end{aligned}$$

Así, $\|\gamma_m\| \leq \displaystyle\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |\alpha_{mn}|.\|e_n\|$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De aquí y del hecho que $\|e_n\| < \dfrac{\epsilon}{2B}$, para todo $n \geq N_0$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \|\gamma_m\| &\leq \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |\alpha_{mn}|.\|e_n\| \\ &< \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |\alpha_{mn}|.\frac{\epsilon}{2B} \\ &= \frac{\epsilon}{2B} \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |\alpha_{mn}| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2B} \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}|. \end{aligned}$$

Luego, $\|\gamma_m\| < \dfrac{\epsilon}{2B}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_{mn}|$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Esta última desigualdad en conjunto con la hipótesis 1 implican,

$$\begin{aligned}\|\gamma_m\| &< \frac{\epsilon}{2B}\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_{mn}| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2B}.B \\ &= \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Así, para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\|\gamma_m\| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Por otro lado, de la definición de la sucesión $(\beta_m)_{m\geq 0}$, de la hipótesis 3 y de la proposición (2.4) se obtiene que $(\beta_m)_{m\geq 0}$ converge a $\oslash$. Entonces, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que para $m \geq N$ se tiene,

$$\|\beta_m\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De esto y del hecho que $\|\gamma_m\| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, se concluye que,

$$\begin{aligned}m \geq N \Rightarrow \|p_m\| &= \|\beta_m + \gamma_m\| \\ &\leq \|\beta_m\| + \|\gamma_m\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Es decir, $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} p_m = \oslash$. Por tanto, $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{mn}.e_n = \oslash$ y en consecuencia:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\sigma_m &= \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{mn}.(s+e_n) \\ &= \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{mn}.s + \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{mn}.e_n \\ &= s + \oslash \\ &= s.\end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{m\to+\infty} \sigma_m = s$, por tanto $(s_n)_{n\geq 0}$ es sumable por medio de la matriz M con suma s y como $(s_n)_{n\geq 0}$ es arbitraria en E, entonces M es un Método regular de sumabilidad. $\square$

Observación 3.1. *Notemos que la hipótesis 2 del teorema (3.1) se utilizó unicamente en la demostración de,*

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}.s = s.$$

Entonces en el caso que una sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ *sea convergente a* $s = \oslash$*, la hipótesis 2 no es necesaria para probar que* $(s_n)_{n\geq 0}$ *sea sumable por medio de una matriz* M*, siempre y cuando la matriz cumpla las hipótesis 1 y 3 del teorema anterior.*

Definición 3.4. *Sea* H *una matriz con componentes* α_{mn} *y* $m, n \in \mathbb{N}$*. Se dice que* H *es positiva, si* $\alpha_{mn} \geq 0$*, para todo* $m, n \in \mathbb{N}$*.*

Observación 3.2. *Si la matriz* M *del teorema (3.1) es positiva, entonces la hipótesis 1 se obtiene de la hipótesis 2. Esto se debe a lo siguiente, sabemos por la hipótesis 2 que la sucesión* $(k_m)_{m\geq 0}$*, donde* $k_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$*, es convergente con límite 1, esto implica que* $(k_m)_{m\geq 0}$ *es acotada, es decir, existe un* $L > 0$ *tal que* $\mid k_m \mid \leq L$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$*. De aquí, y del hecho que* M *es positiva obtenemos para cada* $m \in \mathbb{N}$ *lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \mid \alpha_{mn} \mid &= \mid \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} \mid \\ &= \mid k_m \mid \\ &\leq L. \end{aligned}$$

Así, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mid \alpha_{mn} \mid \leq L$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$*. Esto último es la hipótesis 1 del teorema (3.1).*

Observación 3.3. *Si una matriz* A *con componentes* α_{mn} *y* $m, n \in \mathbb{N}$ *es positiva, entonces por la observación (3.2) basta probar que* A *satisface las condiciones (2) y (3) del teorema (3.1) para mostrar que* A *es un Método regular de sumabilidad.*

A continuación se presentarán algunos métodos de sumabilidad en espacios de Banach. En las siguientes secciones cada vez que se mencione E, se considerará como espacio de Banach.

3.1. Método de las Medias Aritméticas

Sean E un espacio de Banach y $(s_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en E. Consideremos la sucesión $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ de las medias aritméticas de la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$, la cual está definida para cada $m \in \mathbb{N}$ por $\sigma_m = \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{m} s_n$. Definamos la siguiente matriz;

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . & . \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{1}{m+1} & & . & . & . & \frac{1}{m+1} & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

H es una matriz con componentes α_{mn} y $m, n \in \mathbb{N}$, donde $\alpha_{mn} = \frac{1}{m+1}$ si $n \leq m$ y $\alpha_{mn} = 0$ si $n > m$. Probemos que las componentes de la matriz H satisfacen las condiciones 2 y 3 del teorema (3.1). En efecto,

Probemos (2):

De acuerdo a la definición de la matriz H se tiene para $m \in \mathbb{N}$ que,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} &= \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{m+1} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} 0 \\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} 1 \\ &= \frac{m+1}{m+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, la sucesión $(l_m)_{m\geq 0}$, donde $l_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, es constantemente igual a 1. Por tanto, $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} = 1$.

