UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Sobre la existencia de una solución periódica no trivial de la ecuación de Van der Pol"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Gabriela González

como requisito final
para obtener el título de Licenciada
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Tutor: M.Sc. Liliana Pérez.

Barquisimeto, Venezuela. Julio de 2011

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"SOBRE LA EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN PERIÓDICA NO TRIVIAL DE LA ECUACIÓN DE VAN DER POL"

presentado por la ciudadana BR. GABRIELA GONZÁLEZ titular de la Cédula de Identidad No. 17.356.698, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

______________________________	______________________________
TUTOR	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios Todopoderoso...

Y al maravilloso regalo que Dios me ha dado, José Miguel...

Agradecimientos

Quiero dar gracias primeramente a Dios, por haberme dado la vida y permitirme respirar cada día y por darme el valor, fortaleza y sabiduría necesaria para finalizar esta etapa de mi vida.

A mi papá *Roberto*, por ser el mejor papá del mundo y por ser un gran ejemplo de lucha y perseverancia para mí. Además,le agradezco por enseñarme a sonreír a pesar de las dificultades de la vida y a ver el lado positivo de las cosas.

A mi mamá *Chabela*, que más que mi madre ha sido mi amiga desde muy pequeña y gracias a su carácter y sabias palabras ha estado allí día a día guiándome por el buen camino.

Gracias a los dos por hacer de mí una mujer de principios y buenos sentimientos.

A mis hermanos *Kiko* y *Roger* que en todo momento me han apoyado en cada etapa de mi vida.

A toda mi familia, muchísimas gracias... los amo!!

A mi gran amiga *Gabriela Galavis*, que más que una amiga es como una hermana para mí, le agradezco por mostrarme en todo instante su apoyo incondicional durante este largo recorrido académico y en gran parte de mi vida.

A mi amigo *Freddy Campo*, con el cual también compartí grandes momentos, risas, llantos y trasnochos también.

A mis amigos *María Luisa, Juancito, Tere y Oramys*, gracias por estar en todos los momentos que los necesité y sobre todo por soportar mis chistes malos, jeje.

Agradezco a las familias *González Fernández* y *Cortéz Mendoza* por abrirme las puertas de sus casas y tratarme como parte de la familia, muchas gracias!!

También doy gracias a mi tutora *Liliana Pérez* por la paciencia y comprensión durante los últimos semestres.

A los profesores *Jurancy Ereú, Mireya Bracamonte, Rómulo Castillo, Eibar Hernández, Mario Rodríguez, Javier Hernández y Belkis López* que de una u otra forma han colaborado para la culminación de mi carrera. Al resto de los profesores, les agradezco por haber contribuido en mi formación académica.

Doy gracias a la UCLA, la cual fue mi segunda casa y me dio la oportunidad de prepararme como profesional.

Especialmente quiero agradecer a *Miguel Vivas* que aparte de haber sido mi profesor, ha sido mi amigo, compañero, esposo y mi Cielo. Gracias por ser mi brújula, mi norte y mi soporte; apoyarme en todo momento y hacer posible este gran logro.

Para finalizar, agradezco a mi Pedacito de Cielo: *José Miguel* quien es y será mi mayor fuente de inspiración para seguir luchando y alcanzar nuevas metas. Los amo...!!

A todos, muchísimas gracias por formar parte de este gran triunfo!!

Resumen

El presente trabajo contiene un estudio detallado del sistema

$$\begin{cases} x' = y - (x^3 - x) \\ y' = -x \end{cases} \tag{1}$$

mejor conocido como la Ecuación de Van Der Pol, el cual es un caso particular de la Ecuación de Lienard.

El primero de los tres capítulos que conforman este trabajo, es el de los antecedentes. En éste, se hace una introducción a manera de motivar el estudio de la ecuación del sistema (1).

El segundo capítulo, desarrollamos los resultados preliminares, los cuales son necesarios para el capítulo principal de nuestro trabajo.

Por último, en el capítulo tres, damos las condiciones para la existencia de una solución periódica no trivial del sistema (1). Estos resultados son obtenidos principalmente del libro Tineo-Rivero [8], así como de la referencia [10].

Índice

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo, es demostrar la existencia de una solución periódica no trivial para el sistema:

$$\begin{cases} x' = y - (x^3 - x) \\ y' = -x \end{cases} \tag{2}$$

Para esto, probaremos que cuando una solución del sistema (2) comienza en el semieje positivo de la y, existe un tiempo en el cual la trayectoria de la solución corta el gráfico de la función $x^3 - x$ en el semiplano positivo de las x.

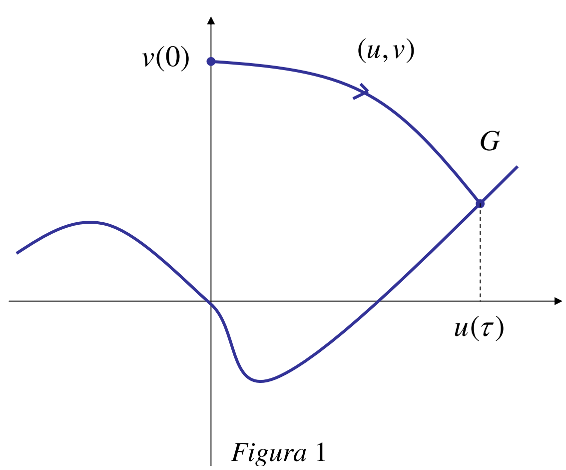


Figura 1

Además, cuando la trayectoria de la solución corta la función $x^3 - x$, existe un tiempo en el cual dicha trayectoria corta el semieje negativo de la y.

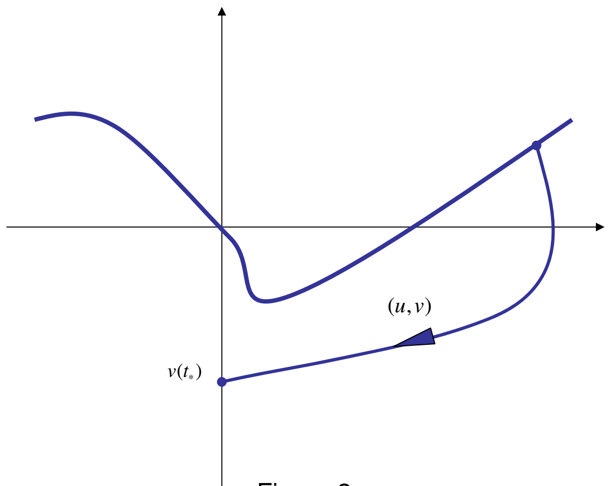


Figura 2

Considerando un cambio de variables y usando la simetría del sistema con respecto al origen, probaremos resultados similares para el semiplano negativo de las x.

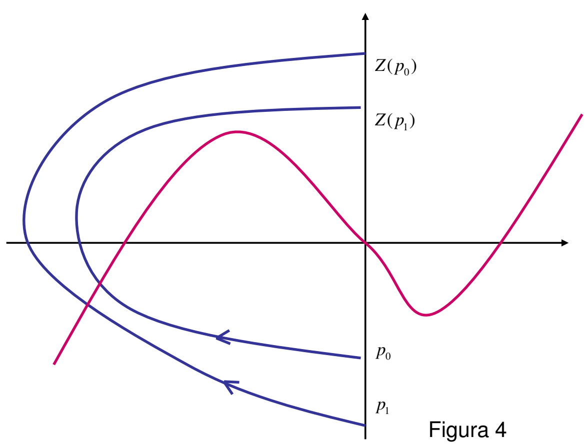


Figura 4

Luego, haciendo la composición de las funciones que se definen implícitamente vamos a construir una función π que a cada punto en el semieje positivo de las y, le agrega la imagen de la trayectoria. Una vez que ésta ha cortado el gráfico de la función $x^3 - x$, primero del lado positivo de las x y después del lado negativo. Los puntos fijos de esta aplicación corresponden a las órbitas periódicas del sistema (2) (soluciones periódicas).

Probaremos que existe una, cuya órbita tiene norma estrictamente positiva, lo cual garantiza que es no trivial.

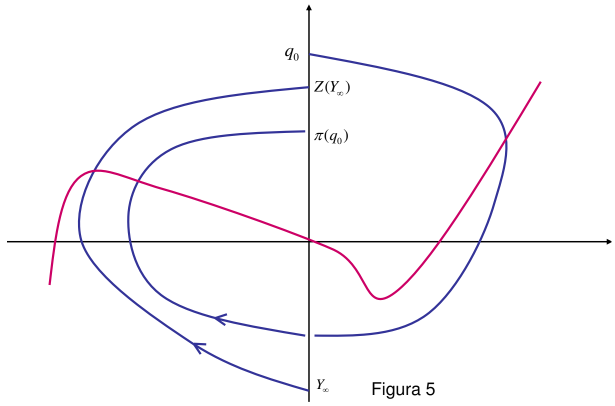
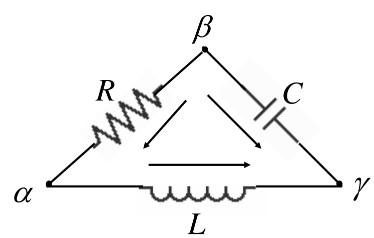


Figura 5

Capítulo 1
Antecedentes

1.1. Un circuito RCL

Para comenzar, daremos un ejemplo de un circuito RLC tomado de [3], del cual se deriva una ecuación diferencial que muestra cómo los estados del circuito varían en el tiempo.



Como se puede apreciar en la figura, este circuito consta de tres ramas, una resistencia denotada por R, un inductor denotado por L, y un condensador denotado por C. Digamos que una rama es como un dispositivo eléctrico con dos terminales. Por ejemplo, la rama R tiene terminales α y β, y estos están conectados entre sí a partir de los puntos o nodos α, β, γ.

La corriente que fluye en cada rama viene dada por un número real, y las denotaremos de la siguiente manera i_R, i_L, i_C. Por ejemplo, i_R mide la corriente a través del resistor, y así sucesivamente. El sentido de las flechas en el diagrama nos indican de qué manera la corriente está fluyendo, si por ejemplo, i_R es positivo, entonces, la corriente que fluye a través de la resistencia es desde α hasta β.

El estado de la corriente en un momento dado, es representada por el punto
$i = (i_R, i_L, i_C) \in \mathbb{R}^3$. Pero la primera ley de Kirchhoff (KCL) dice que puede ocurrir

una fuerte restricción sobre i. Recordemos que la primera ley de Kirchhoff afirma que "la corriente total que fluye en un nodo es igual a la corriente total que sale de ese nodo".

