UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Sobre las propiedades geométricas de los espacios de Banach: Espacios Rotundos”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Juan José Brizuela

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional.
Tutor: MCs. Mireya Bracamonte.

Barquisimeto, Venezuela. Marzo de 2011

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"SOBRE LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LOS ESPACIOS DE BANACH: ESPACIOS ROTUNDOS"

presentado por el ciudadano BR. JUAN JOSÉ BRIZUELA titular de la Cédula de Identidad No. 15.351.181., con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

______________________________	______________________________
TUTOR	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

Dedico este trabajo a Dios Todopoderoso y a todas las personas que hicieron posible este logro, en especial a mi Madre, mi Padre, mis hermanos Erika y Jose Luis, a Argenis Lopez y sobre todo al amor de mi vida Yake

Agradecimientos

Primeramente a mi DIOS Padre Todopoderoso sin ti sencillamente no existiría, gracias por ser tan bondadoso y misericordioso, por bendecirme tan grandemente en todos los aspectos de mi vida, a mis padres Olga y Erka quienes han sido ejemplo de responsabilidad, trabajo, bondad y amor incondicional con la familia, son los papás mas maravillosos del mundo, a mis hermanos Erika y Jose Luis por todo el cariño, la ayuda y el apoyo que me han dado no solo en mi carrera sino durante toda mi vida, a Argenis Lopez y Jesus Peraza quienes me inspiraron a indagar en este mundo que me gusta tanto, a todas las amistades que encontre en esta etapa de mi vida Alba, Massiel, Luis F, Tony, Maria de los Angeles, Marylin, Maxiel, Freddy, Johela, Gaby Ga, Gaby Go, Maria L, Alejandra, Esther, Katherina y Reyvi. A todos aquellos profesores que marcaron la diferencia y me transmitieron respeto y admiración por ellos, a mi tutora Mireya Bracamonte, Jurancy Ereú, Miguel Vivas, Luz Rodriguez, Eibar Hernandez y Mario Rodriguez, y un agrdecimiento muy especial a mi gran apoyo, mi complemeto, el Amor de mi Vida... Yake.

Resumen

En 1936 J. A. Clarkson en su artículo [6] introduce la noción de espacios de Banach uniformemente convexos, donde introduce también los espacios rotundos o estrictamente convexos, esta última es una propiedad geométrica de los espacios de Banach la cual esta ligada a la bola unitaria del espacio. En este trabajo nos dedicamos a estudiar esta propiedad geométrica llamada rotundidad asi como algunas propiedades relacionadas con la misma, como lo son los espacios uniformemente rotundos, sus caracterizaciones, desigualdades de clarkson, módulo de convexidad, entre otros.

Índice

Capítulo 1

Introducción

Dado un espacio hay que distinguir entre una propiedad topológica y una propiedad métrica. Las primeras dependen sólo de la topología del espacio, por lo tanto se conserva si reemplazamos la norma por una equivalente. La segunda es una característica dada por la métrica, y puede desaparecer al cambiar la norma por una equivalente.

Como ejemplos de propiedades topológicas se encuentra la reflexividad, existencia de espacios isomorfos a ℓ_1 o c_0, entre otras. La identidad de un paralelogramo, que caracteriza espacios Prehilbert, es una propiedad geométrica. En este trabajo nos dedicamos a trabajar una propiedad geométrica, denominada rotundidad, así como algunas otras propiedades relacionadas con la misma.

La relación entre las propiedades topológicas y las propiedades geométricas de espacios de Banach constituye una línea interesante y fructífera de la investigación, que data de los primeros días de la teoría de espacio de Banach y el ejemplo más simple de tal condición es la rotundidad.

Varias de las desigualdades que se generalizan en los espacios L_p son generalizaciones de la ley del paralelogramo, la cual nos indica algo sobre la redondez de la bola. En este trabajo nos dedicamos a estudiar los espacios rotundos así como otros resultados análogos a la ley de paralelogramo en espacios lineales normados y sus consecuencias.

Clarkson [6], en 1936, introduce los espacios uniformemente convexos y demostró que tales espacios es una clase de funciones que donde toda función absolutamente continua sobre $[0,1]$ es derivable casi siempre y que, hoy en día es conocido que, coincide con los espacios que tienen la propiedad de Radon-Nykodim.

Clarkson introduce también los espacios rotundos o estrictamente convexos, una clase un poco más amplia que la de los espacios uniformemente convexos y demostró que existen funciones $f : [0,1] \to X$, donde X es rotundo y f no es diferenciable casi siempre.

Con el interés de brindar herramientas accesibles que permitan mostrar, a los alumnos de los últimos semestres de la licenciatura en ciencias matemáticas y estudiantes de maestría, temas relacionados con la teoría de espacios de Banach, el presente trabajo tiene como idea fundamental estudiar una de las propiedades geométricas de estos espacios como es la rotundidad y rotundidad uniforme.

Capítulo 2

Conceptos básicos sobre espacios normados y espacios de Banach

Esta sección tiene como objetivo dar una breve introducción a la teoría de espacios de Banach; las definiciones y propiedades básicas; y se establecen notaciones, que son necesarias para el buen desarrollo del trabajo.

Es válido aclarar que, todos estos conceptos aquí presentados son vistos en un curso básico de análisis funcional de la licenciatura, sin embargo, pretendemos que el trabajo sea de fácil acceso al lector permitiendo ampliar nuestra perspectiva sin distracciones.

2.1. Notaciones y Definiciones

El campo de los números reales y complejos son denotados por $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente. El símbolo $\mathbb{K}$ denota a un campo que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, cuyos elementos son llamados **escalares**.

Comencemos recordando que un **espacio vectorial** o espacio lineal sobre $\mathbb{K}$, es un conjunto X de objetos llamados vectores dotado de una operación $+$ de $X \times X$ en X llamada **adición** de vectores y una operación $\cdot$ de $\mathbb{K} \times X$ en X, llamada **multiplicación** de vectores por escalar que satisfacen las siguientes condiciones:

1. La adición es conmutativa y asociativa.

2. Existe el **vector nulo** $0 \in X$, a veces llamado el **origen** de X, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in X$.

3. Para todo escalar α, β y $x, y \in X$, se cumple $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ y $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

4. Para cada vector $x \in X$, existe el vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

5. Para cada vector x, $1x = x$.

Un concepto abstracto que se presenta en este trabajo es el de espacio topológico. Usualmente el concepto de espacios topológicos se hace partiendo de un espacio métrico, sin embargo no todo espacio topológico es un espacio métrico.

Por ello definimos lo que es un espacio topológico.

Definición 2.1. *([18]) Un espacio topológico es un par (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a τ,*

2. *Si $\{O_i : i \in I\} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.*

3. *Si $O_1, O_2 \in \tau$, entonces $O_1 \cap O_2 \in \tau$.*

*τ es llamada la **topología** de (X, τ). Los elementos de τ son llamados **conjuntos abiertos** de X.*

En un espacio topológico, la **clausura** de un conjunto A, se denota por $\overline{A}$.

En nuestro trabajo, entendemos por un **espacio vectorial topológico** como un espacio vectorial dotado de una topología de forma que las operaciones suma y producto por escalares sean funciones continuas.

Definición 2.2. *([1, 9]) Sea X un espacio vectorial. Una norma sobre X es una aplicación de X en $\mathbb{R}$ que satisface las propiedades siguientes:*

1. *$\|x\| > 0$ para todo $x \neq 0$*

2. *$\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,*

3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y todo* $x \in X$,

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *para todo* $x, y \in X$.

El número real $\|x\|$ se le denomina norma del vector x y se dice que el par $(X, \|.\|)$ es un **espacio normado**.

Definición 2.3. *([9]) Un espacio vectorial dotado de una norma, es llamado* ***espacio normado*** *y denotado por* $(X, \|\cdot\|)$.

Ejemplo 2.1. *([1])*

1. *Las únicas normas sobre* $\mathbb{R}$ *son el valor absoluto y sus múltiplos positivos.*

2. *En* $\mathbb{R}^n$ *las normas más utilizadas son:*

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1, \\ \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_\infty &:= \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}. \end{aligned}$$

3. $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio normado, donde*

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\} \quad y \quad \|f\|_\infty := \max\{|f(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Ejemplo 2.2. *Otros espacios normados habituales en el análisis funcional son los espacios* l^p, $p \geq 1$ *y* l^∞. l^p, *es el espacio vectorial de todas las sucesiones de* $\mathbb{K}$ *de potencia p-ésima sumable, es decir, las sucesiones* (x_n) *tales que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$, *dotado de la norma*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Por su parte, l^∞ *es el espacio vectorial de las sucesiones acotadas de números reales (o complejos) con la norma del supremo, a saber,*

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n, ...)\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, ...\}.$$

De la definición de norma se deducen las siguientes propiedades adicionales:

5. $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$,

6. $\|x\| = \|-x\|$, para todo $x \in X$,

7. $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

8. $\|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\|\|x + y\|$.

Toda norma lleva asociada de forma natural una distancia d definida por $d(x, y) := \|x - y\|$.

