UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Φ-VARIACIÓN ACOTADA EN EL PLANO REAL"

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR.AURA BELZÁREZ

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
ÁREA DE CONOCIMIENTO: ANÁLISIS FUNCIONAL.
TUTOR: MCS. MIREYA BRACAMONTE.

Barquisimeto, Venezuela. Julio de 2011

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"Φ-VARIACIÓN ACOTADA EN EL PLANO REAL"

Presentado por la ciudadana Br. Aura Belzárez titular de la Cédula de Identidad Nº 18862380. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.
Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.
En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

Dedicado a Dios Todopoderoso, a mis padres Teresa y Baudilio, a mis hermanos Génesis y José, a mis amigas Bea y Yami y a mi gran amor Elvis.

Agradecimiento

A **Dios Todopoderoso**, por acompañarme todos los días, por hacer realidad este sueño, por el amor con el que me rodea, porque siempre estoy en sus manos y por darme la fuerza y voluntad para seguir adelante.

A **mi madre**, por ser mi amiga, mi aliada, mi ejemplo a seguir, gracias por todo el apoyo en esta tesis y en mi vida.

A **mi padre**, porque detrás de este logro está usted, su apoyo, confianza y cariño. Gracias por darme la oportunidad de cumplir esta meta.

A **mi hermano** (Manito), porque desde que nacimos me has enseñado el valor de la amistad y complicidad, hemos compartido tanto que mis logros son los tuyos.

A **mi hermana**(Geni), por haber llegado a alegrar nuestras vidas y ser la hermanita menor que tanto había deseado.

A **mi abuela**(Cucu), gracias por el cariño, paciencia y también por consentirme.

A **mi novio**, Elvis, gracias por tu paciencia inagotable, por tu tierna y cálida compañía y tu apoyo incondicional. Gracias por compartir mi vida y mis logros, te amo.

A **todos mis primos y tíos** que me han enseñado el valor de la familia, gracias por ser amigos, cómplices y hermanos.

A **mi tutora Mireya Bracamonte**, por su dedicación y esmero para que este trabajo sea posible y también a cada uno de los profesores que participaron en mi formación académica porque de alguna manera forman parte de lo que soy ahora. En especial a los profesores **Jurancy Ereú** y **Miguel Vivas** por escuchar mis exposiciones y corregirme.

A **todos mis amigos**, en especial a Beatriz, Yami, Yuli, Marcos, Javier Ramírez, Juan La Cruz, Glenni, Dannymar, Datsy, Eleiny, Joan, Luis Querales, Elismar, Yennys, José Quiroz, Jeferson, Ana, Katherina y Migdalia que dieron un toque especial a mi travesía para lograr esta meta y seguirán siendo mis amigos aún después de haberla cumplido.

Resumen

El siguiente trabajo tiene como objetivo principal presentar la clase de funciones de Φ-variación acotada en el plano real, insertarla dentro de un espacio normado y demostrar un Teorema tipo representación de Riesz para esta clase. El trabajo se realizó siguiendo [2], la tesis doctoral de Aziz así como la bibliografía actual con la que contamos, gracias a que tenemos acceso a la misma, aunque es un tema muy reciente, del 2010.

La originalidad del trabajo se basa en el empleo de las N-funciones en el desarrollo del trabajo y debido a que nos propusimos abordar de una forma diferente algunas demostraciones del trabajo base ([2]) obtuvimos un resultado, sencillo pero, original de nuestro trabajo que se presenta en el teorema 2.9.

Se comienza introduciendo algunas definiciones básicas necesarias, que busca que el lector interesado pueda abordar el tema fácilmente. Por ello se presenta la definición de función de variación acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, así como un recuento de su desarrollo histórico que nos permita tener presente las definiciones y sus diferentes generalizaciones. Seguimos presentando la $N-$función así como sus propiedades, dado que muchas propiedades de la clase de funciones que estudiamos están estrechamente ligadas a éstas. Con esta antesala, damos paso a la clase de funciones de Φ-variación acotada en el plano, que nos introduce al punto central, la $\Phi-$variación en el sentido de Riesz. Y finalizamos con un teorema tipo representación de Riesz.

Índice

Introducción

En el año 1881, Jordan introduce el concepto de función de variación acotada en un intervalo $[a,b]$ ([14]), y desde entonces esta clase de funciones ha jugado un papel muy importante dentro del análisis real y ha sufrido diversas generalizaciones. El concepto original presentado por Jordan para una función $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ y una partición ξ de $[a,b]$ define la variación de u respecto a $\xi=\{t_0,...,t_n\}$ como:

$$V(u,\xi):=\sum_{i=1}^{m}|u(t_i)-u(t_{i-1})|.$$

Y diremos que la función u es de **variación acotada** en el intervalo $[a,b]$ si

$$V(u,[a,b]):=\sup_{\xi\in\pi([a,b])}V(u,\xi)<+\infty.$$

El conjunto de todas las funciones que son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ tiene un estrecho vínculo con las curvas que poseen longitud finita (Curvas rectificables). Esta clase se estudia en la teoría de integración de Riemann-Stieltjes.

Entre las generalizaciones de las funciones de variación acotada, se encuentra la hecha por F. Riesz ([21]), en 1910, en la cual introduce el concepto de funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz en $[a,b]$, para $1<p<\infty$. Para una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se define la p-variación, en el sentido de Riesz, como

$$V_p^R(f)=V_p^R(f,[a,b]):=\sup_{\xi\in\pi[a,b]}V_p^R(f;[a,b],\xi),$$

donde

$$V_p^R(f;[a,b],\xi):=\sum_{i=1}^{m}\frac{|f(t_i)-f(t_{i-1})|^p}{|t_i-t_{i-1}|^{p-1}}.$$

Y se dice que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es de p-variación acotada en $[a,b]$ en el sentido de Riesz si $V_p^R(f)=V_p^R(f,[a,b])<\infty$.

Unos años después, en 1924 N. Wiener introduce una nueva clase de funciones reales de p-variación acotada, como aquellas funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tales que la expresión

$$V^w(f,[a,b])=\sup_{\xi}\sum_{i=1}^{m}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^p,$$

es finita, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones ξ de $[a,b]$ que tienen la forma ξ: $a=t_o<t_1<\cdots<t_m=b$.
Esta generalización pareciera más natural a la definición dada por Jordan, sin embargo, la importancia de la anterior se debe a que se puede establecer una estrecha relación entre las funciones de variación acotada y la derivada de dicha función, en aquellos casos en que estén dadas las condiciones necesarias.

En el año 1937 L. C. Young, generaliza la noción dada por Wiener al caso de funciones de Φ-variación acotada en el intervalo $[a,b]$. En este caso, el papel que desempeña la función t^p, en las funciones de p-variación acotada, es reemplazado por una función convexa Φ, que satisface algunas condiciones particulares, que en nuestro trabajo consideramos función de Orlicz, Young o $N-$funciones. En este caso si Φ es $N-$función y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función, para una partición $\xi:=\{t_i\}_{i=0}^{n}$ del intervalo $[a,b]$ se define

$$V_{\Phi}^{W}(u,[a,b];\xi)=\sum_{i=1}^{n}\Phi(|u(t_i)-u(t_{i-1})|).$$

La Φ-variación de u en el sentido de Wiener es definida por

$$V_{\Phi}^{W}(u,[a,b]):=\sup_{\xi\in\pi[a,b]}V_{\Phi}^{W}(u,[a,b];\xi).$$

En el caso en que $V_{\Phi}^{W}(u,[a,b])<\infty$ se dice que u es una función de Φ-variación acotada en el sentido de Wiener sobre $[a,b]$.

La noción de p-variación acotada presentada por Riesz fue generalizada en 1953 por Medveded, el cual establece que una función $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ tiene Φ-variación acotada en el intervalo $[a,b]$ en el sentido de Riesz, si la expresión

$$V_{\Phi}^{R}(u)=V_{\Phi}^{R}(u;[a,b]):=\sup_{\xi}\sum_{i=1}^{m}\Phi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \qquad (1)$$

es finita, donde Φ es una $N-$función y el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\xi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ del intervalo $[a, b]$.

Como es natural, se trata de generalizar esta noción de funciones de variación acotada, en todas sus variantes, a funciones de dos variables, dando varias condiciones bajo las cuales una función de dos variables independientes se debe llamar de variación acotada. Estas generalizaciones son asociadas con los nombres de Vitali, Hardy, Pierpont, Fréchet y Tonelli.
El objetivo central de este trabajo es presentar las funciones, definidas sobre un rectángulo del plano, con variación acotada en el sentido de Riesz, la cual es una generalización de la definición dada entre 1904 y 1906 por Vitali y Hardy donde extienden el concepto de funciones de variación acotada, introducido por Jordan, para funciones definidas en un rectángulo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. El trabajo surge por la inquietud de presentar las demostraciones de algunos resultados presentados en [2] pero hechas de una forma diferente. Para ello se hizo necesario dividir el trabajo en tres capítulos. El primero de Preliminares, donde se incluyen definiciones básicas que permitan al lector abordar los capítulos posteriores. Allí se introducen secciones importantes como la definición de Φ-variación acotada de funciones de una variable, dado que corresponde al antecedente inmediato anterior a la generalización que estamos considerando así como una sección dedicada al Funcional de Minkowski, que nos permitirá dotar de una norma al espacio objeto de nuestro estudio. Un segundo capítulo, el cual es el capítulo central donde se definen las funciones de Φ-variación acotada en el sentido de Riesz, sus propiedades y el espacio en el cual éstas se encuentran inmersas. Presentando un caso particular de estas funciones, como son las funciones factorizables donde se obtiene un resultado, aunque trivial, original de este trabajo (teorema 2.9). Y finaliza el trabajo presentando en su tercer y último capítulo, el teorema tipo representación de Riesz y donde se dedica una sección especial a las funciones absolutamente continuas.

Capítulo 1

Preliminares

Comencemos introduciendo algunas definiciones básicas indispensables en el desarrollo del trabajo, así como un poco del desarrollo histórico del tema desde que es introducido por primera vez por Jordan en 1881, [14].
En este capítulo, por no ser nuestro objetivo central, en la mayoría de los casos nos limitaremos a indicar, para el lector interesado, dónde puede encontrar ampliada dicha información, salvo en aquellos casos en que los resultados sean indispensables para el buen desarrollo del mismo.

Definición 1.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo cerrado $[a,b]$. Diremos que f* ***satisface la condición Lipschitz*** *si existe una constante positiva $M > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \quad \textit{para todo} \quad x, y \in [a,b]. \tag{1.1}$$

En este caso, usualmente, se escribe $f \in Lip[a,b]$.

Por otra parte, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función definida sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ y existen constantes $M > 0$ y α tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha} \quad \text{para todo} \quad x, y \in [a,b],$$

se dice que la función f satisface la condición Lipschitz de orden α (o Hölder de orden α) y en ese caso escribiremos $f \in Lip(\alpha, [a,b])$.

Ejemplo 1.1. *Un ejemplo trivial de una función que satisface la condición Lipschitz es la función identidad, $f(x) := x$ definida sobre un intervalo $[a, b]$, dado que*

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Y si consideramos la función $f(x) := x^2$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| \\ &= |x - y||x + y| \\ &\leq |x - y|(|x| + |y|) \\ &\leq |x - y| 2 \max\{|a|, |b|\}, \end{aligned}$$

en cuyo caso tendremos que $f \in Lip([a, b])$.

Es conocido, que el conjunto formado por todas las funciones que satisfacen la condición Lipschitz es un espacio lineal, y cada una de estas funciones son uniformemente continuas sobre $[a, b]$.

Definición 1.2. *Una función u de valores reales definida sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ se dice* ***absolutamente continua*** *sobre $[a, b]$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda colección finita $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ de intervalos abiertos en (a, b),*

$$\textit{si} \quad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta, \quad \textit{entonces} \quad \sum_{k=1}^{n} |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon.$$

Una función Lipschitz sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es absolutamente continua. Si f y g son dos funciones absolutamente continuas sobre $[a, b]$, entonces $f + g, f - g$ y fg son absolutamente continuas sobre $[a, b]$. En el caso del cociente, si existe una constante $C > 0$ tal que $|g(x)| \geq C$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es absolutamente continua sobre $[a, b]$.

Además, una función absolutamente continua es de variación acotada en cada intervalo compacto.

Observación 1.1. *Se demuestra fácilmente que si $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua, entonces es uniformemente continua, sin embargo hay funciones uniformemente continuas, que no son absolutamente continuas. Por otra parte si u es diferenciable y su derivada es acotada, entonces como una simple consecuencia del teorema del valor medio, u es absolutamente continua.*

§1.1. Funcional de Minkowski

El propósito de esta sección es poner de manifiesto la geometría de los conceptos de la norma, seminorma y funcional lineal. Encontramos aquí las propiedades que debe cumplir un subconjunto de un espacio vectorial para que pudiera servir de bola unitaria correspondiente a una norma o seminorma.
Para ello necesitaremos los siguientes conceptos:

Definición 1.3. *Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $A \subset \mathbb{V}$. Diremos que:*

- *A es **absorbente** si para cada $x \in \mathbb{V}$, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in A$.*
- *A es **balanceado** si para todo $x \in A$ y $|\alpha| \leq 1$, se cumple que $\alpha x \in A$.*

Es bien conocido el siguiente lema:

Lema 1.1. *Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y $p : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una función no negativa que satisface*

$$p(tx) = tp(x) \quad \textit{para} \quad t > 0, x \in \mathbb{V}, \tag{1.2}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \textit{para} \quad x, y \in \mathbb{V}. \tag{1.3}$$

Entonces la bola correspondiente $B_p(r) := \{x \in \mathbb{V} : p(x) < r\}$ es un conjunto convexo y absorbente. Si p es una seminorma entonces $B_p(r)$ es también balanceado.

Demostración. Comencemos verificando que la bola es absorbente. Para ello, si $p(x) = 0$, entonces $x \in B_p(t)$ para todo $t > 0$.
Suponiendo que $p(x) > 0$ obtenemos

$$p\left(\frac{r}{p(x)+1}\,x\right) = \frac{r}{p(x)+1}p(x) < r,$$

así que $B_p(r)$ es absorbente.
Ahora, para $x, y \in B_p(r)$, $0 \leq t \leq 1$ obtenemos $p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < tr + (1-t)r = r$, por lo tanto $B_p(r)$ es convexo. Si además tenemos la propiedad $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $x \in B_p(r)$, $|\alpha| \leq 1$ implica que $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < r$, y $B_p(r)$ resulta balanceado. ∎

Los conjuntos $B_p(r)$ tienen papel de bolas centradas en cero y de radio r asociadas al funcional p.

Definición 1.4. *Sea $C \subseteq \mathbb{V}$ un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Supongamos que C es convexo y absorbente. Definimos para $x \in \mathbb{V}$:*

$$p_C(x) := \text{ínf} \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in C \right\}.$$

*A la función p_C se le llama **funcional de Minkowski** del conjunto C.*

Teorema 1.2. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Consideremos $C \subset \mathbb{V}$ un conjunto convexo y absorbente. El funcional de Minkowski p_C satisface las condiciones (1.2) y (1.3) y*

$$B_{p_C}(1) \subseteq C \subseteq \overline{B_{p_C}}(1) = \{x \in \mathbb{V} : p_C(x) \leq 1\}. \tag{1.4}$$

Si C es balanceado entonces p_C es una seminorma.

Demostración. Fijemos $x \in \mathbb{V}$. Denotaremos por $H_C(x) := \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in C \right\}$. La suposición de que C es absorbente nos garantiza que $H_C(x) \neq \emptyset$. Sean $t, s > 0$ tales que $a = tx \in C$ y $b = s(-x) \in C$. Por la convexidad de C obtenemos:

$$0 = \frac{sa + tb}{s + t} \in C.$$

De aquí se sigue que $x \in C$, $t < 1$, entonces $tx = (1 - t)0 + tx \in C$. Resulta que el conjunto $H_C(x)$ tiene la propiedad siguiente: si $t \in H_C(x)$ y $s > 1$ se obtiene $s^{-1}t^{-1}x \in C$, lo que equivale a $st \in H_C(x)$. De tal manera que vemos que el conjunto $H_C(x)$ puede tomar sólo la forma $[p_C(x), +\infty)$ o bien $(p_C(x), +\infty)$. Para mostrar la subaditividad de p_C supongamos que $p_C(x) < s$ y $p_C(y) < t$, es decir, $s \in H_C(x)$ y $t \in H_C(y)$ ó de otra forma $\frac{x}{s} \in C$ y $\frac{y}{t} \in C$. Haciendo uso de la convexidad de C se deduce

$$\frac{x + y}{t + s} = \frac{s}{t + s}\frac{x}{s} + \frac{t}{t + s}\frac{y}{t} \in C,$$

así que

$$t + s \in H_C(x + y) \quad \text{y} \quad p_C(x + y) \leq t + s.$$

Tomando el ínfimo con respecto a $s \in H_C(x)$ y $t \in H_C(y)$ llegamos a la desigualdad

$$p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y).$$

Para mostrar la propiedad (1.2) calculamos para $t > 0$:

$$p_C(tx) = \text{ínf}\left\{s : \frac{tx}{s} \in C\right\} = t\,\text{ínf}\left\{\frac{s}{t} : \frac{tx}{s} \in C\right\} = t\,p_C(x).$$

Queda sólo por verificar que se satisface la condición (1.4). Si $p_C(x) < 1$ tendremos que $1 \in H_C(x)$ y $x \in C$, entonces $B_{p_C}(1) \subseteq C$. Por otro lado, $x \in C$ implica que $1 \in H_C(x)$ por lo cual $p_C(x) \leq 1$ y la segunda inclusión está mostrada.
Si suponemos además que $|\alpha| \leq 1$ y $x \in C$ implica que $\alpha x \in C$ (es decir que C es balanceado), obtenemos para $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in \mathbb{V}$ que

$$\begin{aligned} p_C(\alpha x) &= \text{ínf}\left\{s : \frac{\alpha x}{s} \in C\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{s : \frac{|\alpha| x}{s} \in C\right\} \\ &= |\alpha|\,\text{ínf}\left\{\frac{s}{|\alpha|} : \frac{|\alpha| x}{s} \in C\right\} \\ &= |\alpha| p_C(x). \end{aligned}$$

Se verifica así que p_C tiene en este caso todas las propiedades de una seminorma. ■

§1.2. Funciones de una variable, de variación acotada

§Definición de Jordan.

En el año 1881, Jordan introduce en [14] el concepto de **función de variación acotada** en un intervalo $[a, b]$, y desde entonces esta clase de funciones han jugado un papel muy importante dentro del análisis real, lo cual podemos afirmar por el tiempo que ha sido invertido en estudiar estas funciones así como sus propiedades. En esta sección presentamos la definición dada por Jordan.