Para nuestro circuito esto es equivalente a decir lo siguiente

$$KCL: \qquad i_R = i_L = -i_C.$$

Esto define un subespacio unidimensional $K_1 \subset \mathbb{R}^3$, el estado de las corrientes físicas.

El estado del circuito es caracterizado por la corriente i junto con el voltaje de cada rama. Estos voltajes son denotados por v_R, v_L y v_C para el resistor, inductor y condensador respectivamente. Para medir el voltaje se coloca un voltímetro en cada uno de los nodos α, β, γ y se lee $V(\alpha)$ para α y así sucesivamente. Luego, v_R es la diferencia leída entre α y β, esto es

$$V(\beta) - V(\alpha) = v_R$$

La orientación de las flechas establece que $v_R = V(\beta) - V(\alpha)$ en lugar de $V(\alpha) - V(\beta)$.

Un estado de voltaje sin restricción del circuito viene dado por el punto $v = (v_R, v_L, v_C) \in \mathbb{R}^3$.

Por otro lado, la segunda ley de Kirchhoff (KVL) establece la siguiente restricción sobre v:

$$KVL: \qquad v_R + v_L - v_C = 0$$

Esto define un subespacio bidimensional $K_2 \subset \mathbb{R}^3$. Nótese que según KVL, es claro que:

$$v_R + v_L - v_C = (V(\beta) - V(\alpha)) + (V(\alpha) - V(\gamma)) - (V(\beta) - V(\gamma)) = 0$$

En un circuito en general, una versión de KVL afirma que el voltaje puede ser derivado de una "función potencial" V sobre los nodos.

En resumen, en el espacio del producto $S = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, los estados (i, v) que satisfacen las leyes de Kirchhoff forman un subespacio tridimensional K de la forma

$$K = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

A continuación, daremos una definición matemática sobre los tres tipos de dispositivos eléctricos del circuito.

Consideremos primero el elemento de resistencia. Un resistor en la rama R impone una "relación funcional" sobre i_R, v_R. En nuestro ejemplo, esta relación se define por una función G, la cual es diferenciable, con derivada continua y de variable real, de manera que $v_R = G(i_R)$. Si R denota una resistencia lineal, entonces G es lineal. Además, $v_R = G(i_R)$ es precisamente la Ley de Ohm generalizada.

Un estado físico $(i, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = S$, será aquel que satisfaga KCL y KVL. Estas condiciones definen un conjunto $\Sigma \subset K \subset S$. Así, el conjunto Σ del estado físico es aquel formado por los puntos $(i_R, i_L, i_C, v_R, v_L, v_C) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ el cual satisface:

- $i_R = i_L = -i_C \quad (KCL)$
- $v_R + v_L - v_C = 0 \quad (KVL)$
- $G(i_R) = v_R$ (Ley de Ohm generalizada)

Ahora bien, dado que es conocido el paso del tiempo en un estado, esto define una curva en el espacio S, digamos

$$t \to (i(t), v(t)) = (i_R(t), i_L(t), i_C(t), v_R(t), v_L(t), v_C(t))$$

Por un lado, el inductor satisface lo siguiente

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t) \qquad \text{(Ley de Faraday)},$$

donde L es una constante positiva llamada inductancia.

Por otro lado, el condensador establece la siguiente condición

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t),$$

donde C es una constante positiva llamada capacitancia.

Hasta ahora, se tiene lo siguiente: el estado de nuestro circuito está dado por seis números, esto es $(i_R, i_L, i_C, v_R, v_L, v_C)$, es decir, un elemento de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Estos números están sujetos a tres restricciones: la primera y segunda ley de Kirchhoff y la ley de Ohm generalizada. Por lo tanto el espacio de estados físicos es un conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. La forma en que estos estados cambian en el tiempo es determinada por dos ecuaciones diferenciales.

Ahora bien, para simplificar el estado del espacio Σ podemos observar que i_L y v_C determinan las otras cuatro coordenadas, ya que por KCL se cumple $i_R = i_L$ y $i_C = -i_L$. Además, por la ley de Ohm generalizada, se garantiza $v_R = G(i_R) = G(i_L)$. Asimismo, por KVL se satisface $v_L = v_C - v_R = v_C - G(i_L)$.

En consecuencia podemos usar $\mathbb{R}^2$ como espacio de estados considerando (i_L, v_C) como las coordenadas. Formalmente, definimos una función $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, que envía $(i, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ a (i_L, v_C). Entonces $\pi_0 = \pi|\Sigma$ es la restricción de π sobre Σ, esta función $\pi_0 : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^2$ es uno a uno y sobreyectiva. Además, su inversa está dada por la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \Sigma$, definida por

$$\varphi(i_L, v_C) = (i_L, i_L, -i_L, G(i_L), v_C - G(i_L), v_C)$$

Es fácil verificar que $\varphi(i_L, v_C)$ satisface KCL, KVL y la ley de Ohm generalizada. También se puede notar que π_0 y φ son la inversa una de la otra.

1.2. La Ecuación de Van der Pol

En esta sección adoptaremos $\mathbb{R}^2$ como nuestro espacio de estados. Las ecuaciones diferenciales que rigen el cambio de estado debe ser reescrita en términos de nuestras nuevas coordenadas (i_L, v_C), esto es:

$$L \cdot \frac{di_L}{dt} = v_L \equiv v_C - G(i_L),$$

$$C \cdot \frac{dv_C}{dt} = i_C \equiv -i_L.$$

Por simplicidad, consideremos $L = 1$, $C = 1$. Si escribimos $x = i_L$, $y = v_C$, tenemos una ecuación diferencial sobre el espacio cartesiano (x, y) de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = y - G(x) \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = -x.$$

En el caso en que $G(x) = x^3 - x$, se conoce como la Ecuación de Van der Pol.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Introducción

En este capítulo estableceremos la nomenclatura y notación de los conceptos que utilizaremos a lo largo del trabajo, además de algunos teoremas ya conocidos de cursos del último tercio de la carrera. La mayoría de los resultados expuestos se dan en cualquier curso de ecuaciones diferenciales y análisis matemático y son tomados principalmente de [1], [4],[5] y [8].

El sistema a estudiar es el siguiente:

$$\begin{cases} x' = y - (x^3 - x) \\ y' = -x \end{cases} \tag{2.1}$$

Definición 2.1. *Una **solución** de la ecuación diferencial*

$$x' = F(t, x)$$

es una función diferenciable $u : I \mapsto \mathbb{R}^n$, definida en un intervalo abierto I, tal que $(t, u(t)) \in W$ para cada $t \in I$ y $u'(t) = F(t, u(t))$, donde W es un conjunto abierto, no vacío de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $F : w \mapsto \mathbb{R}^n$ una función continua.

2.2. Teoremas de Prolongación de soluciones

Teorema 2.1. *(Prolongación de soluciones)*
Sea $u : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^n$ una solución de $x' = F(t, x)$ tal que $\beta < \infty$. Supongamos también que existe una sucesión $\{t_m\}$ en (α, β) convergiendo a β, tal que $\{u(t_m)\}$ converge a un punto x_0 de $\mathbb{R}^n$. Si $(\beta, x_0) \in W$ entonces u es prolongable a la derecha; es decir;

el sistema (2.1) posee una solución $w : I \mapsto \mathbb{R}^n$ *tal que* $(\alpha, \beta] \subset I$*. Tal solución, será llamada* ***solución maximal*** *de* $x' = F(t, x)$*.*

Demostración.

Ver Teorema 3.3, página 72 [8]. ■

Corolario 2.2. *(Prolongación)*
Sea $u : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^n$ *una solución de* $x' = F(t, x)$ *y supongamos que existe* $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *y un conjunto compacto* $K \subset W$ *tal que* $(t, u(t)) \in K$ *si* $t \in [t_0, \beta)$*. Entonces,* u *es prolongable a la derecha.*

Demostración.

Si consideramos $\beta = +\infty$, entonces $u : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^n$ no es prolongable a la derecha.

Para el caso donde $\beta < +\infty$, como el intervalo de definición de la solución es (α, β), se puede garantizar que existe una sucesión s_k, tal que $s_k \to \beta$, pues β es un punto de acumulación.

Como $s_k \in (\alpha, \beta)$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s_k \in [t_0, \beta)$ y por hipótesis se tiene que $\Lambda_k = (S_k, u(S_k)) \in K$, por ser K compacto, es secuencialmente compacto, por lo que existe una subsucesión $\Lambda_{n_k} = (s_{n_k}, u(s_{n_k})) \in K$, tal que
$\Lambda_{n_k} \to \Lambda_0 = (\beta, X_0) \in K \subset W$.

Luego, por teorema 2.1, se tiene que u es prolongable a la derecha. ■

2.3. Preliminares de Análisis

Teorema 2.3. *(Valor medio)*
Sea f *una función tal que:*

(i) f *es continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$*;*

(ii) f *es diferenciable en el intervalo abierto* (a, b)

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración.

Ver [6] capítulo 5 página 289. ■

Teorema 2.4. *(Valor intermedio)*
Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y k es un número que está estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir

$$f(a) < k < f(b) \qquad \text{ó} \qquad f(b) < k < f(a)$$

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = k.$$

Demostración.

Ver [6] capítulo 2 página 116. ■

Teorema 2.5. *(Bolzano)*
Sea f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y si además, en los extremos del intervalo la función f toma valores de signo opuesto $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ que satisface $f(c) = 0$.

Demostración.

Ver [6] capítulo 2 página 116. ■

Lema 2.6. *Sea f continua en $[0, a)$. Si $\lim\limits_{t \to a^-} f(t) = L$, entonces $f(t)$ es acotada en $[0, a)$.*

Demostración.

Como el límite existe, entonces se tiene que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } a - \delta < t < a \Rightarrow |f(t) - L| < \varepsilon.$$

De donde:

$$\begin{aligned} |f(t)-L|<\varepsilon &\Rightarrow -\varepsilon<f(t)-L<\varepsilon \\ &\Rightarrow L-\varepsilon<f(t)<L+\varepsilon, \forall\, t \in (a-\delta,a). \end{aligned}$$

Luego, $f(t)$ es acotada en $(a-\delta,a)$, además también lo es en el compacto $[0,a-\delta]$.

Así, $f(t)$ es acotada en $[0,a-\delta]\bigcup(a-\delta,a)=[0,a)$. ■

Lema 2.7. *Si $v'(s)$ es continua y acotada en $[0,\omega)$, entonces $v(s)$ es acotada en $[0,\omega)$.*

Demostración.