Esta distancia posee dos propiedades especiales:

(i) d es invariante por traslaciones, esto es, $d(x, y) = d(a+x, a+y)$, para cualquier $x, y, a \in X$,

(ii) d es absolutamente homogénea, esto es, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Es fácil demostrar que toda distancia sobre un espacio vectorial X que tenga las propiedades (i) y (ii) puede ser dotado de una norma mediante $\|x\| := d(x, 0)$.

2.2. Estructura de espacios normados

En un espacio normado se superponen dos estructuras:

Estructura algebráica la de espacio vectorial,

Estructura topológica la inducida por la métrica.

Se hace necesario reformular los conceptos y propiedades asociadas a ellas en este nuevo marco.

Así, por ejemplo,

1. La **bola abierta** centrada en a del espacio normado X

$$B(a, r) := \{x : \|x - a\| < r\},$$

2. La **bola cerrada** centrada en a,

$$B[a, r] = \overline{B}(a, r) = \{x : \|x - a\| \leq r\},$$

3. **La esfera**
$$S(a,r) = \{x : \|x - a\| = r\}.$$

Cuando pensamos en bolas unitarias cerradas de un espacio normado, generalmente visualizamos las bolas en los espacios euclideanos de dimensión dos o tres y más aún las visualizamos bastante ”suaves”. Sin embargo, las bolas no son necesariamente de tan buena forma. Y esta propiedad depende, como veremos en el próximo capítulo, de las propiedades del espacio.

Definición 2.4. *([1]) En un espacio normado X se dice que una sucesión (x_n) es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n, m \geq N \quad \textit{implica que} \quad \|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

Enumeramos algunas propiedades algebráicas-topológicas:

1. Ningún subespacio vectorial propio tiene puntos interiores.
2. Un espacio normado es localmente compacto si y sólo si la bola unitaria (que su radio es la unidad) cerrada es compacta.
3. Ningún espacio normado puede ser compacto.
4. Todo espacio normado es conexo (por arcos) y localmente conexo (por arcos).
5. La adherencia de la bola abierta es la bola cerrada del mismo centro y radio.
6. Un conjunto abierto es conexo si y sólo si es conexo por arcos.

La primera de estas propiedades es geométricamente intuitiva (es decir, puede visualizarse en el plano).

2.3. Convexidad

En un espacio normado tiene sentido considerar varias formas de conexión, algunas de ellas de naturaleza puramente algebráica.

Definición 2.5. *Se denomina segmento de extremos $a, b \in X$ al conjunto*

$$[a,b] := \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\} = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\}.$$

El conjunto A se dirá convexo si para cada par de puntos de A, el segmento que los une está totalmente contenido en A.

Proposición 2.1. *Toda bola es un conjunto convexo.*

Demostración. Si x, y son dos puntos de la bola $B(a,r)$ y $z = (1-t)x + ty$ es un punto del segmento $[x,y]$ entonces

$$\begin{aligned} \|z-a\| &= \|(1-t)x + ty - ((1-t)a) - ta\| \\ &\leq \|(1-t)x - (1-t)a\| + \|ty - ta\| \\ &= (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| \\ &\leq (1-t)r + tr = r. \end{aligned}$$

■

2.4. Espacios de Banach.

Y nuestro objeto principal de estudio son justamente los espacios de Banach, por tal razón esta sección está dedicada a ellos.

Definición 2.6. *([1]) Sea X un espacio normado. Si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X, se dice que X es* ***Completo****.*

Definición 2.7. *([9]) Un* ***Espacio de Banach*** *es un espacio normado el cual es completo en la métrica definida por su norma.*

Ejemplo 2.3. *Podemos citar algunos ejemplos de espacios de Banach importantes como son:*

- *Sea X el espacio vectorial de todas las n-uplas de números reales o complejos ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$). La norma del supremo definida como*

  $$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i(|x_i|), \qquad \text{donde} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

  El espacio $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es denotado por l_∞^n.

- *Sea* $X = (\mathbb{R}^n)\,, \mathbb{C}^n$ *y* $1 \leq p < \infty$. *Entonces la función*

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad donde \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

  El espacio X *conjuntamente con la norma* $\| \cdot \|_p$ *es denotado por* l_p^n.

  Para ver la definición correcta necesitamos demostrar que si $x, y \in \ell_p$, *entonces* $x + y \in \ell_p$ *y* $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

- *Para* $1 \leq p < \infty$ *el espacio* $l_\infty(\mathbb{N}) =$, *definido en el ejemplo 2.2 es un espacio de Banach.*

- *El espacio* $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$ *denota el espacio normado de todas las sucesiones de valores escalares acotadas cuya norma se define como*

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{\, |x_i|\,; i \in \mathbb{N}\} \qquad para \quad \mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty}.$$

- *El espacio* $c = c(\mathbb{N})$ *es el subespacio lineal de* $l_\infty(\mathbb{N})$ *formado por todas las sucesiones de valores escalares* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ *en las cuales* $\lim\limits_{i \to \infty} (x_i)$ *existe y es finito.*

- *El espacio* $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ *es un subespacio lineal de c formado por todas las sucesiones escalares* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ *en las cuales* $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = 0$.

2.5. Espacio Dual

No podemos pasar por alto, las aplicaciones lineales entre espacios normados. Puesto que los vectores de los espacios que nos interesan suelen ser funciones, las aplicaciones lineales entre tales espacios transformarán unas funciones en otras, y es usual llamar ”operadores” a las transformaciones de este tipo.

Así pues, un operador lineal es, una aplicación lineal de un espacio vectorial en otro, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

Prestaremos especial atención al caso particular en que el espacio de llegada es el cuerpo escalar $\mathbb{K}$. Entonces en este caso estaremos transformando vectores en números y para este tipo de transformación se prefiere el término ”funcional”.

Por lo tanto, un **funcional lineal** en un espacio vectorial es una aplicación lineal de dicho espacio en el cuerpo $\mathbb{K}$ sobre el que está construido.

La continuidad de un funcional lineal sobre un espacio normado puede caracterizarse de varias maneras, entre las que destacamos la más útil, que es la misma para la continuidad de operadores lineales:

Proposición 2.2. *Sea X un espacio normado, x^* un funcional lineal en X. Entonces x^* es continuo si, y sólo si, existe una constante $M \geq 0$ tal que:*

$$|x^*(x)| \leq M\|x\| \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

El espacio de todos los funcionales lineales continuos en X se denota por X^*, de allí en que tomamos x^* como la simbolización de un funcional, y en él disponemos de una **norma**, expresable en varias formas, entre las que tenemos:

$$\|f\| = \text{mín}\{M \geq 0 \,:\, |f(x)| \leq M\|x\| \quad \text{para todo}\, x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in X \; \|x\| \leq 1\}.$$

La suma y multiplicación de elementos de X^* son definidos por

$$(x_1^* + x_2^*)(x) := x_1^*(x) + x_2^*(x), \qquad (\alpha x_1^*)(x) := \alpha . x_1^*(x).$$

La completitud de $\mathbb{K}$ nos garantiza que X^* es completo. El espacio de Banach X^* recibe el nombre de **dual topológico** del espacio normado X^*, para diferenciarlo del **dual algebraico**, que estaría formado por todos los funcionales lineales en X.

Generalmente no hay lugar a confusión y decimos simplemente que X^* es el espacio dual del espacio normado X y también decimos que la norma de X^* es la norma dual de la norma de X. Note que, en el espacio vectorial X^* habrá otras normas, incluso que no guarden relación alguna con X. Además, existe una asimetría entre X y X^*, puesto que éste último es completo aún cuando X no lo sea.

Ejemplo 2.4. *Podemos mencionar los duales de algunos de los espacios considerados anteriormente:*

- $c_0^* = l_1$,
- $l_1^* = l_\infty$
- *Si $p, q \in (1, +\infty)$ son tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces $l_p^* = l_q$.*

La abundancia de funcionales lineales continuos en un espacio normado se pone muy claramente de manifiesto en el siguiente enunciado:

Proposición 2.3. *Si X es un espacio normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\|$.*

En realidad esto nos informa que el espacio de Banach X^* determina la norma de X. Concretamente, nos dice que

$$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| : f \in X^*, \ \|f\| \leq 1\} \qquad (x \in X).$$

Esta igualdad está en clara dualidad con la definición de la norma dual.

Fijado $x \in X$, consideramos la aplicación $x^* \longmapsto x^*(x)$, que es un funcional lineal en X^* al que se le llama **funcional de evaluación** en **x**. La desigualdad

$$|x^*(x)| \leq \|x\|\|x^*\|$$

nos garantiza que dicho funcional es acotado, es decir, es un elemento del bidual X^{**} de X, un espacio de Banach que hasta ahora no hemos considerado, y procedemos a definir.

Definición 2.8. *Sea X un espacio normado. El **doble dual** o bidual de X, es el dual del espacio X^*, y lo denotaremos por X^{**}.*

Así tomando como referencia el ejemplo (2.4) podemos concluir que $c_0^{**} = l_\infty$ y para $1 < p < \infty$ se tiene que $l_p^{**} = l_p$. Recordemos que estas igualdades sólo significan la existencia de isomorfismos entre estos espacios, y que el abuso del lenguaje usualmente nos permite escribirlo de esta forma.

