UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Condición necesaria y suficiente para la extinción de una especie (caso T-periódico).

Trabajo especial de grado presentado por

Anuar F. Rodríguez A.

como requisito final
para obtener el titulo de Licenciado
en Ciencias Matemáticas

Área de Conocimiento: Ecuaciones Diferenciales.
Tutor: MSc. Liliana Pérez.

Barquisimeto - Venezuela
Julio 2011

Resumen

Consideremos el sistema de tipo *Lotka-Volterra* $(n+1)$ dimensional

$$\begin{cases} x_i'(t) &=& x_i(t)\left[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t) - c_i y(t)\right], \quad 1 \leq i \leq n \\ y'(t) &=& y(t)\left[\alpha(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j x_j(t) - \beta y(t)\right], \end{cases} \tag{1}$$

$$x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t)]; \quad 1 \leq i \leq n, \tag{2}$$

donde b_{ij}, c_i, q_j son números reales no negativos y b_{ii}, β, son números reales positivos, con $1 \leq i, j \leq n$ y $a_i(t), \alpha(t)$ son funciones T-perídica con $a_i(t) > 0$, con $1 \leq i \leq n$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Usaremos el esquema desarrollado por Antonio Tineo en [5], para estudiar el comportamiento asintótico y la extinción del sistema (1), más precisamente probaremos.

Si $M(a) \leq \langle q, x^* \rangle$, entonces el sistema (2) tiene una solución positiva y T-periódica $u^*(t) = (u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t))$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t) - u^*(t), y(t)) = (0, 0),$$

para cualquier solución positiva $(x(t), y(t))$ del sistema (1).

Si $M(a) > \langle q, x^* \rangle$ y $B > \langle q, (2D-B)^{-1}(c) \rangle$ entonces el sistema (1) tiene una solución positiva y T-periódica que atrae a toda solución positiva del sistema.

Índice general

Introducción

La ecología se ocupa de las interrelaciones que existen entre los organismos vivos, vegetales o animales, y sus ambientes, y ésto se estudian con la idea de descubrir los principios que regulan estas relaciones. El objeto principal de la ecología es estudiar la evolución de las poblaciones, su extinción o supervivencia.

En la década de los años 20, el matemático italiano *Vito Volterra* $(1860-1940)$ y el biólogo estadounidense *Alfred J. Lotka* $(1880-1949)$ desarrollaron el modelo matemático de la competencia de dos especies, con recursos limitados en un medio cerrado, y que se conoce como modelo *Lotka-Volterra.*

Los modelos ecológicos han sido de amplio estudio en la matemática moderna, especialmente los modelos del tipo *Lotka-Volterra.* En este trabajo consideremos el sistema de *Lotka-Volterra*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_i'(t) & = & x_i(t)\left[a_i(t)-\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t)-c_iy(t)\right], \quad 1\leq i\leq n \text{ y } \forall t\in\mathbb{R}, \\ y'(t) & = & y(t)\left[\alpha(t)-\displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_jx_j(t)-\beta y(t)\right]; \end{array}\right. \tag{3}$$

donde b_{ij}, c_i, q_j son números reales no negativos y b_{ii}, β, son números reales positivos, $\alpha, a_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ son funciones continua y T-periódica, donde $1\leq i,j\leq n$.

Estos sistemas modelan la competencia de $n+1$ especies, $x_i(t)$: representa el tamaño de la especie i-ésima, $x_i'(t)$: razón de cambio del crecimiento de la especie, $a_i(t)$: tasa de crecimiento de la especie i, con respecto a t y a un periodo común $T>0$, el parámetro b_{ii} es el grado de inhibición de la especie i sobre si misma y b_{ij} con $(i\neq j)$ el grado de inhibición de la especie por la presencia de la especie j.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo esta compuesto por definiciones, lemas y teoremas necesarios para el desarrollo de los capítulos principales de este trabajo.

1.1. Definiciones, lemas y teoremas

Definición 1.1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones con dominio comï¿½n D. La sucesión $\{f_n\}$ es* ***equicontinua*** *en $S \subseteq D$ si y sólo si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $x, y \in \mathbf{S}$ y $|x - y| < \epsilon$, implica que $|f_n(x) - f_n(y)| < \delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.2. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida en X (donde X es el dominio de definición de la sucesión) es* ***uniformemente acotada****, si existe un número K tal que es $|f_n| < K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.3. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida en D converge uniformemente a la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, si y sólo si, dado $\epsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$, $x \in D$.*

Teorema 1.1 (**Arzela-Ascoli**)**.** *Toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C[a, b]$ (donde $C[a, b]$ es el conjunto de funciones continua en $[a, b]$) uniformemente acotada y equicontinua tiene una subsucesión que converge uniformemente.*

Demostración: Ver [12] pág. 216-218.

Definición 1.4. *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y T-periódica, se define el valor promedio de* f *como* $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ *y se denota por* $M(f)$.

Teorema 1.2 (Criterio de convergencia de sucesiones acotadas). *Dada* $\{x_n\}$ *una sucesión, sea* c *una cota superior de* $\{x_n\}$ *y* d *una cota inferior de* $\{x_n\}$*, toda sucesión acotada y monï¿½tona (creciente o decreciente) es convergente. Más aún, converge puntualmente.*

Demostración: Ver [12] pág. 216-218.

Teorema 1.3 (Teorema del valor medio). *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y convexo y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función lineal diferenciable sobre este abierto. Entonces se tiene que* $f(b) - f(a) = Df(c)(b-a)$*, donde* $Df(c)$ *es la aplicación lineal que presentan el jacobiano.*

Demostración: Ver [10] pág. 84-101.

Teorema 1.4 (Generalización del teorema del valor medio). *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y convexo y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función lineal diferenciable sobre este abierto. En este caso, sólo es posible establecer la siguiente desigualdad en término de la norma:*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|(Df(c))(b-a)\| \leq \|Df(c)\||a-b|.$$

Demostración: Ver [10] pág. 84-101.

Definición 1.5. *Una matriz cuadrada* B *de orden* $n \times n$ *se dice que es convergente, si* $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k$ *existe y es igual a la matriz nula.*

Definición 1.6. *Para cada matriz cuadrada* B *de orden* $n \times n$*, se define* ***radio espectral*** $\gamma(B)$ *como el valor propio de mayor módulo; es decir,*

$$\gamma(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } B\}.$$

El radio espectral corresponde al radio de menor circulo, centrado en el origen, tal que contiene a todos los espectro de valores propios de la matriz.

Teorema 1.5. *Sea B una matriz de orden $n \times n$, entonces* $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = 0$ *si, y sólo si,* $\gamma(B) < 1$.

Demostración: Ver [11]. pág. 346-349.

Teorema 1.6. *Sea B una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Si el radio espectral $\gamma(B)$ satisface $\gamma(B) < 1$, entonces $(I - B)^{-1}$ existe y* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B^m = (I - B)^{-1}$.

Demostración: Supongamos $\gamma(B) < 1$; y sea $S_k = \sum\limits_{m=0}^{k} B^m$. Si multiplicamos por $(I - B)$ se tiene,

$$\begin{aligned}
(I - B)S_k &= S_k - BS_k \\
&= \sum_{m=0}^{k} S_k - B \sum_{m=0}^{k} S_k \\
&= I + B + B^2 + \cdots + B^k - B(I + B + B^2 + \cdots + B^k) \\
&= I + B + B^2 + \cdots + B^k - B - B^2 - \cdots - B^{k+1} \\
&= I - B^{k+1}.
\end{aligned}$$

Luego, $\lim\limits_{k \to +\infty} (I - B)S_k = \lim\limits_{k \to +\infty} (I - B^{k+1}) = I - \lim\limits_{k \to +\infty} B^{k+1}$. Por el Teorema (1.5) se cumple que $\lim\limits_{k \to +\infty} B^{k+1} = 0$, por lo que $(I - B) \lim\limits_{k \to +\infty} S_k = I$, esto implica que $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B^m = \lim\limits_{k \to +\infty} S_k = (I - B)^{-1}$.

■

Teorema 1.7 (Comparación entre dos ecuaciones escalares). *Sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas, $y' = f(t, y)$ e $y' = g(t, y)$ las correspondientes ecuaciones diferenciales. Supongamos que una de las dos funciones f ó g es localmente lipschitziana en D con respecto a la variable y. Sean $y, z : [a, b] \to \mathbb{R}$ soluciones respectivas de $y' = f(t, y)$ e $y' = g(t, y)$ y*

$$g(t, y) \leq f(t, y) \quad \text{en } D \text{ y que } z(a) \leq y(a).$$

Entonces

$$z(t) \leq y(t).$$

Demostración: Ver [7] pág. 161.

Teorema 1.8. *Sean $a(t)$ y $b(t)$ funciones continua y T-periódicas definidas en $\mathbb{R}$, donde $a(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Existe una solución θ no-negativa y T-periódica de la ecuación logística*

$$x'(t) = x(t)[b(t) - a(t)x(t)], \tag{1.1}$$

la cual tiene la propiedad que atrae a todas las soluciones con condiciones iniciales positiva de la ecuación logística dada; esto es, si $U(t)$ es solución de (1.1), donde $x(0) = x_0 > 0$, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty}(U(t) - \theta(t)) = 0$, ($\theta$ es llamado atractor global de (1.1)). Además se cumple

i) $\theta \equiv 0$ *si* $M(b) \leq 0$.

ii) $\theta > 0$ *si* $M(b) > 0$ *y este caso,*

$$\begin{aligned}\theta(0) = x_0 &= \frac{\exp\left(\int_0^T b(\tau)d\tau\right) - 1}{\int_0^T a(s)\exp\left(\int_0^s b(\tau)d\tau\right)ds}\\ &= \left(\int_{-\infty}^0 a(s)\exp\left(-\int_s^0 b(\tau)d\tau\right)ds\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Demostración: Ver [6] pág. 14-17.

Observación 1.1. *Si a y b son constantes en el Teorema (1.8), entonces el atractor global de la ecuación logóstica es el $\max\{0, \frac{b}{a}\}$. Si b es positivo el atractor global es el punto de equilibrio $\frac{b}{a}$.*

Teorema 1.9. *Sean a, b, $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, T-periódicas con $a(t)$ positivo para todo $t \in \mathbb{R}$. Supongamos que $B(t) \leq b(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea θ_b el atractor global de la ecuación diferencial*

$$x'(t) = x(t)[b(t) - a(t)x(t)]$$

y sea θ_B el atractor global de la ecuacion diferncial

$$x'(t) = x(t)[B(t) - a(t)x(t)],$$

entonces $\theta_B(t) \leq \theta_b(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: Si $M(B) \leq 0$, entonces $\theta_B \equiv 0$ y obviamente $\theta_B(t) \leq \theta_b(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $\theta_B > 0$, entonces $M(B) > 0$ y $\theta_B(t)$ y $\theta_b(t)$ son funciones positiva. Por otra parte $\theta_B(0) = [\int_{-\infty}^{0} a(s)\exp(-\int_s^0 B(\tau)d\tau)ds]^{-1}$. Como $B(t) \leq b(t)$, entonces $\exp(-\int_s^0 B(\tau)d\tau) \geq \exp(-\int_s^0 b(\tau)d\tau)$ y así $\theta_B(0) \leq \theta_b(0)$. Además para $x \geq 0$, $x[B(t) - a(t)x] \leq x[b(t) - a(t)x]$, luego por teorema de comparación (1.7) se tiene $\theta_B(t) \leq \theta_b(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ∎

Capítulo 2

Método iterativo

En este capítulo se desarrolla de manera exhaustiva el método iterativo, desarrollado por **A. Tineo** en [5]; el objetivo es construir de manera inductiva una sucesión de funciones no-negativas y T-periódicas $\{U^N(t) = \mathrm{col}(U_1^N(t), U_2^N(t), \ldots, U_n^N(t))\}$ donde $U_i^N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones no negativas y T-periódicas para $1 \leq i \leq n$.