Como $v'(s)$ es acotada en $[0,\omega)$, entonces existe $R>0$ tal que

$$-R \leq v'(s) \leq R \ \ en \ \ [0,\omega)$$

Tomando t arbitrario, pero fijo en $[0,\omega)$ y usando la continuidad de $v'(s)$ en $[0,t)\subset[0,\omega)$ e integrando en ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} -R \leq v'(s) \leq R &\Rightarrow \int_0^t -Rds \leq \int_0^t v'(s)ds \leq \int_0^t Rds \\ &\Rightarrow -Rt \leq v(t)-v(0) \leq Rt \\ &\Rightarrow v(0)-Rt \leq v(t) \leq v(0)+Rt \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando $0\leq t<\omega$ se obtienen los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} 0\leq t<\omega &\Rightarrow 0\leq Rt \leq R\omega \\ &\Rightarrow 0 \geq -Rt \geq -R\omega \\ &\Rightarrow v(0) \geq v(0)-Rt \geq v(0)-R\omega \\ &\Rightarrow v(0)-R\omega \leq v(0)-Rt \leq v(t) \leq v(0)+Rt \leq v(0)+R\omega \\ &\Rightarrow v(0)-R\omega \leq v(t) \leq v(0)+R\omega \end{aligned}$$

Por tanto, $v(t)\in[v(0)-R\omega, v(0)+R\omega]$, es decir, $v(t)$ es acotada en $[0,w)$. ■

Lema 2.8. *(Lema de fluctuación)*
Supongamos que la función $f : (\alpha, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ es diferenciable y acotada en $(\alpha, +\infty)$, entonces existen sucesiones $(\tau_n) \nearrow +\infty$ y $(\theta_n) \nearrow +\infty$ tales que:

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\tau_n) = \limsup\limits_{t\to+\infty} f(t) = \overline{f}$ $\quad y \quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(\tau_n) = 0.$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\theta_n) = \liminf\limits_{t\to+\infty} f(t) = \underline{f}$ $\quad y \quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(\theta_n) = 0.$

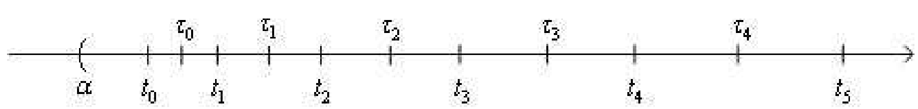
Demostración.

Siempre se cumple que

$$\underline{f} = \liminf_{t\to+\infty} f(t) \leq \limsup_{t\to+\infty} f(t) = \overline{f}$$

Hagamos un estudio por casos. Supongamos primero que $\underline{f} = \overline{f}$, en este caso $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ existe y $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \underline{f} = \overline{f}$.

Tomemos ahora una sucesión (t_n) en $(\alpha, +\infty)$ tal que
$\lim\limits_{n\to+\infty} t_{n+1} - t_n = +\infty$.



Ahora bien, por el teorema del valor medio existe una sucesión (τ_n) tal que $\tau_n \in (t_n, t_{n+1})$ y

$$f'(\tau_n) = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n},$$

Además, como f es acotada y dado que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{n+1} - t_n = \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_{n+1} - t_n} = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to+\infty} f'(\tau_n) = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} f(\tau_n) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \overline{f} = \underline{f} \text{ y } \lim_{n\to+\infty} f'(\tau_n) = 0$$

En este caso las sucesiones (τ_n) y (θ_n) coinciden.

Si $\underline{f} < \overline{f}$, entonces para cada $\lambda \in (\underline{f}, \overline{f})$, existen t_1, t_2 y t_3 tales que $\alpha < t_1 < t_2 < t_3$ y satisfacen que $f(t_1) = \lambda$, $f(t_2) > \lambda$ y $f(t_3) = \lambda$.

En efecto, recordemos que si $\lambda < \lim_{x\to+\infty} \sup f(x) = \inf_{M>0} \sup_{x>M} f(x)$, entonces existe $M > 0$ y existe un $x_0 > M$ tal que $f(x_0) > \lambda$. En nuestro caso si $\lambda > \underline{f}$, entonces existe $x_0 > M > 0$ $(M > \alpha)$ tal que $f(x_0) < \lambda$.

Por un lado, veamos que $\lim_{x\to+\infty} \sup f(x) = \inf_{x_0>0} \sup_{x>x_0} f(x)$. Para ello, consideremos $\lambda < \overline{f}$, entonces existe $x_1 > x_0 > 0$ tal que $f(x_1) > \lambda$ y por el teorema del valor intermedio existe $x_2 \in (x_0, x_1)$ tal que $f(x_2) = \lambda$.

Por otro lado, veamos que $\lim_{x\to+\infty} \inf f(x) = \sup_{x_1>0} \inf_{x>x_1} f(x)$. En este caso, si $\lambda > \underline{f}$ entonces existe $x_3 > x_1 > 0$ tal que $f(x_3) < \lambda$, nuevamente por el teorema del valor intermedio existe $x_4 \in (x_1, x_3)$ tal que $f(x_4) = \lambda$.

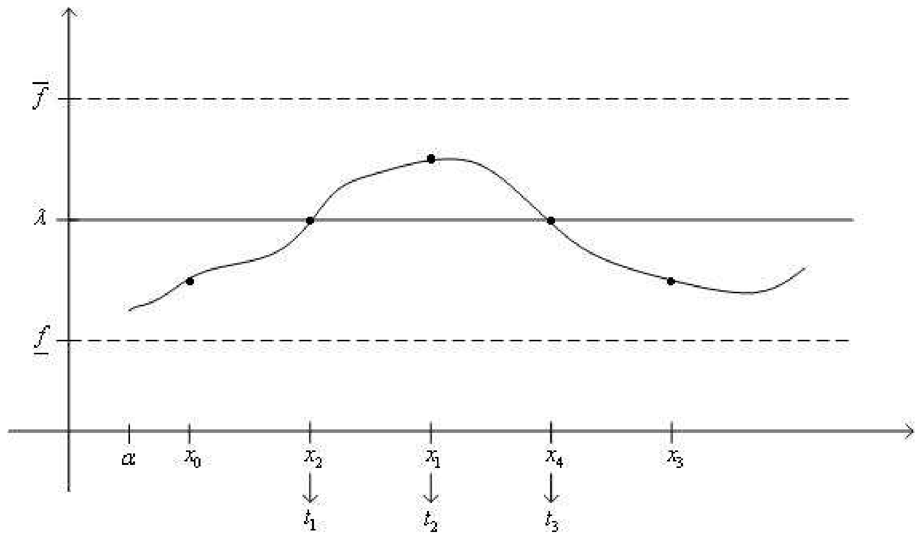
Si consideramos $t_1 = x_2$, $t_2 = x_1$ y $t_3 = x_4$, entonces existen $t_1 < t_2 < t_3$ tales que $f(t_1) = \lambda$, $f(t_2) > \lambda$ y $f(t_3) = \lambda$.

Luego, como f es continua y $f(t_2) > \lambda = f(t_1) = f(t_3)$, entonces existe $\tau_1 \in (t_1, t_3)$ de tal manera que $f(\tau_1)$ es un máximo de f y como f es diferenciable se tiene que $f'(\tau_1) = 0$.

Consideremos una sucesión creciente $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, tal que:

- $\overline{f} = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n$
- $\underline{f} < \lambda_n < \overline{f}$

Por lo anterior existen sucesiones crecientes (t_n) y (τ_n) tales que $\tau_n > t_n \nearrow +\infty$, $f(\tau_n) > f(t_n) = \lambda_n$.



Luego,

$$\begin{aligned}\overline{f} = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lim_{n\to+\infty} f(t_n) &= \lim_{n\to+\infty} \inf f(t_n)\\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \inf f(\tau_n)\\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \sup f(\tau_n)\\ &\leq \overline{f}\end{aligned}$$

esto es una sucesión creciente (τ_n) tal que:

- $\lim_{n\to+\infty} f(\tau_n) = \overline{f}$
- $\lim_{n\to+\infty} f'(\tau_n) = 0.$

Para encontrar la sucesión (θ_n) basta con hacer el mismo análisis anterior pero para $F(t) = -f(t)$. ■

Lema 2.9. *Si f es dos veces diferenciable en $(0, +\infty)$, f'' es acotada en $(0, +\infty)$ y $f(t) \to 0$, si $t \to \infty$, entonces $f'(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.*

Demostración.

Ver página 116 en [5]. ■

Lema 2.10. *Sea v una función diferenciable en $[0,+\infty)$ tal que $v'(t) < 0$ en $[0,+\infty)$ y $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$, entonces $v(t) > 0$ en $[0,+\infty)$.*

Demostración.

Supongamos por reducción al absurdo que existe $s \in [0,+\infty)$ tal que $v(s) < 0$.

Aplicando la definición de límite en el infinito, para $\varepsilon = -v(s) > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$|v(t)| < -v(s), \text{ si } t > M.$$

Esto es,

$$\forall\ t > M,\ v(s) < v(t) < -v(s).$$

Ahora bien, estudiemos los siguientes casos con respecto a s.

Caso 1: $s > M$

Si $s > M$, entonces la desigualdad anterior se satisface en $t = s$. Esto es, $v(s) < v(s)$. Lo cual es una contradicción.

Caso 2: $s < M$

Si $s < M$, entonces $s < t$. Como $v'(t) < 0$, en consecuencia $v(s) > v(t)$. Lo cual implica una contradicción, pues para todo $t > M, v(s) < v(t)$.

Luego, $v(t) > 0$ para todo $t \in [0,+\infty)$ que era lo que se quería probar. ■

Lema 2.11. *Si $G(x) = x^3 - x$, entonces existe una sucesión x_n decreciente y que converge a cero tal que $G(x_n) = x_n^3 - x_n < 0$.*

Demostración.

Sea $G(x) = x^3 - x$, la cual puede ser escrita como $G(x) = x(x^2 - 1)$. Además, $x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x^2 - 1 = 0$.

Nótese que $x^2 - 1 < 0$, para todo $x \in (-1, 1)$. Luego, si tomamos una sucesión $x_n \to 0$ en forma decreciente en el compacto $[0, 1]$, entonces $x_n^2 < 1$.

Así, $x_n^2 - 1 < 0$. Pero $x_n > 0$, por lo que $x_n(x_n^2 - 1) < 0$. Es decir, existe una sucesión $x_n \searrow 0$ tal que $x_n(x_n^2 - 1) = x_n^3 - x_n < 0$. ■

Teorema 2.12. *(Función implícita)*
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^{k+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ *una función de clase* $C^r(A)$*. Escribamos* $f(x, y) = f(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k)$*, supóngase* $(a, b) \in A$ *con* $f(a, b) = 0$ *y* $det\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$*, entonces existe* B_a *vecindad de* a *en* $\mathbb{R}^k$ *y existe una única función* $g : B_a \subset \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ *tal que* $g(a) = b$ *y* $f(x, g(x)) = 0$*, para todo* $x \in B_a$ *y* g *es de clase* $C^r(B)$*.*

Demostración.