Así, cada elemento $x \in X$ da lugar a un elemento en X^{**}, el funcional de evaluación en x, al que vamos a denotar por $Q(x)$ y la definición formal es:

Definición 2.9. *Sea X un espacio de normado. La aplicación*

$$Q : X \ \rightarrow \ X^{**}$$

definida por

$$Q(x) : x^* \rightarrow x^*(x) \qquad [Q(x)](x^*) := x^*(x) \qquad x^* \in X^*.$$

*La aplicación Q, es lineal y es llamada **aplicación canónica** o **inyección canónica** de X en X^{**}.*

Proposición 2.4. *Sea X un espacio normado. Entonces Q es un isomorfismo de X en X^{**} . Y el subespacio $Q(X)$ es cerrado si y sólo si X es un espacio de Banach.*

Como puede verse, Q identifica totalmente a X en un subespacio de X^{**}, simbólicamente $Q(X) \approx X^{**}$. Así que es natural preguntarse si ese subespacio es todo X^{**}, con lo que tendríamos una isometría entre X y X^{**}.

Desafortunadamente, $Q(X)$ en general no coincide con X^{**}, simplemente porque X^{**}, por ser dual de un espacio, siempre es un espacio de Banach mientras que X puede no ser completo.

Sin embargo, esta observación tiene su utilidad, pues nos permite conseguir la completación de X, considerando la clausura de $Q(X)$ en X^{**}.

Evidentemente, $\overline{Q(X)}$ es un espacio de Banach que contiene un subespacio denso, $Q(X)$, que es simétricamente isomorfo a X, esto es, $\overline{Q(X)}$ es la completación de X.

Hechas estas observaciones, para un espacio de Banach X es válido preguntar si Q es sobreyectiva.

Definición 2.10. *Un espacio de Banach X se dice* ***reflexivo*** *si la aplicación Q, de la definición (2.9), de X en X^{**} es sobreyectiva.*

En este caso, haciendo un abuso del lenguaje, escribimos $X = X^{**}$. Es claro que Q es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}.

R. C. James dio en 1951 un ejemplo de un espacio de Banach X, conocido hoy en día como espacio de James, tal que existe un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, pero X no es reflexivo, de hecho el cociente $X^{**}/Q(X)$ tiene dimensión 1. Por lo tanto, es de vital importancia ser cuidadosos y resaltar que, cuando decimos que un espacio de Banach X es reflexivo, no sólo estamos afirmando que X es isométricamente isomorfo a X^{**}, sino que ese isomorfismo isométrico es precisamente la inyección canónica Q.

Ejemplo 2.5. *Los ejemplos más sencillos de espacios de Banach reflexivos son los de dimensión finita, dado que si X tiene dimensión n, entonces X^* y X^{**} también tienen dimensión n, luego Q, que es inyectiva, debe ser sobreyectiva. Así, todo espacio de Banach de dimensión finita es reflexivo.*

Teorema 2.1. *Todo subespacio de un espacio normado reflexivo es reflexivo.*

2.6. Topologías: débil y débil estrella.

La idea de esta sección es hacer una breve introducción sobre las topologías débil (ω) y débil estrella (ω^*); puesto que un trabajo en análisis funcional que pretenda tener un buen grado de seriedad no podría pasar por alto esta topología.

Dado un espacio vectorial topológico X, entonces X es un espacio topológico que lleva una topología como parte de su definición, esta topología la llamaremos **topología fuerte** en X.

Además, si X^* es el espacio dual, se define la **topología débil** en X como la topología débil, más pequeña, en X tales que todos los elementos $x^* \in X^*$ sean continuos.

La topología débil siempre es localmente convexa. La importancia de esta topología radica en que su estudio nos da información valiosa sobre la topología original.

Una sucesión x_n converge a x en la topología débil si y sólo si para todo $x^* \in X^*$

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x).$$

Proposición 2.5. *Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si X^* es reflexivo.*

Capítulo 3

Rotundidad

El problema de caracterizar los espacios de Banach en clases ha sido tratado por varios autores. Nos ocupa ahora estudiar los espacios que presentan la propiedad de rotundidad, concepto introducido por primera vez por James A. Clarkson en 1936 en [6].

3.1. Espacios rotundos

A menudo es conveniente saber si la desigualdad triangular es estricta para elementos no colineales en un espacio normado dado. Estos espacios donde se cumple esta condición son los espacios que son llamados rotundos o estrictamente convexos, que presentamos en esta sección.

Definición 3.1. *Un espacio normado X se dice* ***rotundo*** *o* ***estrictamente convexo*** *si para cada par de puntos diferentes x_1 y x_2 en S_X y $0 < t < 1$ se cumple que*

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\| < 1. \tag{3.1}$$

Como se indicó en la introducción de esta sección, si $x, y \in X$ son puntos diferentes no colineales y X un espacio rotundo,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|+\|y\|} + \frac{y}{\|x\|+\|y\|} \right\| = \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\frac{y}{\|y\|} \right\| < 1,$$

por lo tanto

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|.$$

El término *rotundo* se debe a Mahlon Day, quien publicó seis importantes artículos sobre estos espacios rotundos y uniformemente rotundos entre 1941 y 1957 ([11, 12, 13, 14, 15, 16]), mientras que el término de *estrictamente convexo* se debe a Krein ([10]).

Geométricamente, esto significa que cualquier punto del segmento $[x_1, x_2]$ está en el interior de la bola cuando x_1, x_2 se encuentran en el borde de la misma. Y en consecuencia, la esfera unitaria no contiene segmentos de linea recta no triviales.

Si un espacio normado satisface esta condición, algunos autores consideran que lo correcto es decir que, la bola cerrada es rotunda, en lugar de decir que el espacio lo es, dado que la propiedad es de la norma.

Entre las caracterizaciones de espacios rotundos encontramos la introducida por Barbu-Precupanu en 1986, que se presenta a continuación.

Proposición 3.1 ([2]). *Supongamos que X es un espacio normado. Entonces X es rotundo si y sólo si $\left\|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\| < 1$ siempre que x_1 y x_2 sean puntos distintos de S_X.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio rotundo y x_1, x_2 puntos distintos de S_X, es claro que $\left\|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\| < 1$.

Recíprocamente, supongamos que para cada par de puntos x_1 y x_2 diferentes en la esfera se cumple que $\left\|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\| < 1$.

Note que para cualquier punto x que se encuentre en el segmento que une x_1 a x_2, donde $x_1, x_2 \in S_X$, se tiene que $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, x se encuentra en el segmento que une a x_1 con $\frac{x_1 + x_2}{2}$ o se encuentra en el segmento que une a $\frac{x_1 + x_2}{2}$ con x_2, por tal razón es suficiente verificar que la desigualdad se cumple para cualquier punto que satisface las dos últimas condiciones.

En efecto, si $x_1, x_2 \in S_X$ son puntos distintos y $t \in (0, 1)$ entonces, es suficiente demostrar que para cualquier punto que se encuentre en el segmento que une x_1 con $\frac{x_1 + x_2}{2}$, de la forma $tx_1 + (1 - t)\frac{x_1 + x_2}{2}$ con $0 < t < 1$, satisface

$$\left\|tx_1 + (1 - t)\frac{x_1 + x_2}{2}\right\| \leq t\|x_1\| + (1 - t)\left\|\frac{x_1 + x_2}{2}\right\| < t + (1 - t) = 1.$$

De forma similar, si cualquier punto que se encuentre en el segmento con extremos $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ y x_2 puede expresarse como $tx_2+(1-t)\dfrac{x_1+x_2}{2}$ donde $0<t<1$ y su norma satisface

$$\left\|tx_2+(1-t)\frac{x_1+x_2}{2}\right\| \leq t\|x_2\|+(1-t)\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| < t+(1-t)=1.$$

■

Ejemplo 3.1. *El plano euclídeo con la norma infinita no es estrictamente convexo. Para verificarlo, consideremos* $\mathbf{x}=(1,1)$, $\mathbf{y}=(1,-1)$, *se tiene que*

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = 1 = \|\mathbf{y}\|_\infty,$$

sin embargo,

$$\left\|\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right\|_\infty = 1.$$

Ejemplo 3.2. *Sean* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *los primeros dos vectores unitarios estandar de* c_0, *definido en el ejemplo (2.3). Hacemos*

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2.$$

Tenemos que

$$\|\mathbf{x}_1\|_\infty = \|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\|_\infty = \sup\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\} = \sup\{(1,1,0,...,0)\} = 1,$$

$$\|\mathbf{x}_2\|_\infty = \|\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\|_\infty = \sup\{\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\} = \sup\{1,-1,0,...,0\} = 1.$$

Por último

$$\left\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\right\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)\right\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1)\right\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}2\boldsymbol{e}_1\right\|_\infty = \|\boldsymbol{e}_1\|_\infty = 1$$

Esto verifica que ni c_0 *ni* l_∞ *son espacios rotundos.*

Teorema 3.1. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado.* X *es rotundo si y sólo para cada* $x, y \in S_X$ *con* $\|x+y\|=2$ *implica que* $x=y$.

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que X es un espacio rotundo y consideramos $x, y \in S_X$ tales que $\|x+y\| = 2$. Si x y y son distintos, en virtud a la rotundidad de X se sigue que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$, por lo tanto se sigue que $x = y$.