Probemos(3):
Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario sabemos que $\alpha_{mn} = 0$ si $m < n$ y
$\alpha_{mn} = \frac{1}{m+1}$ si $m \geq n$. Además de la propiedad arquimediana sabemos que dado un $\epsilon > 0$ existe un $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Entonces, tomando k=k(ϵ,n)=máx{n,N} obtenemos que,

$$
\begin{aligned}
m \geq k \Rightarrow |\alpha_{mn}| &= |\frac{1}{m+1}| \\
&= \frac{1}{m+1} \\
&< \frac{1}{N+1} \\
&< \frac{1}{N} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Esto es, $\lim_{m\to+\infty} \alpha_{mn} = 0$ y del hecho que n es fijo pero arbitrario. Se tiene que,

$$\lim_{m\to+\infty} \alpha_{mn} = 0, \text{ para todo n} \in \mathbb{N}.$$

Por tanto del hecho que H es positiva y de la observación (3.3) obtenemos que H es un Método regular de sumabilidad.
Además por la definición de H,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} s_n &= \sum_{n=0}^{m} \alpha_{mn} s_n + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \alpha_{mn} s_n. \\
&= \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{m+1} s_n + \sum_{n=m+1}^{+\infty} 0.s_n \\
&= \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} s_n \\
&= \sigma_m.
\end{aligned}
$$

Así,

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} s_n, \text{ para todo m } \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Definición 3.5. *Una sucesión* $(s_n)_{n\geq 0}$ *(o una serie* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$*) de elementos en* E *es sumable por el Método de las medias aritméticas (o Cesáro sumable) con límite (o suma)* s*, si* $(s_n)_{n\geq 0}$ *(o* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *)es sumable con límite (o suma)* s *por medio de la matriz* H *anteriormente definida.*

Observación 3.4. *Si en el Método de las medias aritméticas consideramos la sucesión* $(s_n)_{n\geq 0}$ *en* E*, donde tal sucesión son las sumas parciales de una serie* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$*, entonces obtenemos para cada* $m \in \mathbb{N}$*,*

$$\begin{aligned}
\sigma_m = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} s_n &= \frac{1}{m+1}(s_0 + s_1 \cdots + s_m) \\
&= \frac{1}{m+1}(u_0 + \sum_{k=0}^{1} u_k + \cdots + \sum_{k=0}^{m} u_k) \\
&= \frac{1}{m+1}[(m+1)u_0 + (m)u_1 + \cdots + u_m] \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}((m+1) - k)u_k \\
&= \sum_{k=0}^{m}(1 - \frac{k}{m+1})u_k.
\end{aligned}$$

Esto es, $\sigma_m = \sum\limits_{k=0}^{m}(1 - \frac{k}{m+1})u_k$*.*

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
s_m - \sigma_m &= \sum_{k=0}^{m} u_k - \sum_{k=0}^{m}(1 - \frac{k}{m+1})u_k \\
&= \sum_{k=0}^{m}[u_k - \frac{((m+1)-k)u_k}{m+1}] \\
&= \frac{1}{(m+1)} \sum_{k=0}^{m}[(m+1)-(m+1)+k]u_k \\
&= \frac{1}{(m+1)} \sum_{k=0}^{m} k u_k
\end{aligned}$$

Luego, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma_m = \sum_{k=0}^{m}(1 - \frac{k}{m+1})u_k \tag{3.4}$$

y

$$s_m - \sigma_m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} k u_k. \tag{3.5}$$

3.2. Método de Abel

Sea $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ una serie de elementos en E y consideremos la función $f : [0, 1) \to E$ dada por,

$$f(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k r^k.$$

Si $f(r)$ converge para todo $r \in [0, 1)$ y $\lim_{r \to 1^-} f(r) = s$, entonces diremos que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ es Abel sumable o simplemente A-sumable con suma s.

Proposición 3.1. *Sea* $(u_k)_{k\geq 0}$ *una sucesión en* E *y hagamos* $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. La convergencia de una de las siguientes series* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$*,* $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ *para algún* z *en el disco unitario* D*, implica la de la otra y además*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n.$$

Demostración: Fijemos $z \in D$.
<u>**Caso 1:**</u>
Supongamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ converge, como $|z| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge absolutamente y además,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \tag{3.6}$$

Entonces, la convergencia absoluta de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ y la convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$, implican por el teorema (2.4) que el producto de Cauchy entre tales series converge y además,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} z^n. \tag{3.7}$$

Donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k z^k z^{n-k}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así, de las igualdades (3.6), (3.7) y del hecho que $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k z^k z^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n s_n. \end{aligned}$$

De acá, $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ converge y

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.$$

Caso 2:

Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ converge, entonces

$$\begin{aligned} (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n - z\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} s_{n-1} z^n. \end{aligned}$$