Ver teorema 9.2, página 74 de [2]

Definición 2.2. *Diremos que* F *es* ***localmente Lipschitziana*** *en* x*, si dado* $(t_0, x_0) \in W$*, donde* W *es un conjunto abierto, no vacío de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, entonces existe un rectángulo* R *centrado en* (t_0, x_0) *y una constante* $L > 0$ *tal que*

$$||F(t, x) - F(t, y)|| \leq L||x - y||, \forall\,(t, x),\,(t, y)\, \in R.$$

2.4. Lema de Gronwall y Teorema de Unicidad

Lema 2.13. *(Desigualdad de Gronwall)*
Sea $\varphi : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ *una función continua tal que*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \right| \quad , t \in (a, b)$$

para algún $t_0 \in (a, b)$ *y algunas constantes* $\alpha, \beta \geq 0$*, entonces* $\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}$*, para todo* $t \in (a, b)$*.*

Demostración.

Ver página 22 en [8]. ■

Teorema 2.14. *(Unicidad)*
Supongamos que F es localmente Lipschitziana en x y sean $u : I \mapsto \mathbb{R}^n$, $v : J \mapsto \mathbb{R}^n$ soluciones de $x' = F(t,x)$ que coinciden en algún punto. Entonces, $u \equiv v$ en $I \cap J$.

Demostración.

Definamos $A = \{t \in I \cap J : \ u(t) = v(t)\}$. Por hipótesis, A no es vacío y como u, v son continuas, A es cerrado en $I \cap J$. Por otra parte, $I \cap J$ es conexo y así es suficiente para probar que A es abierto en $I \cap J$, pues en ese caso, tendremos que $A = I \cap J$.

Para ello, fijemos $t_0 \in A$ y pongamos $x_0 = u(t_0) = v(t_0)$. Tomemos ahora un rectángulo $R = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, r)} \subseteq W$ y una constante $L > 0$ que satisface la desigualdad de la definición (2.2). Ya que u, v son continuas, existe $\alpha \in (0, \delta]$ tal que $u(t), v(t) \in B(x_0, r)$ para cada $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, en particular

$$\|F(t, u(t)) - F(t, v(t))\| \leq L\|u(t) - v(t)\| \quad \text{si} \quad |t - t_0| \leq \alpha.$$

Por otra parte, u, v son soluciones de

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds$$

y de aquí se puede deducir la siguiente expresión

$$u(t) - v(t) = \int_{t_0}^{t} [F(s, u(s)) - F(s, v(x))]ds; \qquad \forall\, t \in I \cap J,$$

por lo tanto,

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|F(s, u(s)) - F(s, v(s))ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\|ds \right|,$$

si $|t - t_0| \leq \alpha$.

Por el lema 2.13 (desigualdad de Gronwall) concluimos que,

$$u(t) = v(t), \quad \forall\, t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha).$$

Así, $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset A$. ■

Corolario 2.15. *(Dependencia continua de las condiciones iniciales)*
Sea $\{F_k : W \mapsto \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente en compactos a una función* $F : W \mapsto \mathbb{R}^n$*. Supongamos además que para* $(t_0, x_0) \in W$*, existen* $r, L > 0$ *tales que*

$$||F_k(t,x) - F_k(t,y)|| \leq L||x-y||; \text{ si } |t-t_0| \leq r, \; x, y \in \overline{B}(x_0, r),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$*. (Note que* F *es continua en* W *y localmente Lipschitziana en* x*). Sea* $\{(t_k, x_k)\}$ *una sucesión en* W *convergiendo a un punto* (t_0, x_0) *en* W *y* $u : I \mapsto \mathbb{R}^n$ *la solución de* $x' = F_\lambda(t,x)$*;* $x(0) = 0$*. Si* $u_k : I_k \mapsto \mathbb{R}^n$ *denota la solución del problema*

$$x' = F_k(t,x); x(t_k) = x_k,$$

entonces dado cualquier intervalo compacto K *en* I *existe un entero* $k_0 \geq 1$ *tal que* $K \subset I_k$ *para todo* $k \geq k_0$ *y* $u_k(t) \to u(t)$ *uniforme en* K*.*

Demostración.

Ver corolario 4.6, página 76 en [8]. ■

2.5. Estabilidad y Funciones de Liapunov

Definición 2.3. *Diremos que un punto* $x_* \in U$ *es un* ***equilibrio*** *de* $x' = F(t,x)$ *si* $f(x_*) = 0$*. En este caso, también se dice que* x_* *es un punto crítico o de reposo.*

Definición 2.4. *Diremos que un punto de equilibrio* x_0 *de* $x' = F(t,x)$ *es* ***estable*** *si para cada vecindad* $V \subset U$ *de* x_0 *existe otra vecindad* W *de* x_0 *tal que la solución de* $x' = F(t,x)$*; con* $x(0) = \xi$*, está definida en* $[0, \infty)$ *para cada* $\xi \in W$ *y* $u(t,\xi) \in V$ *si* $\xi \in W$ *y* $t \geq 0$*. Si el punto* x_0 *no es estable, decimos que es* ***inestable****.*

Definición 2.5. *Se dice que* x *es un* ***punto fijo*** *de la función* f*, si y sólo si* $f(x) = x$*.*

Nota 2.1. *Dada una función* $V : \Theta \mapsto \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *definida en un abierto* $\Theta \subseteq U$*, denotamos por* $\dot{V} : \Theta \mapsto \mathbb{R}$ *la función*

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle_E$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ *denota el producto Euclídeo usual en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\nabla V(x)$ *denota el gradiente de* V *en* x. *Es decir,*

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right).$$

■

Definición 2.6. *Se dice que una aplicación de clase* C^1 $V : \Theta \mapsto \mathbb{R}$ *es una* ***función de Liapunov*** *para el sistema 2.1, en un punto de equilibrio* $x_0 \in \Theta$, *si:*

(i) $V(x_0) = 0$;

(ii) $V(x) > 0$ *si* $x \neq x_0$;

(iii) $\dot{V} \leq 0$ *en* Θ.

Si además $\dot{V}(x) < 0$ *para* $x \neq x_0$, *diremos que* V *es una función de* ***Liapunov estricta***.

Teorema 2.16. *(Inestabilidad)*
Sea $V : \theta \mapsto \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *definida en una vecindad abierta* $\theta \subset U$ *de un punto de equilibrio* x_0, *tal que:*

(i) $V(x_0) = 0$;

(ii) *Toda vecindad de* x_0 *contiene un punto donde* V *es negativa;*

(iii) $\dot{V}(x) < 0$ *si* $x \neq x_0$.

Entonces x_0 *es inestable.*

Demostración.

Ver teorema 4.9, página 95 de [8]. ■

Lema 2.17. *Sea* $V : \theta \mapsto \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *definida en una vecindad abierta* $\theta \subset U$ *de un punto de equilibrio* x_0, *tal que:*

(i) $V(x_0) = 0$;

(ii) $V(x) > 0$ *si* $x \neq x_0$;

(iii) $\dot{V} \geq 0$.

Si $u : I \mapsto U$ *es una solución maximal de* $x' = F(t, x)$ *con* $\theta \in I$ *y* $u(0) \neq x_0$*, entonces existe una vecindad* W *de* x_0 *tal que* $u(t) \notin W$ *si* $t \in [0, \beta) := I \bigcap [0, \infty]$.

Demostración.

Ver proposición 4.11, página 97 de [8]. ■

Capítulo 3

La Ecuación de Van der Pol

En este capítulo probaremos el resultado principal de este trabajo, es decir, vamos a demostrar la existencia de una solución periódica no trivial pata el sistema:

$$\begin{cases} x' = y - (x^3 - x) \\ y' = -x \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1. Intersección con la curva $y = x^3 - x$

Proposición 3.1. *Sea (u, v) una solución del sistema (3.1). Si $u(0) = 0$ y $v(0) > 0$, entonces existe $\tau > 0$ tal que $u'(\tau) = 0$ y $u' > 0$ en $[0, \tau)$.(Ver figura 1)*

Demostración.

Consideremos (u, v) una solución del sistema (3.1), por lo que se satisface

$$u'(t) = v(t) - (u^3(t) - u(t)).$$

Más aún, cuando $t = 0$, se cumple que

$$u'(0) = v(0) - (u^3(0) - u(0)) = v(0) > 0.$$

Trabajemos por reducción al absurdo, supongamos que $u'(t) > 0$ en el intervalo $[0, \omega) = [0, +\infty) \bigcap I$, donde I es el dominio de (u, v) y $[0, \omega)$ es el intervalo de la solución maximal.

Sea $t \in [0, \omega)$, integramos $u'(t)$ desde 0 hasta t; es decir,

$$\int_0^t u'(s)ds = u(t) - u(0) = u(t) - 0 = u(t).$$

Como $u'(t) > 0 \ \forall \ t \in [0, \omega)$ se tiene que $\int_0^t u'(s)ds > 0$, en consecuencia $u(t) > 0$.

Así, $v'(t) = -u(t) < 0$, para todo $t \in [0, \omega)$.

Ahora bien, por un lado, sabemos que

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - x) = \lim_{x \to +\infty} x(x^2 - 1) = +\infty,$$

por tanto, $x^3 - x$ está acotada inferiormente en $[0, \omega)$.

Por otro lado, del sistema (3.1) se tiene que

$$u'(t) = v(t) - (u^3(t) - u(t)),$$

despejando $v(t)$ se obtiene

$$v(t) = u'(t) + (u^3(t) - u(t)) > u^3(t) - u(t),$$

entonces $v(t) > u^3(t) - u(t)$. Como $u^3 - u$ está acotada inferiormente en $[0, \omega)$, también lo está $v(t)$. Además como $v(t)$ es decreciente, se tiene que está acotada superiormente por $v(0)$. Así, $v(t)$ es acotada en $[0, \omega)$.

En consecuencia,

$$\lim_{t \to \omega^-} v(t) = \mu.$$

Ahora bien, estudiemos los siguientes casos con respecto a ω.