$\Longleftarrow$) Note que si $x, y \in S_X$ son puntos diferentes, cualquier punto z en el segmento que une a x y y será $\frac{x+y}{2}$, estará en el segmento que une los puntos x y $\frac{x+y}{2}$ o en el segmento que une los puntos $\frac{x+y}{2}$ y y.

Si $z = \frac{x+y}{2}$ se tiene que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1,$$

pues en caso contrario la hipótesis garantizaría que x y y deberían ser iguales.

Si ocurre el segundo caso, que z está en el segmento que une los puntos x y $\frac{x+y}{2}$, se tiene que $z = \alpha x + (1-\alpha)\frac{x+y}{2}$ para algún $\alpha \in (0,1)$ y su norma satisface

$$\left\|\alpha x + (1-\alpha)\frac{x+y}{2}\right\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

De forma similar se obtiene que $\|z\| < 1$ si éste se encuentra en el segmento que une los puntos $\frac{x+y}{2}$ y y.

$\blacksquare$

Esta es una manera elegante de describir la rotundidad. Si recordamos que un punto x de un conjunto convexo K es **punto extremo o extremal** si x no puede escribirse como una combinación convexa no trivial de puntos distintos en K. Esto es, x es un punto extremal de K si y sólo si

$$x = \frac{y+z}{2}, \quad y, z \in K \quad \Longrightarrow \quad y = z = x.$$

Así, el teorema anterior nos garantiza que cada punto de S_X es un punto extremo o extremal de B_X, en cuyo caso podemos reescribir el teorema 3.1 de la siguiente manera.

Teorema 3.2. *X es rotundo si y sólo sí todo punto de S_X es un punto extremal de B_X.*

Ejemplo 3.3. *Todo espacio con producto interno es rotundo. En particular, todo espacio de Hilbert es rotundo.*

En efecto, sean H un espacio con producto interno y $x, y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x + y\| = 2$.

Dado que todo espacio con producto interno satisface la ley del Paralelogramo, se tiene que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

tendremos que $\|x - y\| = 0$ y en consecuencia $x = y$.

La rotundidad es una propiedad isométrica y no suele preservarse por isomorfismos. Por ejemplo, consideremos la norma

$$|||(x, y)||| := \text{máx}\{2|x|, \|(x, y)\|_2\}$$

sobre $\mathbb{R}^2$. Es claro que la norma euclidiana $\|\cdot\|_2$ es rotunda. Pero $|||\cdot|||$ no lo es, dado que si tomamos $(1, 0)$ y $(1, 1)$, ambos en $\mathbb{R}^2$, se tiene que $|||(1, 0)||| = 2 = |||(1, 1)|||$, mientras que $|||(1, 0) + (1, 1)||| = |||(2, 1)||| = 4$.

Proposición 3.2. *Todo espacio normado que es isométricamente isomorfo a un espacio normado rotundo es rotundo.*

Demostración.

Sean Y un espacio normado isométricamente isomorfo a X, esto significa que existe una aplicación lineal continua tal que $T : X \to Y$ y $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$. Supongamos que Y es un espacio normado rotundo y consideramos $x_1, x_2 \in S_X$. Por nuestro supuesto, dado que $\|T(x_1)\|_Y = \|x_1\|_X = \|T(x_2)\|_Y = \|x_2\|_X = 1$ y en virtud de la rotundidad de Y, se tiene que

$$\|tT(x_1) + (1 - t)T(x_2)\|_Y < 1.$$

Así, haciendo uso de la linealidad de T y esta última desigualdad se obtiene que

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\|_X = \|T(tx_1 + (1-t)x_2)\|_Y = \|tT(x_1) + (1-t)T(x_2)\|_Y < 1.$$

■

Proposición 3.3. *Suponga que X es un espacio normado entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) El espacio X es rotundo.

(b) Siempre que x_1,$x_2 \in X$ y $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, uno de los dos vectores es un múltiplo real no negativo del otro.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que X es rotundo y que x_1 y x_2 son miembros de X tales que $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$.

Demostremos que uno de los vectores x_1 y x_2 es múltiplo no negativo del otro.

Note que si uno de ellos es nulo, digamos x_1, entonces $x_1 = 0x_2$, así uno de los vectores es múltiplo no negativo del otro.

Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ambos son no nulos.

Ahora bien $\|x_1\|$ y $\|x_2\|$ son números reales y por tanto comparables. Así suponemos que $\|x_1\| \leq \|x_2\|$. Y hagamos el estudio por casos:

Caso I: $1 = \|x_1\| \leq \|x_2\|$. Sea $y = \|x_2\|^{-1}x_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{2} &= \|x_1\| + \|y\| \\
&\geq \|x_1 + y\| \\
&= \|x_1 + x_2 - x_2 + y\| \\
&= \|x_1 + x_2 - x_2 + \|x_2\|^{-1}x_2\| \\
&= \|x_1 + x_2 - (1 - \|x_2\|^{-1})x_2\| \\
&\geq \|x_1 + x_2\| - (1 - \|x_2\|^{-1})\|x_2\| \\
&= \|x_1\| + \|x_2\| - \|x_2\| + \|x_2\|^{-1}\|x_2\| \\
&= \|x_1\| + 1 \\
&= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que $\left\|\dfrac{1}{2}(x_1 + y)\right\| = 1.$

Dado que tanto x_1 como $y \in S_X$, la rotundidad de X nos garantiza que $x_1 = y$, es decir, $x_1 = \|x_2\|^{-1}x_2$. Quedando demostrado lo deseado para este caso.

Caso II: Nos falta considerar el caso cuando $1 \neq \|x_1\| \leq \|x_2\|$, entonces

Consideremos $y_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ y $y_2 = \dfrac{x_2}{\|x_1\|}$. Veamos que $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\|y_1 + y_2\| &= \left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_1\|}\right\| \\
&= \left\|\frac{x_1 + x_2}{\|x_1\|}\right\| \\
&= \frac{1}{\|x_1\|}\|x_1 + x_2\| \\
&= \frac{1}{\|x_1\|}(\|x_1\| + \|x_2\|) \\
&= \frac{1}{\|x_1\|}\|x_1\| + \frac{1}{\|x_1\|}\|x_2\| \\
&= 1 + \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|} \\
&= \|y_1\| + \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|} \\
&= \|y_1\| + \|y_2\|.
\end{aligned}
$$

Haciendo nuevamente uso de la rotundidad del espacio y el caso anterior, se tiene que $y_1 = y_2$, y en consecuencia $\dfrac{x_1}{\|x_1\|} = \dfrac{x_2}{\|x_1\|}$ de aquí obtenemos $x_1 = x_2$.

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que (b) se cumple y consideramos z_1 y z_2 elementos diferentes de S_X.

Sean z_1 y z_2 dos elementos diferentes de S_X. Supongamos que z_1 y z_2 no son múltiplos no negativos uno del otro, lo cual implica que

$$\|z_1 + z_2\| < \|z_1\| + \|z_2\| = 1 + 1 = 2.$$

Lo cual es equivalente a $\|\frac{1}{2}(z_1 + z_2)\| < 1$, esto significa, en conformidad con la proposición 3.1, que X es rotundo. ■

Observación 3.1. *Esto significa que* $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ *cuando* x *y* y *no son paralelos, que en nuestro caso significa que ambos no estén sobre una misma línea que pase por el origen y uno de ellos o equivalentemente, que no sean múltiplos uno de otro.*

Un resultado trivial, pero de gran utilidad es el siguiente:

Proposición 3.4. *Si un espacio normado es rotundo, entonces también lo es cada uno de sus subespacios.*

3.2. Algunas caracterizaciones

Teorema 3.3. *([5])* X *es un espacio rotundo si y sólo si, para* $1 < p < \infty$ *y* $x \neq y$ *en* X *se cumple*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que X es un espacio rotundo y sea $1 < p < \infty$. Dados x y y elementos en X que no son múltiplos uno del otro, entonces

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$

Ahora, haciendo uso de esta desigualdad y la convexidad de la función $|t|^p$ tendremos que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{2} \right)^p \leq \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

Ahora, en el caso en que $y = \alpha x$ con $\alpha \neq 1$, haciendo uso de la convexidad estricta de $|t|^p$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p = \left\| \frac{x+\alpha x}{2} \right\|^p = \left| \frac{1+\alpha}{2} \right|^p \|x\|^p < \frac{1+|\alpha|^p}{2} \|x\|^p = \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

Queda así demostrada la primera parte del teorema.

Para demostrar el recíproco, dados $x, y \in S_X$ diferentes, se tiene que $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1$, en consecuencia

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < 1,$$

así la proposición (3.1) nos garantiza que X es rotundo. ∎

Corolario 3.4. *ℓ^p es rotundo para $1 < p < \infty$.*

Teorema 3.5. *El espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es rotundo si y sólo si para cada $x^* \in X^*$ existe a lo más un punto en B_X en el cual x^* alcanza máximo.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que X es rotundo y sea $x^* \in X^*$. Supongamos que existen al menos dos puntos distintos $x, y \in B_X$ donde x^* alcanza el valor máximo.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el máximo valor es 1 y que $\|x^*\| = 1$. Dado que

$$1 \;=\; x^*\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \|x^*\| \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1.$$

Esto significa que $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$, en cuyo caso, dado que X es un espacio rotundo, el teorema 3.1 nos garantiza que $x = y$. Luego, cada $x^* \in X^*$ alcanza alcanza máximo a lo más en un punto.