De esto y de la convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$, se tiene que $\sum_{n=1}^{+\infty} s_{n-1} z^n$ converge y además

$$
\begin{aligned}
(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n &= s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} s_{n-1} z^n \\
&= s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (s_n - s_{n-1}) z^n \\
&= u_o + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.
\end{aligned}
$$

Así, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ converge y

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n.
$$

Luego de los casos 1 y 2 obtenemos la proposición (3.1). $\square$

Definición 3.6. *Sea $f : D \to E$, donde D es el disco unitario. Se dice que $f(z)$ tiende a $s \in E$ conforme $z \to 1$ en forma no tangencial, si existe $c \geq 1$ tal que $\lim_{z \in D_c, z \to 1} f(z) = s$, donde*

$$
D_c = \left\{ z \in D : \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq c \right\}.
$$

Ahora ilustraremos la región D_c para algunos valores de c.

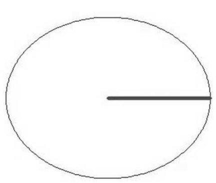

Figura 3.1: $c = 1$

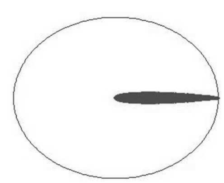

Figura 3.2: $c = 1{,}01$

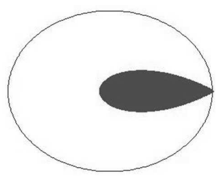

Figura 3.3: $c = 1{,}2$

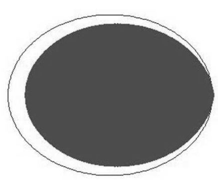

Figura 3.4: $c = 10$

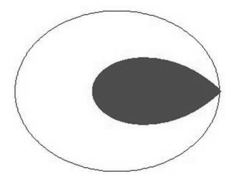

Figura 3.5: $c = 1{,}6$

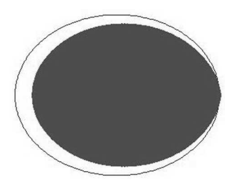

Figura 3.6: $c = 15$

Observación 3.5. *Si* $c \geq 1$ *entonces para* $r \in [0,1)$ *obtenemos,*

$$\begin{aligned} \frac{|1-r|}{1-|r|} &= \frac{1-r}{1-r} \\ &= 1 \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Así, $r \in D_c$ *y por tanto* $[0,1) \subset D_c$.

Definición 3.7. *Sea* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *una serie de elementos en* E. *Diremos que* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *es no tangencial Abel sumable con suma* $s \in E$. *Si para todo* $z \in D$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ *converge en* E *y además existe* $c \geq 1$ *tal que,*

$$\lim_{z \in D_c, z \to 1} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \Big) = s.$$

Teorema 3.2. *Sea* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *una serie de elementos en* E. *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *es no tangencial Abel sumable con suma* s, *entonces* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *es Abel sumable con suma* s.

Demostración: Sea $f : [0,1) \to E$, dada por $f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n r^n$ y probemos que:

1. $f(r) \in E$, para todo $r \in [0,1)$.
2. $\lim_{r \to 1^-} f(r) = s$.

Probemos 1:

Sabemos por hipótesis que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ es no tangencial Abel sumable con suma $s \in E$, entonces para todo $z \in D$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ converge. De esto y del hecho que $[0,1) \subset D$, se sigue que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n r^n$ converge para todo $r \in [0,1)$. Así queda probado 1.

Probemos 2:
Por ser $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ no tangencial Abel sumable con suma s se tiene que existe $c \geq 1$ tal que,

$$\lim_{z\in D_c, z\to 1} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\Big) = s.$$

Esto es,

$$\forall \epsilon > 0,\ \delta = \delta(\epsilon) > 0 : z \in D_c,\ 0 < |z-1| < \delta \Rightarrow \|\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\Big) - s\| < \epsilon.$$

Ahora por la obsevación (3.5) obtenemos que,

$$\forall \epsilon > 0,\ \delta = \delta(\epsilon) > 0 : r \in [0,1),\ 0 < |r-1| < \delta \Rightarrow \|\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n r^n\Big) - s\| < \epsilon.$$

Así,

$$\lim_{r\to 1^-} f(r) = \lim_{r\to 1^-} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n r^n\Big) = s.$$

Por tanto de 1 y 2 se obtiene que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ es Abel sumable con suma s.