Definición 1.5. *Una **partición** ξ del intervalo cerrado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es una colección finita $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Al conjunto de todas las particiones $\xi := \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ la denotaremos por $\pi([a, b])$.*

Definición 1.6. *Dada una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición ξ de $[a, b]$ se define la variación de u respecto a $\xi = \{t_0, ..., t_m\}$ como:*

$$V(u, \xi) := \sum_{i=1}^{m} |u(t_i) - u(t_{i-1})|.$$

Y diremos que la función u es de **variación acotada** *en el intervalo $[a,b]$ si*

$$V(u,[a,b]) := \sup_{\xi\in\pi([a,b])} V(u,\xi) < +\infty.$$

Ejemplo 1.2. *Toda función no decreciente sobre $[a,b]$ es de variación acotada.*

En efecto, si $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es un función no decreciente y $\xi = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ es una partición de $[a,b]$ entonces

$$V(u,\xi) = \sum_{i=1}^{m} |u(t_i) - u(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{m}(u(t_i) - u(t_{i-1})) = u(t_m) - u(t_0) = u(b) - u(a).$$

En consecuencia, $V(u;[a,b]) = u(b) - u(a)$ y la combinación lineal de funciones no decrecientes es también de variación acotada.

Ejemplo 1.3. *Sea u una función Lipschitz sobre $[a,b]$. Entonces u es de variación acotada sobre $[a,b]$, y $V(u,[a,b]) \leq M(b-a)$, donde M es dada en (1.1).*

En efecto, si $\xi = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ es una partición de $[a,b]$ y M es como en (1.1),

$$V(u,\xi) \;=\; \sum_{i=1}^{m} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \leq M \sum_{i=1}^{m} |t_i - t_{i-1}| = M(b-a).$$

Como esta desigualdad se cumple para toda partición $\xi \in \pi([a,b])$ se tiene que $V(u,[a,b]) \leq M(b-a)$.

Entre las propiedades que muestran estas funciones podemos mencionar las siguientes:

Teorema 1.3 ([13])**.** *(i) Toda función de variación acotada es acotada sobre todo subintervalo $[a,b]$ de su dominio.*

(ii) Si f es una función de variación acotada, también lo es cf para toda constante c, además $V(cf;[a,b]) = |c|V(f;[a,b])$.

(iii) La variación es un funcional subaditivo, es decir, $V(f+g;[a,b]) \leq V(f;[a,b]) + V(g;[a,b])$.

Como consecuencia de estas propiedades se concluye que el espacio de todas las funciones de variación acotada es un espacio lineal.

Teorema 1.4 ([22]). *[Teorema de descomposición de Jordan] Toda función de variación acotada sobre un intervalo $[a, b]$ puede ser expresada como diferencia de dos funciones no decrecientes.*

Este teorema recibe el nombre de descomposición de Jordan, dado que fue Jordan, quien por primera vez llama la atención sobre estas funciones y demuestra dicho teorema.
Esta clase de funciones es denotada por $BV\,[a, b]$ y posee una estructura de álgebra y de espacio normado con la norma:

$$\|u\|_{BV[a,b]} = \|u\|_{BV} := |u(a)| + V(u; [a, b]), \quad u \in BV\,[a, b]\,. \tag{1.5}$$

Además el espacio $BV\,[a, b]$ es completo con esta norma y tiene una estructura de álgebra de Banach.
La clase BV $[a, b]$ tiene una estrecha vinculación con las curvas que poseen longitud finita (Curvas rectificables). Esta clase se estudia en la teoría de integración de Riemann-Stieltjes (ver [10]).

Corolario 1.5. *Si la función u es de variación acotada sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces ésta es diferenciable en casi todas partes sobre el intervalo (a, b) y u' es integrable sobre $[a, b]$.*

§p-variación acotada

Una vez presentada la definición de Jordan, han surgido gran cantidad de generalizaciones de las funciones de variación acotada, entre las que se encuentra en 1910, que F. Riesz ([21]), introduce el concepto de funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz en $[a, b]$, para $1 < p < \infty$, como se muestra a continuación.

Definición 1.7. *Sea $1 < p < \infty$. Dada la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se define la p-variación, en el sentido de Riesz, de la función f como*

$$V_p^R(f) = V_p^R(f, [a, b]) := \sup_{\xi\in\pi[a,b]} V_p^R(f; [a, b], \xi),$$

donde

$$V_p^R(f; [a, b], \xi) := \sum_{i=1}^{m} \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|^{p-1}}. \tag{1.6}$$

Se dice que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es de* p-***variación acotada*** *en* $[a,b]$ ***en el sentido de Riesz*** *si* $V_p^R(f) = V_p^R(f,[a,b]) < \infty$.

La clase de funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz, denotada por $RV_p[a,b]$, es un espacio vectorial normado y posee una estructura de álgebra, con la norma definida por

$$\|f\|_p^R = |f(a)| + (V_p^R(f))^{1/p}, \qquad f \in RV_p[a,b].$$

Riesz presenta la caracterización del espacio $RV_p[a,\, b]$, con el clásico teorema de Riesz.

Lema 1.6 (Lema de Riesz([27])). *Sea* $1 < p < \infty$. $f \in RV_p[a,\, b]$ *si, y sólo si,* $f \in AC[a,\, b]$ *y* $f' \in L_p[a,\, b]$. *Además*

$$V_p^R(f;[a,\, b]) = \int_a^b |f'(t)|^p dt = \|f'\|_{L_p[a,\,b]}^p.$$

Observación 1.2.

(1) *En el caso* $p = 1$, *el Lema de Riesz no es válido, ya que existen funciones de variación acotada* ($RV_1\,[a,b] = BV\,[a,b]$) *que no son continuas, y por lo tanto no son absolutamente continuas.*

(2) *El concepto de* p*-variación puede generalizarse para funciones* $f : [a,b] \to \mathbf{X}$, *donde* $\mathbf{X}$ *es un espacio métrico o normado, cambiando en la expresión* (1.6) *el numerador por* $d(f(t_i), f(t_{i-1}))$ *o* $\|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$ *según sea el caso.*

Aunque el Lema de Riesz no se había podido generalizar es conocido lo siguiente: si $\mathbf{X}$ *es un espacio de Banach, tal que toda función* $f : [a,b] \to \boldsymbol{X}$ *que tiene variación acotada posee derivada c.s. en* $[a,b]$, *entonces para* $f \in RV_p([a,b]\,;\boldsymbol{X})$ *se tiene que* $f' \in L_p\,[a,b]$ *y*

$$V_p^R(f,[a,b]) = \int_a^b \|f'(t)\|^p dt.$$

(3) *En [23] para* $1 \le q \le p < \infty$ *se cumple que*

$$Lip([a,b]\,;\boldsymbol{X}) \subseteq RV_p([a,b]\,;\boldsymbol{X}) \subseteq RV_q([a,b]\,;\boldsymbol{X}) \subseteq AC([a,b]\,;\boldsymbol{X}) \subseteq BV([a,b]\,;\boldsymbol{X}).$$

En 1924, N. Wiener introduce la clase de funciones reales de una variable real de **p-variación acotada**, [29], como aquellas funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que la expresión

$$V^w(f, [a, b]) = \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p,$$

es finita, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones ξ de $[a, b]$ que tienen la forma ξ: $a = t_o < t_1 < \cdots < t_m = b$.

§1.2.1. Φ-variación acotada

Resumimos en esta sección la generalización de las funciones de variación acotada presentadas por Young, L. C. e el año 1937, [30], la cual generaliza la noción dada por Wiener al caso de funciones de **Φ-variación acotada** en el intervalo $[a, b]$. En este caso, el rol que desempeña la función t^p en las funciones de p-variación acotada son reemplazadas por una función convexa Φ, que satisface algunas condiciones particulares, llamadas posteriormente **función de Orlicz**, **Young** o **N-funciones**.
Nos detenemos un poco más en esta sección, dado que el objetivo central de este trabajo es una generalización inmediata a esta noción.

§N-funciones

Comenzamos definiendo las N-funciones, que corresponden a la Φ que se menciona en el título del trabajo, sin embargo, no nos detendremos mucho en el estudio de las mismas, pues no es el objetivo central de nuestro trabajo, pero debemos dar una idea clara de ellas, dado que sí juegan un papel fundamental en el desarrollo del trabajo.

Definición 1.8. $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *es una N-función si y sólo si Φ es continua y convexa que satisface las condiciones:*

1) $\Phi(0) = 0$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0,$

3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty,$

4) $\Phi(x) > 0$ *para todo* $x > 0$.

En el caso en que ϕ sea la derivada por la derecha de Φ, $\phi \equiv \Phi'_+$, entonces ϕ satisface $\phi(0) = 0$; $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty$; $\phi(t) > 0$ para cada $t > 0$; y $\Phi(x) = \int_0^{|x|} \phi(t)dt$.

Observación 1.3. *En nuestro trabajo, nos limitaremos a trabajar con* Φ *restringida a* $[0, +\infty)$.

Así, presentamos una definición alternativa de las N-funciones.

Definición 1.9. *Sea* $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *una función continua a la derecha, monótona creciente con*

1) $\phi(0) = 0$, *2)* $\lim\limits_{t \to \infty} \phi(t) = \infty$, *3)* $\phi(t) > 0, t > 0$;

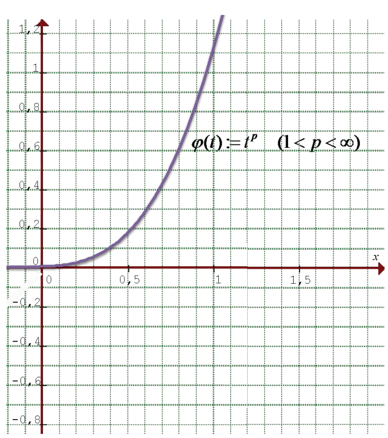
entonces la función definida por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(x)dx, \tag{1.7}$$

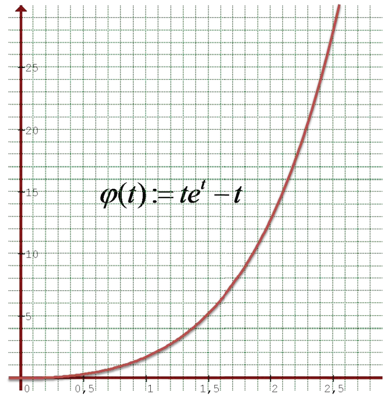
es llamada N***-función***.

La clase de todas las $N-$funciones es denotada por $\mathcal{N}$.

Ejemplo 1.4. *Como ejemplo clásico de las* $N-$*funciones se encuentran las funciones* t^p *con* $1 < p < \infty$.

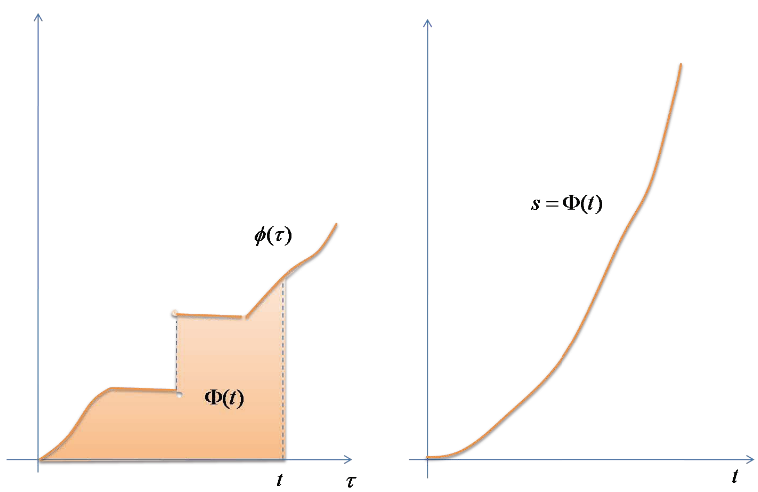


Ejemplo 1.5. *Otro ejemplo de* $N-$ *funciones se encuentra la función* $\Phi(t) := te^t - t$.



Otros ejemplos de N-funciones son $\Phi(t) = e^{t^p} - 1$ para $1 < p < \infty$ y $\Phi(t) = (1 + t)\lg(1+t) - t$.

Como puede verse, $\Phi(t)$ representa el área bajo la curva de ϕ en el intervalo $[0, t]$, como se muestra en la siguiente gráfica. Los segmentos rectilíneos de la gráfica corresponden a los intervalos donde ϕ es constante, y los puntos angulares sobre la gráfica de Φ corresponden a las discontinuidades de ϕ.



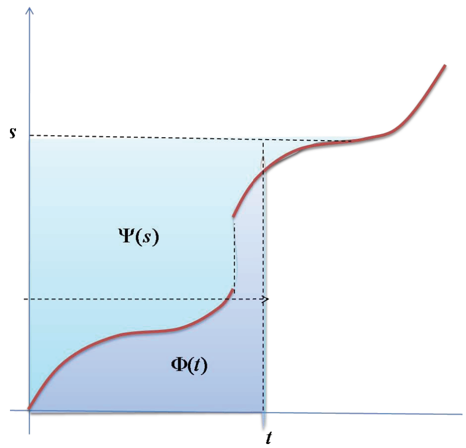
Definición 1.10. *Dada Φ una N-función, se define*

$$\Psi(x) := \sup\{tx - \Phi(t) : t \geq 0\}.$$

Ψ es una N-función y es llamada N-función complementaria de Φ.

Como ejemplos de N-funciones complementarias tenemos $\Phi(t) := \dfrac{t^p}{p}$ y su N-función complementaria es $\Psi(s) := \dfrac{s^{p'}}{p'}$, para $1 < p < \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Y un ejemplo menos clásico se encuentra: $\Phi(t) = e^t - t - 1$ y su complementaria es $\Psi(s) = (1+s)\lg(1+s) - s$.

Entre las N-funciones complementarias existe una estrecha relación, como puede verse en el siguiente gráfico.



En esta gráfica puede observarse que

$$st \leq \Phi(t) + \Psi(s), \tag{1.8}$$

la cual es conocida como **desigualdad de Young**.

§Condición Δ_2

Sea Φ una N-función. Se dice que Φ satisface la condición Δ_2, en cuyo caso escribiremos $\Phi \in \Delta_2$, cuando se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < \infty.$$

Esto implica la existencia de constantes $K > 0$ y $x_0 \geq 0$ tales que

$$\Phi(2x) \leq K\Phi(x) \quad \text{para todo} \quad x \geq x_0. \tag{1.9}$$

Esta condición es muy importante, y aún cuando existen diversas caracterizaciones de esta condición (Ver [5]), vale la pena señalar que $\Phi \in \Delta_2$ si y sólo si, para cada $c > 1$ existen constantes $K_c > 0$ y $x_0 \geq 0$ de manera que

$$\Phi(cx) \leq K_c\Phi(x) \quad \text{para todo} \quad x \geq x_0. \tag{1.10}$$

De hecho para $2^n \geq c$ y valores lo suficientemente grandes de x tendremos que

$$\Phi(2x) \leq \Phi(c^n x) \leq k_c^n \Phi(x).$$

§Φ-variación en el sentido de Wiener

Además Young, L. C. en el año 1937, define la clase de las funciones de **Φ-variación acotada en el sentido de Wiener**, en el intervalo $[a, b]$, como se muestra a continuación.

Definición 1.11. *Sea* $\Phi \in \mathcal{N}$ *y* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función. Dada una partición* $\xi := \{t_i\}_{i=0}^{n}$ *del intervalo* $[a,b]$*, definimos*

$$V_{\Phi}^{W}(u,[a,b];\xi) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(|u(t_i) - u(t_{i-1})|).$$

Y se define la ***Φ-variación de*** **u** ***en el sentido de Wiener*** *como*

$$V_{\Phi}^{W}(u,[a,b]) := \sup_{\xi \in \pi[a,b]} V_{\Phi}^{W}(u,[a,b];\xi).$$

En el caso en que $V_{\Phi}^{W}(u,[a,b]) < \infty$ *se dice que* u *es una función de* ***Φ-variación acotada sobre*** $[a,b]$*.*

Observación 1.4. *Por razones de comodidad, si no hay posibilidad de confusión y se tiene claro el intervalo sobre el cual se está trabajando, podemos escribir* $V_{\Phi}^{W}(u;\xi)$ *y* $V_{\Phi}^{W}(u)$ *en lugar de* $V_{\Phi}^{W}(u,[a,b];\xi)$ *y* $V_{\Phi}^{W}(u,[a,b])$*, respectivamente.*

Si consideramos $\Phi(t) = t^p$ el concepto que se acaba de presentar corresponde al concepto de p variación acotada, introducido por N. Wiener en 1924 ([29]) para $1 < p < \infty$, y que más tarde L.C. Young, en 1937 generaliza para el caso de Φ-variación acotada, de allí la razón por la cual esta variación recibe su nombre.

Observación 1.5. *Aún cuando muchos se encuentran en la tentación de afirmar que si* $\Phi(t) = t$ *es la generalización de la definición original dada por Jordan, resulta prudente aclarar que* $\Phi(t) = t$ *no es una* N*-función, lo cual es fácil de verificar.*

Lema 1.7. *Toda* N*-función es supra-aditiva.*

Demostración. Sean $\Phi \in \mathcal{N}$ y $x, y \in [0,+\infty)$. Es claro que si $x = 0 = y$ se cumple que $\Phi(x+y) = \Phi(0) = \Phi(x) + \Phi(y)$.
En caso contrario, que $x + y > 0$ entonces $x > 0$ o $y > 0$, supongamos que $x > 0$ y así dado que $x \leq x + y$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi\left(\frac{x}{x+y}\frac{x}{\frac{x}{x+y}}\right) \\ &\leq \frac{x}{x+y}\Phi\left(\frac{x}{\frac{x}{x+y}}\right) \\ &= \frac{x}{x+y}\Phi\left(x+y\right). \end{aligned}$$

y de forma similar obtenemos que

$$\Phi(y) \quad \leq \quad \frac{y}{x+y}\Phi\left(x+y\right).$$

De lo cual obtenemos que

$$\Phi(x)+\Phi(y) \quad \leq \quad \frac{x}{x+y}\Phi\left(x+y\right)+\frac{y}{x+y}\Phi\left(x+y\right)=\Phi\left(x+y\right).$$

■

Con este lema se garantiza el siguiente teorema.