Caso 1: $\omega < +\infty$

Por corolario 2.2, (u, v) no está acotada en $[0, \omega)$. Esto es, $(t, u(t), v(t))$ no es acotada en $[0, \omega)$ pues de serlo, sería posible encontrar $\alpha > 0$ tal que:

$$||(t, u(t), v(t))|| \leq \alpha, \ \forall \ t \in [0, \omega).$$

Así, $(t, u(t), v(t)) \in \overline{B(0, \alpha)} = K$ compacto. Luego, $(u(t), v(t))$ sería prolongable a la derecha de ω, lo cual contradice la maximalidad de $[0, \omega)$.

En consecuencia, $u(t)$ no está acotada superiormente en $[0, \omega)$; ya que $u(t) > 0$ en $[0, \omega)$ y además $\lim_{t \to \omega^-} v(t) = \mu < +\infty$.

Por tanto, $\lim_{t \to \omega^-} u(t) = +\infty$.

Por otro lado, probemos que existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ en $[0, \omega)$ tal que $u'(t_n) \to +\infty$.

Para esto, consideremos $\alpha_n = \omega - \frac{1}{n}$ y aplicando el teorema del valor medio, se tiene que para cada n existe $t_n \in [0, \alpha_n] \subset [0, \omega)$ tal que

$$u'(t_n) = \frac{u(\alpha_n) - u(0)}{\alpha_n}.$$

Aplicando límite a la expresión anterior, se obtiene

$$\lim_{n \to \infty} u'(t_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{u(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim_{t \to \omega^-} \frac{u(t)}{t} = +\infty$$

Recordemos que $u(t) > 0$ en $[0, \omega)$, por tanto $v'(t) = -u(t) < 0$ en $[0, \omega)$; es decir, $v(t)$ decrece en $[0, \omega)$, y por lo tanto para $t_n > 0$, $\quad v(t_n) < v(0)$.

En consecuencia,

$$u'(t_n) = v(t_n) - (u^3(t_n) - u(t_n)) \Rightarrow u^3(t_n) - u(t_n) = v(t_n) - u'(t_n) < v(0) - u'(t_n).$$

Así, podemos concluir que $\lim_{n \to \infty} u^3(t_n) - u(t_n) = -\infty$. Lo cual contradice que $u^3 - u$ es acotada inferiormente.

Con esto termina la prueba del primer caso.

Caso 2: $\omega = +\infty$

En este caso, existe $t_n \to +\infty$ tal que $v'(t_n) \to 0$

En efecto, consideremos $s_n = t+n$ y $r_n = t+2n$, aplicando el teorema del valor medio a $v(t)$ en $(t+n, t+2n)$, existe $t_n \in (t+n, t+2n)$ tal que

$$v'(t_n) = \frac{v(r_n) - v(s_n)}{t+2n-(t+n)} = \frac{v(r_n) - v(s_n)}{n} \Rightarrow |v'(t_n)| = \left|\frac{v(r_n) - v(s_n)}{n}\right|. \tag{3.2}$$

Como $v(t)$ es decreciente en $[0, \omega)$, se cumple $v(0) \geq v(t)$,$\forall\ t \in [0, \omega)$. Además, $v(t)$ es acotada inferiormente, por tanto se satisface $k_0 \leq v(t) \leq v(0)$, más aún, $|v(t)| \leq k$.

Así, en (3.2) se cumple

$$0 \leq |v'(t_n)| = \left|\frac{v(r_n) - v(s_n)}{n}\right| \leq \frac{k+k}{n} = \frac{2k}{n}.$$

En consecuencia, $\lim\limits_{n\to\infty} v'(t_n) = 0$, y dado que $v'(t_n) = -u(t_n)$, entonces hemos encontrado una sucesión t_n, tal que $u(t_n) \to 0$. Lo cual es una contradicción, pues u es creciente y positiva en $[0, \omega)$.

En ambos casos, la contradicción proviene de haber supuesto que $u'(t) > 0$ en $[0, \omega)$.

Luego, existe un primer tiempo τ tal que $u'(\tau) = 0$ y $u'(t) > 0$ en $[0, \tau)$. ■

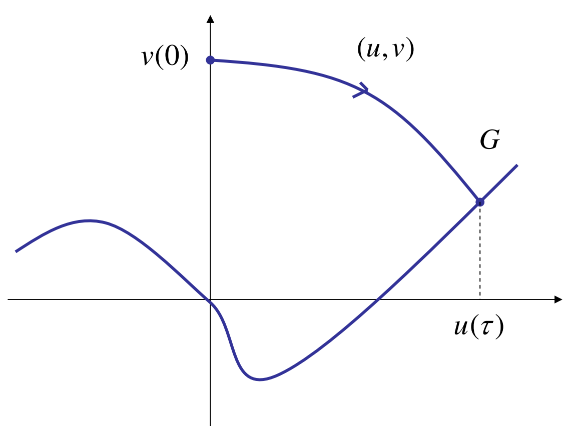


Figura 1

Lema 3.1. *Sea* (u, v) *una solución del sistema (3.1). Si* $u > 0$ *en* $[0, \omega)$, $u'(0) \leq 0 < u(0)$, *entonces*

$$u'(t) < 0, \textit{para todo} t \in \ (0, \omega).$$

Demostración.

Sea $[0, \omega)$ el intervalo maximal de solución.

Por hipótesis se tiene que $u'(0) \leq 0$, por lo que estudiaremos los siguientes casos con respecto a $u'(0)$.

Caso 1: $u'(0) < 0$.

Si $u'(0) < 0$, entonces por continuidad existe $T > 0$ tal que $u'(t) < 0$ en $(0, T)$.

En efecto,

$$\lim_{t \to 0} u'(t) = u'(0) < 0$$

Luego,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists T > 0 \ \textit{tal que} \ |u'(t) - u'(0)| < \varepsilon, \ \textit{si} \ -T < t < T$$

Sea $\varepsilon = \dfrac{-u'(0)}{2} > 0$

Entonces,

$$\begin{aligned} -\varepsilon < u'(t) - u'(0) < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \frac{u'(0)}{2} < u'(t) - u'(0) < \frac{-u'(0)}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad u'(t) < u'(0) - \frac{u'(0)}{2} = \frac{-u'(0)}{2} \\ &\Rightarrow \quad u'(t) < \frac{u'(0)}{2} < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u'(t) < 0$ en $-T < t < T$. Más aún, $u'(t) < 0$ en $[0, T)$.

Caso 2: $u'(0) = 0$.

Por el sistema (3.1), tenemos

$$u'(t) = v(t) - (u^3(t) - u(t)) \Rightarrow u^{''}(t) = v'(t) - (3u^2(t) - 1)u'(t)$$

En particular, para $t = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} u^{''}(0) &= v'(0) - (3u^2(0) - 1)u'(0) \\ &= v'(0) \\ &= -u(0) < 0 \end{aligned}$$

Así, $u''(0) < 0$.

Luego, por continuidad, existe $\hat{T} > 0$ tal que $u''(t) < 0$ en $[0, \hat{T})$. Si $0 \leq s < t \leq \hat{T}$, entonces $u''(s) < 0$, $\forall\, s \in [0, \hat{T})$.

Integrando $u''(t)$ desde 0 hasta t, con $t \in [0, \hat{T})$, se tiene que

$$\int_0^t u''(s)ds = u'(t) - u'(0) < 0$$

Por tanto, $u'(t) < 0$, $\forall\ t \in [0, \hat{T})$.

Así, en ambos casos demostramos que existe T tal que $u'(t) < 0$, $\forall\ t \in [0, T)$.

Ahora bien, veamos que esta condición se mantiene en $(0, \omega)$. Supongamos que esto no ocurre, es decir, existe $\tau \in (0, \omega)$ tal que $u'(\tau) = 0$ y $u'(t) < 0$, $\forall\ t \in (0, \tau) \subset (0, \omega)$.

Por un lado,

$$\begin{aligned} u''(\tau) &= v'(\tau) - (3u''(\tau) - 1)u'(\tau) \\ &= v'(\tau) \\ &= -u(\tau) < 0. \end{aligned}$$

Así, se obtiene que

$$u''(\tau) < 0. \tag{3.3}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} u''(\tau) &= \lim_{t\to\tau^-} \frac{u'(t)-u'(\tau)}{t-\tau} \\ &= \lim_{t\to\tau^-} \frac{u'(t)}{t-\tau} \end{aligned}$$

Además, $u'(t) < 0$ en $(0,\tau)$ y cuando $t \to \tau^-$, $t-\tau < 0$, en consecuencia

$$u''(\tau) = \lim_{t\to\tau^-} \frac{u'(t)}{t-\tau} \geq 0$$

Esto es, $u''(\tau) \geq 0$. Lo cual contradice (3.3). Tal contradicción proviene de suponer que $u'(t) < 0, \forall\ t \in (0,T)$ no se mantiene en $(0,\omega)$, es decir, $u'(t) < 0, \forall\ t \in (0,\omega)$.

Así, hemos demostrado

$$u'(t) < 0,\ \forall\ t \in (0,\omega).$$

■

3.2. Oscilación y soluciones periódicas

Proposición 3.2. *Sea (u,v) solución del sistema (3.1). Si $u'(0) \leq 0 < u(0)$, entonces existe $t_* > 0$ tal que $u(t_*) = 0$ y $u'(t) < 0$ en $(0,t_*]$, en particular, $v(t_*) = u'(t_*) < 0$.(ver figura 2)*

Demostración.

Sea $[0,\omega) = I \cap (0,+\infty)$ el intervalo maximal de la solución y consideremos (u,v) solución del sistema (3.1) y supongamos por reducción al absurdo que $u(t) > 0$, $\forall\, t \in [0,\omega)$ (es decir, u está acotada inferiormente por cero).

Por lema 3.1, se tiene que $u'(t) < 0, \forall\, t \in (0,\omega)$. Es decir, u es monótona decreciente en $(0,\omega)$ y por ser acotada inferiormente por cero, se tiene que $\lim_{t\to\omega^-} u(t) = \lambda \geq 0$ existe y es finito.

Por tanto, se puede garantizar que $\lim_{t\to\omega^-} -u(t) = -\lambda = \lim_{t\to\omega^-} v'(t)$, también existe. Luego, por lema 2.6 se tiene que $v'(t)$ es acotada en $[0,\omega)$.

Con esto se concluye que $\omega = +\infty$, ya que de no serlo, por el lema 2.7

$$v(t) \in [v(0) - R\omega, v(0) + R\omega]$$

y en consecuencia $(t, u(t), v(t)) \in [0,\omega] \times [v(0) - R\omega, v(0) + R\omega] = K$ compacto.

Así por el corolario de prolongación, $v(t)$ sería prolongable a la derecha de ω, lo cual contradice la maximalidad de $[0,\omega)$.

Ahora bien, como $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lambda$, entonces nuevamente por el lema 2.6, $u(t)$ es acotada en $(0,+\infty)$.