2.1. Desarrollo del esquema iterativo

Consideremos el sistema

$$x_i'(t) = x_i(t)\left[a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t)\right],\ 1 \leq i \leq n. \tag{2.1}$$

donde a_i son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, continuas y T-periódicas, además $b_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones constantes tales que $b_{ij} \geq 0$, y $b_{ii} > 0$, con $1 \leq i, j \leq n$. Para construir la sucesión $\{U^N(t) = (U_1^N(t), U_2^N(t), \ldots, U_n^N(t))\}$.
Comencemos definiendo $U^0(t) = (U_1^0(t), U_2^0(t), \ldots, U_n^0(t)) = (0, 0, \ldots, 0)$, es decir, la función nula. Sustituyendo las componentes las componentes de $U^0(t)$ en el sistema (2.1) excepto en la i-ésima posición, nos queda

$$x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - b_{ii}x_i(t)], \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

cuyos coeficientes son T-periódicas, por Teorema (1.8), existen soluciones no-negativa y T-periódica $U_i^1(t)$, para $1 \leq i \leq n$ y definamos

$$U^1(t) = (U_1^1(t), U_2^1(t), \ldots, U_n^1(t))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Denotemos $B_i^0(t) = a_i(t)$, $1 \leq i \leq n$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Consideremos que $U^s(t) \leq U^q(t)$ siempre que $U_i^s(t) \leq U_i^q(t)$ con $1 \leq i \leq n$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, así $\overrightarrow{0} = U^0(t) \leq U^1(t)$. Nuevamente sustituyendo las componentes de $U^1(t)$ en el sistema (2.1) excepto en la i-esima posición tenemos

$$x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} U_j^1(t) - b_{ii} x_i(t)] \quad \text{con } 1 \leq i \leq n.$$

Denotando $B_i^1(t) = a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} U_j^1(t)$, se tiene que $x_i'(t) = x_i(t)[B_i^1(t) - b_{ii} x_i(t)]$; con $1 \leq i \leq n$, y para todo $t \in \mathbb{R}$, la cual es una ecuación logística cuyos coeficientes son T-periódica; de manera análoga se tiene que existen soluciones T-periódica, no-negativa $U_i^2(t)$, con $i = 1, 2, ..., n$, para todo $t \in \mathbb{R}$ que define el siguiente vector $U^2(t) = (U_1^2(t), U_2^2(t), ..., U_n^2(t))$.
Comparemos la dos ecuaciones logísticas y T-periódicas obtenida anteriormente. Como

$$B_i^1(t) = a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} U_j^1(t) \leq a_i(t) = B_i^0(t).$$

Se tiene que $B_i^1(t) - b_{ii} x_i(t) \leq B_i^0(t) - b_{ii} x_i(t)$, esto implica que

$$x_i(t)[B_i^1(t) - b_{ii} x_i(t)] \leq x_i(t)[B_i^0(t) - b_{ii} x_i(t)].$$

Luego por Teorema (1.9) tenemos que $U_i^2(t) \leq U_i^1(t)$, con $1 \leq i \leq n$, más aún $U^0(t) \leq U^1(t)$, por ser $U^2(t)$ no negativa se cumple que $U^0(t) \leq U^2(t) \leq U^1(t)$. Sustituyendo las componente de $U^2(t)$ en el sistema (2.1) excepto en la i-esima posición tenemos

$$x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} U_j^2(t) - b_{ii} x_i(t)]; \quad \text{con } 1 \leq i \leq n \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

denotando $B_i^2(t) = a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^2(t)$, con $1 \leq i \leq n$, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $x_i'(t) = x_i(t)[B_i^2(t) - b_{ii}x_i(t)]$, La cual es una ecuación logóstica con coeficiente T-periódica, por Teorema (1.8) existen soluciones no-negativa T-periódica $U_i^3(t)$, con $1 \leq i \leq n$, para todo $t \in \mathbb{R}$, que define el vector $U^3(t) = (U_1^3(t), U_2^3(t), \ldots, U_n^3(t))$. Por otro lado, se tiene que $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^2(t) \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^1(t)$, ya que $U_j^2(t) \leq U_j^1(t)$, por tanto $a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^1(t) \leq a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^2(t)$, es decir $B_i^1(t) \leq B_i^2(t)$, por lo que $x_i(t)[B_i^1(t) - b_{ii}x_i(t)] \leq x_i(t)[B_i^2(t) - b_{ii}x_i(t)]$. Por Teorema (1.9) tenemos que $U_i^2(t) \leq U_i^3(t)$ con $1 \leq i \leq n$. Más aún $U^2(t) \leq U^1(t)$. Ahora probemos que $U^3(t) \leq U^1(t)$. En efecto, como $B_i^2(t) \leq B_i^0(t)$, se cumple que

$$x_i(t)[B_i^2(t) - b_{ii}x_i(t)] \leq x_i(t)[B_i^0(t) - b_{ii}x_i(t)].$$

Por Teorema (1.9) tenemos $U_i^3(t) \leq U_i^1(t)$, con $1 \leq i \leq n$, así $U^3(t) \leq U^1(t)$. Por tanto se cumple que $U^0(t) \leq U^2(t) \leq U^3(t) \leq U^1(t)$.

Por otro lado, tenemos

$$a_i(t) - \sum_{j=1, i\neq 1}^{n} b_{ij}U_j^1(t) \leq a_i(t) - \sum_{j=1, i\neq 1}^{n} b_{ij}U_j^3(t) \leq a_i(t) - \sum_{j=1, i\neq 1}^{n} b_{ij}U_j^2(t) \leq a_i(t).$$

Es decir, $B_i^1(t) \leq B_i^3(t) \leq B_i^2(t) \leq B_i^0(t)$, con $1 \leq i \leq n$.

Para $n = k \geq 1$, supongamos que se cumple

$$U^{2k}(t) \leq U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+1}(t) \leq U^{2k-1}(t).$$

Además, $B_i^{2k-1}(t) \leq B_i^{2k+1}(t) \leq B_i^{2k+2}(t) \leq B_i^{2k}(t)$, con $1 \leq i \leq n$.

Para $n = k + 1$, se debe cumplir que

$$U^{2k}(t) \leq U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+4}(t) \leq U^{2k+3}(t) \leq U^{2k+1}(t) \leq U^{2k-1}(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

En efecto,

$$B_i^{2k-1}(t) \leq B_i^{2k+1}(t) \leq B_i^{2k}(t) \leq B_i^{2k-2}(t).$$

Luego, para $B_i^{2k+1}(t) \leq B_i^{2k}(t)$, para $1 \leq i \leq n$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos por Teorema (1.8) que existen soluciones T-periódicas

$$U_i^{2k+2}(t),\, U_i^{2k+1}(t) \;\text{ de }\; x_i(t)[B_i^{2k+1}(t) - b_{ii}x_i(t)],\, x_i(t)[B_i^{2k}(t) - b_{ii}x_i(t)]$$

respectivamente, las cuales son ecuaciones logística con coeficientes T-periódicas. Comparando tenemos

$$B_i^{2k+1}(t) = a_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^{2k+1}(t) \leq a_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^{2k}(t) = B_i^{2k}(t)$$

así, tenemos $B_i^{2k+1}(t) - b_{ii}x_i(t) \leq B_i^{2k}(t) - b_{ii}x_i(t)$, esto implica que $x_i(t)[B_i^{2k+1}(t) - b_{ii}x_i(t)] \leq x_i(t)[B_i^{2k}(t) - b_{ii}x_i(t)]$.

Por Teorema (1.9) se tiene $U_i^{2k+2}(t) \leq U_i^{2k+1}(t)$, con $1 \leq i \leq n$, para todo $t \in \mathbb{R}$, más aún, $U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+1}(t)$. De acá se tiene que

$$\sum_{j=i,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^{2k+2}(t) \leq \sum_{j=i,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^{2k+1}(t),$$

por tanto $a_i(t) - \sum_{j=i,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^{2k+1}(t) \leq a_i(t) - \sum_{j=i,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^{2k+2}(t)$, esto implica que $B_i^{2k+1}(t) \leq B_i^{2k+2}(t)$. Por lo que, se cumple

$$x_i(t)[B_i^{2k+1}(t) - b_{ii}x_i(t)] \leq x_i(t)[B_i^{2k+1}(t) - b_{ii}x_i(t)].$$

Luego, por Teorema (1.8) tenemos que existen soluciones $U_i^{2k+2}(t)$ y $U_i^{2k+3}(t)$ de $x_i(t)[B_i^{2k+1}(t) - b_{ii}x_i(t)]$ y $x_i(t)[B_i^{2k+2}(t) - b_{ii}x_i(t)]$ respectivamente, siguiendo un proceso análogo y por Teorema (1.9) se tiene

$$U_i^{2k+2}(t) \leq U_i^{2k+3}(t),\; 1 \leq i \leq n,\; \text{más aún } U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+3}(t).$$

Por otro, lado dado que $B_i^{2k+2}(t) \leq B_i^{2k}(t)$, de manera análoga existen soluciones $U_i^{2k+3}(t)$ y $U_i^{2k+1}(t)$ de $x_i(t)[B_i^{2k+2}(t) - b_{ii}x_i(t)]$ y $x_i(t)[B_i^{2k}(t) - b_{ii}x_i(t)]$ respectivamente, que satisfacen $U_i^{2k+3}(t) \leq U_i^{2k+1}(t)$, más aún $U^{2k+3}(t) \leq U^{2k+1}(t)$, por tanto

$$U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+3}(t) \leq U^{2k+1}(t).$$

Por otro lado, $B_i^{2k-1}(t) \leq B_i^{2k+1}(t)$, luego por Teorema (1.8) tenemos que existen soluciones no-negativas con coeficientes T-periódicas de $U_i^{2k}(t)$ y $U_i^{2k+2}(t)$ de las ecuaciones logï¿½sticas $x_i(t)[B_i^{2k-1}(t) - b_{ii}x_i(t)]$ y $x_i(t)[B_i^{2k+1}(t) - b_{ii}x_i(t)]$ respectivamente, por un procedimiento anï¿½logo a lo anterior y Teorema (1.9) se tiene que

$$U_i^{2k}(t) \leq U_i^{2k+2}(t),\ 1 \leq i \leq n,\ \text{más aún } U^{2k}(t) \leq U^{2k+2}(t).$$

Así, se tiene que

$$U^0(t) \leq U^2(t) \leq \ldots \leq U^{2k}(t) \leq U^{2k+2}(t) \leq U^{2k+3}(t) \leq U^{2k+1}(t) \leq \ldots \leq U^3(t) \leq U^1(t).$$

La sucesión $\{U^{2k}(t)\}$ es creciente, acotada superiormente por $U^1(t)$ e inferiormente por $U^0(t)$, y la sucesión $\{U^{2k+1}(t)\}$ es decreciente, acotada inferiormente por $U^0(t)$ y superiormente por $U^1(t)$. Es decir, $\{U^{2k}(t)\}$ y $\{U^{2k+1}(t)\}$ son sucesiones monótonas y acotadas de $\mathbb{R}_+^n$. En conclusion, para $1 \leq i \leq n$, se tiene que

$$U_i^0(t) \leq U_i^2(t) \leq U_i^4(t) \leq \ldots \leq U_i^{2k}(t) \leq U_i^{2k+1}(t) \leq \ldots \leq U_i^3(t) \leq U_i^1(t),$$

mas aún

$$U^0(t) \leq U^2(t) \leq U^4(t) \leq \ldots \leq U^{2k}(t) \leq U^{2k+1}(t) \leq \cdots \leq U^3(t) \leq U^1(t).$$

Luego por Teorema (1.2) estas sucesiones son convergentes y converge a

$$\lim_{k\to+\infty} U_i^{2k}(t) = \underline{U_i}(t) \text{ y } \lim_{k\to+\infty} U_i^{2k+1}(t) = \overline{U}_i(t); \quad 1 \leq i \leq n.$$

Más aún, la convergencia es puntual. ■

Teorema 2.1. $\lim_{k\to+\infty} U_i^{2k}(t) = \underline{U_i}(t)$ *y* $\lim_{k\to+\infty} U_i^{2k+1}(t) = \overline{U}_i(t)$, *con* $1 \leq i \leq n$ *converge uniformemente para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: Para realizar la demostración utilicemos el teorema de **Arzela-Ascoli**.
Primero probemos que $\{U^{2k}(t)\}$ y $\{U^{2k+1}(t)\}$ son uniformemente acotada.
En efecto, sabemos por el método iterativo que

$$U^0(t) \leq U^2(t) \leq U^4(t) \leq \cdots \leq U^{2k}(t) \leq U^{2k+1}(t) \leq \cdots \leq U^1(t)$$

más aún

$$U_i^0(t) \leq U_i^2(t) \leq U_i^4(t) \leq \cdots \leq U_i^{2k}(t) \leq U_i^{2k+1}(t) \leq \cdots \leq U_i^1(t)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y para todo $t \in \mathbb{R}$.
Luego, como $U_i^{2k}(t) \leq U_i^1(t)$, para $1 \leq i \leq n$. Consideremos $\hat{M} = \text{máx}\{U_{1M}^1, U_{2M}^1, \ldots, U_{nM}^1\}$. Así, $U_i^{2k}(t) \leq \hat{M}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|U^{2k}(t)\| &= \sqrt{(U_1^{2k}(t))^2 + (U_2^{2k}(t))^2 + \cdots + (U_n^{2k}(t))^2} \\
&\leq \sqrt{\hat{M}^2 + \hat{M}^2 + \cdots + \hat{M}^2} \\
&= \sqrt{n\hat{M}^2} \\
&= \sqrt{n}\hat{M} \\
&= M.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\|U^{2k}(t)\| \leq M$. Por tanto $\{U^{2k}(t)\}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ está uniformemente acotada.
Se sigue un proceso análogo para $U^{2k+1}(t)$. En consecuencia $\{U^{2k}(t)\}$ y $\{U^{2k+1}(t)\}$ son uniformemente acotada.

Probemos la equicontinuidad, para los términos pares y se prueba de forma análoga para los términos impares.

En efecto, queremos probar que: Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$; tal que $t_1, t_2 \in \mathbf{S}$ y $|t_1 - t_2| < \delta$, entonces $\|U^{2k}(t_1) - U^{2k}(t_2)\| < \epsilon$.

Por **Teorema del Valor Medio** tenemos que existe $t \in \mathbf{S}$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$

$$\|U^{2k}(t_1) - U^{2k}(t_2)\| \leq \|(U^{2k}(t))'\| |t_1 - t_2|.$$

Por otra parte, tenemos que para la ecuacii¿½n logi¿½stica

$$x_i'(t) = x_i(t)[B_i^{2k-1}(t) - b_{ii}x_i(t)],\ 1 \leq i \leq n \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Se cumple que, $|x_i'(t)| \leq |x_i(t)|[|B_i^{2k-1}(t)| + |b_{ii}||x_i(t)|]$.