Teorema 1.8. *Sea $\Phi \in \mathcal{N}$. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona en el intervalo $[a,b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$, entonces*

$$V_{\Phi}^{W}(f;[a,b]) = \Phi(|f(b)-f(a)|). \tag{1.11}$$

Demostración. Sean $\Phi \in \mathcal{N}$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente en el intervalo $[a,b]$ y $\xi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\Phi(|f(t_i)-f(t_{i-1})|) &= \sum_{i=1}^{n}\Phi(f(t_i)-f(t_{i-1})) \\
&\leq \Phi\left(\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)-f(t_{i-1}))\right) \\
&= \Phi\left(f(b)-f(a)\right).
\end{aligned}$$

Dado que esta partición es arbitraria, se concluye que

$$V_{\Phi}^{W}(f;[a,b]) \quad \leq \quad \Phi\left(f(b)-f(a)\right)=\Phi\left(|f(b)-f(a)|\right).$$

Y debido a que la otra desigualdad es trivial, se concluye (1.11). ■

Vale la pena detenerse un momento en este punto, dado que cada vez que se trabaja con la Φ variación se deja de cumplir un patrón en las funciones de variación acotada: la clase definida es un espacio vectorial. Se comienza ahora a establecer las condiciones bajo las cuales la nueva clase definida es un espacio vectorial, y veremos que juega un papel fundamental la condición Δ_2 que satisface la Φ considerada. Sin embargo, dado que este no es el caso general, se implementa otra forma de obtener un espacio vectorial que preserve las condiciones de las clases ya conocidas de espacios de funciones de variación acotada; por esta razón se recurre al teorema 1.2, que nos permitirá construir un espacio normado a partir de la clase estudiada.

El conjunto de funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ que tienen Φ-variación finita en el sentido de Wiener en el intervalo $[a,b]$ se denota por $V_\Phi^W[a,b]$, es decir

$$V_\Phi^W[a,b] := \left\{u : [a,b] \to \mathbb{R} : V_\Phi^W(u,[a,b]) < +\infty\right\}.$$

Podemos considerar el funcional $V_\Phi^W(\cdot,[a,b]) : V_\Phi^W[a,b] \to \mathbb{R}$ definido por $u \longmapsto V_\Phi^W(u,[a,b])$, el cual es convexo y simétrico, permitiéndonos demostrar que $V_\Phi^W[a,b]$ es un conjunto convexo y simétrico, el espacio lineal generado por él es

$$BV_\Phi^W[a,b] := \left\{u : [a,b] \to \mathbb{R} : V_\Phi^W(cu,[a,b]) < +\infty \,\text{para algún}\, c > 0\right\}. \tag{1.12}$$

Es usual definir sobre $BV_\Phi^W[a,b]$ una norma, haciendo uso del funcional de Minkowski, a saber,

$$\|u\|_{BV_\Phi^W[a,b]} := \|u\|_\infty + \text{ínf}\left\{c > 0 :\, V_\Phi^W\left(\frac{u}{c},[a,b]\right) \le 1\right\},$$

donde $\|u\|_\infty$ denota la norma del supremo de u.
Presentamos el siguiente teorema sin demostración, y la misma podrá ser encontrada en [11].

Teorema 1.9. *Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado no degenerado y $\Phi \in \mathcal{N}$.*

(i) Para $f \in BV_\Phi^W[a,b]$, $\|f\|_{BV_\Phi^W[a,b]} = 0$ si y sólo si f es constante.

(ii) Para cualquier función no constante $f \in BV_\Phi^W[a,b]$,

$$V_\Phi^W\left(\frac{f}{\|f\|_{BV_\Phi^W[a,b]}},[a,b]\right) \le 1.$$

En particular, para constantes $c,d \in [a,b]$ se cumple que

$$|f(d) - f(c)| \le \Phi^{-1}(1)\,\text{ínf}\left\{c > 0 :\, V_\Phi^W\left(\frac{u}{c},[a,b]\right) \le 1\right\}.$$

(iii) $(BV_\Phi^W[a,b], \|\cdot\|_{BV_\Phi^W[a,b]})$ es un espacio de Banach.

§Φ-Variación en el Sentido de Riesz

La noción de p-variación acotada presentada por Riesz fue generalizada en 1953 por Medveded (ver [17]), definiendo una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ que tiene **Φ-variación acotada en el intervalo** $[a,b]$ **en el sentido de Riesz**, si la expresión

$$V_\Phi^R(u) = V_\Phi^R(u;[a,b]) := \sup_\xi \sum_{i=1}^{m} \Phi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right) |t_i - t_{i-1}| \tag{1.13}$$

es finita, donde Φ es una $N-$función y el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\xi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ del intervalo $[a,b]$.
$V_\Phi^R(u;[a,b])$ se denomina **Φ-variación en el sentido de Riesz** de la función u en el intervalo $[a,b]$ y la clase de estas funciones es denotada por $V_\Phi^R[a,b]$.
Entre los ejemplos de funciones que pertenecen a esta clase se encuentran las funciones constantes y las funciones Lipschitz.
Algunas de las propiedades de las funciones de Φ-variación acotada en el sentido de Riesz, se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 1.10 ([7])**.** *Sea* $\Phi \in \mathcal{N}$ *y* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$*, entonces:*

(a) $V_\Phi^R(u;[a,b]) = 0$ *si y sólo si* u *es constante.*

(b) Si $V_\Phi^R(u;[a,b]) < +\infty$ *entonces* u *es acotada en* $[a,b]$.

(c) Si $[x,y] \subseteq [t,s] \subseteq [a,b]$ *se tiene que* $V_\Phi^R(u;[x,y]) \leq V_\Phi^R(u;[t,s])$.

(d) Toda función de Φ *variación acotada en el sentido de Riesz es Absolutamente continua.*

Proposición 1.11. *La clase* $V_\Phi^R[a,b]$ *es un espacio vectorial si y sólo si,* Φ *satisface la condición* Δ_2.

La clase $V_\Phi^R[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo, luego el espacio generado por esta clase es

$$\langle V_\Phi^R[a,b]\rangle = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} / \exists \lambda > 0; V_\Phi^R(\lambda u) < \infty\} \tag{1.14}$$

el cual será denotado por $RV_\Phi[a,b]$ y denominado **espacio de las funciones de Φ-variación acotada en el sentido de Riesz**.

Debido a la convexidad de la función Φ, el subconjunto Λ de $RV_\Phi[a,b]$ definido por:

$$\Lambda = \left\{u : [a,b] \to \mathbb{R} / V_\Phi^R(u) \leq 1\right\}$$

es absorbente y balanceado; y así el funcional de Minkowski asociado a esta clase es una seminorma.

Por tanto $RV_\Phi[a,b]$ tiene estructura de espacio de Banach (ver [19]) con la norma

$$\|u\|_\Phi^R := |u(a)| + \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : V_\Phi^R(u/\varepsilon) \leq 1\}, \quad u \in RV_\Phi[a,b] \tag{1.15}$$

Además se tienen la siguientes estimaciones:

Lema 1.12.

1. *$V_\Phi^R(u/\|u\|_\Phi^R) \leq 1$, si $\|u\|_\Phi^R \neq 0$.*
2. *$c > \|u\|_\Phi^R$ si y sólo si $V_\Phi^R(u/c) \leq 1$.*

Otro resultado que es oportuno mencionar es la generalización del lema de Riesz hecha por Medvedev, la cual enunciaremos a continuación. Estableciendo una relación con las metas propuestas como objetivo de este trabajo, presentamos el teorema tipo Representación de Riesz correspondiente a este espacio, cuya demostración puede consultarse en [7].

Teorema 1.13 (Generalización del lema de Riesz)**.** *Sea $\Phi \in \mathcal{N}$, $u \in RV_\Phi[a,b]$ si y sólo si $u \in AC[a,b]$ y $\int_a^b \Phi(|u'(t)|)dt < \infty$. Además*

$$V_\Phi^R(u,[a,b]) = \int_a^b \Phi(|u'(t)|)dt.$$

Chistyakov (ver [19]) extiende el criterio de Medvedev a funciones de variable real sobre un espacio $\mathbf{X}$ de Banach reflexivo, el cual permite establecer una fórmula integral explícita para la Φ-variación de una aplicación con rango un espacio métrico.

La noción de Φ-variación de una función $u : [a,b] \to \mathbf{X}$ se introduce como sigue: Si $\Phi \in \mathcal{N}$ y $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ es una partición del intervalo $[a,b]$ $(a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b)$, se define

$$V_\Phi(u,\xi) \equiv V_{\Phi,d}(u,\xi) := \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{\|u(t_i), u(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}}\right)(t_i - t_{i-1}) \tag{1.16}$$

y la Φ-variación total de u sobre $[a,b]$ por

$$V_\Phi(u) \equiv V_\Phi(u,[a,b]) := \sup\left\{V_\Phi(u,\xi) : \xi \in \pi([a,b])\right\}. \tag{1.17}$$

El conjunto de todas las aplicaciones de Φ-variación acotada se denota como

$$BV_\Phi([a,b]\,;\mathbf{X}) = \{u : [a,b] \to \mathbf{X} : V_\Phi(u) < \infty\}. \tag{1.18}$$

Además Chistyakov enumera los criterios para las funciones con valores reales que existen en la teoría de las variaciones acotadas e incluye su propio criterio que es para un espacio métrico $\mathbf{X}$.

Capítulo 2

Variación acotada en el plano

§Introducción

Se han dado varias condiciones bajo las cuales una función de dos o más variables independientes se debe llamar de variación acotada, las cuales usualmente están asociadas con los nombres de Vitali, Hardy, Pierpont, Fréchet y Tonelli. La relación entre estas definiciones no está completamente determinada, sin embargo, en este trabajo, hacemos referencia a la variación de funciones de dos variables asociada sólo a dos de estos primeros nombres: Vitali y Hardy, entre las cuales existe una relación trivial. Las personas interesadas en profundizar el estudio de las demás definiciones y las relaciones entre ellas puede consultar [9].

De las definiciones que consideramos en este trabajo, acerca de funciones definidas sobre un rectángulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, se hace necesario elegir una función rectángulo, cuya elección y uso en la definición de una función de variación acotada ha tomado diferentes formas, dependiendo del objetivo del investigador.

Si $[\mathbf{c}, \mathbf{d}] := [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ es un rectángulo entonces una posible función rectángulo es $F([\mathbf{c}, \mathbf{d}]) := |f(d_1, d_2) - f(c_1, c_2)|$, una diferencia de primer orden, la cual está estrechamente asociada a la función oscilación de f sobre el intervalo $[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$:

$$\omega(f; [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) := \sup \{|f(x_1', x_2') - f(x_1'', x_2'')|\} \qquad \text{para}(x_1', x_2') \text{ y } (x_1'', x_2'') \text{ sobre } [\mathbf{c}, \mathbf{d}].$$

Una segunda posibilidad es la diferencia doble que involucra todos los cuatro vértices de $[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$,

$$F([\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = |f(c_1, c_2) - f(d_1, c_2) + f(d_1, d_2) - f(c_1, d_2)|.$$

Ya que esta segunda expresión está más estrechamente relacionada con la integración de dos variables, es por la cual muchos autores se limitan la discusión de funciones de variación acotada basada en esta última definición.
La definición de funciones, de dos variables, de variación acotada basada en esta definición se debe a Vitali, cuya definición es modificada más tarde por Hardy y Krause.
En nuestro trabajo, se dedica a estudiar una variación o generalización de estas definiciones, que es llamada Φ-variación en el sentido de Riesz para lo cual se hace necesaria una introducción de las demás definiciones.

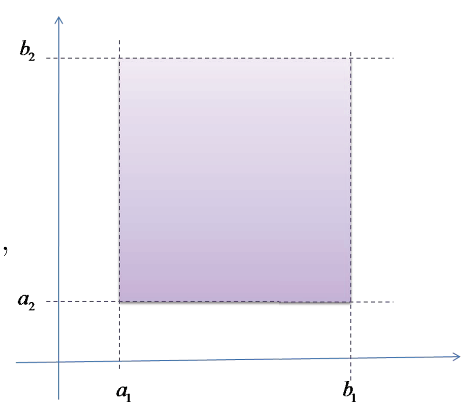
§Notación

La notación que empleamos en este trabajo, es utilizada en trabajos clásicos de variación acotada, como [3, 12, 28].
$\mathbb{N}$, como es usual, denota el conjunto de los enteros no negativos y un punto de $\mathbb{R}^2$ es denotado por $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Dados dos puntos en el plano, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, llamaremos **rectángulo**, o **intervalo 2-dimensional**, en $\mathbb{R}^2$ al conjunto

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, \; \text{y} \; a_2 \leq y \leq b_2\},$$

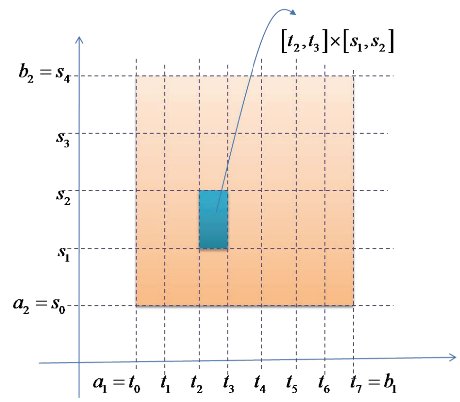
y siempre supondremos un rectángulo no degenerado, es decir, $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$.



Definición 2.1. *Dado un rectángulo* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *(con* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *como antes) y dos particiones* $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ *y* $\eta = \{s_j\}_{j=0}^n$ *de* $[a_1, b_1]$ *y* $[a_2, b_2]$ *respectivamente, como en la definición 1.5,* $\xi \times \eta$ *es llamada **partición tipo malla** de* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. *Y al conjunto de todas las particiones de la forma* $\xi \times \eta$ *se le denotará por* $\pi[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Cada rectángulo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ se divide en subrectángulos los cuales están definidos por

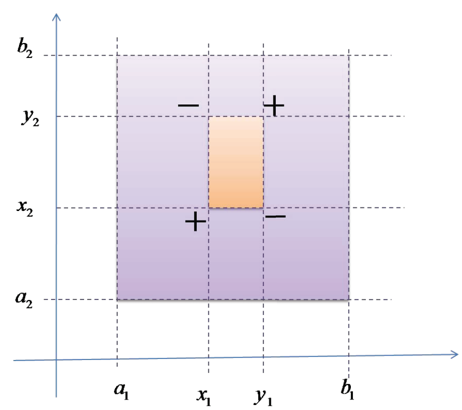
$$I_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j],$$
$$i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n,$$



Definición 2.2 (Diferencia de Vitali)**.** *Si* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *es un rectángulo y* $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ *y* $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *en* $\mathbb{R}^2$ *se define la* ***diferencia mixta*** *o* ***diferencia de Vitali*** *de* f *sobre el rectángulo* $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ *por*

$$\Delta_{(11)}(f, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]) := f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2) - f(x_1, y_2) + f(y_1, y_2). \tag{2.1}$$

Note que esta función rectángulo forma su imagen como una suma aritmética de los valores de f en los vértices del rectángulo, en dicha suma, los valores de f en los vértices que se encuentran en una misma diagonal le asigna signos iguales.



Ahora bien, si f es vista como una función de una variable, por ejemplo manteniendo fija la segunda, podemos calcular la diferencia de $f(\cdot, y_2)$ sobre el intervalo $[x_1, y_1]$:

$$\Delta(f(\cdot, y_2), [x_1, y_1]) = f(x_1, y_2) - f(y_1, y_2).$$

De forma similar, podemos calcular la diferencia de $f(\cdot, x_2)$ sobre el intervalo $[x_1, y_1]$:

$$\Delta(f(\cdot, x_2), [x_1, y_1]) = f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta_{(11)}(f, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]) &= f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2) - f(x_1, y_2) + f(y_1, y_2) \\ &= \Delta(f(\cdot, x_2), [x_1, y_1]) - \Delta(f(\cdot, y_2), [x_1, y_1]). \end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que se obtiene la misma igualdad si mantenemos fija la primera variable.

Por otra parte, note que si $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ es un rectángulo, $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ y ξ y η son como en la definición 2.1 la diferencia de Vitali en cada sub-rectángulo dado por la partición, viene dada por

$$\Delta_{(11)}(f, I_{ij}) := f(t_{i-1}, s_{j-1}) - f(t_i, s_{j-1}) - f(t_{i-1}, s_j) + f(t_i, s_j). \tag{2.2}$$

Definición 2.3 (Vitali)**.** *La función $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ se dice de **variación acotada, en el sentido de Vitali**, si*

$$\sup \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\Delta_{(11)}(f, I_{ij})| < +\infty, \tag{2.3}$$

donde I_{ij} son los subrectángulos originados por la partición y el supremo es tomado sobre todas las particiones tipo malla de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Ejemplo 2.1. *Sea $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) := x + y$ y ξ, η particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente. Entonces*

$$|\Delta_{(11)}(f, I_{ij})| := |f(t_{i-1}, s_{j-1}) - f(t_i, s_{j-1}) - f(t_{i-1}, s_j) + f(t_i, s_j)| = 0$$

para todo i, j, en consecuencia, $\sup\limits_{\xi \times \eta} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} |\Delta_{(11)}(f, I_{ij})| = 0.$

Definición 2.4 (Hardy-Krause)**.** *Sean $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$. Se definen:*

*(i) La **variación de f en la primera variable** como*

$$V_{10}(f(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) := \sup_{\xi \in \pi[a_1, b_1]} V_{10}(f(\cdot, a_2), [a_1, b_1], \xi), \tag{2.4}$$

donde

$$V_{10}(f(\cdot, a_2), [a_1, b_1], \xi) := \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i-1}, a_2) - f(t_i, a_2)|$$

(ii) La ***variación de*** f ***en la segunda variable*** *como*

$$V_{01}(f(a_1,\cdot),[a_2,b_2]) := \sup_{\eta\in\pi[a_2,b_2]} V_{01}(f(a_1,\cdot),[a_2,b_2],\eta), \tag{2.5}$$

donde

$$V_{01}(f(a_1,\cdot),[a_2,b_2],\eta) = \sum_{j=1}^{m} |f(a_1,s_{j-1}) - f(a_1,s_j)|$$

(iii) La ***variación bidimensional o tipo Vitali*** *de* f *por*

$$V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}]) := \sup_{\xi\times\eta\in\pi[\mathbf{a},\mathbf{b}]} V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}],\xi\times\eta) \tag{2.6}$$

donde

$$V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}],\xi\times\eta) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\Delta_{(11)}(f,I_{ij})|$$

(iv) La ***variación total*** *de* $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{R}$ *por*

$$TV(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}]) := V_{10}(f(\cdot,a_2),[a_1,b_1]) + V_{01}(f(a_1,\cdot),[a_2,b_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}]).$$

Se dice que la función f *es de* ***variación acotada en el sentido Hardy-Vitali*** *si* $TV(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}]) < +\infty$.