Además, $u(t)$ es diferenciable y por el lema 2.8, existe una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $\lim_{t\to+\infty} u'(t_n) = 0$.

Por tanto,

$$u'(t_n) = v(t_n) - (u^3(t_n) - u(t_n)) \to 0.$$

Esto es,

$$v(t_n) \to u^3(t_n) - u(t_n) = \lambda^3 - \lambda.$$

Pero, como $u(t) > 0$ en $(0,\omega)$, entonces $v'(t) = -u(t) < 0$. En consecuencia, $v'(s) < 0, \forall\, s \in (0,+\infty)$.

Así, tomando $0 \leq s < t < +\infty$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^t v'(s)ds < 0 \quad &\Rightarrow \quad v(t) - v(0) < 0 \\ &\Rightarrow \quad v(t) < v(0). \end{aligned}$$

Además, como $v(t_n)$ converge, entonces $v(t_n)$ es acotada. Esto es, existe $R > 0$ tal que

$$|v(t_n)| \leq R.$$

Ahora bien, como $v'(s) < 0, v$ decrece en $(0, \omega)$. Así, dado $t \in [0, +\infty)$, existe t_n tal que $t_n > t$, por lo que $v(t) > v(t_n)$.

Así, $-R \leq v(t_n) < v(t) < v(0)$. Es decir, $v(t)$ es acotada en $(0, +\infty)$.

En resumen, hemos probado que:

(i) Existe t_n tal que $v(t_n) \to \lambda^3 - \lambda$.

(ii) $v(t)$ decrece y es acotada en $(0, +\infty)$.

De acá, $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \lambda^3 - \lambda$ y además $\lim\limits_{t \to +\infty} v'(t_n) = -\lambda$.

Ahora bien, apliquemos el lema 2.9 a $f(t) = v(t) - (\lambda^3 - \lambda)$. Para esto, verifiquemos que se cumplen las hipótesis de dicho lema. Esto es:

- $f'(t) = v'(t) = -u(t) \Rightarrow f''(t) = -u'(t)$

Así, $f''(t)$ existe en $(0, +\infty)$.

- $$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} f''(t) &= \lim_{t \to +\infty} -u'(t) \\ &= -\lim_{t \to \infty} (v(t) - (u^3(t) - u(t)) \\ &= -(\lambda^3 - \lambda - \lambda^3 + \lambda) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $f''(t)$ es acotada en $(0, +\infty)$.

- $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{t \to \infty} [v(t) - (\lambda^3 - \lambda)] = 0.$

Por tanto, hemos probado que $\lim\limits_{t \to +\infty} v'(t) - \lambda = 0$. En consecuencia,

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lambda^3 - \lambda = 0.$$

Además, como $v'(t) < 0, \forall\, t \in (0, +\infty)$, entonces por el lema 2.10, se tiene que $v(t) > 0$ en $(0, +\infty)$.

Ahora bien, por el lema 3.1, tenemos que $u'(t) < 0$.

En consecuencia, $v(t) - (u^3(t) - u(t)) < 0$. Lo cual implica $u^3(t) - u(t) > v(t)$ en $(0, +\infty)$. Más aún, $u^3(t) - u(t) > 0$ en $(0, u(0)) \subset (0, +\infty)$.

Lo cual contradice el lema 2.11, pues sería imposible hallar una sucesión decreciente y convergente a cero tal que $u_n^3(t) - u_n(t) < 0$.

Esta contradicción proviene de haber supuesto que $u(t) > 0$ en $(0, \omega)$.

Pero, como $u(0) > 0$, entonces existe $t_* > 0$ tal que $u(t_*) = 0$ y $u(t) > 0$ en $(0, t_*)$.

Repitiendo el argumento que se usó en el lema 3.1, tenemos que $u' < 0$ en $(0, t_*)$.

Ahora bien,

$$u'(t_*) = v(t_*) - (u^3(t_*) - u(t_*)) = v(t_*)$$

Además, como $(0, 0)$ es punto de equilibrio y (u, v) es una solución no trivial del sistema (3.1) y $u(t_*) = 0$, no puede ser $v(t_*) = 0$.

Esto es, como $u' < 0$ en $(0, t_*)$ y $u'(t_*) = v(t_*) \neq 0$, entonces $u'(t_*) < 0$; ya que si $u'(t_*) > 0$, por continuidad de u' en t_* se tiene que dado $\varepsilon = \frac{u'(t_*)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|u'(t) - u'(t_*)| < \frac{u'(t_*)}{2} \quad para \quad |t - t_*| < \delta.$$

De allí,

$$-\frac{u'(t_*)}{2} < u'(t) - u'(t_*) < \frac{u'(t_*)}{2} \Rightarrow 0 < \frac{u'(t_*)}{2} < u'(t) < \frac{3}{2}u'(t_*).$$

En consecuencia, $u'(t) > 0$ en $|t - t_*| < \delta$. Más aún, $u'(t) > 0$ en $(t_* - \delta, t_*) \subset (0, t_*)$. Lo que contradice que $u' < 0$ en $(0, t_*)$.

Por lo tanto, $u'(t_*) < 0$ y así $v(t_*) = u'(t_*)$ también es negativo. ■

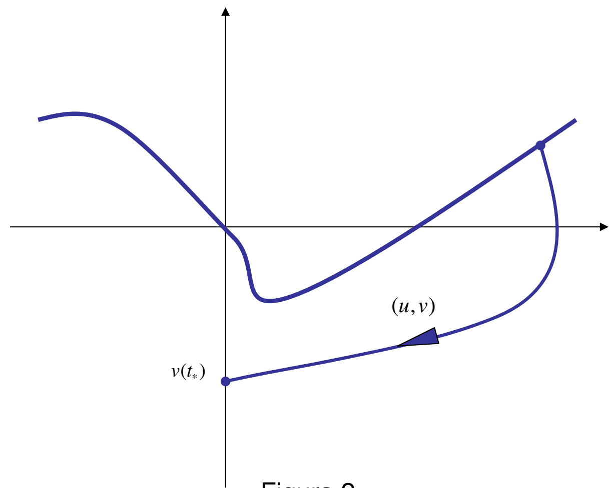


Figura 2

Observación 3.1. *Dado* $q \in \mathbb{R}$, *denotemos por* $(u(t,q), v(t,q))$ *a la solución del sistema que en el tiempo* $t = 0$ *pasa por* $(0, q)$. *En símbolos,* $u(0,q) = 0$ *y* $v(0,q) = q$.

Si las hipótesis de la proposición 3.1 se satisfacen, entonces para cada $q > 0$ *existe* $\Delta(q) > 0$ *tal que*

$$u'(t,q) > 0 \text{ en } [0, \Delta(q)) \quad y \quad u'(\Delta(q), q) = 0.$$

Además, si se satisfacen las hipótesis de la proposición 3.2, entonces aplicando dicha proposición a la solución $(u, v) = (t + \Delta(q), q)$, *con* $q > 0$, *se obtiene la existencia de un valor* $T(q) > \Delta(q)$ *tal que* $u'(t,q) < 0$ *en* $(\Delta(q), T(q))$ *y* $u(T(q), q) = 0$.

Ahora bien, veamos que nos encontramos del lado derecho del plano uv, esto es $u(t,q) > 0$ *en* $(0, T(q))$.

En efecto, estudiemos el comportamiento del signo de $u(t,q)$ *en cada uno de los siguientes intervalos.*

- *Para* $t \in (0, \Delta(q))$, *por la proposición 3.1 se tiene que* $u'(t,q) > 0$ *en* $(0, \Delta(q))$ *y* $u'(\Delta(q), q) = 0$. *Así, integrando esta desigualdad tenemos:*

$$\begin{aligned}\int_0^t u'(s,q)ds > 0 \quad &\Rightarrow \quad u(t,q) - u(0,q) > 0 \\ &\Rightarrow \quad u(t,q) > 0.\end{aligned}$$

- *Para $t \in [\Delta(q), T(q))$, por la proposición 3.2 se tiene que $u'(t,q) < 0$ y $u(T(q),q) = 0$, integrando tal desigualdad se obtiene:*

$$\begin{aligned}\int_t^{T(q)} u'(s,q)ds < 0 \quad &\Rightarrow \quad u(T(q),q) - u(t,q) < 0 \\ &\Rightarrow \quad -u(t,q) < 0 \\ &\Rightarrow \quad u(t,q) > 0.\end{aligned}$$

Así, en la unión de los intervalos anteriores se tiene que $u(t,q) > 0$, luego $u(t,q)$ es positiva en $(0, T(q))$, es decir, la trayectoria de la solución está del lado derecho del plano.

Como $u(T(q),q) = 0$, entonces $T(q)$ es el primer tiempo en que $u(t,q)$ se anula. ■

En lo que sigue, estudiaremos algunas propiedades de la función $Y : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ dada por $Y(q) = v(T(q), q)$.

Comencemos por notar la siguiente propiedad sobre Y:

$$\begin{aligned}Y(q) &= v(T(q),q) \\ &= u'(T(q),q) - (u^3(T(q),q) - u(T(q),q)) \\ &= u'(T(q),q) \\ &< 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $Y(q) < 0, \forall\ q > 0$.

También hemos definido implícitamente la función $T(q)$ que asigna al número positivo q el primer tiempo $T(q)$ en el que $u(T(q),q) = 0$.

Proposición 3.3. *La función $T(q)$ descrita por*

(i) $u'(t,q) > 0$ *en* $[0, \Delta(q))$*;*

(ii) $u'(\Delta(q), q) = 0$*;*

(iii) $u'(t,q) < 0$ *en* $(\Delta(q), T(q)]$*;*

(iv) $u(T(q), q) = 0$*;*

es continua en $(0, +\infty)$*.*

Demostración.

Supongamos que $T(q)$ no es continua en algún punto $q_0 > 0$, entonces existe una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tal que $q_n \to q_0$ y $|T(q_n) - T(q_0)| \geq \varepsilon$ para todo n en $\mathbb{N}$.

Ahora bien, la función $u : A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dada por $u(t,q)$ satisface las hipótesis del teorema de la función implícita, esto es:

- Existe $(T(q_0), q_0) \subset A$, tal que $u(T(q_0), q_0) = 0$.
- $u(T(q_0), q_0) \neq 0$, pues $u'(T(q_0), q_0) < 0$.

Luego existe una vecindad de q_0, digamos $|q - q_0| < \eta, \quad \eta > 0$ y también existe una función continua $f : (q_0 - \eta, q_0 + \eta) \mapsto (0, +\infty)$, tal que:

- $f(q_0) = T(q_0)$;
- $u(f(q_0), q) = 0, \quad \forall\ q \in (q_0 - \eta, q_0 + \eta)$.