□

Proposición 3.2. *Sean $c \geq 1$ y $(z_m)_{m\geq 0}$ una sucesión en D_c que converge a 1. Definamos la matriz M con componentes $\alpha_{mn} = (1-z_m)z_m^n$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces la matriz M es Método regular de sumabilidad.*

Demostración: Para demostrar que M es un Método regular de sumabilidad, basta probar que M cumple las tres condiciones del teorema (3.1).
Condición 1:
Ya que $(z_m)_{m\geq 0}$ es una sucesión en D_c se cumple para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|1-z_m|}{1-|z_m|} \leq c \quad \text{y} \quad |z_m| < 1. \tag{3.8}$$

Así,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z_m|^n = \frac{1}{1-|z_m|}. \tag{3.9}$$

Luego, de (3.8) y (3.9) se obtiene,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| &= \sum_{n=0}^{+\infty} |(1-z_m)z_m^n| \\
&= |1-z_m| \sum_{n=0}^{+\infty} |z_m|^n \\
&= \frac{|1-z_m|}{1-|z_m|} \\
&\leq c.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| \leq c$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

<u>Condición 2</u>:

Nuevamente como $| z_m |< 1$ obtenemos que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_m^n = \frac{1}{1-z_m}, \text{ para todo m} \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-z_m)z_m^n \\
&= (1-z_m) \sum_{n=0}^{+\infty} z_m^n \\
&= \frac{1-z_m}{1-z_m} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De acá, $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, esto implica que $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} = 1$.

<u>**Condición 3**</u>:
Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, por hipótesis $(z_m)_{m\geq 0}$ converge a 1, entonces por continuidad se tiene que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} z_m^n = 1$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} \alpha_{mn} &= \lim_{m\to+\infty}(1-z_m)z_m^n \\
&= \lim_{m\to+\infty}(1-z_m). \lim_{m\to+\infty} z_m^n \\
&= 0.1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como n es arbitrario tenemos que,

$$\lim_{m\to+\infty} \alpha_{mn} = 0, \text{ para todo n} \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto del teorema (3.1) se obtiene que M es Método regular de sumabilidad.

$\square$

Teorema 3.3 (Abel-Stolz). *Si la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *de elementos en* E *converge a* $s \in E$*, entonces* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *es no tangencial Abel sumable y Abel sumable con suma* s*.*

Demostración: Definamos $f : D \to E$, por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ y veamos que $f(z) \in E$ para todo $z \in D$. En efecto, por hipótesis se tiene que la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ de sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge a s, esto implica que $(s_n)_{n\geq 0}$ es acotada; es decir, existe un $M > 0$ tal que $\|s_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, para $z \in D$ tenemos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}.$$

De esto y del acotamiento de la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ se sigue que,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \|s_n z^n\| &= \sum_{n=0}^{+\infty} \|s_n\| |z|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n M \\
&= M \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n \\
&= M \frac{1}{1-|z|} < +\infty.
\end{aligned}
$$

Así $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ converge absolutamente en E y como E es de Banach la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ converge en E. Luego de la proposición (3.1) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ converge y ya que z es arbitrario entonces $f(z) \in E$ para todo $z \in D$. Además por la misma proposición (3.1)

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n, \text{ para todo z} \in D. \tag{3.11}
$$

Fijemos $c \geq 1$ y demostremos que $\lim\limits_{z \in D_c, z \to 1,} f(z) = s$. Para ello consideremos una sucesión $(z_m)_{m\geq 0}$ arbitraria en D_c, tal que $z_m \to 1$ y definamos la matriz infinita A con componentes $\alpha_{mn} = (1-z_m) z_m^n$ donde $m, n \in \mathbb{N}$. Luego, por la proposición (3.2) la matriz A es un Método regular de sumabilidad. De esto y de la definición (3.3) aplicada a la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ se concluye que

$$
\lim_{m \to +\infty} ((1-z_m) \sum_{n=0}^{+\infty} z_m^n s_n) = s.
$$

De acá y de la ecuación (3.11) se tiene que,

$$
\lim_{m \to +\infty} f(z_m) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z_m^n = \lim_{m \to +\infty} (1-z_m) \sum_{n=0}^{+\infty} z_m^n s_n.
$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{m\to+\infty} f(z_m) = s$ y como $(z_m)_{m\geq 0}$ es arbitraria en D_c entonces por la proposición (2.2), $\lim\limits_{z\in D_c, z\to 1} f(z) = s$. Es decir $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ es no tangencial Abel sumable con suma s y por el teorema 3.2, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ también es Abel sumable con suma s.

□

Lema 3.1. *Si $z \in D$, entonces* $(1-z)^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = 1$

Demostración: Primero definamos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \text{ para todo z} \in \mathbb{C}.$$

Es fácil ver que g es una serie de potencias con radio de convergencia 1. Por tanto es infinitamente diferenciable en D, además para todo $z \in D$ se cumplen las siguientes igualdades;

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \tag{3.12}$$

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}. \tag{3.13}$$

Ahora como la derivada de $\dfrac{1}{1-z}$ es $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ en D, entonces de (3.12) y (3.13) se puede concluir que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}.$$

De aquí, $1 = (1-z)^2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$. Haciendo un cambio de índice obtenemos que,

$$1 = (1-z)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n.$$

□

Proposición 3.3. *Sea $(z_m)_{m\geq 0}$ una sucesión en D_c, tal que $\lim\limits_{m\to+\infty} z_m = 1$ y definamos la matriz B con componentes,*

$$\alpha_{mn} = (1 - z_m)^2(n + 1)z_m^n.$$

Donde $m, n \in \mathbb{N}$, entonces B es un Método regular de sumabilidad.