El conjunto de todas las funciones cuya variación acotada en el sentido Hardy-Vitali es finita se denota por $BV([\mathbf{a},\mathbf{b}])$*; es decir,*

$$BV([\mathbf{a},\mathbf{b}]) := \{f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{R} \,:\, TV(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}]) < +\infty\}.$$

El cual es un espacio de Banach, dotado de la norma

$$\|f\| := |f(\mathbf{a})| + TV(f,[\mathbf{a},\mathbf{b}]), \qquad f\in BV([\mathbf{a},\mathbf{b}]).$$

Ejemplo 2.2. *Consideremos la misma función del ejemplo 2.1,* $f:[\mathbf{0},\mathbf{1}]\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) := x+y$ *y* ξ,η *particiones de* $[0,1]$ *y* $[0,1]$ *respectivamente. Entonces*

$$|\Delta_{(11)}(f,I_{ij})| := |f(t_{i-1},s_{j-1}) - f(t_i,s_{j-1}) - f(t_{i-1},s_j) + f(t_i,s_j)| = 0$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n}|f(t_{i-1},0)-f(t_i,0)| = \sum_{i=1}^{n}|t_{i-1}+0-t_i-0| = \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1}) = 1-0,$$

en consecuencia

$$V_{10}(f(\cdot,0),[0,1]) := 1-0.$$

Y de forma similar se obtiene que

$$V_{01}(f(0,\cdot),[0,1]) = 1-0.$$

Así, $TV(f,[\mathbf{0},\mathbf{1}]) = 1-0+1-0 = 2.$

Como en el caso de funciones de una variable, veamos las propiedades que se cumplen para esta variación tipo Hardy-Vitali. Entre las principales propiedades de la variación doble se encuentra la aditividad en el segundo argumento, esto es, para toda partición $\xi\times\eta$ del rectángulo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, con rectángulos no degenerados $\{I_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$ se tiene que

$$V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}]) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}V_{11}(f(\cdot,\cdot),I_{ij}).$$

Lema 2.1. *Sea* $f:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{R}$ *una función y* $a_1<x_1<b_1$ *y* $a_2<x_2<b_2$, *entonces*

$$V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}]) = V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[a_2,b_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[x_1,b_1]\times[a_2,b_2]) \quad (2.7)$$

y

$$V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}]) = V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,b_1]\times[a_2,x_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,b_1]\times[x_2,b_2]). \quad (2.8)$$

Demostración. Sean $\xi=\{t_i\}_{i=1}^{n}$, $\eta=\{s_j\}_{j=1}^{m}$ particiones de los intervalos $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente, entonces, $\xi\cup\{x_1\}$ y $\eta\cup\{x_2\}$ también son particiones de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente.
Luego,

$$\begin{aligned}
& V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[a_2,b_2],\xi\times\eta) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[x_1,b_1]\times[a_2,b_2],\xi\times\eta) \\
= & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Delta_{(11)}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[a_2,b_2]) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Delta_{(11)}(f(\cdot,\cdot),[x_1,b_1]\times[a_2,b_2]) \\
= & V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,b_1]\times[a_2,b_2],\xi\times\eta) \\
\leq & V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]).
\end{aligned}$$

Así, tomando supremos sobre todas las particiones $\xi \in \pi[a_1, b_1]$ y $\eta \in \pi[a_2, b_2]$ se obtiene que

$$\begin{aligned} & V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[a_2,b_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[x_1,b_1]\times[a_2,b_2]) \\ \leq\ & V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para obtener la otra desigualdad, para cualquier partición $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n \in \pi[a_1, b_1]$, entonces $x_1 \in [t_{r-1}, t_r]$, para algún $0 \leq r \leq n$. Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} |\Delta_{(11)}(f, I_{rj})| &= \sum_{j=1}^{m} |f(t_{r-1}, s_{j-1}) - f(t_r, s_{j-1}) + f(t_r, s_j) - f(t_{r-1}, s_j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} |f(t_{r-1}, s_{j-1}) - f(x_1, s_{j-1}) + f(x_1, s_j) - f(t_{r-1}, s_j)| \\ &+ \sum_{j=1}^{m} |f(x_1, s_{j-1}) - f(x_1, s_j) - f(t_r, s_{j-1}) + f(t_r, s_j)|. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\Delta_{(11)}(f, I_{ij})| &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |f(t_{i-1}, s_{j-1}) - f(x_1, s_{j-1}) + f(x_1, s_j) - f(t_{i-1}, s_j)| \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |f(x_1, s_{j-1}) - f(x_1, s_j) - f(t_i, s_{j-1}) + f(t_i, s_j)| \\ &\leq V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[a_2,b_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[x_1,b_1]\times[a_2,b_2]), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} & V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]) \\ \leq\ & V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[a_2,b_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[x_1,b_1]\times[a_2,b_2]). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Luego, de (2.9) y (2.10) se obtiene (2.7) y procediendo de forma similar se obtiene (2.8).
■

Teorema 2.2. *Si $f \in BV([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ entonces*

$$|f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \leq TV(f, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \leq TV(f, [\mathbf{a}, \mathbf{y}]) - TV(f, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]).$$

Demostración. Para demostrar la primera desigualdad, consideramos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ suponiendo que $x_i < y_i$ para cada $i = 1, 2$; considerando las particiones $\xi = \{a_1, x_1, y_1, b_1\}$, $\eta = \{a_2, x_2, y_2, b_2\}$ de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2)| &\leq |f(y_1, y_2) - f(y_1, x_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, x_2)| \\
&+ |f(y_1, x_2) - f(x_1, x_2)| + |f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)| \\
&\leq V_{11}(f, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]) + V_{10}(f(\cdot, x_2), [x_1, y_1]) + V_{01}(f(x_1, \cdot), [x_2, y_2]) \\
&= TV(f, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]).
\end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad, consideremos $x_1 < s < t \leq y_1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(t, x_2) - f(s, x_2)| &= |f(t, x_2) - f(s, x_2) + f(t, a_2) - f(s, a_2) - f(t, a_2) + f(s, a_2)| \\
&\leq |f(t, a_2) - f(s, a_2)| + |f(t, x_2) - f(s, x_2) - f(t, a_2) + f(s, a_2)|
\end{aligned}$$

Luego, si $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ es una partición del intervalo $[x_1, y_1]$, haciendo $s = t_{i-1}$ y $t = t_i$ en la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}
|f(t_i, x_2) - f(t_{i-1}, x_2)| &\leq |f(t_i, a_2) - f(t_{i-1}, a_2)| \\
&+ |f(t_i, x_2) - f(t_{i-1}, x_2) - f(t_i, a_2) + f(t_{i-1}, a_2)|,
\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n |f(t_i, x_2) - f(t_{i-1}, x_2)| \\
\leq\ &\sum_{i=1}^n |f(t_i, a_2) - f(t_{i-1}, a_2)| + \sum_{i=1}^n |f(t_i, x_2) - f(t_{i-1}, x_2) - f(t_i, a_2) + f(t_{i-1}, a_2)| \\
\leq\ &V_{10}(f(\cdot, a_2), [x_1, y_1]) + V_{11}(f(\cdot, \cdot), [x_1, y_1] \times [a_2, x_2]),
\end{aligned}$$

luego, dado que esta desigualdad se cumple para toda partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ de $[x_1, y_1]$ se tiene que

$$V_{10}(f(\cdot, x_2), [x_1, y_1]) \leq V_{10}(f(\cdot, a_2), [x_1, y_1]) + V_{11}(f(\cdot, \cdot), [x_1, y_1] \times [a_2, x_2]). \tag{2.11}$$

De forma similar se obtiene que

$$V_{01}(f(x_1, \cdot), [x_2, y_2]) \leq V_{01}(f(a_1, \cdot), [x_2, y_2]) + V_{11}(f(\cdot, \cdot), [a_1, x_1] \times [x_2, y_2]). \tag{2.12}$$

Haciendo uso de (2.11), (2.12) y la propiedad aditiva del lema 2.1 se tiene que

$$\begin{aligned} V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{y}]) &= V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{x}]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{x},\mathbf{y}]) \\ &+ V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[x_2,y_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[x_1,y_1]\times[a_2,x_2]), \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} TV(f,[\mathbf{x},\mathbf{y}]) &= V_{10}(f(\cdot,x_2),[x_1,y_1]) + V_{01}(f(x_1,\cdot),[x_2,y_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{x},\mathbf{y}]) \\ &\leq V_{10}(f(\cdot,a_2),[x_1,y_1]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[x_1,y_1]\times[a_2,x_2]) \\ &+ V_{01}(f(a_1,\cdot),[x_2,y_2]) + V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[x_2,y_2]) \\ &+ V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{y}]) - V_{11}(f(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{x}]) \\ &- V_{11}(f(\cdot,\cdot),[a_1,x_1]\times[x_2,y_2]) - V_{11}(f(\cdot,\cdot),[x_1,y_1]\times[a_2,x_2]) \\ &= TV(f,[\mathbf{a},\mathbf{y}]) - TV(f,[\mathbf{a},\mathbf{x}]). \end{aligned} \tag{2.13}$$

■

§2.1. Φ-variación en el sentido de Riesz

A partir de la definición de la Φ-variación dada en (1.13) y la definición de variación en el plano dada en 2.4 introducimos la noción de Φ-variación acotada en el sentido de Riesz para funciones definidas en el rectángulo $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^2$. Esta noción es estudiada en la tesis [2], sin embargo hemos abordado de una forma diferente algunas de las demostraciones, por esta razón el objetivo central de esta sección es presentar los mismos resultados con los cambios realizados.
Como en el trabajo citado, utilizaremos la siguiente notación, que facilita la escritura.

Para una partición $\xi \times \eta$ de $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ se definen, para una función $u : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbb{R}$, las siguientes variaciones:

$$\begin{aligned} \Delta_{10}u(t_i,s_j) &= u(t_i,s_j) - u(t_{i-1},s_j) \\ \Delta_{01}u(t_i,s_j) &= u(t_i,s_j) - u(t_i,s_{j-1}) \\ \Delta_{11}u(t_i,s_j) &= u(t_{i-1},s_{j-1}) + u(t_i,s_j) - u(t_{i-1},s_j) - u(t_i,s_{j-1}). \end{aligned}$$

Definición 2.5. *Sea $u : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ una función y $\Phi \in \mathcal{N}$, decimos que* *a.-* *La* Φ-***Variación en el sentido de Riesz*** *de la función* $u(\cdot, x_2)$ *en* $[a_1, b_1] \times \{x_2\}$ *es definida por:*

$$V_{\Phi}^{R}(u(\cdot, x_2), [a_1, b_1]) := \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{(t_i - t_{i-1})}\right](t_i - t_{i-1}) \tag{2.14}$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones ξ *del intervalo* $[a_1, b_1]$.

b.- *De manera similar si* $x_1 \in [a_1, b_1]$ *está fijo, para la función* $u(x_1, \cdot) : \{x_1\} \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ *se define la* Φ-***Variación en el sentido de Riesz*** *por:*

$$V_{\Phi}^{R}(u(x_1, \cdot), [a_2, b_2]) := \sup_{\eta} \sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{01} u(x_1, s_j)|}{(s_j - s_{j-1})}\right](s_j - s_{j-1}) \tag{2.15}$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones η *del intervalo* $[a_2, b_2]$.

c.- *La* Φ-***Variación bidimensional en el sentido de Riesz*** *es:*

$$V_{\Phi}^{R}(u) := \sup_{\xi \times \eta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j}\right] \Delta t_i \Delta s_j \tag{2.16}$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones $\xi \times \eta$ *del rectángulo* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^2$.

d.- *La* Φ-***Variación Total Acotada en el sentido de Riesz*** *de* u, *denotada por* $TV_{\Phi}^{R}(u)$ *se define como:*

$$TV_{\Phi}^{R}(u, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) := V_{\Phi}^{R}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) + V_{\Phi}^{R}(u(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) + V_{\Phi}^{R}(u). \tag{2.17}$$

e.- *El* ***conjunto de todas las funciones*** $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ ***que tienen*** Φ-***variación total acotada en el sentido de Riesz***, *se denota por* $V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$; *esto es,*

$$V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) := \{u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} / \quad TV_{\Phi}^{R}(u) < \infty\}. \tag{2.18}$$

Ejemplo 2.3. *Sean* $c \in \mathbb{R}$ *y* $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ *definida por* $u(x_1, x_2) := c$. *Entonces* u *es una función de* Φ*-variación total acotada en el sentido de Riesz en* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

De hecho, la Φ-variación total en el sentido de Riesz es cero, como se verifica a continuación.

Sea ξ una partición de $[a_1, b_1]$ ($\xi : a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b_1$).

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i &= \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|u(t_i, a_2) - u(t_{i-1}, a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|c-c|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \Phi(0)\Delta t_i \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, $\sup\limits_{\xi} \sum\limits_{i=1}^{m} \Phi\left[\dfrac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i = 0.$
De forma similar se verifica que $\sup\limits_{\eta} \sum\limits_{j=1}^{n} \Phi\left[\dfrac{|\Delta_{01} u(a_1, s_j)|}{\Delta s_j}\right]\Delta s_j = 0.$
Por otra parte, consideremos η una partición del intervalo $[a_2, b_2]$ ($\eta : a_2 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b_2$) y ξ como antes, entonces

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j}\right]\Delta t_i \Delta s_j \\ = \;&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|u(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1})|}{\Delta t_i \Delta s_j}\right]\Delta t_i \Delta s_j \\ = \;&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|c+c-c-c|}{\Delta t_i \Delta s_j}\right]\Delta t_i \Delta s_j \\ = \;&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi(0)\Delta t_i \Delta s_j \\ = \;&0.\end{aligned}$$

Con lo cual se verifica que:

$$TV_{\Phi}^{R}(u, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = V_{\Phi}^{R}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) + V_{\Phi}^{R}(u(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) + V_{\Phi}^{R}(u) = 0.$$

Ejemplo 2.4. *Sea $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ definida por $u(x_1, x_2) := (x_1 + x_2)^2$. Entonces $u \in V_\Phi^R([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$, para cualquier N-función Φ.*

Sea $x_2 \in [a_2, b_2]$ y $\{t_i\}_{i=0}^n \in \pi[a_1, b_1]$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i, x_2)|}{t_i - t_{i-1}}\right] &= \Phi\left[\frac{|(t_i + x_2)^2 - (t_{i-1} + x_2)^2|}{t_i - t_{i-1}}\right] \\
&= \Phi\left[\frac{|t_i^2 + 2t_ix_2 + x_2^2 - t_{i-1}^2 - 2t_{i-1}x_2 - x_2^2|}{t_i - t_{i-1}}\right] \\
&= \Phi\left[\frac{|t_i^2 - t_{i-1}^2 + 2x_2(t_i - t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}}\right] \\
&= \Phi\left[\frac{|(t_i - t_{i-1})(t_i + t_{i-1}) + 2x_2(t_i - t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}}\right] \\
&= \Phi\left[\frac{(t_i - t_{i-1})|t_i + t_{i-1} + 2x_2|}{t_i - t_{i-1}}\right] \\
&= \Phi\left[|t_i + t_{i-1} + 2x_2|\right] \\
&\leq \Phi\left[|t_i| + |t_{i-1}| + 2|x_2|\right] \\
&\leq \Phi\left[2\max\{|a_1|, |b_1|\} + 2\max\{|a_2|, |b_2|\}\right];
\end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i, x_2)|}{t_i - t_{i-1}}\right](t_i - t_{i-1}) \leq \Phi\left[2\max\{|a_1|, |b_1|\} + 2\max\{|a_2|, |b_2|\}\right] \cdot (b_1 - a_1),$$

lo cual implica que

$$V_\Phi^R(u(\cdot, x_2), [a_1, b_1]) \leq \Phi\left[2\max\{|a_1|, |b_1|\} + 2\max\{|a_2|, |b_2|\}\right] \cdot (b_1 - a_1) < \infty.$$

Además, considerando $\{s_j\}_{j=0}^m \in \pi[a_2, b_2]$ y haciendo un cálculo totalmente análogo a la parte anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}
\Phi\left[\frac{|\Delta_{01}u(x_1, s_j)|}{s_j - s_{j-1}}\right] &= \Phi(|2x_1 + s_j + s_{j-1}|) \\
&\leq \Phi\left[2|x_1| + |s_j| + |s_{j-1}|\right] \\
&\leq \Phi\left[2\max\{|a_1|, |b_1|\} + 2\max\{|a_2|, |b_2|\}\right].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{01}u(x_1, s_j)|}{s_j - s_{j-1}}\right](s_j - s_{j-1}) \leq \Phi\left[2\max\{|a_1|, |b_1|\} + 2\max\{|a_2|, |b_2|\}\right] \cdot (b_2 - a_2).$$

Y

$$V_\Phi^R(u(x_1,\cdot),[a_2,b_2]) \leq \Phi\left[2\max\{|a_1|,|b_1|\}+2\max\{|a_2|,|b_2|\}\right]\cdot(b_2-a_2).$$

Consideremos ahora $\{t_i\}_{i=0}^n \in \pi[a_1,b_1]$ y $\{s_j\}_{j=0}^m \in \pi[a_2,b_2]$, entonces

$$\begin{aligned}
&\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}\right]\\
= \quad &\Phi\left[\frac{|(t_{i-1}+s_{j-1})^2+(t_i+s_j)^2-(t_{i-1}+s_j)^2-(t_i+s_{j-1})^2|}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}\right]\\
= \quad &\Phi\left[\frac{|2t_{i-1}s_{j-1}+2t_is_j-2t_{i-1}s_j-2t_is_{j-1}|}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}\right]\\
= \quad &\Phi\left[\frac{2|t_i(s_j-s_{j-1})-t_{i-1}(s_j-s_{j-1})|}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}\right]\\
= \quad &\Phi\left[\frac{2|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}\right]\\
= \quad &\Phi(2).
\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}\right]\cdot(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1}) \leq \Phi(2)A([\mathbf{a},\mathbf{b}]),$$

donde $A([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ es el área del rectángulo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Luego, $V_\Phi^R(u)\leq\Phi(2)\cdot A([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ es finito. Por lo tanto $u\in V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

Proposición 2.1. *Sean $\xi: a_1=t_0<t_1<\cdots<t_m=b_1$ y $\eta: a_2=s_0<s_1<\cdots<s_n=b_2$ particiones de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente, si $u:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{R}$ es una función que satisface la siguientes condiciones:*

(i) $|\Delta_{10}u(t_i,y)|\leq L_1\Delta t_i$,

(ii) $|\Delta_{01}u(x,s_j)|\leq L_2\Delta s_j$ *y*

(iii) $|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|\leq L_3\Delta t_i\Delta s_j$;

donde L_1,L_2,L_3 son constantes positivas.
Entonces $u\in V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
TV_{\Phi}^{R}(u) &= \sup_{\xi}\sum_{i=1}^{m}\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i+\sup_{\eta}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\Delta_{01}u(x_1,s_j)|}{\Delta s_j}\right]\Delta s_j\\
&\quad+\sup_{\xi\times\eta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j\\
&\leq \sup_{\xi}\sum_{i=1}^{m}\Phi\left[\frac{L_1\Delta t_i}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i+\sup_{\eta}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{L_2\Delta s_j}{\Delta s_j}\right]\Delta s_j\\
&\quad+\sup_{\xi\times\eta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{L_3\Delta t_i\Delta s_j}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j\\
&= \Phi(L_1)\sup_{\xi}\sum_{i=1}^{m}\Delta t_i+\Phi(L_2)\sup_{\eta}\sum_{j=1}^{n}\Delta s_j\\
&\quad+\Phi(L_3)\sup_{\xi\times\eta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta t_i\Delta s_j\\
&\leq \Phi(L_1)(b_1-a_1)+\Phi(L_2)(b_2-a_2)+\Phi(L_3)A([\mathbf{a},\mathbf{b}])<\infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $u\in V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$. ■

Ahora verificaremos algunas propiedades conducentes a construir el espacio vectorial generado por la clase de las funciones de Φ-variación total acotada.