Como $U_i^{2k}(t)$ es solución del sistema anterior, entonces

$$|(U_i^{2k}(t))'| \leq |U_i^{2k}(t)|[|B_i^{2k-1}(t)| + |b_{ii}||U_i^{2k}(t)|].$$

Estudiemos la cota de $B_i^{2k-1}(t)$

$$\begin{aligned}
|B_i^{2k-1}(t)| &= |a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} U_j^{2k-1}(t)| \\
&\leq |a_i(t)| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |b_{ij} U_j^{2k-1}(t)| \\
&\leq |a_{iM}| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \widehat{N_i}\widehat{M} \\
&= N_i,
\end{aligned}$$

donde $a_{iM} = \sup\{a_i(t), 1 \leq i \leq n \text{ y } t \in \mathbb{R}\}$ y $\widehat{N}_i = \max\limits_{1\leq i\leq n} |b_{ij}|$. Como, $U_i^{2k}(t) \leq U_i^1(t)$, con $1 \leq i \leq n$, para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\max_{1\leq i\leq n} |U_i^{2k}(t)| \leq \max_{1\leq i\leq n} U_i^1(t) = M_1.$$

Por lo que se tiene,

$$|(U_i^{2k}(t))'| \leq M_1[N_i + \widehat{N}_i M_1] = R_i.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|(U^{2k}(t))'\| &= \max\{|(U_1^{2k}(t))'|, |(U_2^{2k}(t))'|, \ldots, |(U_n^{2k}(t))'|\} \\
&\leq \max\{R_1, R_2, \ldots, R_n\} \\
&= R.
\end{aligned}$$

En consecuencia $\|(U^{2k}(t))'\| < R$. Luego, por Teorema del valor medio, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|U^{2k}(t_1) - U^{2k}(t_2)\| &\leq \|(U^{2k}(t))'\||t_1 - t_2| \\
&< R|t_1 - t_2| \\
&< R\delta \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\|U^{2k}(t_1) - U^{2k}(t_2)\| < \epsilon$. Por tanto $\{U^{2k}(t)\}$ es uniformemente acotada y equicontinua por **Teorema de Arzela-Ascoli**, existe una suceción de $\{U^{2k}(t)\}$, que converge uniformemente, digamos $\{U^{2k_j}(t)\}$.La cual converge a

$$\lim_{k\to+\infty} U^{2k_j}(t) = \underline{U}(t).$$

Veamos que la sucesión $\{U^{2k}(t)\}$ converge uniformemente, como $U^{2k_j}(t)$ es una subsucesión de $\{U^{2k_j}(t)\}$ que converge uniformemente, esto es dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $j > j_0$, entonces $\|U^{2k_j}(t) - \underline{U}(t)\| < \dfrac{\epsilon}{n}$.
Observemos que

$$|U_i^{2k_j}(t) - \underline{U}_i(t)| \leq \|U^{2k_j}(t) - \underline{U}(t)\| < \frac{\epsilon}{n}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Afirmacion 1. $|U_i^{2k}(t) - \underline{U}_i(t)| < \dfrac{\epsilon}{n}$, $\forall k_{j_0}$.

En efecto, sea $k \geq k_{j_0}$, entonces $k_{j_0} \leq k \leq k_j$, para algún $j > j_0$, por tanto $2k_{j_0} \leq 2k \leq 2k_j$, así tenemos que gracias a el hecho de $\{U_i^{2k}(t)\}$, con $1 \leq i \leq n$ es una sucesión creciente se cumple

$$U_i^{2k_{j_0}}(t) \leq U_i^{2k}(t) \leq U_i^{2k_j}(t), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Luego,

$$U_i^{2k_{j_0}}(t) - \underline{U}_i(t) \leq U_i^{2k}(t) - \underline{U}_i(t) \leq U_i^{2k_j}(t) - \underline{U}_i(t), \quad 1 \leq i \leq n.$$

En consecuencia,

$$|U_i^{2k}(t) - \underline{U}_i(t)| < \frac{\epsilon}{n}, \quad \forall k > k_{j_0}, \quad \text{ya que } |U^{2k_j}(t) - \underline{U}_i(t)| < \frac{\epsilon}{n}, \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|U^{2k}(t) - \underline{U}(t)\| &= \max\{|U_1^{2k}(t) - \underline{U}_1(t)|, \ldots, |U_n^{2k}(t) - \underline{U}_n(t)|\} \\ &< \frac{\epsilon}{n}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\|U^{2k}(t) - \underline{U}(t)\| < \dfrac{\epsilon}{n}$, para todo $k > k_{j_0}$.
Así $\{U^{2k}(t)\}$, converge uniformemente. Análogamente se tiene que la sucesión $\{U^{2k+1}(t)\}$

converge uniformemente.

Por tanto,

$$\lim_{k\to+\infty} U^{2k}(t) = \underline{U}(t) \ \text{ y } \ \lim_{k\to+\infty} U^{2k+1}(t) = \overline{U}(t).$$

Denotemos,

$$(\overline{U}(t), \underline{U}(t)) = \lim_{k\to+\infty}(U^{2k+1}(t), U^{2k}(t)). \tag{2.2}$$

■

Lema 2.1. *El vector col$(\overline{U}(t), \underline{U}(t))$ es solución del sistema 2n-dimensional*

$$\begin{cases} \overline{x}_i'(t) &= \overline{x}_i(t)[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(t)\underline{x}_j(t) - b_{ii}(t)\overline{x}_i(t)]; \quad 1\le i\le n \\ \underline{x}_i'(t) &= \underline{x}_i(t)[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(t)\overline{x}_j(t) - b_{ii}(t)\underline{x}_i(t)]; \quad 1\le i\le n \end{cases} \tag{2.3}$$

y ademï¿½s se sastiface $\overline{U}(t) \ge \underline{U}(t) \ge \overrightarrow{0}$.

Demostración: Sabemos por el comportamiento del método iterativo para el caso par se satisface

$$x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^{2k+1}(t) - b_{ii}x_i(t)], \quad 1\le i\le n \text{ y } \forall t\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Como $U^{2k}(t)$ es solución no negativa y T-periódica $U^{2k}(t) = (U_1^{2k}(t), U_2^{2k}(t), ..., U_n^{2k}(t))$, para todo $t\in\mathbb{R}$, del sistema (2.4) se cumple que $U_i^{2k}(t)$

$$(U_i^{2k}(t))' = U_i^{2k}(t)[a_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^{2k+1}(t) - b_{ii}U_i^{2k}(t)].$$

Aplicando límite cuando k tiende a más infinito a ambos lado de la igualdad, se obtiene

$$\lim_{k\to\infty}(U_i^{2k}(t))' = \lim_{k\to\infty}(U_i^{2k}(t))[a_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}\lim_{k\to\infty}(U_j^{2k+1}(t)) - b_{ii}\lim_{k\to\infty}(U_i(t)^{2k}(t))]$$

$$(\underline{U}_i(t))' = \underline{U}_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{U}_j(t) - b_{ii}\underline{U}_i(t)].$$

Por tanto se tiene que $\underline{U}_i(t)$ es solución del sistema:

$$\underline{x}_i'(t) = \underline{x}_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{x}_j(t) - b_{ii}\underline{x}_i(t)]; \qquad 1 \leq i \leq n \text{ y } \forall t \in \mathbb{R};$$

y de forma análoga para el caso impar, se cumple que $\overline{U}_i(t)$, es solución del sistema

$$\overline{x}_i'(t) = \overline{x}_i[a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\underline{x}_j(t) - b_{ii}\overline{x}_i(t)].$$

Por tanto $(\overline{U}_i(t), \underline{U}_i(t))$ es solución del sistema $2n$-dimensional

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{x}_i'(t) & = & \overline{x}_i(t)\left[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}(t)\underline{x}_j(t) - b_{ii}(t)\overline{x}_i(t)\right]; \quad 1 \leq i \leq n \\ \underline{x}_i'(t) & = & \underline{x}_i(t)\left[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}(t)\overline{x}_j(t) - b_{ii}(t)\underline{x}_i(t)\right]; \quad 1 \leq i \leq n. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Por otro lado como $\overrightarrow{0} \leq U^{2k}(t) \leq U^{2k+1}(t)$, aplicando límite cuando k tiende a más infinito, se obtiene que $\overrightarrow{0} \leq \underline{U}(t) \leq \overline{U}(t)$. ■

Proposición 2.1. *Para cualquier solución positiva del sistema $2n$-dimensional*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{x}_i'(t) & = & \overline{x}_i(t)\left[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}(t)\underline{x}_j(t) - b_{ii}(t)\overline{x}_i(t)\right]; \quad 1 \leq i \leq n \\ \underline{x}_i'(t) & = & \underline{x}_i(t)\left[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}(t)\overline{x}_j(t) - b_{ii}(t)\underline{x}_i(t)\right]; \quad 1 \leq i \leq n. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Se cumple $\limsup_{t\to+\infty}[x_i(t) - \overline{U}_i(t)] \leq 0 \leq \liminf_{t\to+\infty}[x_i(t) - \underline{U}_i(t)]$. *Donde* $\overline{U}_i(t)$, $\underline{U}_i(t)$ *son las funciones coordenadas de* $\overline{U}(t)$, $\underline{U}(t)$ *respectivamente.*

Demostración: Ver [8]. pág. 73-76.

Teorema 2.2. *Si* $W_i(t) = \underline{U}_i(t) = \overline{U}_i(t)$, *entonces* $\lim_{k\to+\infty}(U_i(t) - W_i(t)) = 0$, *con* $1 \leq i \leq n$, *para cualquier solución* $col(U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t))$ *del sistema*

$$x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t)], \qquad 1 \leq i \leq n \ y \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Demostración: Por proposición (2.1) tenemos

$$\limsup_{t\to+\infty}[U_i(t) - W_i(t)] \leq 0 \leq \liminf_{t\to+\infty}[U_i(t) - W_i(t)]. \tag{2.7}$$

Por otro lado, se tiene que

$$0 \leq \liminf_{t\to+\infty}[U_i(t) - W_i(t)] \leq \limsup_{t\to+\infty}[U_i(t) - W_i(t)] \leq 0. \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) se cumple

$$\liminf_{t\to+\infty}[U_i(t) - W_i(t)] = 0 = \limsup_{t\to+\infty}[U_i(t) - W_i(t)].$$

Por tanto, $\lim\limits_{t\to+\infty}(U_i(t) - W_i(t)) = 0$, con $1 \leq i \leq n$. ■

Observación 2.1. *$\underline{U}(t) > 0$ si $U^2(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*
En efecto, supongamos que $U^2(t) > 0$. Como $0 < U^2(t) \leq \cdots \leq U^{2k}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$,se tiene que, $0 < U^2(t) \leq U^{2k}(t)$ para todo $k \geq 2$, tomando límite cuando k tiende a más infinito a ambos lados de la desigualdad

$$0 < \lim_{k\to+\infty} U^2(t) \leq \lim_{k\to+\infty} U^{2k}(t),$$

ya que $U^2(t)$ no depende de k y $\lim\limits_{k\to+\infty} U^{2k}(t) = \underline{U}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia $\underline{U}(t) > 0$.

Capítulo 3

Caso Autónomo

En este cápitulo se desarrolla una serie de proposiciones, lemas y teoremas para el sistema con coeficiente constantes, es decir el caso autónomo.

Consideremos los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_i' &=& x_i\left[a_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j - c_i y\right], \quad 1 \leq i \leq n; \\ y' &=& y\left[\alpha - \sum_{j=1}^{n} q_j x_j - \beta y\right], \end{array}\right. \tag{3.1}$$

$$x_i' = x_i[a_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j]; \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.2}$$

donde b_{ij}, c_i, q_j son números reales no negativos y a_i, b_{ii}, β, son números reales positivos, con $1 \leq i, j \leq n$, tales que los coeficientes satisfacen las desigualdades

$$a_i > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} a_j + \frac{\alpha^+}{\beta} c_i; \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.3}$$

donde $\alpha^+ = \text{máx}\{0, \alpha\}$. Escribiendo (3.3) de forma matricial

$$a > (BD^{-1} - I)a + \frac{\alpha^+}{\beta} c, \tag{3.4}$$

donde $a = col(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $c = col(c_1, c_2, \ldots, c_n)$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

D es la matriz diagonal de B, por lo que

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{b_{nn}} \end{pmatrix}.$$

3.1. Esquema Iterativo para el Sistema (3.2)

Aplicando el método iterativo al sistema (3.2), se obtiene la sucesión $\{U^N\}_{N=0}^{\infty}$ donde $U^0 = col(0, 0, \ldots, 0), U^1 = col(\frac{a_1}{b_{11}}, \frac{a_2}{b_{22}}, \ldots, \frac{a_n}{b_{nn}}), \ldots, U^N = col(U_1^N, U_2^N, \ldots, U_n^N)$ con $U_i^N = b_{ii}^{-1} \max\{0, a_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} U_j^{N-1}\}$. Observemos que cada vector U^N es un vector constantes. Además

$$\lim_{k\to+\infty} (U^{2k+1}, U^{2k}) = (\overline{U}, \underline{U}),$$

también satisface el siguiente sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{U}_i \left[a_i - b_{ii}\overline{U}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\underline{U}_j \right] & = & 0, \quad 1 \leq i \leq n; \\ \underline{U}_i \left[a_i - b_{ii}\underline{U}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_j\overline{U}_j \right] & = & 0; \quad 1 \leq i \leq n. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

En particular como $\overline{U}_i, \underline{U}_i$ son soluciones, con $1 \leq i \leq n$,

$$\overline{U}_i[a_i - b_{ii}\overline{U}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\underline{U}_j] = 0, \quad \underline{U}_i[a_i - b_{ii}\underline{U}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{U}_j] = 0$$

y de acá

$$\overline{U}_i = b_{ii}^{-1} \max\{0, a_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\underline{U}_j\}, \quad \underline{U}_i = b_{ii}^{-1} \max\{0, a_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{U}_j\}$$

Definición 3.1. *La sucesión* $\{U^N\}$*, se define como la sucesión canónica del sistema (3.2) y satisface* $U_i^{N+1} = b_{ii}^{-1} \max\{0, a_i - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} U_j^N\}$.