Demostración: Para demostrar que B es un Método regular de sumabilidad basta probar que M cumple las tres condiciones del teorema (3.1).
Condición 1:
Fijemos $m \in \mathbb{N}$, como $(z_m)_{m\geq 0}$ es una sucesión en D_c entonces se tiene que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| &= \sum_{n=0}^{+\infty} |(1 - z_m)^2(n + 1)z_m^n| \\
&= |(1 - z_m)^2| \sum_{n=0}^{+\infty} |(n + 1)||z_m^n| \\
&= \frac{|1 - z_m|^2}{(1 - |z_m|)^2}(1 - |z_m|)^2 \sum_{n=0}^{+\infty}(n + 1)|z_m|^n \\
&= \left(\frac{|1 - z_m|}{1 - |z_m|}\right)^2 \left[(1 - |z_m|)^2 \sum_{n=0}^{+\infty}(n + 1)|z_m|^n\right] \qquad \text{(lema 3.1)} \\
&= \left(\frac{|1 - z_m|}{1 - |z_m|}\right)^2 .1 \\
&\leq c^2.1 \\
&= c^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

Así del hecho que m es fijo pero arbitrario se obtiene que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{mn}| \leq c^2, \text{para todo m} \in \mathbb{N}.$$

Por tanto la condición 1 se cumple.

<u>Condición 2</u>:
Sabemos que $D_c \subset D$, luego por el lema (3.1) se tiene para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(1-z_m)^2(n+1)z_m^n \\ &= (1-z_m)^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z_m^n \\ &= 1.\end{aligned}$$

Esto implica que $\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{mn}$=1. Por tanto la condición 2 se cumple.
<u>Condición 3</u>:
Sea n$\in \mathbb{N}$ fijo, por hipótesis $\lim_{m\to+\infty} z_m = 1$, entonces

$$\lim_{m\to+\infty} z_m^n = 1.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\alpha_{mn} &= \lim_{m\to+\infty}\left[(1-z_m)^2(n+1)z_m^n\right] \\ &= \lim_{m\to+\infty}(1-z_m)^2.\left[(n+1)\lim_{m\to+\infty} z_m^n\right] \\ &= 0.(n+1).1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego, por ser n arbitrario se tiene que $\lim_{m\to+\infty}\alpha_{mn} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto del teorema (3.1) obtenemos que la matriz B es un Método regular de sumabilidad. □

Ahora se enunciará un lema que servirá para demostrar que toda serie $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ de elementos de E sumable por el Método de las medias aritméticas con suma $s \in E$, es no tangencial Abel sumable y Abel sumable con suma s.

Lema 3.2. *Si* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *es una serie de elementos en* E*, sumable por el Método de las medias aritméticas con suma* $s \in E$*, entonces para todo* $z \in D$ *se obtiene que* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ *converge y además,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n (n+1)\sigma_n.$$

Donde $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ *es la sucesión de las medias aritméticas de la sucesión de las sumas parciales de* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Demostración: Sea $(s_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, entonces $(s_n)_{n\geq 0}$ es Cesáro sumable con límite s, esto es $\sigma_n \in E$ donde $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = s$.

Ahora, la convergencia de $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ implica que tal sucesión es acotada; es decir existe un $M > 0$ tal que $\| \sigma_n \| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por otro lado, del hecho que $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ es acotada se tiene para cada $z \in D$ que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \|(1-z)^2 z^n (n+1)\sigma_n\| &= \sum_{n=0}^{+\infty} |(1-z)|^2 |z|^n (n+1)\|\sigma_n\| \\
&= |1-z|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n (n+1)\|\sigma_n\| \\
&\leq |1-z|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n (n+1) M \\
&= M\frac{|1-z|^2}{(1-|z|)^2}\left[(1-|z|)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n (n+1)\right] \\
&= M\frac{|1-z|^2}{(1-|z|)^2}.1 \qquad \text{(lema 3.1)}
\end{aligned}$$

Por tanto $\sum_{n=0}^{+\infty} \| (1-z)^2 z^n (n+1)\sigma_n \|$ converge y como E es un espacio de Banach entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-z)^2 z^n (n+1)\sigma_n$ converge en E. Luego de la definición de $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ se tiene,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-z)^2 z^n (n+1)\sigma_n &= (1-z)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} z^n (n+1)(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k) \\ &= (1-z)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} s_k.\end{aligned}$$

Ahora, sea $t_n = \sum_{k=0}^{n} s_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces de las igualdades anteriores se obtiene

$$(1-z)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} z^n (n+1)\sigma_n = (1-z)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} t_n z^n \tag{3.14}$$

Esto implica que $(1-z)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} t_n z^n$ converge en E. De acá y de la proposición (3.1) tenemos que $(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ converge y además,

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = (1-z)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} t_n z^n. \tag{3.15}$$

Luego, la convergencia de $(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ y nuevamente la proposición (3.1) tiene como consecuencia que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ converge y que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n. \tag{3.16}$$

De (3.14), (3.15), (3.16) y del hecho que z es arbritrario concluimos, para todo $z \in D$ que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ converge y además

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-z)^2 z^n (n+1)\sigma_n.$$

□

Teorema 3.4. *Si $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ es una serie de elementos de E sumable por el Método de las medias aritméticas con suma $s \in E$, entonces $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ es no tangencial Abel sumable y Abel sumable con suma s.*

Demostración: Probemos que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ es no tangencial Abel sumable con suma s. Para esto definamos la función $g : D \longrightarrow E$, por
$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ y probemos que,

1. $g(z) \in E$ para todo $z \in D$.
2. $\lim_{z \in D_c, z \to 1} g(z) = s$.