§2.2. Propiedades de las Funciones de Variación Acotada en el Sentido de Riesz

En esta sección estudiaremos algunas de las propiedades de la clase de funciones de Φ-variación acotada en el sentido de Riesz definida en un rectángulo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.3. *Sean Φ una N-función y $u:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{R}$, entonces:*

a.- $TV_{\Phi}^{R}(u)\geq 0$; para toda función $u\in V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

b.- La función $TV_{\Phi}^{R}(\cdot):V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a},\mathbf{b}])\to\mathbb{R}$ es par.

c.- Si $u\in V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ entonces u es acotada en $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

d.- $TV_{\Phi}^{R}(u) = 0$ *si y sólo si* u *es constante.*

e.- $TV_{\Phi}^{R}(\cdot)$ *es convexo.*

f.- $V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \subset BV([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$.

Demostración.

(a) Se sigue de forma inmediata de la definición, dado que $TV_{\Phi}^{R}(u)$ se define como supremo de expresiones no negativas.

(b) Se sigue de la homogeneidad positiva del valor absoluto.

(c) Comencemos en primer lugar la demostración para funciones de una variable. En efecto, sean $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $u \in V_{\Phi}^{R}([a, b])$, $\xi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ una partición de $[a, b]$, entonces

$$\sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{(t_i - t_{i-1})}\right](t_i - t_{i-1}) < \infty.$$

Supongamos que u no es acotada en $[a, b]$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos elegir $t_m \in [a, b]$ de manera que

$$|u(t_m) - u(a)| > m,$$

esto es, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$|u(t_m) - u(a)| > m. \tag{2.19}$$

Consideremos los casos cuando $t_m - a \leq 1$ y $t_m - a > 1$.

Si $t_m - a \leq 1$**,** se sigue de (2.19)

$$\begin{aligned}
\Phi(m) < \Phi(|u(t_m) - u(a)|) &= \Phi\left[\frac{|u(t_m) - u(a)|}{(t_m - a)}(t_m - a)\right] \\
&\leq \Phi\left[\frac{|u(t_m) - u(a)|}{(t_m - a)}\right](t_m - a) \\
&\leq V_{\Phi}^{R}(u, [a, b]).
\end{aligned}$$

Así, $\Phi(m) < V_{\Phi}^{R}(u, [a, b])$.

Si $t_m - a > 1$**,** nuevamente de (2.19) se sigue que:

$$\begin{aligned}\Phi\left[\frac{m}{(b-a)}\right] \leq \Phi\left[\frac{m}{(t_m-a)}\right] &< \Phi\left[\frac{|u(t_m)-u(a)|}{(t_m-a)}\right] \\ &< \Phi\left[\frac{|u(t_m)-u(a)|}{(t_m-a)}\right](t_m-a) \\ &\leq V_\Phi^R(u,[a,b]).\end{aligned}$$

Luego, $\Phi\left[\dfrac{m}{(b-a)}\right] < V_\Phi^R(u,[a,b])$.

En ambos casos si hacemos que $m \to \infty$, el lado izquierdo es infinito por ser Φ una N-función (Ver condición 2 de la definición 1.9) mientras que el lado derecho es finito, lo cual es una contradicción.

De esta contradicción queda demostrado que el resultado se cumple en funciones de una variable.

Luego, si $u : [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \to \mathbb{R}$, se sigue que para $u(x,a_2) : [a_1,b_1] \to \mathbb{R}$ y $u(a_1,y) : [a_2,b_2] \to \mathbb{R}$ existen $M_1 > 0$ y $M_2 > 0$ tales que

$$|u(x,a_2)| \leq M_2, \quad x \in [a_1,b_1] \qquad \text{y} \qquad |u(a_1,y)| \leq M_1 \quad y \in [a_2,b_2].$$

Ahora supongamos que $u : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ está en $V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ pero que u no es acotada en $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, entonces para $m \in \mathbb{N}$ existe $(x_m,y_m) \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ tal que

$$|u(a_1,a_2)+u(x_m,y_m)| > m$$

$$\begin{aligned}&|u(a_1,a_2)+u(x_m,y_m)-u(x_m,a_2)-u(a_1,y_m)| \\ \geq\ &|u(a_1,a_2)+u(x_m,y_m)|-|u(x_m,a_2)|-|u(a_1,y_m)| \\ \geq\ &m-M_2-M_1.\end{aligned}$$

Luego nos queda que

$$|u(a_1,a_2)+u(x_m,y_m)-u(x_m,a_2)-u(a_1,y_m)| \geq m-M_2-M_1. \tag{2.20}$$

Como en el caso de una variable, consideramos dos casos, ahora $(x_m-a_1)(y_m-a_2) \leq 1$ y $(x_m-a_1)(y_m-a_2) > 1$.

Si $(x_m - a_1)(y_m - a_2) \leq 1$**,** hacemos uso de (2.20)

$$\begin{aligned}
& \Phi[m - M_2 - M_1] \\
\leq\ & \Phi[|u(a_1,a_2) + u(x_m,y_m) - u(x_m,a_2) - u(a_1,y_m)|] \\
=\ & \Phi\left[\frac{|u(a_1,a_2) + u(x_m,y_m) - u(x_m,a_2) - u(a_1,y_m)|}{(x_m - a_1)(y_m - a_2)}(x_m - a_1)(y_m - a_2)\right] \\
\leq\ & \Phi\left[\frac{|u(a_1,a_2) + u(x_m,y_m) - u(x_m,a_2) - u(a_1,y_m)|}{(x_m - a_1)(y_m - a_2)}\right](x_m - a_1)(y_m - a_2) \\
\leq\ & V_\Phi^R(u,[\mathbf{a},\mathbf{b}]).
\end{aligned}$$

De esto obtenemos que $\Phi[m - M_2 - M_1] \leq V_\Phi^R(u,[\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

Si $(x_m - a_1)(y_m - a_2) > 1$**,** de (2.20)

$$\begin{aligned}
& \Phi\left[\frac{m - M_2 - M_1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right] \\
\leq\ & \Phi\left[\frac{m - M_2 - M_1}{(x_m - a_1)(y_m - a_2)}\right] \\
\leq\ & \Phi\left[\frac{|u(a_1,a_2) + u(x_m,y_m) - u(x_m,a_2) - u(a_1,y_m)|}{(x_m - a_1)(y_m - a_2)}\right] \\
\leq\ & \Phi\left[\frac{|u(a_1,a_2) + u(x_m,y_m) - u(x_m,a_2) - u(a_1,y_m)|}{(x_m - a_1)(y_m - a_2)}\right](x_m - a_1)(y_m - a_2) \\
\leq\ & V_\Phi^R(u,[\mathbf{a},\mathbf{b}]).
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que $\Phi\left[\frac{m - M_2 - M_1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right] \leq V_\Phi^R(u,[\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

En ambos casos si hacemos que $m \to \infty$ el lado izquierdo es infinito mientras que el lado derecho es finito y esto es una contradicción.

Por lo tanto, de esta contradicción, se sigue que u debe ser acotada en $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

(d) Supongamos que $TV_\Phi^R(u) = 0$ y dados dos puntos $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$; con $(x_1,x_2) \neq (y_1,y_2)$ demostremos que $u(x_1,x_2) = u(y_1,y_2)$.

Sean ξ y η dos particiones de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente, definidas por

$$\xi : a_1 = t_0 < x_1 < y_1 < t_1 = b_1$$

$$\eta : a_2 = s_0 < x_2 < y_2 < s_1 = b_2$$

Entonces

$$u(a_1, x_2) = u(x_1, x_2) = u(y_1, x_2) = u(b_1, x_2). \tag{2.21}$$

Es decir, la función u es constante en todos los valores de ξ, para x_2 fijo.

Por otra parte,

$$u(y_1, a_2) = u(y_1, x_2) = u(y_1, y_2) = u(y_1, b_2). \tag{2.22}$$

Por lo tanto, de (2.21) y (2.22) tenemos que

$$u(x_1, x_2) = u(y_1, y_2).$$

Así, u es una función constante.

El recíproco es inmediato.

(e) Sean $u, v : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in [0,1]$, tales que $\alpha + \beta = 1$, $\xi : a_1 = t_0 < \cdots < t_m = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < \cdots < s_n = b_2$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$, respectivamente. Tendremos entonces que:

$$\begin{aligned}
& \alpha TV_\Phi^R(u) + \beta TV_\Phi^R(v) \\
= \;& \alpha V_\Phi^R(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) + \alpha V_\Phi^R(u(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) + \alpha V_\Phi^R(u) \\
+ \;& \beta V_\Phi^R(v(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) + \beta V_\Phi^R(v(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) + \beta V_\Phi^R(v) \\
= \;& \alpha \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i}\right] \Delta t_i + \alpha \sup_{\eta} \sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{01} u(a_1, s_j)|}{\Delta s_j}\right] \Delta s_j \\
+ \;& \alpha \sup_{\xi \times \eta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j}\right] \Delta t_i \Delta s_j \\
+ \;& \beta \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta_{10} v(t_i, a_2)|}{\Delta t_i}\right] \Delta t_i + \beta \sup_{\eta} \sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{01} v(a_1, s_j)|}{\Delta s_j}\right] \Delta s_j \\
+ \;& \beta \sup_{\xi \times \eta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{11} v(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j}\right] \Delta t_i \Delta s_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\xi}\sum_{i=1}^{m}\left[\alpha\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}\right]+\beta\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}v(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}\right]\right]\Delta t_i\\
&+ \sup_{\eta}\sum_{j=1}^{n}\left[\alpha\Phi\left[\frac{|\Delta_{01}u(a_1,s_j)|}{\Delta s_j}\right]+\beta\Phi\left[\frac{|\Delta_{01}v(a_1,s_j)|}{\Delta s_j}\right]\right]\Delta s_j\\
&+ \sup_{\xi\times\eta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\alpha\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]+\beta\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\right]\Delta t_i\Delta s_j\\
&\geq \sup_{\xi}\sum_{i=1}^{m}\Phi\left[\alpha\frac{|\Delta_{10}u(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}+\beta\frac{|\Delta_{10}v(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i\\
&+ \sup_{\eta}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\alpha\frac{|\Delta_{01}u(a_1,s_j)|}{\Delta s_j}+\beta\frac{|\Delta_{01}v(a_1,s_j)|}{\Delta s_j}\right]\Delta s_j\\
&+ \sup_{\xi\times\eta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\alpha\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}+\beta\frac{|\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j\\
&\geq \sup_{\xi}\sum_{i=1}^{m}\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}(\alpha u+\beta v)(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i\\
&+ \sup_{\eta}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\Delta_{01}(\alpha u+\beta v)(a_1,s_j)|}{\Delta s_j}\right]\Delta s_j\\
&+ \sup_{\xi\times\eta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}(\alpha u+\beta v)(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j\\
&= V_{\Phi}^{R}(\alpha u+\beta v,[a_1,b_1])+V_{\Phi}^{R}(\alpha u+\beta v,[a_2,b_2])+\alpha V_{\Phi}^{R}(\alpha u+\beta v)\\
&= TV_{\Phi}^{R}(\alpha u+\beta v).
\end{aligned}$$

(f) Sean $u \in V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, $\xi : a_1 = t_0 < \cdots < t_m = b_1$, $\eta : a_2 = s_0 < \cdots < s_n = b_2$ dos particiones de los intervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente y como $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\Phi(t)}{t} = \infty$, para $M = 1$ existe $p_0 \in \mathbb{N}$: $t \geq p_0 \Rightarrow \dfrac{\Phi(t)}{t} > 1$.

$$\sigma_1 := \left\{ i : \left(\frac{|\Delta_{10}u(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}\right) < p_0 \right\}$$

$$\sigma_2 = \left\{ j : \left(\frac{|\Delta_{01}u(a_1,s_j)|}{\Delta s_j}\right) < p_0 \right\}$$

$$\sigma_3 := \left\{ (i,j) : \left(\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right) < p_0 \right\}.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m} |\Delta_{10} u(t_i, a_2)| \\
= & \sum_{i=1}^{m} \frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i} \Delta t_i \\
= & \sum_{i \in \sigma_1} \frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i} \Delta t_i + \sum_{i \notin \sigma_1} \frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i} \Delta t_i \\
< & \sum_{i \in \sigma_1} p_0 \Delta t_i + \sum_{i \notin \sigma_1} \Phi \left(\frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i} \right) \Delta t_i \\
< & \ p_0(b_1 - a_1) + \sum_{i=1}^{m} \Phi \left(\frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i} \right) \Delta t_i \\
\leq & \ p_0(b_1 - a_1) + \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi \left(\frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i} \right) \Delta t_i .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
V_{10}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) \leq p_0(b_1 - a_1) + V_{\Phi}^{R}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) < \infty
$$

lo cual implica que $V_{10}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1])$ es finita. Procediendo de manera similar obtenemos que $V_{01}(u(a_1, \cdot), [a_2, b_2])$ también es finita; sólo falta verificar que $V_{\Phi}^{R}(u, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ es finita; para concluir que la clase $V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \subset BV([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\Delta_{11} u(t_i, s_j)| \\
= & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \Delta t_i \Delta s_j \\
= & \sum_{(i,j) \in \sigma_3} \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \Delta t_i \Delta s_j + \sum_{(i,j) \notin \sigma_3} \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \Delta t_i \Delta s_j \\
< & \sum_{(i,j) \in \sigma_3} p_0 \Delta t_i \Delta s_j + \sum_{(i,j) \notin \sigma_3} \Phi \left(\frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \right) \Delta t_i \Delta s_j \\
\leq & \ p_0 A([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) + \sup_{\xi \times \eta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi \left(\frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \right) \Delta t_i \Delta s_j .
\end{aligned}
$$

Luego,

$$V_{11}(u(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}]) \leq p_0 A([\mathbf{a},\mathbf{b}]) + V_\Phi^R(u) < \infty$$

donde $A([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ es el área del rectángulo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
TV(u) &= V_{10}(u(\cdot,a_2),[a_1,b_1]) + V_{01}(u(a_1,\cdot),[a_2,b_2]) + V_{11}(u(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}]) \\
&\leq p_0(b_1-a_1) + V_\Phi^R(u(\cdot,a_2),[a_1,b_1]) + p_0(b_2-a_2) + V_\Phi^R(u(a_1,\cdot),[a_2,b_2]) \\
&+ p_0 A([\mathbf{a},\mathbf{b}]) + V_\Phi^R(u) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Así, $V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}]) \subset BV([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

Queda así demostrado el teorema. ∎

§2.3. El espacio vectorial $BV_\Phi^R([a,b])$

En el año 1959 J. Musielak y W. Orlicz (ver [18]) demostraron que la clase $V_\Phi^W[a,b]$ es un espacio vectorial si y sólo si la N-función Φ satisface la condición δ_2.
En esta sección generalizamos este resultado a la clase $V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ la cual no necesariamente es un espacio vectorial. En efecto, consideremos la función $u:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{R}$ dada por $u(x,y)=x^2$ $(u\in V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}]))$, $\Phi:[0,+\infty]\to[0,+\infty]$ definida por $\Phi(t)=t(e^t-1)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces para $\xi=\{t_i\}_{i=0}^m\in\pi[a_1,b_1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
V_\Phi^R(\lambda u,[a_1,b_1]) &= \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{|\Delta_{10}(\lambda u)(t_i,a_2)|}{(t_i-t_{i-1})}\right)(t_i-t_{i-1}) \\
&= \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{|\lambda||\Delta_{10}u(t_i,a_2)|}{(t_i-t_{i-1})}\right)(t_i-t_{i-1}) \\
&= \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{|\lambda||t_i^2-t_{i-1}^2|}{(t_i-t_{i-1})}\right)(t_i-t_{i-1}) \\
&= \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi(|\lambda||t_i+t_{i-1}|)(t_i-t_{i-1}) \\
&= \sup_\xi \sum_{i=1}^m [|\lambda||t_i+t_{i-1}|(e^{|\lambda||t_i+t_{i-1}|}-1)](t_i-t_{i-1}) \to \infty,
\end{aligned}$$

cuando $|\lambda| \to \infty$, de donde se sigue que $TV_{\Phi}^{R}(\lambda u) = \infty$. Por lo tanto, $\lambda u \notin V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$. Con la finalidad de saber cuando $V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ es un espacio vectorial, a continuación estableceremos una serie de resultados que nos permitirán generalizar a $V_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$, lo hecho por Musielak para $V_{\Phi}^{W}[a, b]$.

Teorema 2.4. *Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{N}$, entonces existen constantes $k > 0$ y $x_0 \geq 0$ tal que*

$$\Phi_1(x) \leq K\Phi_2(x) \quad \textit{para todo} \quad x \geq x_0,$$

si y sólo si

$$V_{\Phi_2}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \subseteq V_{\Phi_1}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]).$$

Demostración. Supongamos que existen $K > 0$ y $x_0 \geq 0$ como en el enunciado y sea $u \in V_{\Phi_2}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ y sean $\xi : a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b_2$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente. Definamos los conjuntos

$$A_{x_0} = \left\{ i : \frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} < x_0 \right\}$$

$$A'_{x_0} = \left\{ j : \frac{|\Delta_{01} u(x_1, s_j)|}{\Delta s_j} < x_0 \right\}$$

$$A''_{x_0} = \left\{ (i, j) : \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} < x_0 \right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m} \Phi_1 \left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
= & \sum_{i \in A_{x_0}} \Phi_1 \left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i + \sum_{i \notin A_{x_0}} \Phi_1 \left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
\leq & \sum_{i=1}^{m} \Phi_1(x_0) \Delta t_i + \sum_{i=1}^{m} K\Phi_2 \left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
= & \Phi_1(x_0)(b_1 - a_1) + K \sum_{i=1}^{m} \Phi_2 \left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
\leq & \Phi_1(x_0)(b_1 - a_1) + K V_{\Phi_2}^{R}(u, [a_1, b_1]).
\end{aligned}$$

Así, $V^R_{\Phi_1}(u,[a_1,b_1]) \leq \Phi_1(x_0)(b_1-a_1) + KV^R_{\Phi_2}(u,[a_1,b_1]) < +\infty$.

De forma análoga, se verifica que $V^R_{\Phi_1}(u,[a_2,b_2]) \leq \Phi_1(x_0)(b_2-a_2) + KV^R_{\Phi_2}(u,[a_2,b_2]) < +\infty$.