Observación 3.1. *Si se aplica el método iterativo al sistema (3.2), con coeficientes constantes se tiene que* $U^1 = col(U_1^1, \ldots, U_n^1)$*, es solución de la ecuación logística* $x_i' = x_i[a_i - b_{ii}x_i]$ *por tanto* $U_i^1 = 0$ *ó* $U_i^1 = \dfrac{a_i}{b_{ii}}$*, con* $1 \leq i \leq n$*, son puntos de equilibrios. La cuales una solución no trivial de la ecuación logística.*

Observación 3.2. $\underline{U}_i > 0$ *si* $a_i > \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} a_j$*, donde* $1 \leq i \leq n$*.*

Más aún, $\underline{U} > 0$*, si* $a_i > (BD^{-1} - I)(a)$*. Se tiene que* $a_i > \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} U_j^1 \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} \underline{U_j}$*, para* $1 \leq i \leq n$*. De aquí que* $a_i > \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} \underline{U}_j$*, con* $1 \leq i \leq n$*.*

En efecto; supongamos que $a_i - \displaystyle\sum_{j=1, j=\neq i}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} a_j > 0$*, para* $1 \leq i \leq n$ *y además* $\overline{U}_j \leq U_j = \dfrac{a_j}{b_{jj}}$*. Por definición de* $\underline{U}_i$*,se tiene que* $\underline{U}_i > 0$*. Así escribiendo de forma matricial se tiene que* $\underline{U} > \overrightarrow{0}$*, si* $a > (BD^{-1} - I)$*.*

Observación 3.3. *El par* $col(\overline{U}, \underline{U})$*, es soluciï¿½n del sistema:*

$$\begin{cases} (B - D)\overline{U} + D\underline{U} &= a \\ (B - D)\underline{U} + D\overline{U} &= a. \end{cases} \tag{3.6}$$

El cual es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \overline{U}_i[a_i - b_{ii}\overline{U}_i - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\underline{U}_j] &= 0; \quad 1 \leq i \leq n \\ \underline{U}_i[a_i - b_{ii}\underline{U}_i - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{U}_j] &= 0; \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases} \tag{3.7}$$

En efecto, como $\underline{U} > 0$*, entonces* $\overline{U} > 0$*, ya que* $\overline{U} > \underline{U} > 0$*, de acá que el sistema (3.7) es equivalente a*

$$\begin{cases} a_i - b_{ii}\overline{U}_i - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\underline{U}_j &= 0, \quad 1 \leq i \leq n \\ a_i - b_{ii}\underline{U}_i - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{U}_j &= 0; \ 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En consecuencia

$$\begin{cases} b_{ii}\overline{U}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\underline{U}_j & = & a_i, \ 1 \leq i \leq n \\ b_{ii}\underline{U}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{U}_j & = & a_i, \ 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Escribiendo la primera ecuaciï¿½n del sistema del sistema anterior en forma matricial

$$D\overline{U} + (B - D)\underline{U} = a.$$

Donde,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overline{U} = \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \vdots \\ \overline{U}_n \end{pmatrix},$$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{pmatrix} \quad y \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Anï¿½logamente para la segunda ecuaciï¿½n del sistema anterior. Se tiene

$$(B - D)\overline{U} + D\underline{U} = a.$$

Por lo que se obtiene la equivalencia de los sistemas (3.6) y (3.7).

Proposición 3.1. *Para cualquier solución positiva* $x = col(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de (3.2), se tiene que* $\underline{U}_i \leq \liminf_{t\to+\infty} x_i(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} x_i(t) \leq \overline{U}_i$, *donde* $1 \leq i \leq n$.
Demostración: Ver [13] pï¿½g. 19.

Lema 3.1. B *y* $2D - B$ *tiene inversa y la entrada de* $(2D - B) \pm B^{-1}$ *son no negativos. En particular* $(2D - B)^{-1}$ *es una matriz no negativa.*

Demostración: Ver [13]. pág 25-27.

Lema 3.2. *Si* $v > (BD^{-1} - I)v$ *para algún vector positivo* v*, entonces* $B^{-1}(v) > 0$.

Demostración: Ver [13] pág. 27-28.

Teorema 3.1. *El sistema (3.2), tiene un punto de equilibrio que atrae a todas las soluciones positivas del sistema (3.2). Condiciones iniciales positivas.*

Demostración: Como por hipótesis general se cumple $a_i > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} a_j + \frac{\alpha^+}{\beta} c_i$, con $1 \leq i \leq n$, donde $\alpha^+ = \max\{0, \alpha\}$, de acá que $a_i > \sum_{j=1,j}^{n} \frac{b_{ii}}{b_{jj}} a_j$, escribiendo en forma matricial se tiene que $a > (BD^{-1} - I)(a)$; por observación (3.2) se tiene que $\underline{U} > \overrightarrow{0}$, además por observación (3.2) el par $col(\overline{U}, \underline{U})$ satisface el sistema:

$$\begin{cases} (B-D)\overline{U} + D\underline{U} = a \\ (B-D)\underline{U} + D\overline{U} = a. \end{cases}$$

Restando la primera ecuación con la segunda ecuación del sistema anterior

$$(B-D)(\overline{U} - \underline{U}) + D\underline{U} - D\overline{U} = 0,$$

se obtiene que

$$(2D - B)(\underline{U} - \overline{U}) = 0. \tag{3.8}$$

De el lema (3.1) $(2D - B)$ es invertible, por lo que se cumple que la única solución del sistema (3.8), es la solución nula por tanto se tiene que $\overline{U} = \underline{U}$.

Haciendo $x^* = col(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \underline{U} = \overline{U}$ y reemplazando las ecuaciones del sistema (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} (B-D)x^* + Dx^* = a &\Rightarrow Bx^* - Dx^* + Dx^* = a \\ &\Rightarrow Bx^* = a \\ &\Rightarrow x^* = B^{-1}a, \quad \text{pues } B \text{ es invertible.} \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que $\underline{U}_i = \overline{U}_i = x_i^*$, para $1 \leq i \leq n$. Por la proposición (3.1), tenemos que para cualquier solución del sistema (3.2), se cumple que

$$\underline{U}_i \leq \liminf_{t\to+\infty} x_i(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} x_i(t) \leq \overline{U};$$

por tanto,

$$\liminf_{t\to+\infty} x_i(t) = \limsup_{t\to+\infty} x_i(t) = \overline{U_i} = \underline{U}_i = x_i^*,$$

es decir, $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = x_i^*$, para $1 \leq i \leq n$. ■

Observación 3.4. *Si en lugar de las desigualdades (3.3), tuviésemos las hipótesis* $\underline{U} > 0$ *y la matriz* $(2D - B)$ *tiene inversa, entonces se tiene la conclusión del teorema anterior.*

Lema 3.3. *Si* $q \neq 0$ *y* $\alpha \geq 0$, *entonces*

$$\frac{\alpha}{\beta}[\beta - \langle q, B^{-1}(a)\rangle] > [\alpha - \langle q, x^*\rangle]. \tag{3.9}$$

De aquí en adelante $x^* = B^{-1}(a)$ *es el punto de equilibrio de (3.2).*

Demostración: Ver [13] pág. 28-29.

Observación 3.5. *Los puntos de equilibrio del sistema (3.1), se obtiene en resolver el sistema algebraico*

$$\begin{cases} x_i[a_i - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}x_j - c_i y] = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \\ y[\alpha - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_j x_j - \beta y] = 0. \end{cases}$$

El punto de equilibrio positivo se obtiene de la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} a_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}x_j + c_i y], \quad 1 \leq i \leq n. \\ \alpha = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_j x_j + \beta y, \end{cases}$$

y este sistema se puede escribir como

$$\begin{cases} a = Bx + yc \\ \alpha = q^T x + \beta. \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} Bx + yc = a \\ \langle q, x\rangle + \beta = \alpha. \end{cases}$$

3.2. Caso $\alpha \leq \langle q, x^* \rangle$

Proposición 3.2. *Si $\alpha - \langle q, x^* \rangle \leq 0$, entonces el sistema (3.1), no posee un punto de equilibrio.*

Demostración: Trabajemos por reducción al absurdo. Supongamos que el sistema (3.1) posee punto de equilibrio (x, y), esto implica que el sistema

$$\begin{cases} Bx + yc = a \\ \langle q, x \rangle + \beta = \alpha. \end{cases}$$

posee una solución positiva (x, y). Como $y > 0$, $\beta > 0$, $\langle q, x \rangle \geq 0$ y $\langle q, x \rangle + \beta y = \alpha$, se tiene que $\alpha > 0$. Además $q \geq 0$ y $x^* > 0$. Supongamos el caso en que $\alpha = \langle q, x^* \rangle$ por tanto $\langle q, x^* \rangle > 0$, entonces necesariamente $q > 0$.

$$\begin{aligned} Bx + yc = a &\Rightarrow B^{-1}Bx + yB^{-1}(c) = B^{-1}a \\ &\Rightarrow Ix + yB^{-1}(c) = x^*, \quad \text{pues } x^* = B^{-1}(a) \\ &\Rightarrow x + yB^{-1}(c) = x^* \\ &\Rightarrow x = x^* - yB^{-1}(c). \end{aligned}$$

Luego Sustituyendo en $\langle q, x \rangle + \beta y = \alpha$.

$$\begin{aligned} \langle q, x^* - yB^{-1}(c) \rangle + \beta y = \alpha &\Rightarrow \langle q, x^* \rangle + \langle q, -yB^{-1}c \rangle + \beta y = \alpha \\ &\Rightarrow \langle q, x^* \rangle - y \rangle + \langle q, B^{-1}(c) \rangle + \beta y = \alpha \\ &\Rightarrow \langle q, x^* \rangle + y[\beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle] = \alpha \\ &\Rightarrow \langle q, x^* \rangle + y[\beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle] = \langle q, x^* \rangle \\ &\Rightarrow y[\beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle] = 0 \\ &\Rightarrow \beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle = 0, \quad \text{pues } y > 0. \\ &\Rightarrow \beta = \langle q, B^{-1}(c) \rangle. \end{aligned}$$

Luego esto contradice el Lema (3.3) ya que $\dfrac{\alpha}{\beta}[\beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle] > [\alpha - \langle q, x^* \rangle]$ y de acá $0 < \alpha < \langle q, x^* \rangle$. Por tanto lo supuesto es falso, en consecuencia el sistema (3.1) no posee puntos de equilibrio. ∎

3.3. Caso $\alpha > \langle q, x^* \rangle$

Consideremos el sistema (3.1) bajo la hipótesis

$$a > (BD^{-1} - I)(a) + \frac{\alpha^+}{\beta}c,$$

donde, $\alpha^+ = \text{máx}\{0, \alpha\}$, más la condición $\alpha > \langle q, x^* \rangle$, con $x^* = B^{-1}(c)$.

Observación 3.6. *$\alpha^+ = \alpha$ y $\beta > \langle q, B^{-1}(c) \rangle$, donde $x^* = B^{-1}(c)$.*
En efecto, sea $\alpha > \langle q, x^* \rangle \geq 0$, debido que $q \geq 0$ y $x^* > 0$. Por tanto $\alpha^+ = \alpha$, ya que $\alpha^+ = \text{máx}\{0, \alpha\}$.
Para demostrar la otra desigualdad consideremos dos casos $q = 0$ y $q \neq 0$. Si $q = 0$, entonces $\beta > \langle 0, x^* \rangle = 0$; por tanto $\beta > 0$.
Si $q \neq 0$, entonces por lema (3.3) tenemos $\frac{\alpha}{\beta}[\beta - \langle q, x^* \rangle] > [\alpha - \langle q, x^* \rangle]$. Como, $\alpha > 0$ y $\alpha - \langle q, x^* \rangle > 0$; esto implica que $\beta - \langle q, x^* \rangle > 0$, es decir que $\beta > \langle q, B^{-1}(c) \rangle$. En consecuencia se cumple la desigualdad.

Proposición 3.3. *Si se satisface (3.3) y $\alpha > \langle q, x^* \rangle$. Entonces el sistema (3.1), tiene un punto de equilibrio positivo col$(\hat{x}, \hat{y})$, donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{y} \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Por la observación (3.3) $\beta > \langle q, B^{-1}(c) \rangle$ por lo que podemos definir

$$\hat{y} = [\beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle][\alpha - \langle q, x^* \rangle] > 0. \tag{3.10}$$

Por lema (3.3), se tiene que si $q \neq 0$, entonces

$$\frac{\alpha}{\beta}[\beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle] > [\alpha - \langle q, x^* \rangle].$$

Dividiendo por $\beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle$ a ambos lados de la desigualdad

$$\frac{\alpha}{\beta} > [\beta - \langle q, B^{-1}(c) \rangle]^{-1}[\alpha - \langle q, x^* \rangle].$$

Por (3.10) se llega a $\frac{\alpha}{\beta} > \hat{y}$, siempre y cuando $q \neq 0$. Para el caso $q = 0$, definamos $\hat{y} = \frac{\alpha}{\beta} > 0$. En ambos caso $0 < \hat{y} \leq \frac{\alpha}{\beta}$, por tanto $0 < \hat{y}c \leq \frac{\alpha}{\beta}c$.
Esto implica, $-\frac{\alpha}{\beta}c \leq -\hat{y}c$ de acá

$$a - \frac{\alpha}{\beta}c \leq a - \hat{y}c. \tag{3.11}$$

De la hipótesis se tiene $a - \frac{\alpha}{\beta}c > (BD^{-1} - I)(a) \geq 0$. Como si $(BD^{-1} - I) \geq 0$ y $a > 0$, entonces $(BD^{-1} - I)(a) \geq 0$. Así, $a - \dfrac{\alpha}{\beta}c > (BD^{-1} - I)(a) \geq 0$, entonces

$$a - \frac{\alpha}{\beta}c > 0. \tag{3.12}$$

de (3.11) y (3.12), podemos concluir que el vector $a - \hat{y}c > 0$.
Además satisface las desigualdades

$$a - \hat{y}c \geq a - \frac{\alpha}{\beta}c > (BD^{-1} - I)(a) \geq (BD^{-1} - I)(a - \hat{y}c).$$