Nótese que $u(f(q), q) = 0$, garantiza que $T(q) \leq f(q)$, pues $T(q)$ es el primer tiempo en que se satisface que $u(t,q) = 0$.

Ahora bien, $q_n \to q_0$, luego dado $\varepsilon = \eta$, existe $N(\varepsilon)$ tal que $|q_n - q_0| < \eta$ para $n > N(\varepsilon)$.

En consecuencia, los términos q_n están en la vecindad $(q_0 - \eta, q_0 + \eta)$, por lo cual $u(f(q_n), q_n) = 0$ y nuevamente por ser $T(q_n)$ el primer tiempo en que $u(t, q_n) = 0$, entonces $0 \leq T(q_n) \leq f(q_n)$.

Ahora, como $q_n \to q_0$ y f es continua en q_0, entonces $f(q_n) \to f(q_0)$. Luego, dado $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ existe $N_1(\hat{\varepsilon})$, tal que para $N > N_1(\hat{\varepsilon})$ se cumple que

$$\begin{aligned} |f(q_n) - f(q_0)| < \hat{\varepsilon} \;&\Rightarrow\; -\hat{\varepsilon} < f(q_n) - f(q_0) < \hat{\varepsilon} \\ &\Rightarrow\; f(q_0) - \hat{\varepsilon} < f(q_n) < \hat{\varepsilon} + f(q_0) \end{aligned}$$

Pero $f(q_0) = T(q_0)$, entonces

$$T(q_0) - \hat{\varepsilon} < f(q_n) < \hat{\varepsilon} + T(q_0).$$

Además,

$$0 \leq T(q_n) \leq f(q_n) < \hat{\varepsilon} + T(q_0) \leq 2\hat{\varepsilon} + T(q_0).$$

Por lo tanto, $T(q_n)$ está en el compacto $[0, 2\hat{\varepsilon} + T(q_0)]$. Luego, $\{T(q_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ posee una subsucesión convergente, digamos sin pérdida de generalidad, que la misma $\{T(q_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ converge a γ, esto es $\lim\limits_{n\to+\infty} T(q_n) = \gamma$.

Si aplicamos límite en la desigualdad $T(q_n) < \hat{\varepsilon} + T(q_0)$, se tiene que $\gamma \leq \hat{\varepsilon} + T(q_0)$.

En consecuencia,

$$\gamma - T(q_0) \leq \hat{\varepsilon} \tag{3.4}$$

Por otra parte,

$$|T(q_n) - T(q_0)| \geq \hat{\varepsilon}$$

tomando límite cuando $n \to 0$, y usando la continuidad del valor absoluto, tenemos que

$$|\lim_{n\to+\infty} T(q_n) - T(q_0)| \geq \hat{\varepsilon}, \quad \text{es decir,} \quad |\gamma - T(q_0)| \geq \hat{\varepsilon}$$

Así, hay dos posibilidades

$$\gamma - T(q_0) > \hat{\varepsilon} \quad \text{ó} \quad \gamma - T(q_0) \leq -\hat{\varepsilon}$$

Como (3.4) se satisface, entonces no puede ocurrir que $\gamma - T(q_0) > \hat{\varepsilon}$, en consecuencia $\gamma - T(q_0) \leq -\hat{\varepsilon}$, de donde

$$\lim_{n\to+\infty} T(q_n) = \gamma \leq T(q_0) - \hat{\varepsilon}$$

Además, las soluciones de un problema de valor inicial son continuas con respecto a las condiciones iniciales, en consecuencia

$$0 = u(T(q_n), q_n) \to u(\gamma, q_0).$$

Por tanto,

$$u(\gamma, q_0) = 0$$

Así, hemos encontrado $\gamma \leq T(q_0) - \hat{\varepsilon} < T(q_0)$ tal que $u(\gamma, q_0) = 0$, lo que contradice que $T(q_0)$ es el primer tiempo en que $u(t, q_0) = 0$. ■

Lema 3.2. *Sean* $(u_i, v_i) : I_i \mapsto \mathbb{R}^2; i = 1, 2$ *soluciones maximales del sistema*

$$\begin{cases} x' = \Phi(x, y) \\ y' = \Psi(x, y) \end{cases}$$

donde $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *son localmente Lipschitzianas. Supongamos que* $[0, T_i] \subset I_i$*, para algún* $T_i > 0$ *y además:*

(i) $u_i(0) = u_i(T_i) = 0$

(ii) $u_i > 0 > v_i'$ *en* $(0, T_i)$

(iii) $v_2(T_2) < v_1(0) < v_2(0)$

Entonces $v_1(T_1) > v_2(T_2)$.*(ver figura 3)*

Demostración.

Supongamos por reducción al absurdo que $v_1(T_i) \leq v_2(T_2)$, ahora bien, como $v_i' < 0$ en $(0, T_i)$, podemos asegurar que v_i es decreciente (y así inyectiva) en $(0, T_i)$, por esta razón podemos considerar a:

$$v_i : [0, T_i] \mapsto [v_i(T_i), v_i(0)]$$

la cual es una función biyectiva, y en consecuencia existe $v_i^{-1} : [v_i(T_i), v_i(0)] \mapsto [0, T_i]$.

Por lo tanto, la función $w_i = u_i \circ v_i^{-1}$ está bien definida, y además gracias a la hipótesis (i), se cumple que:

$$\begin{aligned} w_i(v_i(0)) &= (u_i \circ v_i^{-1} \circ v_i)(0) \\ &= u_i(0) = 0. \end{aligned}$$

De manera análoga:

$$\begin{aligned} w_i(v_i(T_i)) &= (u_i \circ v_i^{-1} \circ v_i)(T_i) \\ &= u_i(T_i) = 0. \end{aligned}$$

Es decir, $w_i(v_i(0)) = w_i(v_i(T_i)) = 0$.

Además,

$$\begin{aligned} (w_2 - w_1)(v_1(0)) &= w_2(v_1(0)) - (w_1 \circ v_1)(0) \\ &= w_2(v_1(0)). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (w_2 - w_1)(v_1(0)) &= w_2(v_1(0)) \\ &= (u_2 \circ v_2^{-1} \circ v_1)(0) \\ &= u_2(v_2^{-1} \circ v_1(0)). \end{aligned}$$

Por otro lado, $v_1(0) > v_2(T_2)$ y $v_2^{-1} : [v_2(T_2), v_2(0)] \mapsto [0, T_2]$. Por tanto, $v_2^{-1} \circ v_1(0) \in (0, T_2)$ y por medio de la hipótesis (ii) se tiene que $u_2 > 0$ en $(0, T_2)$.

Luego,

$$(w_2 - w_1)(v_1(0)) = u_2(v_2^{-1} \circ v_1(0)) > 0.$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} (w_2 - w_1)(v_2(T_2)) &= w_2(v_2(T_2)) - w_1(v_2(T_2)) \\ &= -w_1(v_2(T_2)) \leq 0 \quad (\text{pues} \quad w_i(v_i(T_i)) = 0) \end{aligned}$$

Ahora bien, como $(w_2 - w_1)(v_1(0)) > 0$ y $(w_2 - w_1)(v_2(T_2) \leq 0$, entonces aplicamos el teorema 2.5 a la función $w_2 - w_1$ en el intervalo $[v_2(T_2), v_1(0)]$, tenemos que existe $y \in [v_2(T_2), v_1(0))$ tal que $(w_2 - w_1)(y) = 0$.

Esto es, $w_2(y) = w_1(y)$. Además, como $v_i : [0, T_i] \mapsto [v_i(T_i), v_i(0)]$ es sobreyectiva, podemos asegurar que $v_i(t) = y$. Es decir; si $t_i = v_i^{-1}(y); i = 1, 2$, entonces ocurre:

$$v_1(t_1) = y = v_2(t_2) \text{ y } u_1(t_1) = u_1(v_1^{-1}(y)) = w_1(y) = w_2(y) = w_2(v_2(t_2)) = u_2(t_2).$$

Así, $(u_2, v_2)(t_2) = (u_1, v_1)(t_1)$ y por el teorema 2.14, tenemos que:

$$(u_2, v_2)(t) = (u_1, v_1)(t + t_1 - t_2). \tag{3.5}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $t_1 \geq t_2$ (De no serlo, se repite el argumento anterior, pero cambiando (u_1, v_1) por (u_2, v_2)). Entonces, por ser soluciones distintas, se tiene que $t_1 > t_2$.

Nótese que la hipótesis (iii) garantiza que $v_1(0) \neq v_2(0)$ y en consecuencia, $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$.

Ahora bien, de 3.5 se tiene que $u_2(t) = u_1(t + t_1 - t_2)$; si evaluamos en $t = 0$, tenemos $u_2(0) = u_1(t_1 - t_2)$. Pero, $u_2(0) = 0$; por lo que $u_1(t_1 - t_2) = 0$.

Por otro lado, $T_1 \geq t_1 > t_1 - t_2 > 0$. Así, hemos encontrado un valor $t_1 - t_2 \in (0, T_1)$ tal que $u_i(t_1 - t_2) = 0$, lo cual contradice la hipótesis (ii). ∎

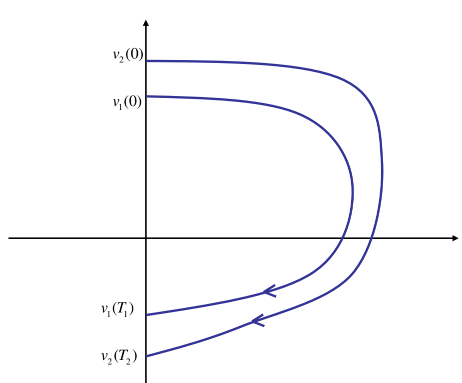


Figura 3

Proposición 3.4. *La función Y es una función continua y estrictamente decreciente.*

Demostración.

Sea $q_n \to q_0$, entonces, de la continuidad de v y T se tiene que:

$$Y(q_n) = v(T(q_n), q_n) \mapsto v(T(q_0), q_0) = Y(q_0)$$

Por tanto, Y es continua.