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi_1\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j \\
=&\ \sum\sum_{(i,j)\in A''_{x_0}}\Phi_1\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j + \sum\sum_{(i,j)\notin A''_{x_0}}\Phi_1\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j \\
\leq&\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi_1(x_0)\Delta t_i\Delta s_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}K\Phi_2\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j \\
=&\ \Phi_1(x_0)(b_2-a_2)(b_1-a_1) + K\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi_2\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j \\
\leq&\ \Phi_1(x_0)(b_2-a_2)(b_1-a_1) + KV^R_{\Phi_2}(u).
\end{aligned}
$$

Luego, $V^R_{\Phi_1}(u) \leq \Phi_1(x_0)(b_2-a_2)(b_1-a_1) + KV^R_{\Phi_2}(u) < +\infty$.
Completando la demostración de la primera parte.

Recíprocamente, supongamos que $V^R_{\Phi_2}([\mathbf{a},\mathbf{b}]) \subseteq V^R_{\Phi_1}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ y supongamos por absurdo que para $K=1$ y $x_0>0$, podemos elegir x_1 tal que

$$\Phi_1(x_1) > \Phi_2(x_1) \qquad x_1 > x_0,$$

y procediendo de esta manera podemos elegir una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\Phi_1(x_k) > K\Phi_2(x_k) \qquad x_k > x_{k-1}.$$

Luego, para $u \in V^R_{\Phi_2}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ y cualquier colección finita $\{t_i\}_{i=1}^n \subseteq \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m}\Phi_1\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i > K\sum_{i=1}^{m}\Phi_2\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i.$$

Si hacemos, en esta última desigualdad, que $K\to+\infty$ resulta que

$$\sum_{i=1}^{m}\Phi_1\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i \to +\infty$$

y por lo tanto $V^R_{\Phi_1}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) = +\infty$ y por tanto $TV^R_{\Phi_1}(u) = +\infty$.
Así, $u \in V^R_{\Phi_2}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ pero $u \notin V^R_{\Phi_1}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ lo cual contradice la hipótesis.
De esta contradicción se obtiene el resultado deseado.

■

Teorema 2.5. *Sea Φ una N-función. La clase $V^R_\Phi([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ es un espacio vectorial si y sólo si la función Φ satisface la condición Δ_2.*

Demostración. Supongamos que $V^R_\Phi([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ es un espacio vectorial, entonces para $u \in V^R_\Phi([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ se tiene que $2u \in V^R_\Phi([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ lo cual implica que $u \in V^R_{\Phi_2}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ donde $\Phi_2(t) := \Phi(2t)$.

Así, obtenemos que $V^R_\Phi([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \subseteq V^R_{\Phi_2}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$.

Entonces por el teorema 2.4 existen $t_0 \geq 0$ y $K > 0$ tales que

$$\Phi(2t) = \Phi_2(t) \leq K\Phi(t) \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0.$$

Queda así demostrado que Φ satisface la condición Δ_2.

Recíprocamente, supongamos que Φ satisface la condición Δ_2, esto es, existen constantes $K > 0$ y $t_0 \geq 0$ tales que

$$\Phi(2t) \leq K\Phi(t) \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0.$$

Consideremos $u, v \in V^R_\Phi([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ y $\xi : a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b_2$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$, respectivamente. Definamos los conjuntos

$$E_{t_0} = \left\{ i : 2\left(\frac{|\Delta_{10}u(t_i, x_2)|}{2\Delta t_i} + \frac{|\Delta_{10}v(t_i, x_2)|}{2\Delta t_i} \right) < t_0 \right\}$$

$$E'_{t_0} = \left\{ j : 2\left(\frac{|\Delta_{01}u(x_1, s_j)|}{2\Delta s_j} + \frac{|\Delta_{01}v(x_1, s_j)|}{2\Delta s_j} \right) < t_0 \right\}$$

$$E''_{t_0} = \left\{ (i, j) : 2\left(\frac{|\Delta_{11}u(t_i, s_j)|}{2\Delta t_i \Delta s_j} + \frac{|\Delta_{11}v(t_i, s_j)|}{2\Delta t_i \Delta s_j} \right) < t_0 \right\}.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta_{10}(u+v)(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i \\
\leq \ & \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}+\frac{|\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i \\
= \ & \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[2\left(\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{2\Delta t_i}+\frac{|\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{2\Delta t_i}\right)\right]\Delta t_i \\
= \ & \sum_{i\in E_{t_0}} \Phi\left[2\left(\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{2\Delta t_i}+\frac{|\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{2\Delta t_i}\right)\right]\Delta t_i \\
+ \ & \sum_{i\notin E_{t_0}} \Phi\left[2\left(\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{2\Delta t_i}+\frac{|\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{2\Delta t_i}\right)\right]\Delta t_i \\
\leq \ & \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[t_0\right]\Delta t_i + K\sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{2\Delta t_i}+\frac{|\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{2\Delta t_i}\right]\Delta t_i \\
\leq \ & \Phi(t_0)(b_1-a_1)+\frac{K}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]+\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\right)\Delta t_i \\
= \ & \Phi(t_0)(b_1-a_1)+\frac{K}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i+\sum_{i=1}^{m}\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i\right) \\
\leq \ & \Phi(t_0)(b_1-a_1)+\frac{K}{2}\left(V_\Phi^R(u,[a_1,b_1])+V_\Phi^R(v,[a_1,b_1])\right).
\end{aligned}
$$

Luego, $V_\Phi^R(u+v,[a_1,b_1]) < +\infty$ y de forma análoga se prueba que $V_\Phi^R(u+v,[a_2,b_2]) < +\infty$.

Ahora

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{11}(u+v)(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j \\
\leq \ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}+\frac{|\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j \\
= \ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left[2\left(\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{2\Delta t_i\Delta s_j}+\frac{|\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{2\Delta t_i\Delta s_j}\right)\right]\Delta t_i\Delta s_j \\
= \ & \sum\sum_{(i,j)\in E''_{t_0}} \Phi\left[2\left(\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{2\Delta t_i\Delta s_j}+\frac{|\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{2\Delta t_i\Delta s_j}\right)\right]\Delta t_i\Delta s_j \\
+ \ & \sum\sum_{(i,j)\notin E''_{t_0}} \Phi\left[2\left(\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{2\Delta t_i\Delta s_j}+\frac{|\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{2\Delta t_i\Delta s_j}\right)\right]\Delta t_i\Delta s_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \Phi(t_0)(b_1-a_1)(b_2-a_2) + K\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{2\Delta t_i\Delta s_j}+\frac{|\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{2\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j\\
&\leq \Phi(t_0)(b_1-a_1)(b_2-a_2) + \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]+\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\right)\Delta t_i\Delta s_j\\
&\leq \Phi(t_0)(b_1-a_1)(b_2-a_2) + \frac{K}{2}\left(V_\Phi^R(u)+V_\Phi^R(v)\right).
\end{aligned}
$$

Así, $V_\Phi^R(u+v) < +\infty$. Por lo tanto, $u+v \in V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

Por otro lado, sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

- Si $|\alpha| \leq 1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}(\alpha u)(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i &= \sum_{i=1}^{m}\Phi\left[|\alpha|\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i\\
&\leq |\alpha|\sum_{i=1}^{m}\Phi\left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i\\
&\leq V_\Phi^R(u,[a_1,b_1])
\end{aligned}
$$

  Luego, $V_\Phi^R(\alpha u,[a_1,b_1]) \leq V_\Phi^R(u,[a_1,b_1]) < +\infty$ y de forma similar se prueba que $V_\Phi^R(\alpha u,[a_2,b_2]) \leq V_\Phi^R(u,[a_2,b_2]) < +\infty$. Mientras que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}(\alpha u)(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[|\alpha|\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j\\
&\leq |\alpha|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\Delta t_i\Delta s_j\\
&\leq V_\Phi^R(u)
\end{aligned}
$$

  Por tanto, $V_\Phi^R(\alpha u) \leq V_\Phi^R(u) < +\infty$.

- Si $|\alpha| > 1$, la condición Δ_2 garantiza que existen constantes $k_\alpha > 0$ y $t_0 \geq 0$ de manera que

$$
\Phi(|\alpha| t) \leq K_\alpha \Phi(t) \quad t \geq t_0
$$

  Definamos los siguientes conjuntos

$$
B_{t_0} = \left\{ i : \frac{|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|}{\Delta t_i} < t_0 \right\}
$$

$$B'_{t_0} = \left\{ j : \frac{|\Delta_{01} u(x_1, s_j)|}{\Delta s_j} < t_0 \right\}$$

$$B''_{t_0} = \left\{ (i,j) : \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} < t_0 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m} \Phi \left[\frac{|\Delta_{10}(\alpha u)(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
= & \sum_{i=1}^{m} \Phi \left[|\alpha| \frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
= & \sum_{i \in B_{t_0}} \Phi \left[|\alpha| \frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i + \sum_{i \notin B_{t_0}} \Phi \left[|\alpha| \frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
\leq & \sum_{i \in B_{t_0}} \Phi \left[|\alpha| t_0 \right] \Delta t_i + K_\alpha \sum_{i \notin B_{t_0}} \Phi \left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
\leq & \ \Phi \left[|\alpha| t_0 \right] \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i + k_\alpha \sum_{i=1}^{m} \Phi \left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, x_2)|}{\Delta t_i} \right] \Delta t_i \\
\leq & \ \Phi \left[|\alpha| t_0 \right] (b_1 - a_1) + k_\alpha V_\Phi^R(u, [a_1, b_1]).
\end{aligned}$$

Es decir, $V_\Phi^R(\alpha u, [a_1, b_1]) \leq \Phi \left[|\alpha| t_0 \right] (b_1 - a_1) + k_\alpha V_\Phi^R(u, [a_1, b_1]) < +\infty$ y análogamente se prueba que $V_\Phi^R(\alpha u, [a_2, b_2]) \leq \Phi \left[|\alpha| t_0 \right] (b_2 - a_2) + k_\alpha V_\Phi^R(u, [a_2, b_2]) < +\infty$ y por otro lado

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi \left[\frac{|\Delta_{11}(\alpha u)(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \right] \Delta t_i \Delta s_j \\
= & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi \left[|\alpha| \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \right] \Delta t_i \Delta s_j \\
= & \sum \sum_{(i,j) \in B''_{t_0}} \Phi \left[|\alpha| \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \right] \Delta t_i \Delta s_j + \sum \sum_{(i,j) \notin B''_{t_0}} \Phi \left[|\alpha| \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \right] \Delta t_i \Delta s_j \\
\leq & \ \Phi(|\alpha| t_0)(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) + k_\alpha \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi \left[\frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \right] \Delta t_i \Delta s_j \\
\leq & \ \Phi(|\alpha| t_0)(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) + k_\alpha V_\Phi^R(u).
\end{aligned}$$

Es decir, $V_\Phi^R(\alpha u) < +\infty$.

En ambos casos $\alpha u \in V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ y por lo tanto $V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ es un espacio vectorial.

$\blacksquare$

Ahora bien, dado que la idea es obtener un espacio vectorial, este último teorema nos garantiza que la clase sólo es espacio vectorial si Φ satisface la condición Δ_2. En otro caso ¿Qué hacer?. Existe un procedimiento clásico para obtener espacios vectoriales, utilizando el Funcional de Minkowski. Que mostramos a continuación, para nuestro caso.

De la parte (b) y (e) del teorema 2.3 se sigue que $V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ es un conjunto simétrico y convexo del espacio de funciones continuas. Por tal razón, el espacio generado por esta clase, tiene la forma que se indica a continuación.

$$\langle V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])\rangle \;=\; \{u:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{R} : TV_\Phi^R(\lambda u) < +\infty \quad \text{para algún} \quad \lambda > 0\}.$$

A este espacio generado se le denota por $BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, es decir,

$$BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}]) \;=\; \{u:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{R} : TV_\Phi^R(\lambda u) < +\infty \quad \text{para algún} \quad \lambda > 0\}.$$

Sobre dicho espacio vectorial consideramos

$$\Lambda = \{u \in BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}]) : TV_\Phi^R(u) \leq 1\},$$

el cual es un subconjunto convexo, absorbente y balanceado. En efecto

Sean $u, v \in \Lambda$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ tal que $\alpha + \beta = 1$, entonces se cumple que $TV_\Phi^R(u) \leq 1$ y $TV_\Phi^R(v) \leq 1$. Usando la convexidad de $TV_\Phi^R(\cdot)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} TV_\Phi^R(\alpha u + \beta v) &\leq \alpha TV_\Phi^R(u) + \beta TV_\Phi^R(v) \\ &\leq \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 \\ &= \alpha + \beta \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, $TV_\Phi^R(\alpha u + \beta v) \leq 1$. Entonces $\alpha u + \beta v \in \Lambda$ y con esto queda demostrado que Λ es convexo.

Ahora sea $w \in \Lambda$ y $o \leq \alpha \leq 1$, así $TV_{\Phi}^{R}(w) \leq 1$ y usando nuevamente el hecho de que $TV_{\Phi}^{R}(\cdot)$ es convexo nos queda

$$TV_{\Phi}^{R}(\alpha w) \leq \alpha TV_{\Phi}^{R}(w) \leq 1.$$

Entonces $\alpha w \in \Lambda$ para $|\alpha| \leq 1$ pues el caso $-1 \leq \alpha < 0$ se obtiene por la paridad de $TV_{\Phi}^{R}(\cdot)$, esto demuestra que Λ es balanceado.

Por otro lado, veamos que Λ es absorbente. Sea $u \in BV_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $TV_{\Phi}^{R}(\lambda u) < \infty$. Si $TV_{\Phi}^{R}(\lambda u) \leq 1$ no hay nada que probar, consideremos ahora el caso en que $TV_{\Phi}^{R}(\lambda u) > 1$.

Como $TV_{\Phi}^{R}(\lambda u) < \infty$ existe $M > 0$ tal que

$$M > TV_{\Phi}^{R}(\lambda u) > 1 \tag{2.23}$$

Así,

$$1 > \frac{1}{M} TV_{\Phi}^{R}(\lambda u) > \frac{1}{M}$$

y además $\frac{1}{M} < 1$ por (2.23). Entonces

$$\frac{1}{M} TV_{\Phi}^{R}(\lambda u) < 1 \Rightarrow TV_{\Phi}^{R}(\frac{\lambda}{M} u) < 1.$$

Luego, existe $\lambda_0 = \frac{\lambda}{M}$ tal que $TV_{\Phi}^{R}(\lambda_0 u) < 1$, esto es, $\lambda_0 u \in \Lambda$

El Teorema 1.2 nos garantiza que el funcional de Minkowski,

$$p_{\Phi}(f) := \text{ínf} \left\{ t > 0 : TV_{\Phi}^{R} \left(\frac{f}{t}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \right) \leq 1 \right\},$$

define una seminorma sobre este espacio $BV_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$.

Y haciendo uso de la virtud de seminorma que nos brinda este funcional obtenemos el espacio normado deseado, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *El funcional*

$$\|f\|_{BV_{\Phi}^{R}} := \|f\|_{\infty} + p_{\Phi}(f)$$

donde $\|f\|_{\infty}$ *es la norma del supremo de* f*, define una norma sobre el espacio* $BV_{\Phi}^{R}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$.

Demostración. Dado que $p_{\Phi}(f)$ es una seminorma sobre el espacio, es suficiente verificar que $\|f\|_{BV_\Phi^R} = 0$ si y sólo si $f \equiv 0$.
En efecto, si $\|f\|_{BV_\Phi^R} = 0$ implica que $\|f\|_\infty = 0$, y dado que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma sobre el espacio de las funciones acotadas, $f \equiv 0$. El recíproco es trivial. ■

Proposición 2.2. *El espacio vectorial $BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ es un álgebra.*

Demostración. Sean $u, v \in BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, demostremos que $u \cdot v \in BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

Si $u, v \in BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, entonces existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha u, \beta v \in V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

Si $u \equiv 0$ o $v \equiv 0$, entonces $u \cdot v \equiv 0 \in BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$; pues $BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ es un espacio vectorial.

Por lo tanto podemos suponer que $u \neq 0$, $v \neq 0$ y definamos

$$\lambda = \frac{\alpha\beta}{\alpha\|u\|_\infty + \beta\|v\|_\infty}.$$

Sean $\xi : a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b_2$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente

$$\begin{aligned}
&V_\Phi^R(\lambda uv, [a_1,b_1]) = \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|\Delta_{10}(\lambda uv)(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\cdot \Delta t_i \\
= \;& \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|\lambda||\Delta_{10}(uv)(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\cdot \Delta t_i \\
= \;& \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|\lambda||u(t_i,x_2)v(t_i,x_2) - u(t_{i-1},x_2)v(t_{i-1},x_2)|}{\Delta t_i}\right]\cdot \Delta t_i \\
= \;& \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|\lambda(u(t_i,x_2) - u(t_{i-1},x_2))v(t_i,x_2) + \lambda(v(t_i,x_2) - v(t_{i-1},x_2))u(t_{i-1},x_2)|}{\Delta t_i}\right]\cdot \Delta t_i \\
= \;& \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|\lambda\Delta_{10}u(t_i,x_2)v(t_i,x_2) + \lambda u(t_{i-1},x_2)\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\cdot \Delta t_i \\
\leq \;& \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{\lambda|\Delta_{10}u(t_i,x_2)||v(t_i,x_2)| + \lambda|u(t_{i-1},x_2)||\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\cdot \Delta t_i \\
\leq \;& \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{\lambda|\Delta_{10}u(t_i,x_2)|\|v\|_\infty + \lambda\|u\|_\infty|\Delta_{10}v(t_i,x_2)|}{\Delta t_i}\right]\cdot \Delta t_i \\
= \;& V_\Phi^R(\lambda u\|v\|_\infty + \lambda\|u\|_\infty v, [a_1,b_1]) \\
= \;& V_\Phi^R\left(\frac{\beta\|v\|_\infty}{\alpha\|u\|_\infty + \beta\|v\|_\infty}\cdot\alpha u + \frac{\alpha\|u\|_\infty}{\alpha\|u\|_\infty + \beta\|v\|_\infty}\cdot\beta v, [a_1,b_1]\right) \\
\leq \;& V_\Phi^R(\alpha u, [a_1,b_1]) + V_\Phi^R(\beta v, [a_1,b_1]).
\end{aligned}$$

Así,

$$V_\Phi^R(\lambda uv, [a_1, b_1]) \leq V_\Phi^R(\alpha u, [a_1, b_1]) + V_\Phi^R(\beta v, [a_1, b_1]).$$