Por lema (3.2) tenemos que el vector $\hat{x} = B^{-1}(a - \hat{y}c) > 0$. Así,

$$B\hat{x} + \hat{y}c = a.$$

Por otra parte si $q = 0$ el par $col(\hat{x}, \hat{y})$ satisface la ecuación, $\langle q, \hat{x}\rangle + \beta\hat{y} = \alpha$; debido que $\widehat{y} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.
Si $q \neq 0$, entonces $\hat{y} = [\beta - \langle q, B^{-1}(c)\rangle]^{-1}[\alpha - \langle q, x^*\rangle]$.
Luego,

$$\begin{aligned}
\langle q, \hat{x}\rangle + \beta\hat{y} &= \langle q, B^{-1}(a - \hat{y}c)\rangle + \beta\hat{y} \\
&= \langle q, B^{-1}(a)\rangle - \langle q, B^{-1}(yc)\rangle + \beta\widehat{y} \\
&= \langle q, B^{-1}(a)\rangle - \widehat{y}\langle q, B^{-1}(c)\rangle + \beta\widehat{y} \\
&= \langle q, x^*\rangle - \widehat{y}\langle q, B^{-1}(c)\rangle + \beta\widehat{y} \\
&= \langle q, x^*\rangle + \widehat{y}[\beta - \langle q, B^{-1}(c)] \\
&= \langle q, x^*\rangle + [\alpha - \langle q, x^*\rangle] \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

En ambos casos el par $col(\hat{x}, \hat{y})$ satisface la ecuación $\langle q, \hat{y}\rangle + \beta\hat{y} = \alpha$. Por tanto el par $col(\hat{x}, \hat{y})$ satisface el sistema

$$\begin{cases} Bx + yc &= a \\ \langle q, x\rangle + \beta y &= \alpha. \end{cases}$$

En consecuencia $col(\hat{x}, \hat{y})$ es el punto de equilibrio positivo del sistema (3.1). ■

A partir de ahora consideraremos la siguiente notación, la cual se usará en el resto del capítulo. La solución X del sistema (3.1) la escribiremos de la siguiente forma $X = col(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$. La sucesión canúnica, $\{U^N\}$, asociada al sistema (3.1) la cual es una sucesión de funciones vectoriales constante, las escribiremos de la siguiente forma $U^N = col(W^N, V^N)$, donde $W^N \in \mathbb{R}^n$ y $V^N \in \mathbb{R}$. Así podemos denotar a

$$\overline{U} = col(\overline{W}, \overline{V}) \quad \text{y} \quad \underline{U} = col(\underline{W}, \underline{V})$$

donde $\underline{W} > 0$, debido a la desigualdad (3.4). Esto implica que $\overline{W} > 0$. También las componentes de estos vectores satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \overline{W}_i \left[a_i - b_{ii}\overline{W}_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\underline{W}_j - c_i\underline{V} \right] & = 0, \quad 1 \le i \le n \\ \overline{V} \left[\alpha - \beta\overline{V} - \sum_{j=1}^{n} q_j\underline{W}_j \right] & = 0 \\ \underline{W}_i \left[a_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{W}_j - c_i\overline{V} - b_{ii}\underline{W}_i \right] & = 0, \quad 1 \le i \le n \\ \underline{V} \left[\alpha - \beta\underline{V} - \sum_{j=1}^{n} q_j\overline{W}_j \right] & = 0, \end{cases}$$

Como $\overline{W}_i$,$\underline{W}_i$ son constantes positivas, para $1 \le i \le n$, entonces el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} \left[a_i - b_{ii}\overline{W}_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\underline{W}_j - c_i\underline{V} \right] & = 0, \quad 1 \le i \le n \\ \overline{V} \left[\alpha - \beta\overline{V} - \sum_{j=1}^{n} q_j\underline{W}_j \right] & = 0 \\ \left[a_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{W}_j - c_i\overline{V} - b_{ii}\underline{W}_i \right] & = 0, \quad 1 \le i \le n \\ \underline{V} \left[\alpha - \beta\underline{V} - \sum_{j=1}^{n} q_j\overline{W}_j \right] & = 0, \end{cases}$$

El cual se puede escribir de forma matricial como

$$\begin{cases} D\overline{W} + (B-D)\underline{W} + c\underline{V} = a \\ \overline{V}[\alpha - \langle q, \underline{W}\rangle - \beta\overline{V}] = 0 \\ D\underline{W} + (B-D)\overline{W} + c\overline{V} = a \\ \underline{V}[\alpha - \langle q, \overline{W}\rangle - \beta\underline{V}] = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Teorema 3.2. *Supongamos que $\alpha > \langle q, x^*\rangle$ y se satisface (3.4).*
Si $\beta > \langle q, (2D-B)^{-1}(c)\rangle$, entonces el punto de equilibrio del sistema (3.1) atrae toda las soluciones positivas del sistema (3.1).

Demostración: El punto de equilibrio positivo del sistema (3.1) esta garantizado por la proposición (3.3). Probemos primero que $\overline{V} > 0$ y $\underline{V} > 0$.
En efecto, para $\overline{V} > 0$. Suponemos por absurdo que $\overline{V} = 0$, entonces $\underline{V} = 0$, ya que $0 \leq \underline{V} \leq \overline{V}$; para cualquier solución positiva $col(x_1(t), ..., x_n(t), y(t))$ de (3.1) se tiene que la última componente $y(t)$ satisface

$$\underline{V} \leq \liminf_{t\to+\infty} y(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} y(t) \leq \overline{V}$$

$$0 \leq \liminf_{t\to+\infty} y(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} y(t) \leq 0.$$

Así,

$$\liminf_{t\to+\infty} y(t) = \limsup_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

La cual es una contradicción pues el sistema (3.1) tiene un punto de equilibrio que es garantizado por la proposición (3.3); en consecuencia $\overline{V} > 0$.

Para probar que $\underline{V} > 0$, trabajemos nuevamente por reducción al absurdo, $\underline{V} = 0$.
Como la condición implica que (3.2) que si $\underline{W} > 0$ y $\overline{W} > 0$, entonces el vector

$col(\overline{W}, \underline{W}, \overline{V})$, es positivo y además se cumple que al sistema (3.13) satisface

$$\begin{cases} D\overline{W} + (B-D)\underline{W} & = & a \\ (B-D)\overline{W} + D\underline{W} + c\overline{V} & = & a \\ \langle q, \underline{W}\rangle + \beta\overline{V} & = & \alpha. \end{cases} \tag{3.14}$$

Sumando la primera con la segunda ecuación del sistema (3.14) se obtiene

$$\begin{aligned} D(\overline{W} + \underline{W}) + (B-D)(\overline{W} + \underline{W}) + c\overline{V} &= 2a \\ (D + B - D)(\overline{W} + \underline{W}) + c\overline{V} &= 2a \\ B(\overline{W} + \underline{W}) + c\overline{V} &= 2a \\ B(\overline{W} + \underline{W}) &= 2a - c\overline{V}. \end{aligned}$$

Por otra parte, restando la segunda con la primera ecuación del sistema (3.14) se tiene

$$\begin{aligned} D(\overline{W} - \underline{W}) + (B-D)\underline{W} - (B-D)\overline{W} - c\overline{V} &= 0 \\ D(\overline{W} - \underline{W}) + (B-D)(\underline{W} - \overline{W}) &= c\overline{V} \\ D(\overline{W} - \underline{W}) - (B-D)(\overline{W} - \underline{W}) &= c\overline{V} \\ (2D - B)(\overline{W} - \underline{W}) &= c\overline{V}. \end{aligned}$$

Por lema (3.1), se tiene que B y $(2D - B)$ son invertible. De aquí que

Así,

$$(\overline{W} + \underline{W}) = 2B^{-1}(a) - \overline{V}B^{-1}(c) \ \text{ y } \ (\overline{W} - \underline{W}) = \overline{V}(2D - B)^{-1}(c).$$

Por otra parte, definamos

$$2R = (2D - B)^{-1}(c) - B^{-1}(c) \ \text{ y } \ 2S = (2D - B)^{-1}(c) + B^{-1}(c).$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2R + 2S &= (2D - B)^{-1}(c) - B^{-1} + (2D - B)^{-1}(c) + B^{-1}(c). \\ &= 2(2D - B)^{-1}(c). \\ 2S - 2R &= (2D - B)^{-1}(c) + B^{-1} - (2D - B)^{-1}(c) + B^{-1}(c) \\ &= 2B^{-1}(c). \end{aligned}$$

Así,

$R+S=(2D-B)^{-1}(c), \quad S-R=B^{-1}(c)$

y además $x^*=B^{-1}(a)$. En consecuencia

$$(\overline{W}+\underline{W})=2x^*+\overline{V}(R-S) \text{ y } (\overline{W}-\underline{W})=\overline{V}(R+S).$$

Sumando y restando estas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}
(\overline{W}+\underline{W})+(\overline{W}-\underline{W}) &= 2x^*+\overline{V}(R-S)+\overline{V}(R+S)\\
2\overline{W} &= 2x^*+\overline{V}R-\overline{V}S+\overline{V}R+\overline{V}S\\
2\overline{W} &= 2x^*+2\overline{V}R\\
\overline{W} &= x^*+\overline{V}R.\\
(\overline{W}+\underline{W})-(\overline{W}-\underline{W}) &= 2x^*+\overline{V}(R-S)-\overline{V}(R+S)\\
2\underline{W} &= 2x^*+\overline{V}R-\overline{V}S-\overline{V}R-\overline{V}S\\
2\underline{W} &= 2x^*-2\overline{V}S\\
2\underline{W} &= 2(x^*-\overline{V}S)\\
\underline{W} &= x^*-\overline{V}S.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{cases} \overline{W} = x^*+\overline{V}R \\ \underline{W} = x^*-\overline{V}S. \end{cases} \tag{3.15}$$

Sustituyendo $\underline{W}$ en la tercera ecuación del sistema (3.14), se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle q, x^*-\overline{V}S\rangle+\beta\overline{V}=\alpha &\Rightarrow \langle q,x^*\rangle+\langle q,-\overline{V}S\rangle+\alpha\overline{V}=\alpha\\
&\Rightarrow \langle q,x^*\rangle-\overline{V}\langle q,S\rangle+\beta\overline{V}=\alpha\\
&\Rightarrow [\beta-\langle q,S\rangle]\overline{V}=\alpha-\langle q,x^*\rangle>0,
\end{aligned}$$

Por tanto $\beta-\langle q,S\rangle$ ya que $\overline{V}>0$, en consecuencia

$$\overline{V}=[\beta-\langle q,S\rangle]^{-1}[\alpha-\langle q,x^*\rangle]. \tag{3.16}$$

Por otra parte sabemos por el método iterativo para el caso autónomo

$$\underline{U}_i = b_{ii}^{-1} \text{máx}\{0, a_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{U}_j\}; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Así,

$$\beta\underline{V} = \text{máx}\{0, \alpha - \sum_{j=1}^{n} q_j\overline{W}\} = \text{máx}\{0, \alpha - \langle q, \overline{W}\rangle\}.$$

Como $\underline{V} = 0$ se tiene que $\text{máx}\{0, \alpha - \langle q, \overline{W}\rangle\} = 0$, por lo tanto $\alpha - \langle q, \overline{W}\rangle \leq 0$. Usando la primera ecuación de (3.15) y sustituyendo en la desigualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha - \langle q, x^* + \overline{V}R\rangle \leq 0 &\Rightarrow \alpha - \langle q, x^*\rangle - \langle q, \overline{V}R\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \alpha - \langle q, x^*\rangle \leq \langle q, \overline{V}R\rangle \\
&\Rightarrow \alpha - \langle q, x^*\rangle \leq \overline{V}\langle q, R\rangle,
\end{aligned}$$

es decir, $\alpha - \langle q - x^*\rangle \leq \overline{V}\langle q, R\rangle$. Por (3.16) y la desigualdad anterior, se tiene

$$\alpha - \langle q, x^*\rangle \leq [\beta - \langle q, S\rangle]^{-1}[\alpha - \langle q, x^*\rangle]\langle q, R\rangle.$$

Multiplicando por el número positivo $[\beta - \langle q, S\rangle][\alpha - \langle q, x^*\rangle]^{-1}$ de la desigualdad anterior, tenemos $\beta - \langle q, S\rangle \leq \langle q, R\rangle$, esto es $\beta - \langle q, S + R\rangle \leq 0$.
Como $R + S = (2D - B)^{-1}(c)$, tenemos que $\beta \leq \langle q, (2D - B)^{-1}(c)\rangle$. Esto contradice la hipótesis. En consecuencia $\underline{V} > 0$.

Sea $\hat{B} = \begin{pmatrix} B & c \\ q^T & \beta \end{pmatrix}$ la matriz del sistema

$$\begin{cases} B\overline{x} + \overline{y}c &= a \\ \langle q, \overline{x}\rangle + \beta\overline{y} &= \alpha. \end{cases}$$

Denotemos por $\hat{D}$ la matriz diagonal de $\hat{B}$; esto es $\hat{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, donde D es la matriz diagonal de B. Probemos primeramente que $2\hat{D} - \hat{B}$ es invertible. Basta probar que la única solución del sistema

$$(2\hat{D}-\hat{B})\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad \text{es,}\quad \begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$2\hat{D}-\hat{B}=2\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B & c\\ q^T & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2D-B & c\\ q^T & \beta\end{pmatrix},$$

por tanto el sistema matricial

$$(2\hat{D}-\hat{B})\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2D-B & -c\\ -q^T & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

El sistema se puede escribir

$$\begin{cases}(2D-B)\hat{x}-\hat{y}c &= 0\\ q^T\hat{x}+\beta\hat{y} &= 0.\end{cases}$$

ó

$$\begin{cases}(2D-B)\hat{x}-\hat{y}c &= 0\\ -\langle q^T,\hat{x}\rangle+\beta\hat{y} &= 0.\end{cases}\tag{3.17}$$

Por lema (3.1) $(2D-B)$ es invertible, entonces podemos despejar $\hat{x}$ de la primera ecuación de (3.17). Obteniendose $\hat{x}=\hat{y}(2D-B)^{-1}(c)$. Sustituyendo esta ultima expresión de (3.17) y sacando factor común $\hat{y}$ nos queda

$$\hat{y}[-\langle q,(2D-B)^{-1}(c)\rangle+\beta]=0.$$

Sabemos por hipótesis que $\beta\neq\langle q,(2D-B)^{-1}(c)\rangle$, se tiene que $\hat{y}=0$ sustituyendo en la primera ecuación de (3.17) tenemos $(2D-B)\hat{x}=0$, de aquí que $x^*=0$.