Sean $q_1, q_2 \in (0, +\infty)$, digamos que $q_1 > q_2$, entonces $v(q_2) < v(q_1)$, ya que $v' < 0$

Esto es,

$$Y(q_1) = v(T(q_1), q_1) = v(q_1) < v(q_2) = v(T(q_2), q_2) = Y(q_2)$$

Por tanto, Y es una función continua y estrictamente decreciente. ■

Observación 3.2. *A continuación vamos a usar los mismos argumentos usados pero en el semiplano negativo de las y, para esto aprovecharemos la simetría de la función $x^3 - x$ con respecto al origen, y obtendremos resultados similares a los anteriores.*

Proposición 3.5. *En las condiciones del sistema* **??** *existe una función continua $S : (-\infty, 0) \mapsto (0, +\infty)$ tal que:*

(i) *$u(t, p) < 0$ en $(0, S(p))$;*

(ii) *$u(S(p), p) = 0$ para cada $p < 0$.*

Además, la función $Z(p) = v(S(p), p)$ es positiva, continua y estrictamente decreciente.(ver figura 4)

Demostración.

Haciendo el cambio de variables $\xi = -x,\ \eta = -y$ el sistema **??** se transforma en

$$\begin{cases} \xi' = \eta - (\xi^3 - \xi) \\ \eta' = -\xi \end{cases} \tag{3.6}$$

El cual satisface las hipótesis de las proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3, entonces existe una función $T_* : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ tal que:

- $u_*(T(q), q) = 0$;

- $u_*(t, q) > 0$ en $(0, T_*(q))$.

donde $(u_*, v_*)(t, q)$ denota la solución del nuevo sistema 3.6 que comienza en $(0, q)$.

De la proposición 3.4, la función

$$Y_*(q) := v * (T_*(q), q), \quad q > 0$$

es negativa, continua y estrictamente decreciente.

El teorema se deduce definiendo $S(p) = T_*(-p)$.

Además,

$$Z(p) = v(S(p), p) = -v * (T_*(-p), -p) = -Y_*(-p)$$

En efecto, como $u_*(t, -q) > 0$ en $(0, T_*(q))$ y $u_*(T(q), q) = 0$, con $S(p) = T_*(-p)$, tenemos que

$$u_*(T_*(-p), p) = u_*(S(p), p) = 0$$

Por un lado, para $p < 0$ se tiene que $u_*(t, -p) < 0$ en $(0, T_*(-p)) = (0, S(p))$ y por otro lado, $Y_*(-p) = v_*(T_*(-p), -p) < 0$, si $-p < 0$.

Por tanto,

$$Z(p) = -Y_*(-p) = -v_*(S(p), p) > 0$$

$\blacksquare$

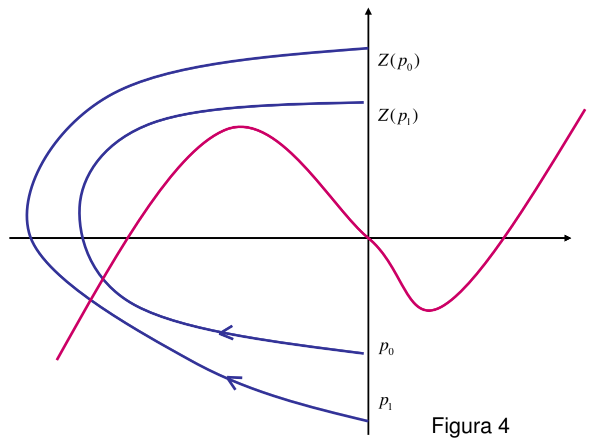


Figura 4

A continuación demostraremos el objetivo principal del trabajo, esto es, probar que el sistema que modela a la Ecuación de Van der Pol, posee una solución periódica no trivial.

3.3. Teorema principal

Teorema 3.3. *(Teorema Principal)*
Supongamos que $Y_{+\infty} = \lim_{q \to +\infty} Y(q) > -\infty$, *entonces el sistema* **??** *posee una solución periódica no trivial.(ver figura 5)*

Demostración.

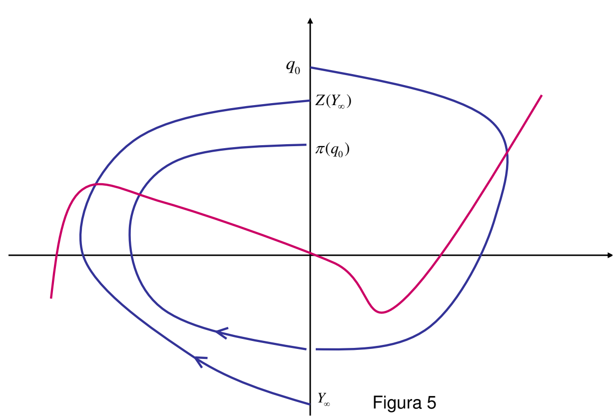


Figura 5

Sea $\pi : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ la composición $\pi = Z \circ Y$, la cual es la compuesta de funciones continuas, por tanto, π es continua. Además, como Y y Z son estrictamente decrecientes, para $a < b$, se satisface que $Y(a) > Y(b)$.

En consecuencia, $Z(Y(a)) < Z(Y(b))$. Así, π es estrictamente creciente.

Ahora bien, como $Y_{+\infty} = \lim_{q\to+\infty} Y(q) > -\infty$, entonces podemos considerar q_0 arbitrario tal que $q_0 > Z(Y_{+\infty})$.

Por otro lado, si consideramos $q > q_0$ arbitrariamente grande, y además, por ser Y estrictamente decreciente, se cumple que $Y(q) < Y(q_0)$.

Luego, aplicando límite cuando $q \to +\infty$ en ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene

$$\lim_{q\to+\infty} Y(q) = Y_{+\infty} \leq \lim_{q\to+\infty} Y(q_0) = Y(q_0)$$

Nuevamente, como Z es estrictamente decreciente, entonces se satisface que $Z(Y_{+\infty}) > Z(Y(q_0))$. Más aún, $q_0 > Z(Y_{+\infty}) > Z(Y(q_0)) = \pi(q_0)$. Así, $q_0 > \pi(q_0)$.

Como π es estrictamente creciente se cumple

$$q_0 > \pi(q_0) > \pi^2(q_0) > \pi^3(q_0) > \ldots > \pi^n(q_0)$$

Así, la sucesión $\pi^n(q_0)$ es monótona decreciente y además acotada inferiormente por 0, y por consiguiente, convergente. Es decir, $\lim_{n\to+\infty} \pi^n(q_0) = q_* \geq 0$.(Nótese que $\pi^n(q_0) \in (0, +\infty)$, en consecuencia, $\lim_{n\to+\infty} \pi^n(q_0) = q_* \geq 0$).

Más aún,

$$\pi(q_*) = \pi(\lim_{n\to+\infty} \pi^n(q_0)) = \lim_{n\to+\infty} \pi^{n+1}(q_0)) = q_*$$

Es decir, q_* es un punto fijo de π.

Por otro lado, si denotamos $T_* = T(q_*) + S(Y(q_*))$, donde S es la función que viene dada por la proposición 3.5 , se obtiene $v(T_*, q_*) = q_*$ y $u(T_*, q_*) = 0$.

Veamos ahora que la solución que en el tiempo $t = 0$ pasa por q_* es periódica. Recordemos que $(u(t, q_*), (v(t, q_*))$ denota la solución que en el tiempo $t = 0$ pasa por q_*; en símbolos esto quiere decir:

$$u(0, q_*) = 0 \quad \text{y} \quad v(0, q_*) = q_*$$

Ahora bien,

$$u(T_*, q_*) = 0 \quad \text{y} \quad v(T_*, q_*) = v(T(q_*) + S(Y(q_*), q_*)) = Z(Y(q_*)) = \pi(q_*) = q_*$$

Es decir, la solución que en el tiempo $t = 0$ pasa por q_* es periódica con período $T_* = T(q_*) + S(Y(q_*))$.

Ahora bien, veamos que esta solución es no trivial. Para esto, usaremos el lema 2.17, el cual garantiza la existencia de una vecindad del punto de equilibrio $(0, 0)$, tal que la solución del sistema no pertenece a esta vecindad si $t \in [0, \omega)$.

Para esto, consideremos la función $V : (-1, 1) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^1, dada por:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Veamos que se satisfacen las hipótesis del lema 2.17 para la función V.

- $V(0, 0) = 0$.
- $V(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.
- $$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \langle \nabla V; (y - (x^3 - x), -x) \rangle \\ &= \langle (x, y); (y - (x^3 - x), -x) \rangle \\ &= xy - x^4 + x^2 - xy \\ &= -x^2(x^2 - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Luego, existe $\rho > 0$ tal que $u^2(t, q_0) + v^2(t, q_0) \geq \rho^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Destacamos que esto significa que la solución que en el tiempo $t = 0$ vale q_0 se mantiene fuera del disco $D(0, \rho)$ para cualquier valor de t en el futuro, en particular para los valores en que la trayectoria corta al semieje positivo de las v (las imágenes de π).

Así $\pi(q_0)$, que corresponde al valor de la coordenada v de la solución en el tiempo $t = T(q_0) + S(Y(q_0))$, está fuera del disco $D(0, \rho)$. De igual forma, todas las iteraciones $\pi^n(q_0)$ están fuera de dicho disco y así $\pi^n(q_0) \geq \rho$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

En consecuencia,

$$q_* = \lim_{n \to +\infty} \pi^n(q_0) \geq \rho.$$

Esto es,

$$u^2(t, q_*) + v^2(t, q_*) \geq \rho^2, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $(u(t, q_*), v(t, q_*))$ es una solución periódica no trivial para (3.1). ■

Referencias Bibliograficas

[1] Kreider, Donald *Ecuaciones Diferenciales*, editorial reverte, 1979.

[2] Munkres, James R., *Analysis on Manifolds*, Addison-wesley Publishing Company,1991.

[3] Hirsch M, Smale S., *Differential Equations, Dynamical systems and Linear Algebra*, Academy Press, 1974.

[4] Perko L. *Differential Equations and Dynamical systems*, texts in Applied Mathematics, Vol 7, Springer -Verlag, New York, 1991.

[5] Rudin, walter. *Principios de Análisis Matemático*, Mc Graw-Hill. 1980.

[6] Sáenz, Jorge. Cálculo Diferencial. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Segunda Edición, 2005.

[7] Sotomayor, Jorge. *Liçoes de equaçoes diferenciais Ordinárias*, Proyecto Euclides, IMPA, 1979.

[8] Tineo Antonio, Jesús Rivero. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*,Universidad de los Andes, 2002.

[9] Vivas Miguel, Granados B, Tieno A, Mendoza D. *Condiciones necesarias y suficientes para la oscilación del sistema Plano tipo Lineard.* XVII Jornadas Venezolanas de Matemáticas. Trujillo 2004.

[10] Vivas Miguel, *Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución periódica no trivial en sistema tipo Lienard generalizado.* Trabajo de ascenso a la categoría de asociado. UCLA 2007.