Similarmente podemos afirmar que

$$V_\Phi^R(\lambda uv, [a_2, b_2]) \leq V_\Phi^R(\alpha u, [a_2, b_2]) + V_\Phi^R(\beta v, [a_2, b_2]).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
& \Delta_{11}(\lambda uv)(t_i, s_j) \\
= \ & \lambda\Delta_{11}(uv)(t_i, s_j) \\
= \ & \lambda[u(t_{i-1}, s_{j-1})v(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j)v(t_i, s_j) - u(t_{i-1}, s_j)v(t_{i-1}, s_j) \\
- \ & u(t_i, s_{j-1})v(t_i, s_{j-1})] \\
= \ & \lambda[u(t_{i-1}, s_{j-1})v(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) - u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) \\
- \ & u(t_{i-1}, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_{i-1}, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) - u(t_i, s_{j-1})v(t_{i-1}, s_{j-1}) \\
+ \ & u(t_i, s_{j-1})v(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j)v(t_i, s_j) + u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) \\
- \ & u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) - u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_j) + u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_j) \\
- \ & u(t_i, s_j)v(t_i, s_{j-1}) + u(t_i, s_j)v(t_i, s_{j-1}) - u(t_{i-1}, s_j)v(t_{i-1}, s_j) \\
- \ & u(t_i, s_{j-1})v(t_i, s_{j-1})]
\end{aligned}$$

Agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned}
& \Delta_{11}(\lambda uv)(t_i, s_j) \\
= \ & \lambda([u(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1})]v(t_{i-1}, s_{j-1}) \\
+ \ & u(t_i, s_j)[v(t_{i-1}, s_{j-1}) + v(t_i, s_j) - v(t_{i-1}, s_j) - v(t_i, s_{j-1})] \\
- \ & u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_{i-1}, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_{j-1})v(t_{i-1}, s_{j-1}) \\
- \ & u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_j) + u(t_i, s_j)v(t_i, s_{j-1}) \\
- \ & u(t_{i-1}s_j)v(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1})v(t_i, s_{j-1})) \\
= \ & \lambda(\Delta_{11}u(t_i, s_j)v(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j)\Delta_{11}v(t_i, s_j) \\
+ \ & u(t_i, s_j)[v(t_{i-1}, s_j) + v(t_i, s_{j-1}) - 2v(t_{i-1}, s_{j-1})] \\
+ \ & u(t_{i-1}, s_j)[v(t_{i-1}, s_{j-1}) - v(t_{i-1}, s_j)] + u(t_i, s_{j-1})[v(t_{i-1}, s_{j-1}) - v(t_i, s_{j-1})])
\end{aligned}$$

Simplificando y usando propiedad de la norma del supremo se tiene

$$
\begin{aligned}
& \Delta_{11}(\lambda uv)(t_i,s_j) \\
\leq\ & \lambda(\Delta_{11}u(t_i,s_j)\|v\|_\infty + \|u\|_\infty \Delta_{11}v(t_i,s_j) \\
+\ & \|u\|_\infty[v(t_{i-1},s_j) + v(t_i,s_{j-1}) - 2v(t_{i-1},s_{j-1}) + v(t_{i-1},s_{j-1}) - v(t_{i-1},s_j) \\
+\ & v(t_{i-1},s_{j-1}) - v(t_i,s_{j-1})]) \\
=\ & \lambda\Delta_{11}u(t_i,s_j)\|v\|_\infty + \lambda\|u\|_\infty\Delta_{11}v(t_i,s_j)
\end{aligned}
$$

Así,

$$\Delta_{11}(\lambda uv)(t_i,s_j) \leq \lambda\Delta_{11}u(t_i,s_j)\|v\|_\infty + \lambda\|u\|_\infty\Delta_{11}v(t_i,s_j).$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
V_\Phi^R(\lambda uv) &= \sup_{\xi\times\eta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\Delta_{11}(\lambda uv)(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\cdot\Delta t_i\Delta s_j \\
&\leq \sup_{\xi\times\eta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left[\frac{|\lambda\Delta_{11}u(t_i,s_j)\|v\|_\infty + \lambda\|u\|_\infty\Delta_{11}v(t_i,s_j)|}{\Delta t_i\Delta s_j}\right]\cdot\Delta t_i\Delta s_j \\
&= V_\Phi^R(\lambda u\|v\|_\infty + \lambda\|u\|_\infty v) \\
&= V_\Phi^R\left(\frac{\beta\|v\|_\infty}{\alpha\|u\|_\infty+\beta\|v\|_\infty}\cdot\alpha u + \frac{\alpha\|u\|_\infty}{\alpha\|u\|_\infty+\beta\|v\|_\infty}\cdot\beta v\right) \\
&\leq V_\Phi^R(\alpha u) + V_\Phi^R(\beta v)
\end{aligned}
$$

Luego, $V_\Phi^R(\lambda uv) \leq V_\Phi^R(\alpha u) + V_\Phi^R(\beta v)$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
TV_\Phi^R(\lambda uv) &= V_\Phi^R(\lambda uv,[a_1,b_1]) + V_\Phi^R(\lambda uv,[a_2,b_2]) + V_\Phi^R(\lambda uv) \\
&\leq [V_\Phi^R(\alpha u,[a_1,b_1]) + V_\Phi^R(\beta v,[a_1,b_1])] + [V_\Phi^R(\alpha u,[a_2,b_2]) + V_\Phi^R(\beta v,[a_2,b_2])] \\
&+ [V_\Phi^R(\alpha u) + V_\Phi^R(\beta v)] \\
&= TV_\Phi^R(\alpha u) + TV_\Phi^R(\beta v) < \infty.
\end{aligned}
$$

Luego, $u\cdot v \in BV_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

$\blacksquare$

§2.4. Funciones factorizables

En esta sección verificaremos unas de las propiedades que tienen las funciones factorizables y determinaremos si la composición de funciones es de Φ-variación acotada en el sentido de Riesz, tal como lo realizaron Adams, R y Clarkson, J. A. en [3, 9] para funciones acotadas en el sentido Hardy-Vitali.

En esta sección presentamos un teorema de representación para funciones definidas en un rectángulo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Sea $\xi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ una partición del intervalo $[a, b]$. Recordemos que el incremento de una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es

$$\Delta u(t_i) = u(t_i) - u(t_{i-1})$$

.

Definición 2.6. *Una función $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ es **factorizable** si se puede expresar como producto de dos funciones $g : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ y $h : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ no nulas. Esto es,*

$$u(t, s) = g(t)h(s); \qquad t \in [a_1, b_1] \quad s \in [a_2, b_2]. \tag{2.24}$$

A continuación presentamos una propiedad que tienen las funciones factorizables.

Lema 2.7. *Sean $\xi : a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b_2$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente. Si $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ es una función factorizable, como en (2.24), entonces*

$$\Delta_{11} u(t_i, s_j) = \Delta g(t_i) \cdot \Delta h(s_j).$$

Demostración.
En efecto,

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} u(t_i, s_j) &= u(t_{i-1}, s_{j-1}) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1}) + u(t_i, s_j) \\
&= g(t_{i-1})h(s_{j-1}) - g(t_{i-1})h(s_j) - g(t_i)h(s_{j-1}) + g(t_i)h(s_j) \\
&= g(t_{i-1}) \left[h(s_{j-1}) - h(s_j)\right] - g(t_i) \left[h(s_{j-1}) - h(s_j)\right] \\
&= \left[g(t_i) - g(t_{i-1})\right] \left[h(s_j) - h(s_{j-1})\right] \\
&= \Delta g(t_i) \cdot \Delta h(s_j).
\end{aligned}$$

■

Daremos el teorema principal de esta sección para funciones factorizables.

Teorema 2.8. *Sea Φ una N-función. Si u es una función factorizable como en* (2.24) *y además $u \in V_\Phi^R([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, entonces g, h son funciones de Φ-variación acotada en el sentido de Riesz.*

Demostración. Supongamos que $u : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ es una función factorizable, como en (2.24) y sean $\xi : a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b_2$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
TV_\Phi^R(u) &= V_\Phi^R(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) + V_\Phi^R(u(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) + V_\Phi^R(u) \\
&= \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|\Delta_{10} u(t_i, a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i + \sup_\eta \sum_{j=1}^n \Phi\left[\frac{|\Delta_{01} u(a_1, s_j)|}{\Delta s_j}\right]\Delta s_j \\
&\quad + \sup_{\xi\times\eta} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Phi\left[\frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j}\right]\Delta t_i \Delta s_j \\
&\geq \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|g(t_i)h(a_2) - g(t_{i-1})h(a_2)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i \\
&\quad + \sup_\eta \sum_{j=1}^n \Phi\left[\frac{|g(a_1)h(s_j) - g(a_1)h(s_{j-1})|}{\Delta s_j}\right]\Delta s_j \\
&= \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|h(a_2)||\Delta g(t_i)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i + \sup_\eta \sum_{j=1}^n \Phi\left[\frac{|g(a_1)||\Delta h(s_j)|}{\Delta s_j}\right]\Delta s_j.
\end{aligned}$$

- Si $|h(a_2)| \leq 1$, entonces

  $$\sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|h(a_2)||\Delta g(t_i)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i \leq |h(a_2)| \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|\Delta g(t_i)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i \leq TV_\Phi^R(u) < \infty.$$

  Así, $|h(a_2)| \cdot g \in RV_\Phi([a_1, b_1])$ el cual es un espacio vectorial. En consecuencia $g \in RV_\Phi([a_1, b_1])$.

- Si $|h(a_2)| > 1$, entonces

  $$\begin{aligned}
  \infty &> TV_\Phi^R(u) \\
  &\geq \sup_\xi \sum_{i=1}^m \Phi\left[\frac{|h(a_2)||\Delta g(t_i)|}{\Delta t_i}\right]\Delta t_i
  \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|h(a_2)|}{|h(a_2)|} \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|h(a_2)||\Delta g(t_i)|}{\Delta t_i}\right] \Delta t_i \\
&\geq |h(a_2)| \cdot \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|h(a_2)|}{|h(a_2)|} \frac{|\Delta g(t_i)|}{\Delta t_i}\right] \Delta t_i \\
&= |h(a_2)| \cdot \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta g(t_i)|}{\Delta t_i}\right] \Delta t_i \\
&\geq \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \Phi\left[\frac{|\Delta g(t_i)|}{\Delta t_i}\right] \Delta t_i.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $g \in V_{\Phi}^{R}([a_1, b_1])$.

Por un razonamiento similar, obtenemos que $h \in V_{\Phi}^{R}([a_2, b_2])$.

■

Teorema 2.9. *Sean Φ y Ψ N-funciones complementarias, u una función factorizable, como en* (2.24). *Si $V_{\Phi}^{R}(g, [a_1, b_1]) < +\infty$ y $V_{\Psi}^{R}(h, [a_2, b_2]) < +\infty$ entonces $u \in BV([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$.*

Demostración. Supongamos que $V_{\Phi}^{R}(g, [a_1, b_1]) < +\infty$ y $V_{\Psi}^{R}(h, [a_2, b_2]) < +\infty$, entonces
dado que $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$ y $\lim\limits_{s \to \infty} \frac{\Psi(s)}{s} = \infty$, podemos elegir $N, M \in \mathbb{N}$ de manera que

$$
\begin{aligned}
t > N &\implies t \leq \Phi(t) \\
s > M &\implies s \leq \Psi(s). \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Sea $A_N = \left\{ i : \frac{|u(t_{i-1}, a_2) - u(t_i, a_2)|}{t_i - t_{i-1}} > N \right\}$. Así, para una partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^{m} \in \pi[a_1, b_1]$,

$$
\begin{aligned}
& V_{10}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1], \xi) \\
= & \sum_{i=1}^{m} \frac{|u(t_{i-1}, a_2) - u(t_i, a_2)|}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) \\
= & \sum_{i \in A_N} \frac{|u(t_{i-1}, a_2) - u(t_i, a_2)|}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \notin A_N} \frac{|u(t_{i-1}, a_2) - u(t_i, a_2)|}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) \\
\leq & \sum_{i \in A_N} \Phi\left(\frac{|u(t_{i-1}, a_2) - u(t_i, a_2)|}{t_i - t_{i-1}}\right) (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \notin A_N} N(t_i - t_{i-1}) \\
\leq & \sum_{i=1}^{m} \Phi\left(\frac{|g(t_{i-1})h(a_2) - g(t_i)h(a_2)|}{t_i - t_{i-1}}\right) (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m} N(t_i - t_{i-1}) \\
= & \sum_{i=1}^{m} \Phi\left(\frac{|h(a_2)||g(t_{i-1}) - g(t_i)|}{t_i - t_{i-1}}\right) (t_i - t_{i-1}) + N(b_1 - a_1).
\end{aligned}
$$

En consecuencia, tomando el supremo sobre las particiones $\xi \in \pi[a_1, b_1]$ se obtiene que

$$V_{10}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) \leq V_\Phi^R(|h(a_2)|g, [a_1, b_1]) + N(b_1 - a_1).$$

Como $g \in V_\Phi^R[a_1, b_1] \subset RV_\Phi[a_1, b_1]$, el cual es un espacio vectorial, se tiene que $|h(a_2)|g \in RV_\Phi[a_1, b_1]$, así $V_{10}(u(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) < +\infty$.
Si consideramos ahora la partición $\eta = \{s_j\}_{j=0}^n \in \pi[a_2, b_2]$, y M como en (2.25) y definimos $A_M = \left\{j : \frac{|u(a_1,s_{j-1})-u(a_1,s_j)|}{s_j - s_{j-1}} > M\right\}$ se sigue que

$$\begin{aligned}
& V_{01}(u(a_1, \cdot), [a_2, b_2], \eta) \\
= & \sum_{i=1}^{n} \frac{|u(a_1, s_{j-1}) - u(a_1, s_j)|}{s_j - s_{j-1}}(s_j - s_{j-1}) \\
= & \sum_{j \in A_M} \frac{|u(a_1, s_{j-1}) - u(a_1, s_j)|}{s_j - s_{j-1}}(s_j - s_{j-1}) + \sum_{j \notin A_M} \frac{|u(a_1, s_{j-1}) - u(a_1, s_j)|}{s_j - s_{j-1}}(s_j - s_{j-1}) \\
\leq & \sum_{j \in A_M} \Psi\left(\frac{|u(a_1, s_{j-1}) - u(a_1, s_j)|}{s_j - s_{j-1}}\right)(s_j - s_{j-1}) + \sum_{j \notin A_M} M(s_j - s_{j-1}) \\
\leq & \sum_{i=1}^{n} \Psi\left(\frac{|g(a_1)||h(s_{j-1}) - h(s_j)|}{s_j - s_{j-1}}\right)(s_j - s_{j-1}) + M(b_2 - a_2).
\end{aligned}$$

Como antes, tomando el supremo sobre las particiones $\eta \in \pi[a_2, b_2]$ se obtiene que

$$V_{01}(u(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) \leq V_\Psi^R(|g(a_1)|h, [a_2, b_2]) + M(b_2 - a_2),$$

Como $h \in V_\Psi^R[a_2, b_2] \subset RV_\Psi[a_2, b_2]$, el cual es un espacio vectorial, se tiene que $|g(a_1)|h \in RV_\Psi[a_2, b_2]$, así $V_{01}(u(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) < +\infty$.

Para verificar la variación bidimensional se consideran ξ y η como antes y

$$\begin{aligned}
& |\Delta_{11} u(t_i, s_j)| \\
= & |g(t_{i-1})h(s_{j-1}) + g(t_i)h(s_j) - g(t_{i-1})h(s_j) - g(t_i)h(s_{j-1})| \\
= & |g(t_{i-1})[h(s_{j-1}) - h(s_j)] + g(t_i)[h(s_j) - h(s_{j-1})]| \\
= & |g(t_i)[h(s_j) - h(s_{j-1})] - g(t_{i-1})[h(s_j) - h(s_{j-1})]| \\
= & |[g(t_i) - g(t_{i-1})][h(s_j) - h(s_{j-1})]| \\
= & |g(t_i) - g(t_{i-1})||h(s_j) - h(s_{j-1})|.
\end{aligned}$$

En consecuencia, haciendo uso de esta última igualdad y la desigualdad de Young (1.8), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})} &= \frac{|g(t_i)-g(t_{i-1})|}{t_i-t_{i-1}}\cdot\frac{|h(s_j)-h(s_{j-1})|}{s_j-s_{j-1}}\\ &\leq \Phi\left(\frac{|g(t_i)-g(t_{i-1})|}{t_i-t_{i-1}}\right)+\Psi\left(\frac{|h(s_j)-h(s_{j-1})|}{s_j-s_{j-1}}\right),\end{aligned}$$

de lo cual se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned}|\Delta_{11}u(t_i,s_j)| &= \frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})}(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})\\ &\leq \Phi\left(\frac{|g(t_i)-g(t_{i-1})|}{t_i-t_{i-1}}\right)(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1})\\ &+ \Psi\left(\frac{|h(s_j)-h(s_{j-1})|}{s_j-s_{j-1}}\right)(t_i-t_{i-1})(s_j-s_{j-1}).\end{aligned}$$

Note que si consideramos el supremo sobre las particiones $\xi\in\pi[a_1,b_1]$ y $\eta\in[a_2,b_2]$ se obtiene que

$$V_{11}(u(\cdot,\cdot),[\mathbf{a},\mathbf{b}]) \leq V_{\Phi}^{R}(g,[a_1,b_1])(b_2-a_2)+V_{\Psi}^{R}(h,[a_2,b_2])(b_1-a_1),$$

quedando completa la demostración. ■

Capítulo 3

Teorema tipo Representación de Riesz

Tan pronto comenzó el estudio de espacios de Hilbert, Frechet y Riesz (1880-1956), de forma independiente, demuestran que para todo funcional lineal f continuo sobre ℓ_2 existe un único elemento $x_0 \in \ell_2$ tal que $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ para todo $x \in \ell_2$. Tal resultado se conoce como Teorema de Riesz-Frechet o Teorema de Representación de Riesz.

Desde entonces, han surgido diversas versiones del teorema de Representación de Riesz o Lema de Representación de Riesz, por ejemplo, el teorema de Representación de Riesz clasifica los funcionales lineales acotados sobre el espacio $C[a,b]$, de funciones continuas sobre el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. El teorema de Riesz clasifica los funcionales lineales acotados sobre $C[a,b]$ en términos del conjunto de funciones de variación acotada $BV[a,b]$ (ver (1.5)). Si $g : [a,b] \to \mathbb{R} \in BV[a,b]$, entonces existe asociado un funcional lineal acotado T sobre $C[a,b]$ dado por

$$T(f) \equiv \int_a^b f\, dg,$$

la cual es la integral Riemann-Stieltjes de f con respecto a g.
Este capítulo tiene como objetivo central presentar un teorema del Tipo de Representación de Riesz para funciones definidas en un rectángulo, para lo cual hacemos uso de la definición de funciones absolutamente continuas en el sentido de Carathéodory.
Primero indicaremos la definición de función absolutamente continua que utilizaremos para funciones cuyo dominio es un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, la cual está basada en la definición dada por Carathéodory en 1918.