$\Longleftarrow$) Consideremos ahora $x, y \in S_X$ tales que $\|x + y\| = 2$. Por el teorema de Hanh Banach podemos hallar $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $(x^*(x) + x^*(y)) = x^*(x + y) = 2$. Ahora bien, por hipótesis, existe $x \in B_X$ donde x^* alcanza su máximo, se tiene que $x^*(x) = x^*(y) = 1$, por lo tanto $x = y$ y así X es un espacio rotundo, en virtud al teorema 3.1.

■

3.3. Propiedades

Comencemos la sección presentando las definiciones de un espacio suave y de un espacio Gateaux diferenciable.

Definición 3.2. *El espacio de Banach X se dice **suave** o **liso** en $x_0 \in S_X$ cuando existe una única $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x_0) = 1$. Si X es suave en cada punto de S_X se dice que X es suave.*

Definición 3.3. *Sea X un espacio de Banach. Se dice que X tiene norma Gateaux diferenciable en $x_0 \in S_X$ cuando dado $y \in S_X$*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x_0 + \lambda y\| - \|x_0\|}{\lambda} \tag{3.2}$$

existe. Si la norma de X es Gateaux diferenciable en cada punto de S_X se dice que la norma es Gateaux diferenciable.

Teorema 3.6. *Si X^* es rotundo entonces X es suave.*

Demostración. Si X no es suave significa que existen $x_0 \in S_X$ y $x_1^*, x_2^* \in S_{X^*}$ tal que $x_1^* \neq x_2^*$ y $x_1^*(x_0) = 1 = x_2^*(x_0)$. Luego,

$$1 \geq \left\| \frac{x_1^* + x_2^*}{2} \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{x_1^*(x) + x_2^*(x)}{2} \geq \frac{x_1^*(x_0) + x_2^*(x_0)}{2} = 1,$$

lo cual contradice la hipótesis. ■

Corolario 3.7. *Un espacio de Banach reflexivo es rotundo si y sólo si X^* es suave.*

Teorema 3.8. *Si X^* es suave entonces X es rotundo.*

Demostración. Si X no es rotundo existen $x, y \in S_X$, distintos tales que

$$\|\lambda x + (1 - \lambda) y\| = 1$$

para cada $\lambda \in (0, 1)$. Si $x^* \in S_{X^*}$. Si $x^* \in S_{X^*}$ y $x^* \left(\frac{x + y}{2} \right) = 1$ entonces

$$1 = x^* \left(\frac{x + y}{2} \right) = \frac{x^*(x) + x^*(y)}{2} \leq \frac{\|x^*\| + \|x^*\|}{2} = 1,$$

así $x^*(x) = 1 = x^*(y)$. Viendo a x, y como miembros de X^{**} obtenemos que x^* existen dos puntos distintos donde alcanza la norma, lo cual contradice la suavidad de X^*. ■

Corolario 3.9. *Un espacio de Banach reflexivo es suave si y sólo si X^* es rotundo.*

Aún cuando nuestro objetivo no es estudiar la diferenciabilidad de la norma de un espacio de Banach, no podemos pasar por alto la relación entre ésta y la rotundidad del espacio. Por ello, presentamos el lema de Šmulian, sin demostración, que nos permite presentar el resultado que nos relaciona ambas definiciones.

Una caracterización de las normas Gateaux diferenciable en $x \in S_X$, donde $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, es el lema de Šmulian que establece:

Lema 3.10 (Šmulian)**.** *$\|\cdot\|$ sobre un espacio de Banach X es Gateaux diferenciable si y sólo si existe un único $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$.*

La demostración de este lema puede encontrarse en [9]. Y como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.11. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(X, \|\cdot\|^*)$ el espacio dual de X. Si $\|\cdot\|^*$ es rotundo entonces $\|\cdot\|$ es Gateaux diferenciable.*

Demostración. En virtud al lema de Šmulian 3.10 es suficiente demostrar que para cada $x \in S_X$ existe un único $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$. En efecto, sea $x \in S_X$, la proposición 2.3 nos garantiza la existencia de $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$. Supongamos que existen $x_1^*, x_2^* \in S_{X^*}$ tal que $x_1^*(x) = x_2^*(x) = 1$. Entonces

$$2 = \|x_1^*\|^* + \|x_2^*\|^* \geq \|x_1^* + x_2^*\|^* \geq x_1^*(x) + x_2^*(x) = 2;$$

esto es, $\|x_1^* + x_2^*\|^* = 2$, y en virtud a la rotundidad de X^* se obtiene que $x_1^* = x_2^*$. ■

3.4. Producto de espacio

La idea de esta sección es demostrar la estabilidad de la propiedad de rotundidad.

Definición 3.4. *Sea $(Y, \|.\|)$ un espacio de Banach con base $\{e_i : i \in I\}$ (incondicional si I es no numerable) tal que para todo subconjunto finito J de I,*

$$0 \leq |\alpha_j| \leq \beta_j, \quad \textit{para todo}\, j \in J \implies \left\| \sum_{j \in J} \alpha_j e_j \right\| \leq \left\| \sum_{j \in J} \beta_j e_j \right\|. \tag{3.3}$$

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios de Banach y consideramos el espacio

$$Y(X_i : i \in I) = \{x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \ : \sum_{i \in I} \|x_i\| e_i \in Y\},$$

dotado con la norma

$$\|x\| = \left\| \sum_{i \in I} \|x_i\| e_i \right\|_Y .$$

El espacio $Y(X_i \ i \in I)$ con esta norma es un espacio de Banach.

Lema 3.12. *Sea $(Y, \|.\|)$ un espacio de Banach con base $\{e_i : i \in I\}$ (incondicional si I es no numerable) que satisface (3.3). Sea $\{X_i \ i \in I\}$ una familia de espacios de Banach, definimos ϕ una aplicación de $Z = Y(X_i : i \in I)$ en Y como*

$$\phi((x_i)i \in I) = \sum_{i \in I} \|x_i\| \ e_i \quad \textit{para todo} \quad (x_i)_{i \in I} \in Z.$$

Entonces ϕ satisface las siguientes propiedades:

(i) Para todo $z \in Z$, $\|\phi(z)\| = \|z\|$.

(ii) Para todo $z \in Z$, todo $\lambda \in \mathbb{K}, \phi(\lambda z) = |\lambda| \phi(z)$.

(iii) Para todo $z_1, z_2 \in Z$, $\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\|$.

(iv) Para todo $z_1, z_2 \in Z$, $\|\phi(z_1) + \phi(z_2)\| \geq \|z_1 + z_2\|$.

Demostración.

(i) Esto coincide con la definición de la norma de Z.

(ii) Sean $z \in Z$, y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda z) &= \sum_{i \in I} \|\lambda z_i\| e_i \\
&= \sum_{i \in I} |\lambda| \|z_i\| e_i \\
&= |\lambda| \sum_{i \in I} \|z_i\| e_i \\
&= |\lambda| \phi(z).
\end{aligned}$$

(iii) Sean $z_1 = (x_i^1)_{i\in I}, z_2 = (x_i^2)_{i\in I}$ elementos en Z entonces, hacemos uso de (i).

$$\begin{aligned}
\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\| &= \left\| \sum_{i\in I} \|x_i^1\| e_i - \sum_{i\in I} \|x_i^2\| e_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i\in I} (\|x_i^1\| - \|x_i^2\|) e_i \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{i\in I} \|x_i^1 - x_i^2\| e_i \right\| \\
&= \|\phi(z_1 - z_2)\| \\
&= \|z_1 - z_2\|.
\end{aligned}$$

(iv) Sea $z_1 = (x_i^1)_{i\in I}, z_2 = (x_i^2)_{i\in I}$ elementos de Z. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\phi(z_1) + \phi(z_2)\| &= \left\| \sum_{i\in I} \|x_i^1\| + \sum_{i\in I} \|x_i^2\| e_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i\in I} (\|x_i^1\| + \|x_i^2\|) e_i \right\| \\
&\geq \left\| \sum_{i\in I} \|x_i^1 + x_i^2\| e_i \right\| \\
&= \|\phi(z_1 + z_2)\| \\
&= \|z_1 + z_2\|,
\end{aligned}$$

en vista de que $\|x_i^1 + x_i^2\| \leq \|x_i^1\| + \|x_i^2\|$.

Teorema 3.13. *Sea $(Y, \|.\|)$ un espacio de Banach con base $\{e_i : i \in I\}$ (incondicional si I es no numerable) y tal que, para todo subconjunto finito J de I*

$$0 \leq |\alpha_j| \leq \beta_j; \quad \textit{para todo}\, j \in J \;\; \Rightarrow \left\| \sum_{j\in J} \alpha_j e_j \right\| \leq \left\| \sum_{j\in J} \beta_j e_j \right\|.$$

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios de Banach rotundos, entonces si $(Y, \|.\|)$ es un espacio rotundo, $Z = Y(X_i : i \in I)$ también es rotundo.