Probemos 1.:
Para $z \in D$ se tiene por el lema (3.2) que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ converge ya que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ es Cesáro sumable. Por tanto $g(z) \in E$ para todo $z \in D$.
Probemos 2:
Fijemos $c \geq 1$ y consideremos una sucesión arbitraria $(z_m)_{m \geq 0}$ en D_c tal que $\lim_{m \to +\infty} z_m = 1$, también definamos la matriz H con componentes
$\alpha_{mn} = (1 - z_m)^2 (n+1) z_m^n$ donde $m, n \in \mathbb{N}$. Luego, por la proposición (3.3) obtenemos que H es un Método regular de sumabilidad, entonces por la definición (3.3) aplicada a la sucesión $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ se obtiene que,

$$\lim_{m \to +\infty} [\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - z_m)^2 z_m^n (n+1)\sigma_n] = s. \tag{3.17}$$

Ahora por el lema (3.2) se obtiene para todo $z \in D$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n (n+1)\sigma_n.$$

De acá y de (3.17),

$$\begin{aligned} \lim_{m\to+\infty} g(z_m) &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z_m^n \\ &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-z_m)^2 z_m^n (n+1)\sigma_n \\ &= s. \end{aligned}$$

Por tanto $\lim\limits_{m\to+\infty} g(z_m) = s$ y como $(z_m)_{m\geq 0}$ es arbitraria en D_c, entonces por la proposición (2.2) obtenemos que $\lim\limits_{z\in D_c, z\to 1} g(z) = s$. Así de 1 y 2 concluimos que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ es no tangencial Abel sumable con suma s y por el teorema (3.2) la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ también es Abel sumable con suma s.

$\square$

Ejemplo 3.1. *Sea la serie* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ *en* $\mathbb{R}$*, sabemos que* $\lim\limits_{k\to+\infty} (-1)^k$ *no existe, así la serie* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ *diverge. Ahora, tomemos la sucesión* $(s_n)_{n\geq 0}$ *de las sumas parciales de la serie* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ *y notemos que,*
$(s_n)_{n\geq 0} = (1, 0, 1, ...)$. *Luego,* $s_{2k} = 1$ *y* $s_{2k+1} = 0$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*. Por otro lado, consideremos la sucesión* $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ *de las medias aritméticas de* $(s_n)_{n\geq 0}$*, esto es,* $\sigma_m = \dfrac{1}{m+1}\sum\limits_{n=0}^{m} s_n$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$*. Observemos que*
$(\sigma_m)_{m\geq 0} = (1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, ...)$. *Por tanto,* $\sigma_{2n+1} = \dfrac{n+1}{2n+1}$ *y* $\sigma_{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Luego se tiene que,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sigma_{2n+1} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+1}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Así, $(\sigma_{2n})_{n\geq 0}$ *y* $(\sigma_{2n+1})_{n\geq 0}$ *convergen a* $\frac{1}{2}$ *y por la proposición (2.3) obtenemos que* $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ *converge a* $\frac{1}{2}$*. Entonces por la definición (3.5) la serie* $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$ *es Cesáro sumable con suma* $\frac{1}{2}$ *y por el teorema (3.4) se obtiene que tal serie es no tangencial Abel sumable con suma* $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 3.2. *Sea la serie* $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(-1)^k$*, como* $\lim_{k\to+\infty} \mid (k+1)(-1)^k \mid$ *no existe . Entonces la serie* $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(-1)^k$ *diverge. Ahora, tomemos la sucesión* $(s_n)_{n\geq 0}$ *de sumas parciales y observemos que,*
$(s_n)_{n\geq 0} = (1,-1,2,-2,3,-3,...)$*, además consideremos la sucesión* $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ *de las medias aritméticas de* $(s_n)_{n\geq 0}$*, dada por* $\sigma_m = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} s_n$*, para todo* $m\in\mathbb{N}$*. Luego se tiene que* $(\sigma_m)_{m\geq 0} = (1,0,\frac{2}{3},0,\frac{3}{5},0,...)$*. Por tanto,*
$\sigma_{2n} = \frac{n+1}{2n+1}$ *y* $\sigma_{2n+1} = 0$*. De esto obtenemos que,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sigma_{2n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sigma_{2n+1} &= \lim_{n\to+\infty} 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Así $(\sigma_m)_{m\geq 0}$ *no converge y por tanto la serie* $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(-1)^k$ *no es Cesáro sumable. Por otro lado, fijemos* $c \geq 1$ *y definamos a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Entonces, es fácil ver que f *es una serie de potencias con radio de convergencia 1 y por tanto infinitamente diferenciable en* D*. Además, para todo* $z \in D$ *se cumplen las siguientes igualdades;*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n = \frac{1}{1+z}. \tag{3.18}$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n z^{n-1}. \tag{3.19}$$