§3.1. Funciones Absolutamente Continuas

El concepto de funciones absolutamente continuas, se ha generalizado para funciones de varias variables por diferentes vías. Cada una de dichas definiciones conservan sólo algunas de las propiedades de las funciones absolutamente continuas de sólo una variable, como son la continuidad, diferenciabilidad, en casi todas partes, o la integración por partes. En el trabajo desarrollado se interesó el autor por la definición de funciones absolutamente continuas en el sentido de Carathéodory (Ver [6]), con el fin de definir una solución de una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico con la parte discontinua de la derecha.

Como es usual, $L([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones Lebesgue integrables en $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. $AC([\alpha,\beta]\,;\mathbb{R})$ y $L([\alpha,\beta]\,;\mathbb{R})$ son los conjuntos de las funciones absolutamente continuas e integrables Lebesgue, respectivamente, para funciones definidas en $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$. Para cualquier conjunto medible $E\subset\mathbb{R}^n$ $(n=1,2)$, $\mu(E)$ denota la medida de Lebesgue del conjunto E.

Denotemos por $\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ el conjunto formado por todos los rectángulos $[t_1,t_2]\times[s_1,s_2]$ contenidos en $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Para cualquier rectángulo $P\in\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, $|P|$ denota el área de P. Decimos que los rectángulos $P_1,P_2\in\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ no se solapan si no tienen puntos interiores comunes. Además, se dice que los rectángulos $P_1,P_2\in\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ son adjuntos si ellos no se solapan y $P_1\cup P_2\in\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$.

Definición 3.1 ([24, 16])**.** *Una función $F:\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])\to\mathbb{R}$ se dice una **función rectángulo aditiva** si para rectángulos adjuntos $P_1,P_2\in\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, se cumple*

$$F(P_1\cup P_2)=F(P_1)+F(P_2).$$

Definición 3.2 ([24, 16])**.** *Una función rectángulo aditiva $F:\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua si para cualquier $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $P_1,\ldots,P_k\in\mathcal{B}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$ son rectángulos que no se solapan con la propiedad*

$$\sum_{j=1}^{k}|P_j|\leq\delta,$$

entonces satisface

$$\sum_{j=1}^{k} |F(P_j)| < \varepsilon.$$

Definición 3.3. *Dada una función* $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$*, se define la* ***función rectángulo, asociada a*** u *por*

$$F_u([t_1, t_2] \times [x_1, x_2]) = \Delta_{11} u(t_2, x_2), \qquad [t_1, t_2] \times [x_1, x_2] \in \mathcal{B}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]). \tag{3.1}$$

Definición 3.4. *Una función* $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ *se dice* ***absolutamente continua*** *en* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *en el sentido Carathéodory si las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

(a) La función de rectángulos F_u *asociada con* u *es absolutamente continua;*

(b) Las funciones $u(a_1, \cdot) : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ *y* $u(\cdot, a_2) : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ *son absolutamente continuas.*

Ejemplo 3.1. *Sea* $u(x, y) := x + y$ *definida sobre* $[0, 1] \times [0, 1]$ *y consideremos la colección finita* $I_k = [x_k^{(1)}, y_k^{(1)}] \times [x_k^{(2)}, y_k^{(2)}] \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ *(*$k = 1, 2, ..., n$*). Entonces, para* $\epsilon > 0$*, y* $\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k^{(2)} - x_k^{(2)})(y_k^{(1)} - x_k^{(1)}) < \epsilon$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} |F_u([x_k^{(1)}, y_k^{(1)}] \times [x_k^{(2)}, y_k^{(2)}])| \\ = \; & \sum_{k=1}^{n} |u(x_k^1, x_k^2) - u(y_k^1, x_k^2) + u(y_k^1, y_k^2) - u(x_k^1, y_k^2)| \\ = \; & \sum_{k=1}^{n} |x_k^1 + x_k^2 - y_k^1 - x_k^2 + y_k^1 + y_k^2 - x_k^1 - y_k^2| \\ = \; & 0 < \epsilon. \end{aligned}$$

Con esto se verifica que la función rectángulo, asociada a u *es absolutamente continua. Además, si* $I_k = [x_k, y_k]$ *(*$k = 1, 2, ..., n$*) es una colección finita de intervalos que no se solapan en* $[0, 1]$*,* $\epsilon > 0$ *y* $\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - x_k) < \epsilon$*, entonces*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |u(y_k, a_2) - u(x_k, a_2)| &= \sum_{k=1}^{n} |y_k + a_2 - x_k - a_2| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Con ello se verifica que $u(\cdot, a_2)$ es absolutamente continua sobre $[0,1]$ y de forma similar se puede verificar que $u(a_1, \cdot)$ es absolutamente continua sobre $[0,1]$; con lo cual obtenemos una función u que es absolutamente continua en $[0,1] \times [0,1]$.

Ejemplo 3.2. *La función f definida por $f(x,y) := x\,Sen\left(\frac{1}{x}\right) + y$ no es absolutamente continua, dado que $f(x, a_2)$ no lo es.*

El siguiente enunciado da la condición necesaria y suficiente para que la función de rectángulo sea absolutamente continua en el sentido Carathéodory. Las demostraciones de estos dos teoremas, se encuentran fuera del alcance de los objetivos de este trabajo, pero el lector interesado puede consultar [24, 25].

Teorema 3.1 ([24])**.** *La función rectángulo $F : \mathcal{B}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en el sentido Carathéodory si, y sólo si, existe una función $h \in L([\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \mathbb{R})$ tal que*

$$F(P) = \iint_P h(t,s)dtds \quad P \in \mathcal{B}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]).$$

También en [19] dan tres propiedades equivalentes que tienen las funciones absolutamente continuas en el sentido Carathéodory:

Teorema 3.2 ([24, 25])**.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La función $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ en el sentido Carathéodory, esto es,*

   (a) La función de rectángulos F_u asociada con u es absolutamente continua;

   (b) $u(a_1, \cdot) \in AC([a_2, b_2]; \mathbb{R})$ y $u(\cdot, a_2) \in AC([a_1, b_1]; \mathbb{R})$.

2. *La función $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ admite una representación en integral*

$$u(t,x) = e + \int_{a_1}^{t} f(s)ds + \int_{a_2}^{x} g(\eta)d\eta + \iint_{Q(t,x)} h(s,\eta)dsd\eta, \tag{3.2}$$

   para $(t,x) \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ donde $e \in \mathbb{R}$, $f \in L([a_1, b_1]; \mathbb{R})$, $g \in L([a_2, b_2]; \mathbb{R})$, $h \in L([\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \mathbb{R})$, donde $Q(t,x) = [a_1, t] \times [a_2, x]$ para todo $(t,x) \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

3. *La función $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ satisface:*

(a) $u_x(\cdot, x) \in AC([a_1, b_1]\,; \mathbb{R})$ *para todo* $x \in [a_2, b_2]$, $u(a_1, \cdot) \in AC([a_2, b_2]\,; \mathbb{R})$*;*

(b) $u_t(t, \cdot) \in AC([a_2, b_2]\,; \mathbb{R})$ *para todo* $t \in [a_1, b_1]$, $u(\cdot, a_2) \in AC([a_1, b_1]\,; \mathbb{R})$*;*

(c) $u_{tx} \in L([\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \mathbb{R})$.

Lema 3.3. *Dadas* $\xi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ *y* $\eta = \{s_j\}_{j=0}^{m}$ *particiones de* $[a_1, b_1]$ *y* $[a_2, b_2]$ *respectivamente,* $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ *diferenciable, entonces se puede hallar* $(x_i, y_j) \in [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ *para cada* $i = 1, 2, .., n$ *y* $j = 1, ..., m$ *tal que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_i, y_j) \;=\; \frac{f(t_{i-1}, s_{j-1}) - f(t_{i-1}, s_j) - f(t_i, s_{j-1}) + f(t_i, s_j)}{(t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1})}. \tag{3.3}$$

Demostración. Sean $\xi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ y $\eta = \{s_j\}_{j=0}^{m}$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente. Luego,

$$f(t_{i-1}, s_{j-1}) - f(t_{i-1}, s_j) - f(t_i, s_{j-1}) + f(t_i, s_j)$$

Hacemos $g(x) := f(x, s_{j-1}) - f(x, s_j)$, la cual es una función de sólo una variable diferenciable definida sobre $[t_{i-1}, t_i]$, y por lo tanto satisface el teorema de valor medio que nos garantiza la existencia de $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ de manera que

$$g'(x_i) \;=\; \frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Esto es equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, s_{j-1}) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, s_j) \;=\; \frac{-f(t_{i-1}, s_{j-1}) + f(t_{i-1}, s_j) + f(t_i, s_{j-1}) - f(t_i, s_j)}{t_i - t_{i-1}} \tag{3.4}$$

Consideramos ahora la función $h : [s_{j-1}, s_j] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y),$$

la cual es una función de sólo una variable diferenciable. El teorema de valor medio nos garantiza la existencia de $y_j \in [s_{j-1}, s_j]$ de manera que

$$h'(y_j) \;=\; \frac{h(s_j) - h(s_{j-1})}{s_j - s_{j-1}}.$$

Esto es,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_i, y_j) \;=\; \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, s_j) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, s_{j-1})}{s_j - s_{j-1}}. \tag{3.5}$$

Sustituyendo (3.4) en (3.5) obtenemos (3.3). ■

Estamos en condiciones de presentar el Lema tipo de Representación de Riesz para funciones definidas en el rectángulo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Teorema 3.4 (Lema tipo Representación de Riesz)**.** *Sea* $\Phi \in \mathcal{N}$ *y* $u : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ *una función, entonces* $TV_{\Phi}^{R}(u) < \infty$ *si y sólo si* u *es absolutamente continua en el sentido Carathéodory sobre* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *y*

$$\int_{a_1}^{b_1} \Phi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\right|\right) dt + \int_{a_2}^{b_2} \Phi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\right|\right) ds + \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \Phi\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t,s)\right|\right) dtds < \infty.$$

Además

$$TV_{\Phi}^{R}(u) = \int_{a_1}^{b_1} \Phi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\right|\right) dt + \int_{a_2}^{b_2} \Phi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\right|\right) ds + \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \Phi\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t,s)\right|\right) dtds.$$

Demostración. Asumamos que $TV_{\Phi}^{R}(u) < \infty$ y verifiquemos que la función rectángulo asociada a u, F_u es absolutamente continua en el sentido de Carathéodory. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y consideremos los rectángulos $P_1, \ldots, P_k$ tales que $P_i \cap P_j = \emptyset$, si $i \neq j$ y $P_1, \ldots, P_k \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

En virtud de la propiedad arquimediana podemos hallar $r > 0$ tal que $\dfrac{\epsilon r}{2} > TV_{\Phi}^{R}(u) \geq V_{\Phi}^{R}(u)$. Dado que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = \infty$, para este $r > 0$ elegimos $t_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\dfrac{\Phi(t)}{t} > r$; $t \geq t_0$.

Supongamos que $\sum\limits_{i=1}^{k} |P_i| < \dfrac{\epsilon}{2t_0}$, y para facilitar la escritura, utilizamos la siguiente notación

$$C_{t_0} \;:=\; \left\{(i,j) : \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \geq t_0\right\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} F_u(P_i) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\Delta_{11} u(t_i, s_j)| \\
&= \sum\sum_{(i,j)\in C_{t_0}} |\Delta_{11} u(t_i, s_j)| + \sum\sum_{(i,j)\notin C_{t_0}} |\Delta_{11} u(t_i, s_j)| \\
&< \sum\sum_{(i,j)\in C_{t_0}} \frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j} \cdot \Delta t_i \Delta s_j + \sum\sum_{(i,j)\notin C_{t_0}} t_0 \cdot \Delta t_i \Delta s_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{r}\sum\sum_{(i,j)\in C_{t_0}} \Phi\left[\frac{|\Delta_{11}u(t_i,s_j)|}{\Delta t_i \Delta s_j}\right]\cdot \Delta t_i \Delta s_j + t_0 \sum\sum_{(i,j)\notin C_{t_0}} \Delta t_i \Delta s_j \\
&\leq \frac{1}{r}\cdot V_\Phi^R(u) + t_0\sum_{i=1}^{k}|P_i| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + t_0\sum_{i=1}^{k}|P_i| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + t_0\frac{\epsilon}{2t_0} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

De lo cual resulta que F_u es absolutamente continua.

De la proposición 1.10 se sigue que $u(\cdot, x_2) \in AC([a_1, b_1]\,;\mathbb{R})$ y $u(x_1, \cdot) \in AC([a_2, b_2]\,;\mathbb{R})$ por lo tanto diferenciables en casi todas partes, y así u es absolutamente continua en el sentido de Carathéodory.

Además, el teorema 3.2 nos garantiza que

$$
\begin{aligned}
\int_{a_1}^{b_1} \Phi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\right|\right) dt &< \infty, \\
\int_{a_2}^{b_2} \Phi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\right|\right) ds &< \infty \\
\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \Phi\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t,s)\right|\right) dsdt &< \infty,
\end{aligned}
$$

con lo cual se verifica la primera parte del teorema.

Recíprocamente, supongamos que u es absolutamente continua, en ese caso el teorema 1.13 nos garantiza que

$$
\begin{aligned}
V_\Phi^R(u, [a_1, b_1]) &= \int_{a_1}^{b_1} \Phi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\right|\right) dt < \infty \\
V_\Phi^R(u, [a_2, b_2]) &= \int_{a_2}^{b_2} \Phi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\right|\right) ds < \infty.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, dado que u es absolutamente continua en el sentido de Carathéodory, en el rectángulo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; haciendo uso, nuevamente del teorema 3.2, se garantiza la existencia de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t_i, s_j)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}(t_i, s_j)$ las cuales son iguales.

Luego, para cada par de particiones $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ y $\eta = \{s_j\}_{j=0}^m$ de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente, el lema 3.3 nos garantiza la existencia de $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $y_j \in [s_{j-1}, s_j]$

para cada $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$ de manera que

$$\frac{u(t_{i-1}, s_{j-1}) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1}) + u(t_i, s_j)}{\Delta t_i \Delta s_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_i, y_j)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left(\frac{u(t_{i-1}, s_{j-1}) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1}) + u(t_i, s_j)}{\Delta t_i \Delta s_j}\right) \Delta t_i \Delta s_j \\ = & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_i, y_j)\right) \Delta t_i \Delta s_j. \end{aligned}$$

Note que si tomamos el supremo sobre las particiones $\xi \in \pi([a_1, b_1])$ y $\eta \in \pi([a_2, b_2])$, de esta igualdad se tiene que

$$V_\Phi^R(u(\cdot,\cdot), [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \Phi\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t, s)\right|\right) dsdt.$$

Queda así demostrado que $TV_\Phi^R(u) < \infty$. ■

Referencias

[1] W. Aziz, H. Leiva, N. Merentes, J. L. Sánchez, *Functions of two variables with bounded φ-variation in the sense of Riesz*, Journal of Mathematics and Applications, N° 32, pp 5-23 (2010).

[2] W. Aziz, *Algunas extensiones a $\mathbb{R}^2$ de la noción de funciones con φ-variación acotada en el sentido de Riesz y controlabilidad de las RNC* (Tesis de Doctorado - Universidad Central de Venezuela), (2010).

[3] R. Adams and J. A. Clarkson, *Properties of Functions $f(x, y)$ of Bounded Variation, Trans.* Amer. Math. Soc. 36 (1934), 711-730.

[4] N. Bourbaki, *Integration* (Elements de Mathematiques, XIII and XXI, Livre VI). Hermann, Paris, 1952 and 1956.

[5] S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertationes mathematicae (Rozprawy mathematyczne), Warszawa, 1996.

[6] C. Carathéodory; *Vorlesungen ¨uber relle funktionen*, Verlag und Druck Von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1918 (in German).

[7] V. V. Chistyakov, *A selection principle for mappings of bounded variation of several variables*, in: Real Analysis Exchange 27th Summer Symposium, Opava, Czech Republic, 2003, pp. 217–222.

[8] V. V. Chistyakov, *Metric semigroups and cones of mappings of finite variation of several variables*, and multivalued superposition operators, Dokl. Math. 68 (3) (2003) 445–448.

[9] J. A. Clarkson and R. Adams, *On Definitions of Bounded Variation for Functions of two Variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933), 824 . 854.

[10] P. L., Dirichelt, *Sur la convergence des séries trigonemétriques que servent á représenter une function arbitraire entre des limites donnés*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4 (1826), 157-159.

[11] R. M. Dudley, and R. Norvaiša, , *Concrete Functional Calculus*, Springer, New York, 2010.

[12] G. H. Hardy, *On double Fourier series, and especially those which represent double zeta-function with real and inconmesurable paramets*, Quart. J. Math. Oxford. 37 (1905), 53 - 79.

[13] T.H. Hildebrandt,*Introducction to the theory of integration.* Academic Press, New York, 1963.

[14] C. Jordan,, *sur la série de fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2 (1881), 228-230.

[15] M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noorhoff Ltd., Groningen, 1961.

[16] S. Lojasiewicz, *An Introduction to the Theory of Real Functions*, Wiley–Interscience Publication, Chichester, 1988.

[17] Medveded, Yu. T., *A generalization of certain theorem of Riesz*(en ruso), Uspekhi Mat. Nauk. 6 (1953), 115-118.

[18] J. Musielak, W. Orlicz, *On generalized variations (I)*, Studia Math. 18 (1959), 11-41.

[19] A. Hernández, S. Rivas, *Funciones de* $\Phi-$*variación acotada en el sentido de Schramm*, Ponencia presentada en las IX jornadas de Matemáticas, Maracaibo, Venezuela, 1996.

[20] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker, 1991.

[21] F. Riesz, *Untersuchgen über systeme integrierbarer funktionen*, Math. Annalen, 69 (1910), 449-497.

[22] H.L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan Pub., New York, 1988.

[23] A. M. Russell, *A commutative Banach algebra of functions of bounded variation*, Amer. Math. Monthy, (1980), 39-40.

[24] J. Šremr, *A note on absolutely continuous functions of two variables in sense of Carathéodory*, Institute of Mathematics, AS CR, Prague (2008), 1-12.

[25] J. Šremr, *Absolutely continuous functions of Two variables in the sense of Carathéodory*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010 (2010), No. 154, pp. 1–11.

[26] Ch. J. de la. Vallée Poussin, *Sur línt́egrale de Lebesgue*, Trans. Amer. Math. Soc., 16 (1915), 435-501.

[27] D. E. Varberg, *On absolutely continuous functions*, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), N°.6-10, 831-841.

[28] G. Vitali, *Sulle Funzioni Integrali*, Atti Accad. Schi. Torino CI Sci. Fis. Mat. Natur. 40 (1904), 1021-1043.

[29] N. Wiener, *The quadratic variation of a functionsand its Fourier coefficient*, J. Mass. Inst. Technology, 3 (1924), 73-94.

[30] L. C. Young, *Sur une généralisation de la notion de variation de pussance piéme bornée au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, 204 (1937), Ser A-B, 470-472.