Por tanto $\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. En consecuencia $2\hat{D}-\hat{B}$ es invertible.

Por otro lado tenemos que $\underline{U}=col(\underline{W},\underline{V})$ es positivo. Con esto tenemos por la observación (3.5) se tiene que $\overline{W}=\underline{W}$ y $\overline{V}=\underline{V}$ y además el punto de equilibrio $(\widehat{x},\widehat{y})=col(\underline{W},\underline{V})=col(\overline{W},\overline{V})$, atrae a todas las soluciones del sistema (3.2), con condiciones iniciales positivas. ■

Capítulo 4

Caso T-Periódico

En este capítulo se desarrollan los resultados principales de esté trabajo, los cuales consisten en probar la condición necesaria y suficiente, para la extinción de las especies en el sistema (n+1) dimensional estudiado.

Consideremos el sistema (n+1) dimensional

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_i'(t) & = & x_i(t)\left[a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t) - c_i y(t)\right]; \quad 1 \leq i \leq n \\ y'(t) & = & y(t)\left[\alpha(t) - \sum_{j=1}^{n} q_j x_j(t) - \beta y(t)\right], \end{array} \right. \tag{4.1}$$

donde b_{ij}, c_i, q_j son números reales no-negativos, b_{ii}, β, para $1 \leq i, j \leq n$ son números reales positivos, $\alpha, a_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continua y T-periódica. Cada $a_i(t)$, tiene un promedio positivo $M(a_i)$, el cuál esta definido por

$$M(a_i) = \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)dt; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Los coeficientes satisfacen las desigualdades

$$M(a_i) > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}M(a_j) + \frac{M(\alpha)^+}{\beta}c_i; \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4.2}$$

donde $M(\alpha)^+ = \max\{0, M(\alpha)\}$. La desigualdad (4.2), implica

$$M(a_i) > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}M(a_j); \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4.3}$$

Las desigualdades (4.2) y (4.3) se puede escribir en terminos vectoriales como

$$M(a) > (BD^{-1} - I)^{-1} + \frac{M(\alpha)^{+}}{\beta}c \tag{4.4}$$

$$M(a) > (BD^{-1} - I)^{-1}, \tag{4.5}$$

respectivamente, donde $M(a) = col(M(a_1), M(a_2), \dots, M(a_n))$, $c = col(c_1, c_2, \dots, c_n)$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

y D^{-1} es la matriz inversa de D, la cuál esta dada por

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{b_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Observación 4.1. $M(U_i^1) = \dfrac{M(a_i)}{b_{ii}} > 0$, *donde* $1 \leq i \leq n$.
En efecto, como $M(a_i) > 0$, *entonces por Teorema (1.8), se tiene que* $U_i^1(t) > 0$, *con* $1 \leq i \leq n$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *La cuál es una solución no negativa y T-periódica de la ecuación logística*

$$x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - b_{ii}x_i(t)],$$

con $1 \leq i \leq n$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Por lo tanto se cumple*

$$(U_i^1(t))' = U_i^1(t)[a_i(t) - b_{ii}U_i^1(t)]; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por ser $U_i^1(t)$, *con* $1 \leq i \leq n$ *positiva, se puede dividir la ecuación anterior por esté es decir*

$$\frac{(U_i^1(t))'}{U_i^1(t)} = a_i(t) - b_{ii}U_i^1(t); \quad 1 \leq i \leq n.$$

Integrando está ecuación desde cero hasta T y dividiendo por $T > 0$, se tiene

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{(U_i^1(t))'}{U_i^1(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)dt - b_{ii}\frac{1}{T}\int_0^T U_i^1(t)dt$$
$$\frac{1}{T}\ln(U_i^1(t))\Big|_0^T = M(a_i) - b_{ii}M(U_i^1).$$

Por la T-periodicidad de $U_i^1(t)$, se obtiene $0 = M(a_i) - b_{ii}M(U_i^1)$, es decir que $M(U_i^1) = \dfrac{M(U_i^1)}{b_{ii}} > 0$, pues $M(U_i^1) > 0$ y $b_{ii} > 0$; donde $1 \leq i \leq n$.

Observación 4.2. *$U_i^2 > 0$, si y sólo si $M(a_i) > \displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n} M(a_j)\frac{b_{ij}}{b_{jj}} + c_i M(U_{(n+1)}^1)$, donde $1 \leq i \leq n$.*

En efecto, si $U_i^2(t) > 0$, entonces se cumple por el comportamiento del método iterativo aplicado al sistema (n+1) dimensional

$$\frac{(U_i^2(t))'}{U_i^2(t)} = B_i^1(t) - b_{ii}U_i^2(t); \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde, $B_i^1(t) = a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=i,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^1(t) - c_i U_{(n+1)}^1(t)$, con $1 \leq i \leq n$;

integrando desde cero hasta T, dividiendo por $T > 0$, y usando el hecho que $U_i^2(t)$ es T-periódica, tenemos que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{(U_i^2(t))'}{U_i^2(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T B_i^1(t)dt - b_{ii}\frac{1}{T}\int_0^T U_i^2(t)dt$$
$$\frac{1}{T}\ln(U_i^2(t))\Big|_0^T = M(B_i^1) - b_{ii}M(U_i^2)$$

$$M(B_i^1) - b_{ii}M(U_i^2) = 0. \tag{4.6}$$

Por otro lado probemos que

$$M(B_i^1) = M(a_i) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}M(U_j^1) - c_i M(U_{(n+1)}^1).$$

En efecto, sabemos por el método iterativo para el sistema $(n+1)$ dimensional

$$B_i^1(t) = a_i(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}U_j^1(t) - c_i U_{(n+1)}^1(t)$$

Integrando desde cero hasta T y dividiendo por $T > 0$

$$\frac{1}{T}\int_0^T B_i^1(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)dt - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}\frac{1}{T}\int_0^T U_j^1(t)dt - c_i\frac{1}{T}\int_0^T U_{(n+1)}^1(t)dt.$$

En consecuencia tenemos que

$$M(B_i^1) = M(a_i) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}M(U_j^1) - c_iM(U_{(n+1)}^1). \tag{4.7}$$

Sustituyendo (4.7) en (4.6)

$$M(a_i) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}M(U_j^1) - c_iM(U_{(n+1)}^1) - b_{ii}M(U_i^2) = 0$$

$$b_{ii}M(U_i^2) = M(a_i) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}M(U_j^1) - c_iM(U_{(n+1)}^1) > 0,$$

ya que $M(U_i^2) > 0$, porque $U_i^2(t) > 0$ y $b_{ii} > 0$, en consecuencia se tiene por la desigualdad anterior y observación (4.1)

$$M(a_i) > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}\frac{M(a_j)}{b_{jj}} + c_iM(U_{(n+1)}^1).$$

Recíprocamente si $(M(a_i)) > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}\frac{M(a_j)}{b_{jj}} + c_iM(U_{(n+1)}^1)$. Obviamente se tiene que $M(B_i^1) > 0$, con $1 \leq i \leq n$ y por teorema (1.8), se tiene que $U_i^2(t) > 0$.

Observación 4.3. $M(U_{(n+1)}^1) \leq \dfrac{M(\alpha^+)}{\beta}$*, donde* $\alpha^+(t) = \max\{0, \alpha(t)\}$.
En efecto, consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t)[\alpha^+(t) - \sum_{j=i}^{n} q_jx_j(t) - \beta y(t)] \\ &\leq y(t)[\alpha^+(t) - \beta y(t)]. \end{aligned}$$

Sabemos por el método iterativo aplicado al sistema (n+1) dimensional que $U_{(n+1)}^1(t)$ es solución

$$y'(t) = y(t)[B_{n+1}^1(t) - \beta y(t)], \quad donde \;\; B_{n+1}^1(t) = \alpha^+(t) - \sum_{j=1}^{n} q_jU_j^1(t),$$

por tanto $B^1_{n+1}(t) \leq \alpha^+(t)$*, por teorema (1.9) se tiene que* $U^1_{n+1}(t) \leq \theta(t)$*, donde* $\theta(t)$ *es el atractor global de*

$$x'(t) = x(t)[\alpha^+(t) - \beta x(t)]$$

por tanto $M(U^1_{(n+1)}) \leq M(\theta)$*. Por otro lado, se cumple que*

$$\theta'(t) = \theta(t)[\alpha^+(t) - \beta\theta(t)].$$

dividiendo por $\theta(t)$

$$\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \alpha^+(t) - \beta\theta(t).$$

Integrando desde cero hasta T *y dividimos por* $T > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\theta'(t)}{\theta(t)}dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \alpha^+(t)dt - \beta\frac{1}{T}\int_0^T \theta(t)dt \\ \frac{1}{T}\ln(\theta(t))\Big|_0^T &= M(\alpha^+) - \beta M(\theta). \end{aligned}$$

Por la T-periodicidad de $\theta(t)$

$$\begin{aligned} M(\alpha^+) - \beta M(y) &= 0 \\ M(\alpha^+) &= \beta M(\theta) \\ M(\theta) &= \frac{M(\alpha^+)}{\beta}. \end{aligned}$$

Por tanto $M(U^1_{(n+1)}) \leq \dfrac{M(\alpha^+)}{\beta}$.

Observación 4.4. *Si* $M(a_i) > \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} M(a_j) + c_i \frac{M(\alpha^+)}{\beta}$*, entonces* $\underline{U}_i(t) > 0$*, con* $1 \leq i \leq n$.

En efecto, por observaciï¿½n (4.3)

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} M(a_i) + c_i \frac{M(\alpha^+)}{\beta} \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} M(a_i) + c_i M(U^1_{(n+1)}).$$

En consecuencia $M(a_i) > \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} M(a_i) + c_i M(U^1_{(n+1)})$*, por observaciï¿½n (2.1) se tiene que* $\underline{U}_i(t) > 0$*, con* $1 \leq i \leq n$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Lema 4.1. *Sea $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), y(t))$; soluciones del sistema (4.1) que satisfacen $x_i(0) > 0$, con $1 \leq i \leq n$ y $y(t) > 0$, entonces $x_i(t) > 0$ y $y(t) > 0$, con $1 \leq i \leq n$ y $y(t) > 0$, para todo t en el intervalo $[0, +\infty)$.*

Demostración: Del sistema (4.1), se tiene que para $1 \leq i \leq n$

$$x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=i}^{n} b_{ij}x_j - c_i y(t)],$$

Esté sistema es equivalente a decir que
$x_i'(t) = x_i(t)P_i(t)$, donde $P_i(t) = a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t) - c_i y(t)$. Asiï¿$\frac{1}{2}$ $x_i'(t) - x_i(t)P_i(t) = 0$. El factor integrante está dada por $exp(-\int_0^t P(s)ds)$.

Multiplicamos la ecuaciï¿$\frac{1}{2}$n anterior por el factor integrante, tenemos que

$$x_i'(t)exp\bigg(-\int_0^t P(s)ds\bigg) - x_i(t)P_i(t)exp\bigg(-\int_0^t P(s)ds\bigg) = 0,\ 1 \leq i \leq n \text{ y } \forall t \in [0, +\infty)$$
$$\frac{d}{dt}\bigg[x_i(t)exp\bigg(-\int_0^t P(s)ds\bigg)\bigg] = 0.$$

Integrando desde 0 hasta t.

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\bigg[x_i(\sigma)exp\bigg(-\int_0^\sigma P(s)ds\bigg)\bigg]ds = 0$$
$$x_i(t)exp\bigg(-\int_0^t P(s)ds\bigg) = x_i(0)$$
$$x_i(t) = x_i(0)exp\bigg(\int_0^t P(s)ds\bigg) > 0, \text{ con } 1 \leq i \leq n;$$

pues $x_i(0) > 0$ y $exp(\int_0^t P(s)ds) > 0$. Por tanto $x_i(t) > 0$, con $1 \leq i \leq n$, para todo $t \in [0, +\infty)$.