Ahora como la derivada de $\frac{1}{1+z}$ *es* $-\frac{1}{(1+z)^2}$ *en* D*, entonces por (3.18) y (3.19) concluimos que,*

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n z^{n-1}.$$

De aquí, $\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n-1} z^{n-1}$*. Haciendo un cambio de índice nos queda que,*

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^n z^n$$

.

Así,

1. *para todo* $z \in D$ *la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^n z^n$ *converge.*

2. $\lim_{z\in D_c, z\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^n z^n = \lim_{z\in D_c, z\to 1} \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{4}.$

Por tanto de 1 y 2 se concluye que la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(-1)^k$ *es no tangencial Abel sumable con suma* $\frac{1}{4}$ *y por tanto Abel sumable con suma* $\frac{1}{4}$.

Proposición 3.4. *Sean* $(r_m)_{m\geq 1}$ *una sucesión en* $[0,1)$ *tal que,* $r_m = 1 - \frac{1}{m}$ *para todo* $m \geq 1$ *y* H *una matriz infinita con componentes* $\alpha_{mn} = -\frac{1}{n}r_m^n$ *si* $n > m$ *y* $\alpha_{mn} = \frac{1}{n}(1-r_m^n)$ *si* $n \leq m$, *con* $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, *entonces* H *cumple las condiciones 1 y 3 del teorema (3.1).*

Demostración: Primero demostremos la condición 1 del teorema (3.1),
<u>**Condición 1:**</u>
Fijemos $m \geq 1$, luego

$$\begin{aligned}(1-r_m^n) &= (1-r_m)(1+r_m+\cdots+r_m^{n-1})\\ &\leq (1-r_m)(1+1+\cdots+1)\\ &\leq (1-r_m)n, \quad \forall n \geq 1.\end{aligned}$$

De esto se tiene que,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_{mn}| &= \sum_{n=1}^{m}|\frac{1}{n}(1-r_m^n)| + \sum_{n=m+1}^{+\infty}|-\frac{1}{n}r_m^n|\\ &\leq \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}(1-r_m)n + \sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{n}r_m^n\\ &= \sum_{n=1}^{m}(1-r_m) + \sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{n}r_m^n\\ &\leq m(1-r_m) + \sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{m+1}r_m^n\\ &\leq m(1-r_m) + \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{+\infty}r_m^n.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_{mn}| \leq m(1-r_m) + \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{+\infty}r_m^n.$$

De acá y de la definición de $(r_m)_{m\geq 1}$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_{mn}| &\leq m(1-r_m)+\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{+\infty}r_m^n\\
&= m(1-r_m)+\frac{1}{(m+1)(1-r_m)}\\
&= m(1-(1-\frac{1}{m}))+\frac{1}{(m+1)(1-(1-\frac{1}{m}))}\\
&= 1+\frac{m}{m+1}\\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Ahora como m es arbitrario, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_{mn}|\leq 2$ para todo $m\geq 1$. Así la condición 1 se cumple.

Condición 3:

Fijemos $n\geq 1$. Ahora, como $\lim\limits_{m\to+\infty} r_m = 1$, entonces por continuidad se tiene que $\lim\limits_{m\to+\infty} r_m^n = 1$, luego

$$\lim_{m\to+\infty}(1-r_m^n)=0. \tag{3.20}$$

Ahora tomando $m\geq n$ se tiene que,

$$\alpha_{mn}=\frac{1}{n}(1-r_m^n).$$

De esto y de (3.20) obtenemos que $\lim\limits_{m\to+\infty}\alpha_{mn}=0$ y como n es arbitrario, entonces la condicion 3 se cumple. □

Teorema 3.5 (Tauberiano)**.** *Si una serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *de elementos en* E *es Abel sumable con suma* $s\in E$ *y* $u_n=o(\frac{1}{n})$ *cuando* $n\to+\infty$*, entonces* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *converge a* s*.*

Demostración: Primero escribamos $nu_n = \epsilon_n$, para $n \geq 1$. Luego, por hipótesis tenemos que $u_n = o(\frac{1}{n})$, cuando $n \to +\infty$, esto implica que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{u_n}{\frac{1}{n}}) = \oslash$. Así

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\epsilon_n &= \lim_{n\to+\infty} nu_n \\ &= \oslash.\end{aligned}$$