Demostración. Consideremos la aplicación $\phi : Z \to Y$ definida en el lema previo. Sean $x = (x_i)_{i\in I}, y = (y_i)_{i\epsilon I}$ elementos en Z con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$. Los elementos $\phi(x), \phi(y)$ están en S_Y. Por tal razón consideremos dos casos:

(a) Si $\phi(x) \neq \phi(y)$. En este caso la rotundidad de Y nos garantiza que

$$\left\|\frac{1}{2}(\phi(x)+\phi(y))\right\| < 1$$

y en virtud del lema 3.12 se tiene que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|x+y\| \leq \frac{1}{2}\|\phi(x)+\phi(y)\| < 1.$$

Como deseábamos demostrar.

(b) Si $\phi(x) = \phi(y)$. En este caso supongamos que $\|x+y\| = 2$, necesitamos verificar que $x = y$. Si no es el caso, existe $i_0 \in I$ de forma que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$.

Dado que X_{i_0} es un espacio rotundo, se tiene que

$$\left\|\frac{x_{i_0}+y_{i_0}}{2}\right\| < 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2 &= \|x+y\| \\ &= \left\|\sum_{i\in I}\|x_i+y_i\|e_i\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{i\in I}(\|x_i\|+\|y_i\|)e_i\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{i\in I}\|x_i\|e_i\right\| + \left\|\sum_{i\in I}\|y_i\|e_i\right\| \\ &= \|x\|+\|y\| = 2, \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene que

$$\left\|\sum_{i\in I}\|x_i+y_i\|e_i\right\| = \left\|\sum_{i\in I}\|x_i\|e_i\right\| + \left\|\sum_{i\in I}\|y_i\|e_i\right\|.$$

Ahora bien, dado que X_{i_0} es un espacio rotundo y $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ se tiene que

$$\|x_{i_0}+y_{i_0}\| < \|x_{i_0}\|+\|y_{i_0}\|$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i\in I}\frac{\|x_i+y_i\|+\|x_i\|+\|y_i\|}{2}\,e_i\right\| &= \frac{1}{2}\left\|\sum_{i\in I}(\|x_i+y_i\|+\|x_i\|+\|y_i\|)\,e_i\right\| \\
&< \frac{1}{2}\left(\left\|\sum_{i\in I}\|x_i\|e_i\right\|+\left\|\sum_{i\in I}\|y_i\|e_i\right\|\right. \\
&+ \left.\left\|\sum_{i\in I}\|x_i\|e_i\right\|+\left\|\sum_{i\in I}\|y_i\|\,e_i\right\|\right) \\
&= \left\|\sum_{i\in I}\|x_i\|e_i\right\|+\left\|\sum_{i\in I}\|y_i\|e_i\right\|. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Por otra parte, se cumple

$$\begin{aligned}
\|x_i+y_i\| &\leq \frac{\|x_i+y_i\|+\|x_i\|+\|y_i\|}{2} \\
\left\|\sum_{i\in I}\|x_i+y_i\|e_i\right\| &\leq \left\|\sum_{i\in I}\frac{\|x_i+y_i\|+\|x_i\|+\|y_i\|}{2}e_i\right\|,
\end{aligned}$$

lo cual contradice (3.4). Esta contradicción se obtiene de suponer que $x \neq y$.

■

Teniendo en cuenta que el espacio ℓ_p con $1 < p < \infty$ es un espacio de Banach con base $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ que satisface las condiciones del teorema 3.13, podemos obtener, como consecuencia inmediata del teorema citado, el siguiente teorema de Day.

Corolario 3.14. *Sea p con $1 < p < \infty$ y sea $\{X_n : n \in \ N\}$ una familia numerable de espacios de Banach. Consideremos el espacio de Banach $\ell^p(X_1, X_2, ...)$ definido por*

$$Z := \ell^p(X_1, X_2, ...) = \{\boldsymbol{x} = (x_n)_n \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p < +\infty\}$$

y dotada con la norma $\|.\|_p$. Entonces Z es un espacio rotundo si y sólo si el espacio $X_n, n = 1, 2, 3, ...$ son también rotundos.

Capítulo 4

Espacios Uniformemente Rotundos

La importancia de los espacios uniformemente convexos se ha convertido en campo de la investigación independiente, en varias áreas de las matemáticas como la teoría de Grado y Geometría Diferencial han llegado a desempeñar un papel muy importante.

Definición 4.1. *Un espacio normado se dice* ***uniformemente rotundo*** *o* ***uniformemente convexo*** *si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\|x\| = 1,\ \|y\| = 1,\ \|x - y\| \geq \epsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta. \tag{4.1}$$

Geométricamente, significa que el punto medio de una cuerda no puede acercarse a la esfera unitaria del espacio a no ser que la longitud de la cuerda tienda a cero.

La siguiente definición también es usada: Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es uniformemente rotundo si para cada $\epsilon \in (0, 2]$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x, y \in B_X$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$, entonces

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

En este trabajo se usan ambas definiciones indistintamente.

Al igual que la rotundidad, la propiedad de uniformemente rotundo es en realidad una característica de la norma en X, y por esta razón lo apropiado es decir que X tiene una norma uniforme rotunda.

Proposición 4.1. *Todo espacio uniformemente rotundo es rotundo.*

Demostración. Basta aplicar la definición a $\epsilon = \|x - y\|$; es decir, si $x, y \in B_X$ son elementos distintos, para $\epsilon = \|x - y\|$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta < 1.$$

■

Sin embargo, existen espacios rotundos que no son uniformemente rotundos.

Proposición 4.2. *Todo espacio de Hilbert es uniformemente rotundo.*

Demostración. Sean H un espacio de Hilbert, $x, y \in S_H$, $\epsilon > 0$ de tal forma que $\|x - y\| \geq \epsilon$. Luego, la ley del paralelogramo implica que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 4 \\ \|x+y\|^2 &= 4 - \|x-y\|^2 \\ \|x+y\|^2 &= 4 - \|x-y\|^2 \leq 4 - \epsilon^2 \\ \|x+y\| \leq \sqrt{4-\epsilon^2} & \\ \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}} & \end{aligned}$$

Así, con $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$, se garantiza que H es un espacio de rotundo. ■

4.1. Caracterizaciones

Lema 4.1. *X es uniformemente rotundo si y sólo si para cada par de sucesiones $(x_n)_n, (y_n)_n$ con $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$, se tiene que*

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| \to 1 \implies \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que X es uniformemente rotundo y consideremos las sucesiones $(x_n)_n, (y_n)_n$ con $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$, de tal forma que $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| \to 1$, entonces $\|x_n - y_n\| \to 0$, pues en caso contrario $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ implica $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

$\Longleftarrow$) Recíprocamente, supongamos que X no es uniformemente rotundo, entonces podemos hallar un $\epsilon > 0$ y sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ en B_X al que $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ mientras que $\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \to 1$. ■

Corolario 4.2. *Sea X uniformemente rotundo. Si $(x_n)_n$ en X satisface $\|x_n\| \leq 1$ y $\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \to 1$ cuando $n, m \to \infty$, entonces $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy.*

Note que la condición $\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \to 1$ también obliga a que $\|x_n\| \to 1$ por la desigualdad triangular:

$$\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\| \leq \frac{\|x_n\| + \|x_m\|}{2} \leq 1.$$

Así, si X es completo, $(x_n)_n$ converge a algún elemento de X.

Teorema 4.3. *Sea X un espacio de Banach Uniformemente rotundo y suponga que $(x_n)_n$ es una sucesión en X que converge débilmente a x y $\|x_n\| \to \|x\|$. Entonces $\|x_n - x\| \to 0$.*

Demostración. Si $\|x\| = 0$ no hay nada para mostrar, por lo que podemos suponer que $x \neq 0$. Ahora, dado que $\|x_n\| \to \|x\|$ es fácil ver que podemos normalizar la sucesión, haciendo $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$ y $y := \frac{x}{\|x\|}$, entonces, dado que $x_n \xrightarrow{w} x$ implica que $y_n \xrightarrow{w} y$; además, $\|y_n - y\| \to 0$ lo cual implicará que $\|x_n - x\| \to 0$.

A continuación, elegimos $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(y) = 1$. Entonces

$$x^*\left(\frac{y_n + y_m}{2}\right) \leq \left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\| \leq 1.$$

Pero $x^*(y_n) \to x^*(y) = 1$ cuando $n \to \infty$, por lo cual debe cumplirse que $\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\| \to 1$ cuando $n, m \to \infty$. En virtud al corolario 4.2, se sigue que $(y_n)_n$ es de Cauchy y, por lo tanto, $(y_n)_n$ converge a algún punto de X. Ahora bien, dado que la convergencia en norma implica la convergencia débil, y ya que los límites débiles son únicos, tenemos que $y_n \to y$ en norma. ■

Haciendo uso de un argumento similar, puede darse una demostración corta de una interesante hecho, que se atribuye a Milman en 1938 y Pettis en 1939. Sin embargo, se omite dado que requiere un manejo del concepto de redes.

Teorema 4.4. *Todo espacio de Banach uniformemente rotundo es reflexivo.*

4.2. Desigualdades de Clarkson

Para completar nuestro análisis de rotundidad uniforme, pasamos a demostrar el teorema de Clarkson.