Por otro lado, se tiene del sistema (4.1) que

$$y'(t) = y(t)[\alpha(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t) - \beta y(t)],$$

El cual es equivalente a decir que $y'(t) = y(t)Q_i(t)$, con $1 \leq i \leq n$ y $y(t) > 0$, donde

$$Q_i(t) = \alpha(t) - \sum_{j=1}^{n} q_j x_j(t) - \beta y(t).$$

Así, $y'(t) - y(t)Q_i(t) = 0$. El factor integrante esta dada por $exp(-\int_0^t Q(s)ds)$. Siguiendo un proceso análogo al anterior se tiene que $y(t) > 0$, para todo $t \in [0, +\infty)$. En consecuencia $x_i(t) > 0$ y $y(t) > 0$. ■

Lema 4.2. *$x(t) = col(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), y(t))$ es solución de 4.1 con condiciones iniciales positivas, si y sólo si $(M(x_1), M(x_2), \ldots, M(x_n), M(y))$, es solución del sistema*

$$\begin{cases} Bx + cy = M(a). \\ \langle q, x\rangle + \beta y = M(\alpha). \end{cases}$$

Demostración: Consideremos el sistema (4.1), el cual esta dada por

$$\begin{cases} x_i'(t) &=& x_i(t)\left[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t) - c_i y(t)\right], \quad 1 \leq i \leq n \\ y'(t) &=& y(t)\left[\alpha(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j x_j(t) - \beta y(t)\right]. \end{cases}$$

Para el sistema $x_i'(t) = x_i(t)[a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t) - c_i y(t)]$, con $1 \leq i \leq n$, se tiene por Lema (4.1) que $x_i(t) > 0$. Dividiendo a ambos lados de la ecuación por $x_i(t)$ se tiene

$$\frac{x_i'(t)}{x_i(t)} = a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t) - c_i y(t).$$

Integrando desde cero hasta T y dividiendo por $T > 0$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{x_i'(t)}{x_i(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)dt - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{1}{T}\int_0^T x_j(t)dt - c_i\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$$

$$\frac{1}{T}\ln(x_i(t))\Big|_0^T = M(a_i) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}M(x_j) - c_i M(y).$$

Por la T-periódicidad de $x_i(t)$, donde $1 \leq i \leq n$, para todo $t \in \mathbb{R}$, se obtiene

$$0 = M(a_i) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}M(x_j) - c_i M(y).$$

De forma análoga para el sistema

$$y'(t) = y(t)[\alpha(t) - \sum_{j=1}^{n} q_j x_j - \beta y(t)].$$

Se obtiene

$$0 = M(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} q_j M(x_j) - \beta M(y).$$

Lo que se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} M(x_j) + c_i M(y) & = M(a_i); \quad 1 \leq i \leq n. \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j M(x_j) + \beta M(y) & = M(\alpha). \end{cases}$$

Escribiendo en forma matricial y vectorial respectivamente, se tiene

$$\begin{cases} BM(x) + cM(y) = M(a). \\ \langle q, M(x) \rangle + \beta M(y) = M(\alpha), \end{cases}$$

donde,

$M(a) = col(M(a_1), M(a_2), \ldots, M(a_n))$, $M(x) = col(M(x_1), M(x_1), \ldots, M(x_n))$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \ c = col(c_1, c_2, \ldots, c_n) \text{ y } q = col(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Por tanto, $(M(x), M(y))$ es solución del sistema

$$\begin{cases} Bx + cy = M(a). \\ \langle q, x \rangle + \beta y = M(\alpha). \end{cases} \tag{4.8}$$

Regresandose en el proceso se obtiene la equivalencia. ■

Proposición 4.1. *Si el sistema (4.1) tiene una solución $col(x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t))$, positivas y T-periódicas, entonces, $M(\alpha) > \langle q, x^* \rangle$, donde $x^* = B^{-1}M(a)$.*

Demostración: Sea $u(t) = col(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t), v(t))$, una solución positiva y T-periódica del sistema (4.1) y por lema (4.2) se tiene que $M(U) = col(M(U_1), \ldots, M(U_n), M(V))$ es solución del sistema

$$\begin{cases} Bx + cy & = & M(a) \\ \langle q, x\rangle + \beta y & = & M(\alpha). \end{cases} \tag{4.9}$$

donde $M(a) = col(M(a_1), M(a_2), \ldots, M(a_n))$, $M(u) = col(M(u_1), M(u_2), ..., M(u_n))$, $q = col(q_1, q_2, ..., q_n)$ y

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por tanto $M(u) = col(M(u_1), M(u_2), \ldots, M(u_n), M(v))$, es solución del sistema

$$\begin{cases} x_i'(t) & = & x_i(t)[M(a_i) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t) - c_i y(t)], \ 1 \leq i \leq n. \\ y'(t) & = & y(t)[M(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} q_j x_j(t) - \beta y(t)]. \end{cases}$$

Por contrarreciproco de la Proposición (3.2) aplicado al sistema tenemos que posee soluciones positivas y T-periódicas, entonces $M(\alpha) > \langle q, x^*\rangle$. ■

Sea $\{U^k(t)\}$ la sucesión canónica del sistema (4.1), usaremos las misma notaciones del capítulo (3).

Esto es, denotaremos de la siguiente forma $W^k = W^k(t) = col(U_1^k(t), U_2^k(t), \ldots, U_n^k(t))$ y $V^k = V^k(t)$, para $W^k \in \mathbb{R}^n$ y $V^N \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Además, $\overline{W} = \overline{W}(t) = col(\overline{U}_1^k(t), \overline{U}_2^k(t), \ldots, \overline{U}_n^k(t))$, $\overline{V} = \overline{V}(t)$

$\underline{W} = \underline{W}(t) = col(\underline{U}_1^k(t), \underline{U}_2^k(t), \ldots, \underline{U}_n^k(t))$ y $\underline{V} = \underline{V}(t)$. Así,

$$\begin{aligned} U^k = U^k(t) &= col(U_1^k(t), U_2^k(t), \ldots, U_n^k(t), V^k(t)) \\ &= col(W^k(t), V^k(t)) \\ &= col(W^k, V^k), \quad \text{donde } W^k \in \mathbb{R}^n \text{ y } V^k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\overline{U} = col(\overline{W}, \overline{V})$, $\underline{U} = col(\underline{W}, \underline{V})$ y cumple que $\underline{W} < \overline{W}$ y $\underline{V} < \overline{V}$.

Además,

$$\begin{cases} \overline{W}'_i(t) &= \overline{W}_i(t)\left[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\underline{W}_j(t) - c_i\underline{V} - b_{ii}\overline{W}_i(t)\right], \quad 1 \leq i \leq n \\ \underline{W}'_i(t) &= \underline{W}_i(t)\left[a_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}\overline{W}_j(t) - c_i\overline{V} - b_{ii}\underline{W}_i(t)\right], \quad 1 \leq i \leq n \\ \overline{V}'(t) &= \overline{V}(t)\left[\alpha(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j\underline{W}_j(t) - \beta\overline{V}(t)\right] \\ \underline{V}'(t) &= \underline{V}(t)\left[\alpha(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j\overline{W}_j(t) - \beta\underline{V}(t)\right]. \end{cases} \tag{4.10}$$

Observación 4.5. *La hipótesis (4.2), implica $\underline{W}(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia también $\overline{W}(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ ya que $\overline{W}(t) > \underline{W}(t) > 0$.(Ver Observación (4.4))*

Teorema 4.1. *Si $M(\alpha) \leq \langle q, x^* \rangle$; entonces el sistema*

$$x'_i(t) = x_i(t)[a_i(t) - \sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_j(t)], \quad 1 \leq i \leq n \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.11}$$

la cual tiene una solución positiva y T-periódica $u^*(t)$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t) - u^*(t), y(t)) = (0, 0).$$

Para cualquier solución positiva $(x(t), y(t))$ de (4.1).

Demostración: Sean $\overline{U}(t) = col(\overline{W}(t), \overline{V}(t))$ y $\underline{U}(t) = (\underline{W}(t), \underline{V}(t))$. Las funciones definidas anteriormente. Por observación (4.5) tenemos que $\overline{W}(t) > 0$ y $\underline{W}(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Afirmemos que $\underline{V}(t) = 0$ y $\overline{V}(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Probemos primero que $\underline{V}(t) = 0$. En efecto, la prueba por reducción al absurdo. Supongamos que $\underline{V}(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia $\overline{V}(t) > 0$, entonces podemos dividir por $\overline{W}_i(t)$, $\underline{W}_i(t)$, $\overline{V}(t)$ y $\underline{V}(t)$ en el sistema (4.10). En consecuencia

$$\frac{\overline{W}'_i(t)}{\overline{W}_i(t)} = a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} b_{ij}\underline{W}_j(t) - c_i\underline{V}(t) - b_{ii}\overline{W}_i(t) \tag{4.12}$$

$$\frac{\underline{W}_i'(t)}{\underline{W}_i(t)} = a_i(t) - \sum_{j=1,j\neq 1}^{n} b_{ij}\overline{W}_j(t) - c_i\overline{V}(t) - b_{ii}\underline{W}_i(t) \tag{4.13}$$

$$\frac{\overline{V}'(t)}{\overline{V}(t)} = \alpha(t) - \sum_{j=1}^{n} q_j\underline{W}_j(t) - \beta\overline{V}(t) \tag{4.14}$$

$$\frac{\underline{V}'(t)}{\underline{V}(t)} = \alpha(t) - \sum_{j=1}^{n} q_j\overline{W}_j(t) - \beta\underline{V}(t). \tag{4.15}$$

Trabajemos primero con la ecuación (4.12).

Integrando desde cero hasta T, dividiendo por $T > 0$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\overline{W}_i'(t)}{\overline{W}_i(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)dt - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}\frac{1}{T}\int_0^T \underline{W}_j(t)dt - c_i\frac{1}{T}\int_0^T \underline{V}(t)dt$$

$$- b_{ii}\frac{1}{T}\int_0^T \overline{W}_i(t)dt$$

$$\frac{1}{T}\ln(\overline{W}_i(t))\Big|_0^T = M(a_i) - \sum_{j=1,j\neq 1}^{n} b_{ij}M(\underline{W}_j) - c_iM(\underline{V}) - b_{ii}M(\overline{W}_i).$$

Por la T-periodicidad de $\overline{W}_i(t)$, con $1 \leq i \leq n$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$M(a_i) - \sum_{j=1,j\neq 1}^{n} b_{ij}M(\underline{W}_j) - c_iM(\underline{V}) - b_{ii}M(\overline{W}_i) = 0$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}M(\underline{W}_j) + c_iM(\underline{V}) + b_{ii}M(\overline{W}_i)M(a_i) = M(a_i).$$

Se sigue un proceso análogo para (4.13).

Así,

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}M(\overline{W}_j) + c_iM(\overline{V}_i) + b_{ii}M(\underline{W}_i) = M(a_i).$$

Para la ecuación (4.14). Integrando desde cero hasta T y dividiendo por $T > 0$.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\overline{V}'(t)}{\overline{V}(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha(t)dt - \sum_{j=1}^{n} q_j\int_0^T \underline{W}_j(t)dt - \beta\frac{1}{T}\int_0^T \overline{V}(t)dt$$

$$\frac{1}{T}\ln(\overline{V}(t))\Big|_0^T = M(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} q_jM(\underline{W}_j) - \beta M(\overline{V}).$$

Por la T-periodicidad de $\overline{V}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} q_j M(\underline{W}_j) - \beta M(\overline{V}) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} q_j M(\underline{W}_j) + \beta M(\overline{V}) = M(\alpha). \end{aligned}$$

Siguiendo un proceso análogo para (4.15).

$$\begin{aligned} M(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} q_j M(\overline{W}_j) - \beta M(\overline{V}) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} q_j M(\overline{W}_j) + \beta M(\underline{V}) = M(\alpha). \end{aligned}$$

Por tanto tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} M(\underline{W}_j) + c_i M(\underline{V}) + b_{ii} M(\overline{W}_i) & = & M(a_i) \\ \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} M(\overline{W}_j) + c_i M(\overline{V}) + b_{ii} M(\underline{W}_i) & = & M(a_i) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j M(\underline{W}_j) + \beta M(\overline{V}) = M(\alpha) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j M(\overline{W}_j) + \beta M(\underline{V}) = M(\alpha). \end{cases} \tag{4.16}$$

Escribiendo lo anterior de la forma matricial y vectorial respectivamente se tiene

$$\begin{cases} (B-D)M(\underline{W}) + cM(\underline{V}) + DM(\overline{W}) & = & M(a) \\ (B-D)M(\overline{W}) + cM(\overline{V}) + DM(\underline{W}) & = & M(a) \\ \langle q, M(\underline{W})\rangle + \beta M(\overline{V}) = M(\alpha) \\ \langle q, M(\overline{W})\rangle + \beta M(\underline{V}) = M(\alpha). \end{cases}$$

Luego, trabajemos con el sistema

$$\begin{cases} \langle q, M(\underline{W})\rangle + \beta M(\overline{V}) & = & M(a) \\ \langle q, M(\overline{W})\rangle + \beta M(\underline{V}) & = & M(\alpha). \end{cases} \tag{4.17}$$

Sumando la primera con la segunda ecuación del sistema (4.17), se tiene

$$\begin{aligned} \beta M(\overline{V}) + \beta M(\underline{V}) + \langle q, M(\underline{W})\rangle + \langle q, M(\overline{W})\rangle = 2M(\alpha) \\ \beta(M(\overline{V}) + M(\underline{V})) + \langle q, M(\underline{W}) + M(\overline{W})\rangle = 2M(\alpha). \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ a ambos lados de la igualdad se tiene

$$\frac{\beta}{2}(M(\overline{V})+M(\underline{V}))+\langle q,\frac{1}{2}M(\underline{W})+M(\overline{W})\rangle=M(\alpha).$$

Similarmente al caso anterior pero aplicado a

$$\begin{cases} (B-D)M(\underline{W})+M(\underline{V})(c)+DM(\overline{W}) &= M(a) \\ (B-D)M(\overline{W})+M(\overline{V})(c)+DM(\underline{W}) &= M(a). \end{cases} \tag{4.18}$$

Es decir, se satisface $\frac{\beta(M(\underline{W})+M(\overline{W})}{2}+\frac{(M(\underline{V})+M(\overline{V}))}{2}(c)=M(a)$. Por lo que el punto $\left(\frac{M(\overline{W})+M(\underline{W})}{2},\frac{M(\overline{V})+M(\underline{V})}{2}\right)$ es el vector positivo que satisface el sistema (4.9) y esto contradice la proposición (4.1) ya que por hipótesis, $M(\alpha)\leq\langle q,x^*\rangle$. En consecuencia $\underline{V}(t)=0$

Probemos ahora que $\overline{V}(t)=0$, para todo $t\in\mathbb{R}$. Supongamos que $\overline{V}(t)>0$. Debido que $\underline{V}(t)=0$, reemplzando en el sistema (4.16), nos queda que $(\overline{W}(t),\underline{W}(t),\overline{V}(t))$ es una solución positiva y T-periódica del sistema

$$\begin{cases} D\overline{x}+(B-D)\underline{x} &= M(a) \\ (B-D)\overline{x}+D\underline{x}+c\overline{y} &= M(a) \\ \langle q,\underline{x}\rangle+\beta\overline{y} &= M(\alpha). \end{cases} \tag{4.19}$$

Es decir, se satisface

$$\begin{cases} D\overline{W}(t)+(B-D)\underline{W}(t) &= M(a) \\ (B-D)\overline{W}(t)+D\underline{W}(t)+c\overline{V}(t) &= M(a) \\ \langle q,\underline{W}(t)\rangle+\beta\overline{V}(t) &= M(\alpha). \end{cases} \tag{4.20}$$