Sean $(s_m)_{m\geq 1}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $f : [0,1) \to E$, dada por $f(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n r^n$. También definamos la sucesión $(r_m)_{m\geq 1}$ en $[0,1)$ por $r_m = 1 - \dfrac{1}{m}$ para todo $m \geq 1$ y la matriz infinita H con componentes $\alpha_{mn} = \dfrac{1}{n}(1 - r_m^n)$ si $n \leq m$ y $\alpha_{mn} = -\dfrac{1}{n}r_m^n$ si $n > m$. Ahora, obtenemos que,

$$\begin{aligned}s_m - f(r_m) &= \sum_{n=1}^{m} u_n - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n r_m^n \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{\epsilon_n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{n} r_m^n \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{\epsilon_n}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\epsilon_n}{n} r_m^n - \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{n} r_m^n \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}(1 - r_m^n)\epsilon_n - \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{n} r_m^n \\ &= \sum_{n=1}^{m} \alpha_{mn}\epsilon_n + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \alpha_{mn}\epsilon_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{mn}\epsilon_n.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$s_m - f(r_m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{mn}\epsilon_n. \tag{3.21}$$

Por otra parte de la proposición (3.4) obtenemos que la matriz H cumple las condiciones 1 y 3 del teorema (3.1), entonces del hecho que $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ converge a $\oslash$ y de la observación (3.1) se tiene que la sucesión $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ es sumable con límite $\oslash$ por medio de la matriz H. Por tanto,

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{mn}\epsilon_n = \oslash.$$

De esto y de (3.21) obtenemos que $\lim\limits_{m\to+\infty}(s_m - f(r_m)) = \oslash$.

También, tenemos por hipótesis que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ es Abel sumable, esto implica que $\lim\limits_{r\to 1^-} f(r) = s$ y como $\lim\limits_{m\to+\infty} r_m = 1$ entonces,

$$\lim_{m\to+\infty} f(r_m) = s.$$

De aquí se tiene que,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} s_m &= \lim_{m\to+\infty}[s_m - f(r_m) + f(r_m)]\\ &= \oslash + s\\ &= s.\end{aligned}$$

por tanto $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = s.$ □

Colorario 3.1. *Si* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ *es sumable por el Método de Cesáro con suma* $s\in E$ *y* $u_n = o(\frac{1}{n})$*, cuando* $n\to+\infty$*, entonces* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge a s.*

Demostración: Sabemos por hipótesis que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ es Cesáro sumable con suma s, entonces por el teorema (3.4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ es no tangencial Abel sumable con suma s y por tanto Abel sumable con suma s y además por hipótesis $u_n = o(\frac{1}{n})$, cuando $n\to+\infty$, entonces por el teorema Tauberiano obtenemos que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = s$ □

Proposición 3.5. *Sean* $(s_m)_{m\geq 1}$ *la sucesión de sumas parciales de la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *de elementos en* E *y la sucesión de* $(\sigma_m)_{m\geq 1}$ *de la medias aritméticas de la sucesión* $(s_m)_{m\geq 1}$*. Si existe* $c, A > 0$ *tal que* $\|\sigma_m\| \leq c$ *y* $\|u_n\| \leq \dfrac{A}{n}$*, para todo* $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$*, entonces* $(s_m)_{m\geq 1}$ *es acotada.*

Demostración: Sea $m \geq 1$ fijo, luego por la ecuación (3.5) y las propiedades de módulo se tiene lo que sigue,

$$\begin{aligned}
\|s_m\| - c &\leq \|s_m\| - \|\sigma_m\| \\
&\leq \|s_m - \sigma_m\| \\
&= \|\frac{1}{m+1}\sum_{n=1}^{m} nu_n\| \\
&\leq \frac{1}{m+1}\sum_{n=1}^{m} n\|u_n\| \\
&\leq \frac{1}{m+1}\sum_{n=1}^{m} n\frac{A}{n} \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{n=1}^{m} A \\
&= \frac{m}{m+1}A \\
&\leq A.
\end{aligned}$$

Luego, $\|s_m| \leq c+A$ y como m es arbitrario, entonces $(s_m)_{m\geq 1}$ es acotada. $\square$

Bibliografía

[1] Diestel, J. *Sequences and series in Banach spaces.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, (1984).

[2] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, volume 29, AMS, Rhode Island(2001)

[3] Erdös, P. & Magidor, M.*A note on regular methos of summability and the Banach-saks property* , Proceedings of American Mathematical Society, Volume 59, number 2, (1976).

[4] Hardy, G.H. *Divergent Series*, Oxford University Press, Oxford(1949)

[5] Wheeden, R. & Zygmund, A. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York(1977)

[6] Lima, E.*Espacos Métricos* , Editorial Impa, Brasilia(1977)

[7] Vivas, M.*Análisis en una Variable compleja* ,1ra Edición, Editorial Horizonte, C.A. Barquisimeto(2009).

[8] Ricardo, E.*Sumabilidad de Abel y convergencia no tangencial* Department of Mathematics, Louisiana State University, E.E.U.U(2002).

[9] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis With Applications.* Editorial Wiley, University of Windsor(1989).

[10] Finol, C. *Apuntes de analisis funcional.* Departamento de Matemáticas, faculta de ciencias U.C.V, Caracas(1996).