Teorema 4.5. *Si* $1 < p < \infty$, L_p *es uniformemente rotundo.*

La demostración de este teorema es relativamente fácil en el caso en que $2 \leq p < \infty$, y no tan fácil para el caso en que $1 < p < 2$.

Clarkson demostró varias desigualdades para la norma de L_p imitando la ley del paralelogramo. En este trabajo nos limitamos a la primera demostración del teorema de Clarkson para el caso en que $2 \leq p < \infty$; demostrada en 1940 por Boas en [3].

Lema 4.6. *Dado* $2 \leq p < \infty$ *y números reales* a, b, *se tiene que*

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

Demostración. Esta desigualdad es clásica, y nos limitamos a presentar un bosquejo de la demostración.

$$\begin{aligned}
(|a+b|^p + |a-b|^p)^{1/p} &\leq (|a+b|^2 + |a-b|^2)^{1/2} \\
&= 2^{1/2}(|a|^2 + |b|^2)^{1/2} \\
&\leq 2^{1/2} 2^{1/2-1/p}(|a|^p + |b|^p)^{1/p} \\
&= 2^{1-1/p}(|a|^p + |b|^p)^{1/p}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.7. *Para* $2 \leq p < \infty$ *y cualquier par* $f, g \in L_p$, *se tiene que*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p.) \tag{4.2}$$

Así, obtenemos como corolario el resultado deseado.

Corolario 4.8. *Si* $2 \leq p < \infty$, L_p *es uniformemente rotundo.*

Demostración. Sean $f, g \in L_p$ con $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$ y $\|f-g\|_p \geq \epsilon$, entonces

$$\|f+g\|_p^p \leq 2^{p-1}(2-\epsilon^p) = 2^p \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right).$$

Esto es, $\delta(\epsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$. ■

4.3. Módulo de convexidad

Definición 4.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para todo $\epsilon \in (0,2]$, definimos el módulo de rotundidad o de convexidad de $\|\cdot\|$ por*

$$\delta(\epsilon) := \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|; x, y \in S_X, \|x-y\| \geq \epsilon\right\}.$$

Es claro de la definición de espacios uniformemente rotundos si, y sólo si, $\delta(\epsilon) > 0$ para cada $\epsilon > 0$.

Geométricamente, el módulo de convexidad estima la menor de las distancias a la esfera unitaria de los puntos medios de cada par de puntos que distan al menos ϵ.

Note que si $\epsilon_1 < \epsilon_2$, entonces

$$\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|; x, y \in S_X, \|x-y\| \geq \epsilon_2\right\} \subsetneq \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|; x, y \in S_X, \|x-y\| \geq \epsilon_1\right\},$$

de donde

$$\delta(\epsilon_2) > \delta(\epsilon_1).$$

Al mismo tiempo es obvio que $\delta(0) = 0$.

Definición 4.3. *Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios de Banach uniformemente rotundos y sea δ_n el módulo de rotundidad de X_n, $n = 1, 2, \ldots$. Diremos que los espacios $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tienen módulo común de rotundidad si*

$$\text{ínf}\{\delta_n(\epsilon) : n \in \mathbb{N}\} > 0 \quad \textit{para todo} \quad 0 < \epsilon \leq 2.$$

Note que $\text{ínf}\{\delta_n(\epsilon) : n \in \mathbb{N}\} > 0$ si y sólo si existe una función $\delta(\epsilon) > 0$ la cual puede ser usada en lugar de todos $\delta_n(\epsilon)$.

Lema 4.9. *Para todo $\epsilon \in [0,2]$ y $x \in S_X$ se tiene que $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \delta(\epsilon) = 0$.*

Demostración. Sean $\epsilon \in [0,2]$ y $x \in S_X$, definimos $y = (1-\epsilon)x$. Entonces $y \in B_X$ y $\|x-y\| = \|x - x + \epsilon x\| = \|\epsilon x\| = \epsilon$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{x+y}{2}\right\| &= \left\|\frac{x+x-\epsilon x}{2}\right\| \\ &= \left\|x - \frac{\epsilon}{2}x\right\| \\ &= 1 - \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Así, $1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1 - 1 + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$, y en consecuencia $0 \leq \delta(\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}$, de lo cual se concluye que $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \delta(\epsilon) = 0$.

■

4.4. Producto de espacios uniformemente rotundos

Al igual que la sección análoga para espacios rotundos, presentamos esta sección con el objeto de demostrar la estabilidad de la propiedad de rotundidad uniforme en espacios uniformemente rotundos.

Teorema 4.10. *Sea $(Y, \|.\|)$ un espacio de Banach con base $\{e_n : n \in \ N\}$ y tal que*

$$0 \leq \alpha_n \leq \beta_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \right\|.$$

Sea $\{X_n \ : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios de Banach uniformemente rotundos y módulo común de rotundidad. Sea

$$Y(X_1, X_2, ...) = \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n \in Y \right\}$$

dotado con la norma

$$\|x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n \right\|_Y .$$

Entonces, si $(Y, \|.\|)$ es uniformemente rotundo, $Y(X_1, X_2, ...)$ es también uniformemente rotundo.

Demostración. Sea $\delta : [0,2] \to [0,1]$ el módulo común de rotundidad de los X_n, $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_1 : [0,2] \to [0,1]$ el de Y.

Consideremos $x = (x_n)_{n \in I}$, $x' = (x'_n)_{n \in I}$ elementos en $Y(X_1, X_2, ...)$ con $\|x\| = \|x'\| = 1$. Sea $\epsilon > 0$ dado y supongamos $\|x - x'\| \geq \epsilon$ probemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que: $\left\| \frac{x + x'}{2} \right\| \leq 1 - \delta_2$.

Para ello discutimos dos casos:

(a) Primero supongamos $\|x_n\| = \|x'_n\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_n + x'_n\| &= 2\frac{\left\|\dfrac{x_n}{\|x_n\|} + \dfrac{x'_n}{\|x_n\|}\right\|}{2}\|x_n\| \\ &\leq 2\left(1 - \delta\left(\frac{\|x_n - x'_n\|}{\|x_n\|}\right)\right)\|x_n\|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Así

$$\begin{aligned} \|x + x'\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n + x'_n\|e_n\right\| \\ &\leq 2\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \delta\left(\frac{\|x_n - x'_n\|}{\|x_n\|}\right)\right)\|x_n\|e_n\right\|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Consideremos

$$M := \left\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0,\ \frac{\|x_n - x'_n\|}{\|x_n\|} > \frac{\epsilon}{4}\right\}.$$

Por consiguiente, si $n \in \mathbb{N} \setminus M$,

$$\begin{aligned} \frac{\|x_n - x'_n\|}{\|x_n\|} &\leq \frac{\epsilon}{4} \\ \|x_n\| &\geq \frac{4}{\epsilon}\|x_n - x'_n\|. \end{aligned}$$

Esto es

$$\frac{\epsilon}{4} \geq \left\|\sum_{n \in \mathbb{N}\setminus M}\|x_n - x'_n\|e_n\right\|.$$

Es fácil verificar que

$$\left\|\sum_{n \in M}\|x_n - x'_n\|e_n\right\| \geq \frac{3\epsilon}{4}.$$

De aquí obtenemos $\frac{3\epsilon}{4} > \left\|\sum_{n \in \mathbb{N}\setminus M}\|x_n - x'_n\|e_n\right\|$, y por ende $\frac{3\epsilon}{4} \leq \left\|\sum_{n \in M}\|x_n - x'_n\|e_n\right\|$.

Ahora bien,

$$\left\|\sum_{n \in M}\|x_n - x'_n\|e_n\right\| \geq \frac{3\epsilon}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\left|\sum_{n \in M}\|x_n - x'_n\|e_n\right\| \geq \frac{3\epsilon}{8},$$

y dado que $\|x_n - x'_n\| \leq 2\|x_n\|$ Para todo n entonces se tiene que

$$\left\| \sum_{n\in M} \|x_n\| e_n \right\| \;\geq\; \frac{1}{2} \left\| \sum_{n\in M} \|x_n - x'_n\| e_n \right\| \;\geq\; \frac{3\epsilon}{8}.$$

Hacemos $y := \sum_{n\in \mathbb{N}\setminus M} \|x_n\| e_n$, $y' := \sum_{n\in M} \|x_n\| e_n$, $y'' := \left(1 - 2\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)\right) y'$ elementos en Y que satisfacen:

$$\begin{aligned}
\|y + y''\| &= \sum_{n\in \mathbb{N}\setminus M} \|x_n\| e_n + \left(1 - 2\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)\right) \sum_{n\in M} \|x_n\| e_n \\
&\leq \sum_{n\in \mathbb{N}\setminus M} \|x_n\| e_n + \sum_{n\in M} \|x_n\| e_n \\
&= \sum_{n\in N} \|x_n\| e_n \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\|y + y' - (y + y'')\| &= \|y' - y''\| \\
&= \|y' - (1 - 2\delta(\frac{\epsilon}{4})y')\| \\
&= \|y' - y' + 2\delta(\frac{\epsilon}{4})y'\| \\
&= \|2\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) y'\| \\
&= 2\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) \| \sum_{n\in M} \|x_n\| e_n \| \\
&\geq 2\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) \frac{3\epsilon}{8} \\
&= \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) \frac{3\epsilon}{4} \\
&= \alpha(\epsilon).
\end{aligned}$$