Escrito de forma matricial nos queda

$$\begin{pmatrix} D & (B-D) & 0 \\ (B-D) & D & c \\ 0 & q & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M(\overline{W}) \\ M(\underline{W}) \\ M(\overline{V}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \\ M(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Definamos,

$$\mathfrak{B}=\begin{pmatrix} D & (B-D) \\ (B-D) & D \end{pmatrix}_{(2n\times 2n)}.$$

Así,

$$\begin{cases} \mathfrak{B}\begin{pmatrix} M(\overline{W}) \\ M(\underline{W}) \end{pmatrix} + M(\overline{V})\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} & = & M(a) \\ \langle (0,q), \begin{pmatrix} M(\overline{W}) \\ M(\underline{W}) \end{pmatrix}\rangle + \beta M(\overline{V}) & = & M(\alpha). \end{cases} \tag{4.21}$$

Por lo tanto $col(M(\overline{W}), M(\underline{W}), M(\overline{V}))$ es soluciï¿$\frac{1}{2}$n del sistema

$$\begin{cases} \mathfrak{B}\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \underline{x} \end{pmatrix} + \overline{y})\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} & = & M(a) \\ \langle (0,q), \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \underline{x} \end{pmatrix}\rangle + \beta \overline{y} & = & M(\alpha). \end{cases} \tag{4.22}$$

Donde $\langle \ldots \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por otra parte, si denotamos a $\mathfrak{D}$ la matriz diagonal de $\mathfrak{B}$ y por la hipótesis $M(a) > (BD^{-1} - I)M(a)$. Se cumple que

$$\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix} > (\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1} - I)\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix} + \frac{M(\alpha)}{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Donde I' es la matriz identidad de orden $(2n \times 2n)$. En efecto; partiendo de que $M(a) > (BD^{-1} - I)M(a) + \dfrac{M(\alpha^+)}{\beta}c$ y $M(a) > (BD^{-1} - I)M(a)$ se tiene que

$$M(a) > (BD^{-1} - I)M(a) + \frac{M(\alpha^+)}{\beta}c \Rightarrow M(a) > D^{-1}(B - D)M(a) + \frac{M(\alpha^+)}{\beta}c$$

$$M(a) > (BD^{-1} - I)M(a) \Rightarrow M(a) > D^{-1}(B - D)M(a).$$

Escribiendo esta desigualdades en forma de matricial

$$\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 & D^{-1}(B-D) \\ D^{-1}(B-D) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix} + \frac{M(\alpha)}{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix} > \left[\begin{pmatrix} D & (B-D) \\ (B-D) & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{M(a)}{M(a)}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix} > (\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1} - I')\begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix} + \frac{M(\alpha)}{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

donde $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$ y $I' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$. Por el lema (3.1) y (4.23) tenemos que $\mathfrak{B}$ tiene inversa. Observemos que $B^{-1} = \begin{pmatrix} M(a) \\ M(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix}$ y $M(\alpha) - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} \right\rangle = M(\alpha) - \langle q, x^* \rangle \leq 0$. Por proposicii¿½n (3.2) el sistema (4.22) no posee soluciones positiva esto contradice que $(\overline{W}(t), \underline{W}(t), \overline{V}(t))$, es solución positiva del sistema. Por tanto $\overline{V}(t) = 0$. Se cumple $\overline{V}(t) = 0$ y $\underline{V}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora bien sustituimos en el sistema (4.10). Integrando desde 0 hasta T, dividiendo por $T > 0$, usando la T-periócidad de $\overline{W}_i(t)$ y $\underline{W}_i(t)$, entonces

$$\begin{cases} DM(\overline{W}) + (B - D)M(\underline{W}) & = & M(a) \\ (B - D)M(\overline{W}) + DM(\underline{W}) & = & M(a). \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación con la primera ecuación, nos queda

$$\begin{aligned} DM(\overline{W}) - (B - D)M(\overline{W}) + (B - D)M(\underline{W}) - DM(\underline{W}) &= 0 \\ DM(\overline{W}) - BM(\overline{W}) + DM(\overline{W}) + BM(\underline{W}) - DM(\underline{W}) &= 0 \\ (B - D - D)M(\underline{W}) + (D + D - B)M(\overline{W}) &= 0 \\ (B - 2D)M(\underline{W}) + (2D - B)M(\overline{W}) &= 0 \\ (2D - B)M(\overline{W}) - (2D - B)M(\underline{W}) &= 0 \\ (2D - B)(M(\overline{W}) - M(\underline{W})) &= 0 \\ (2D - B)(M(\overline{W} - \underline{W})) &= 0. \end{aligned}$$

Como $(2D - B)$ es invertible, entonces $M(\overline{W} - \underline{W}) = 0$, además $\overline{W}(t) - \underline{W}(t) \geq 0$, por tanto $\overline{W}(t) - \underline{W}(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ son T-periódica se cumple que $\overline{W}(t) = \underline{W}(t)$; para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definamos $u^*(t) = col(u_1^*, (t), u_2^*(t), \ldots, u_n^*(t)) = \underline{W}(t) = \overline{W}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, la cual es T-periódica y positiva. Reemplazando $\underline{W}_i(t)$, $\overline{W}_i(t)$ por $u_i^*(t)$ y $\overline{V}(t)$ y $\underline{V}(t)$

por cero en el sistema (4.10) se tiene

$$(u_i^*(t))' = u_i^*(t)[a_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}u_j^*(t) - b_{ii}u_i^*(t)].$$

Por tanto $u_i^*(t)$ satisface el sistema (4.1). Aplicando la proposición (2.1), tenemos que para cualquier soluciï¿½n $col(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), y(t))$, del sistema (4.1) se cumple

$$\limsup_{t\to+\infty}[x_i(t) - u_i^*(t)] \leq 0 \leq \liminf_{t\to+\infty}[x_i(t) - u_i^*(t)].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to+\infty}[x_i(t) - u_i^*(t)] &= \limsup_{t\to+\infty}[x_i(t) - u_i^*(t)] \\
&= \lim_{t\to+\infty}[x_i(t) - u_i^*(t)] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por ser $u_i^*(t) = \underline{W}_i(t) = \overline{W}_i(t)$, con $1 \leq i \leq n$. De nuevo por proposición (2.1) se tiene

$$\limsup_{t\to+\infty}(y(t)) \leq 0 \leq \liminf_{t\to+\infty}(y(t)).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty}(y(t)) &= \liminf_{t\to+\infty}(y(t)) \\
&= \lim_{t\to+\infty}(y(t)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ya que $\overline{V}(t) = \underline{V}(t) = 0$; para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t) - u^*(t), y(t)] = (0, 0).$$

$\blacksquare$

Observación 4.6. *Si $\theta = \theta(t)$ es el atractor global de la ecuación logística*

$$x'(t) = x(t)[a(t) - bx(t)]. \tag{4.24}$$

Entonces $M(\theta)$ *es el atractor global de la ecuación logística*

$$x'(t) = x(t)[M(a) - bx(t)].$$

En efecto, por el Teorema (1.8) se tiene

i) $\theta(t) > 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *si* $M(a) > 0$.

ii) $\theta(t) = 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *si* $M(a) \leq 0$.

Para $\theta(t) > 0$, *como* θ *es el atractor global de la ecuación logística de (4.24), entonces*

$$\theta'(t) = \theta(t)[a(t) - b\theta(t)].$$

Ahora dividimos por $\theta(t) > 0$, *a ambos lados de la igualdad.*

$$\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = a(t) - b\theta(t).$$

Integrando desde cero hasta T *y dividiendo por* $T > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\theta'(t)}{\theta(t)}dt &= \frac{1}{T}\int_0^T a(t)dt - b\frac{1}{T}\int_0^T \theta(t)dt \\ \frac{1}{T}\ln(\theta(t))\Big|_0^T &= M(a) - bM(\theta). \end{aligned}$$

Por la T-periodicidad de $\theta(t)$ *se tiene*

$$\begin{aligned} 0 = M(a) - bM(\theta) &\Rightarrow bM(\theta) = M(a) \\ &\Rightarrow M(\theta) = \frac{M(a)}{b}; \qquad \textit{pues } b > 0. \end{aligned}$$

Para $\theta(t) = 0$, *implica* $M(\theta) = 0$. *En consecuencia se tiene que*

$$M(\theta) = \begin{cases} \dfrac{M(a)}{b}, & si\ M(a) > 0 \\ 0, & si\ M(a) \leq 0, \end{cases}$$

donde $M(\theta) = \max\{0, \frac{M(a)}{b}\}$; *por observación (1.1) se tiene que* $M(\theta)$ *es el atractor global de la ecuación logística*

$$x'(t) = x(t)[M(a) - bx(t)].$$

Teorema 4.2. *Si $M(\alpha) > \langle q, x^* \rangle$ y $\beta > \langle q, (2D - B)^{-1}(c) \rangle$, entonces el sistema (4.1) tiene una solución positiva y T-periódica de (4.1) que atrae a toda soluciones positiva del sistema.*

Demostración: Sea $U^N = col(W^N, V^N)$ la sucesión canónica del sistema (4.1). Por la observación (4.6) tenemos $\{M(U^N) = \dfrac{1}{T}\int_0^T U(t)dt\}$ es la sucesión canónica del sistema con coeficiente constante:

$$\begin{cases} x_i' &= x_i \left[M(a_i) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j - c_i y \right], \quad 1 \leq i \leq n \\ y' &= y \left[M(\alpha) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j x_j - \beta y \right] \end{cases} \tag{4.25}$$

Aplicando una técnica análoga a la demostración del Teorema (3.2) al sistema (4.25) obtenemos que $M(\overline{W}) = M(\underline{W})$ y $M(\overline{V}) = M(\underline{V})$, esto implica $M(\overline{W} - \underline{W}) = 0$ y $M(\overline{V} - \underline{V}) = 0$. Por otro lado $\underline{W}(t) \leq \overline{W}(t)$ y $\underline{V}(t) \leq \overline{V}(t)$ y por el hecho de que $M(\overline{W} - \underline{W}) = 0$ y $M(\overline{V} - \underline{V}) = 0$, entonces $\overline{W}(t) = \underline{W}(t)$ y $\underline{V}(t) = \overline{V}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Así, $col(W(t), V(t)) = col(W_1(t), W_2(t), \ldots, W_n(t), V(t))$, es una solución positiva y T-periódica del sistema (4.1).
Sea $x(t) = col(x_i(t), y(t))$, solución positiva y T-periódica, con $1 \leq i \leq n$.

Por proposición (2.1) se cumple que

$$\limsup_{t\to+\infty}[x_i(t) - W_i(t)] \leq 0 \leq \liminf_{t\to+\infty}[x_i(t) - W_i(t)].$$

Como $W_i(t) = \overline{W}_i(t) = \underline{W}_i(t)$; con $1 \leq i \leq n$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to+\infty}[x_i(t) - W_i(t)] &= \liminf_{t\to+\infty}[x_i(t) - W_i(t)] \\ &= \lim_{t\to+\infty}[x_i(t) - W_i(t)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto $\lim\limits_{t\to+\infty}[x_i(t)-W_i(t)] = 0$; con $1 \leq i \leq n$ par todo $t \in \mathbb{R}$ y de manera análoga para $V(t)$, se cumple

$$\limsup_{t\to+\infty}[y(t) - V(t)] \leq 0 \leq \liminf_{t\to+\infty}[y(t) - V(t)].$$

Como $V(t) = \underline{V}(t) = \overline{V}(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to+\infty}[y(t) - V(t)] &= \liminf_{t\to+\infty}[y(t) - V(t)]\\ &= \lim_{t\to+\infty}[y(t) - V(t)]\\ &= 0.\end{aligned}$$

En consecuencia el sistema (4.1) tiene una solución positiva y T-periódica que atrae a todas las soluciones positivas del sistema (4.1). ■

Bibliografía

[1] **S. Ahmad and A. C. Lazer**, *Necessary and sufficient averarage growht in a Lotka-Volterra system. Nonlinear Analysis. 34 (1998), 191-228.*

[2] **S. Ahmad and A. C. Lazer**, *On the nonautonomous N-competing species problem. Appl. Anal. 57 (1995), 309-323.*

[3] **A. Tineo.** *An iterative scheme for the N-competing species problem. J. of Diff. Equations. Vol 116, 1 (1995). 1-15.*

[4] **A. Tineo.** *Iterative scheme for some population models. Nonlinear World (1996). 695-708.*

[5] **A. Tineo.** *Necessary and Sufficient Conditions for Extinction of One Species. Advanced Nonlinear Studies. 5 (2005). 57-71.*

[6] **Trabajo de Ascenso de MSc. Liliana Pérez.** *Condición necesaria y suficiente para la extinción de una especie en un sistema competitivo con retardo infinito. Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"(2008).*

[7] **Novo, S, Obaya, R. Rojo, J.** *Ecuaciones y Sistemas Difernciales. Mcgraw-Hill/ Interamericana de España , S.A. España. (1995).*

[8] **A. Tineo.** *An introduction to Periodic Competitive Systems. DECIMA ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMATICA (1997). 7-23*

[9] **A. Tineo.** *An introduction to Periodic Competitive Systems. DECIMA ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMATICAS (1997). 7-23.*

[10] **Bombal Marin and Vera.** *Problemas de Análisis Matemático. Cálculo Diferencial (1988). AC. IBSN 84-7282-101-6.*

[11] **R. Cárbo Carré and J.A. Hernández Basora** *Introducción a la Teoría de Matrices (1976). 347-351.*

[12] **Robert. G. Bartle.** *introducción al Análisis Matemático. (1980). IBSN 968-18-0997-1.*

[13] **Tesis del Br. Orangel Peraza Tutor: MSc. Liliana Pérez.** *Extinción en un modelo tipo Lotka-Volterra caso Autónomo. Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". (2009).*