Como Y es uniformemente rotundo, para $(y + y') \in Y$ y $(y + y'') \in Y$ se tiene $\frac{1}{2}\|(y + y') + (y + y'')\| \leq 1 - \delta_1(\alpha(\epsilon))$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|y+y'+y+y''\| &= \frac{1}{2}\|2y+y'+(1-2\delta(\frac{\epsilon}{4}))y'\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|2y+y'+y'-2\delta(\frac{\epsilon}{4})y'\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|2y+2y'-2\delta(\frac{\epsilon}{4})y'\right\| \\
&= \left\|y+y'-\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)y'\right\| \\
&= \left\|y+\left(1-\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)\right)y'\right\|.
\end{aligned}$$

Así,

$$\left\|y+(1-\delta(\frac{\epsilon}{4}))y'\right\| = \frac{1}{2}\|y+y'+y+y''\| \leq 1-\delta_1(\alpha(\epsilon)). \tag{4.5}$$

De (4.4) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x+x'}{2}\right\| &\leq \left\|\sum_{\substack{n=1\\x_n\neq 0}}^{\infty}\left(1-\delta\left(\frac{\|x_n-x_n'\|}{\|x_n\|}\right)\right)\|x_n\|e_n\right\| \\
&= \left\|\sum_{n\in M}(1-\delta(\frac{\|x_n-x_n'\|}{\|x_n\|}))\|x_n\|e_n + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{M}}\left(1-\delta\left(\frac{\|x_n-x_n'\|}{\|x_n\|}\right)\right)\|x_n\|e_n\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n\in M}\left(1-\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)\right)\|x_n\|e_n + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{M}}1\|x_n\|e_n\right\| \\
&= \left\|\sum_{n\in M}(1-\delta(\frac{\epsilon}{4}))\|x_n\|e_n + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{M}}\|x_n\|e_n\right\| \\
&= \|\left(1-\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)\right)\sum_{n\in\ M}\|x_n\|e_n + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{M}}\|x_n\|e_n\| \\
&= \left\|1-\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)y'+y\right\| \\
&\leq 1-\delta_1(\alpha(\epsilon)) \\
&= 1-\delta_0(\epsilon).
\end{aligned}$$

Donde tenemos denotado

$$\delta_0(\epsilon) = \delta_1(\alpha(\epsilon)) = \delta_1(\delta(\frac{\epsilon}{4})\frac{3\epsilon}{4})$$

(b) En el caso general solo supongamos que $\|x\| = \|x'\| = 1$ y que $\|x + x'\| > 2(1 - \delta_1(\mu))$ donde $0 < \mu \leq 2$ El lema 3.12 muestra que

$$2(1 - \delta_1(\mu)) < \|x + x'\| \leq \|\phi(x) + \phi(x')\|.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(x')\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| e_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\| - \|x'_n\|) e_n \right\| \\ &< \mu. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad es debida a que $\|x_n\| = \|x'_n\|$. Ahora sea $\epsilon_n = \pm 1, n = 1, 2, 3, ...$ además, $\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \epsilon_n (\|x_n\| - \|x'_n\|) e_n \| < \mu$.

Así, sea $A = n \in \mathbb{N} : \epsilon_n = 1, B = n \in \mathbb{N} : \epsilon_n = -1$.

Definimos para $n = 1, 2, 3, ...$

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si} \quad n \in A \\ x'_n & \text{si} \quad n \in B \end{cases} \qquad y'_n = \begin{cases} x'_n & \text{si} \quad n \in A \\ x_n & \text{si} \quad n \in B \end{cases}.$$

Entonces $y = (y_n), y' = (y'_n)$ son elementos en $Y(X_1, X_2, ...)$ tales que

$$\|\phi(y) + \phi(y')\| = \|\phi(x) + \phi(x')\| > 2(1 - \delta_1(\mu)). \tag{4.6}$$

Entonces $\|\phi(y) - \phi(y')\| < \mu$.

Es fácil demostrar que

$$\|\phi(y) + \phi(y')\| = \| \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n (\|x_n\| - \|x'_n\|) e_n \|.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|\phi(y) - \phi(y')\| &= \| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \|y'_n\| e_n \| \\ &= \| \sum_{n=1}^{\infty} (\|y_n\| - \|y'_n\|) e_n \| \\ &= \| \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\| \epsilon_n - \|x'_n\| \epsilon_n) e_n \| \\ &= \| \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n (\|x_n\| - \|x'_n\|) e_n \|. \end{aligned}$$

Ahora definimos para $n = 1, 2, 3, ...$ $x''_n = \begin{cases} \dfrac{\|x_n\|}{\|x'_n\|}x'_n & \text{si} \quad x'_n \neq 0 \\ x'_n & \text{si} \quad x'_n = 0 \end{cases}$

Obtenemos que $\|x''_n\| = \|x_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces
$x'' = (x''_n) \in Y(X_1, X_2, ...)$ y $\|x''\| = \|x\| = 1$.

También

$$\begin{aligned} \|x' - x''\| &= \|\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n - x''_n\| e_n\| \\ &= \|\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(\|x_n\| - \|x'_n\|)\| \\ &< \mu, \end{aligned}$$

Donde $\epsilon_n = \pm 1$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|x + x''\| &= \|x + x' - x' + x''\| \\ &= \|x + x' - (x' - x'')\| \\ &\geq \|x + x'\| - \|x' - x''\| \\ &= \|x + x'\| - \|x'' - x'\| \\ &> 2(1 - \delta_1(\mu)) - \mu \\ &= 2(1 - \delta_1(\mu) - \frac{\mu}{2}). \end{aligned}$$

Una vez $\epsilon > 0$ está fijo, tomemos μ tal que $0 < \mu < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $\delta_1(\mu) + \dfrac{\mu}{2} < \delta_0(\dfrac{\epsilon}{2})$ donde δ_0 ha sido definido en la parte (a). Entonces

$$\|x + x''\| > 2(1 - \delta_0(\frac{\epsilon}{2}))$$

Por la virtud de la parte (a) tenemos que
$\|x - x''\| < \dfrac{\epsilon}{2}$
Finalmente

$$\|x - x'\| \leq \|x - x''\| + \|x'' - x'\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto, tomamos $0 < \epsilon \leq 2$,μ ya definido, así $\delta_2(\epsilon) := \delta_1(\mu)$ de tal manera que si $x, x' \in Y(X_1, X_2, ...)$ con $\|x\| = \|x'\| = 1$ y

$$\|\frac{x + x'}{2}\| > 1 - \delta_2(\epsilon)$$

Entonces $\|x - x'\| < \epsilon$

Lo que finaliza la prueba del teorema. $\blacksquare$

Referencias

[1] Bachman G., Narici L. *Functional Analysis.* Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[2] Barbu, V. and Precupanu Th. *Convexity and optimization in Banach Spaces*, Editura Academiei, (1986).

[3] R. P. Boas, *Some uniformly convex spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society 46 (1940), 304-311.

[4] Bracamonte P.Mireya. *Teorema de compacidad de James y algunas aplicaciones.* Trabajo Especial de Grado para optar al Título de Magister Scientiae en Matemáticas ante la Universidad de Los Andes. Mérida - Venezuela. 2002.

[5] Carothers, N.L., *A Short Course on Banach Space Theory*, London Mathematical Society, Student Text 64. Cambridge.2004.

[6] Clarkson J. A., *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40.(1936), 396-414.

[7] Diestel, J.; Geometry of Banach spaces - selected topics, Lecture Notes in Math. 485, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[8] Dunford N., *Linear Operators, spectral theory.* Interscience publishers., New York 1957.

[9] P. Habala, P. Hajek, V. Zizler. *Introduction to Banach Spaces I, II.* Matfyspress, Prague. 1996. 173-184.

[10] Krein Mark G. *Some questions in the theory of noments*, Gosudarstv. Naučno-Tehn. Izdat. Uktsin., Kharkov, 1938.

[11] Day Mahlon, *The spaces* L^p *with* $40<p<1$, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 816-823; MR 2, 102, MR 2, 419.

[12] Day Mahlon, *Reflexive Banach Spaces not isomorphic to uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 313-317; MR 2, 221.

[13] Day Mahlon, *Some more uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 504-507; MR 2, 314.

[14] Day Mahlon, *Uniform convexity, III*, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 745-750; MR 5, 146.

[15] Day Mahlon, *Uniform convexity in factor and conjugate spaces*, Ann. of Math. (2). 45 (1944), 375-385; MR 6, 69.

[16] Day Mahlon, *Strict convexity and smoothness of normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 516-528; MR 16, 716.

[17] Megginson R. *An Introduction to Banach Spaces Theory.* Graduate Texts in Mathematics 183. Springer, Verlag New York. 1998.

[18] Munkres J.R. *Topology, a first couse.* Prentice Hall, 1975.

[19] Nordlander, G. The modulus of convexity in normed linear spaces, Arkiv ffir Matem.4 (1958), 15-17.

[20] Rudin W. *Functional Analysis.* Mc. Graw-Hill, Inc. New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Bogotá, Caracas, Lisbon, London, Madrid, México, Milan, Montreal, New Delhi, Parin, San Juan, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto. 1991.