Universidad Centroccidental
“Lisandro Alvarado”
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Acerca del Teorema de Sharkovsky

Trabajo Especial de Grado presentado por:

Beatriz Navarro Lameda
Tutor: Dr. Neptalí Romero

Barquisimeto, Junio 2011

“Acerca del Teorema de Sharkovsky”

Por Br. Beatriz Navarro Lameda.

Área de Conocimiento: Sistemas Dinámicos en dimensiones bajas (Mapas del intervalo).

2010 *Mathematics Subject Classification:* 37E05

Índice general

Resumen.

En este trabajo se presenta, de forma autocontenida, una disertación escrita sobre uno de los teoremas más importantes y hermosos de la dinámica unidimensional, se trata en realidad de una colección de resultados debidos al matemático ucraniano Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky (1936 -) publicados inicialmente en ruso en el año 1964, y que en la actualidad son reunidos con el nombre de Teorema de Sharkovsky.

El teorema de Sharkovsky permaneció sin conocerse fuera de la Europa Oriental hasta la segunda mitad de la década de 1970, cuando aparece publicado el artículo "Period three implies chaos" de Tien-Yien Li y James A. Yorke; en ese artículo se demuestra parcialmente un caso particular del Teorema de Sharkovsky, no obstante, se introduce, sin nombre, la noción de conjuntos scrambled, los cuales dan origen a lo que hoy se conoce con el nombre de Caos en el sentido de Li-Yorke. En virtud de esto también se incluirán en la monografía algunos aspectos relacionados con este tipo de conjuntos en la dinámica de transformaciones continuas del intervalo, así como la demostración del Teorema de Li-Yoke y algunas propiedades relacionadas con las funciones caóticas en el sentido de Li-Yorke en un intervalo compacto.

Adicionalmente, se ofrece la definición de función turbulenta, concepto que sirve de base para dar una definición equivalente a la de caos introducida por L. Block y W.A. Coppel, y demostraremos que en el caso de funciones continuas en un intervalo compacto, la noción de caos en el sentido de Block-Coppel es suficiente para el caos en el sentido de Li-Yorke. Posteriormente, establecemos una tricotomía para funciones continuas en intervalos compactos, basados en el orden de los números naturales definido por Sharkovsky y estudiamos la familia de las funciones tienda truncadas, lo que nos permitará demostrar que el caos en el sentido de Block-Coppel no es una condición necesaria para el caos en el sentido de Li-Yorke.

1 Preliminares en Sistemas Dinámicos.

1.1. Conceptos básicos y propiedades.

Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Dado que $f(X) \subset X$, podemos definir nuevas funciones a partir de la composición de f consigo misma. En este sentido, definimos las iteradas, f^n, de f inductivamente por: $f^0 = Id$, donde Id es la función identidad en X, $f^1 = f$ y $f^{n+1} = f \circ f^n$ $(n \geq 1)$.

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la definición:

- f^n es también una función continua.
- Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ y $(f^n)^m = f^{nm}$.

Definición 1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Al conjunto $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots\} = \{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ se le llama órbita de $x_0 \in X$ bajo la función f, se denota por $\mathcal{O}(x_0, f)$. A la sucesión $(f^n(x_0))_{n \geq o}$ se le llama trayectoria de x_0.

La trayectoria de x_0 describe las distintas posiciones que visita el punto x_0 con el paso del tiempo; es decir, se inicia en el punto x_0 y se tendrá la posición $f^n(x_0)$ después de transcurrir n unidades de tiempo.

Cada x en X da lugar a una órbita, es decir, a una secuencia de movimientos. Bajo este punto de vista la función f genera un sistema dinámico discreto. Decir que nos interesa estudiar las propiedades dinámicas de f es solo otra manera de expresar que nos interesa conocer cómo es el comportamiento asintótico (límite) de cada una de las trayectorias del sistema.

Definición 1.2. Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función. Se dice que $x_0 \in X$:

1. Es un punto periódico de f con primer período k, si $f^k(x_0) = x_0$ y $f^n(x_0) \neq x_0$ para $n \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

2. Es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

3. Es un punto eventualmente fijo de f, si existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $f^{n+1}(x_0) = f^n(x_0)$ si $n > N$.

4. Es un punto eventualmente periódico de f de período k, si existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $f^{n+k}(x_0) = f^n(x_0)$ para todo $n > N$.

Nótese que los puntos fijos de f son puntos periódicos de período 1, y los puntos periódicos de f con período n, son puntos fijos para la función f^n.

Al conjunto de todos los puntos fijos de f lo denotaremos por $Fix(f)$ y al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos por $Per(f)$.

Si $x \in X$, es un punto periódico de f de período n, entonces la órbita de x, $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto formado por n puntos distintos: $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ y la trayectoria de x es la sucesión dada por esos mismos puntos repetidos periódicamente. Si x es periódico diremos que su órbita es periódica. Además, si f tiene un punto periódico de período n, entonces diremos que n es un período para (o de) f.

Definición 1.3. Si p es un punto periódico de período n entonces, a la órbita de p, $\mathcal{O} = \{f^k(p) : k \in \mathbb{N}\}$ se le llama $n - ciclo$.

Lema 1.1. *Si $f^m(y) = y$, entonces el período de y bajo f divide a m.*

Demostración. Sea n el período de y, entonces existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $m = np + r$ con $0 \leq r < n$, así $y = f^m(y) = f^{np+r}(y) = f^r(f^{np}(y)) = f^r(y)$ entonces, $r = 0$. Así, $m = np$ y por tanto, n divide a m. □

Proposición 1.1. *Sean $f : I \to I$ una función continua y $m, n \in \mathbb{N}$. Si y es un punto periódico de período m, entonces es un punto periódico de f^n con período $\frac{m}{(m,n)}$, donde (m, n) es el máximo común divisor de m y n.*

Demostración. Sea y un punto periódico de período m bajo f y sea t el período de y bajo f^n. Como $f^{nt}(y) = y$, entonces m divide a nt. En consecuencia, $\frac{m}{(m,n)}$ divide a $\frac{n}{(m,n)}t$. Como $\frac{m}{(m,n)}$ y $\frac{n}{(m,n)}$ son primos relativos, $\frac{m}{(m,n)}$ divide a t. Por otro lado, $(f^n)^{\frac{m}{(m,n)}}(y) = (f^m)^{\frac{n}{(m,n)}}(y) = y$. Así, t divide a $\frac{m}{(m,n)}$. Luego, $t = \frac{m}{(m,n)}$. □

Proposición 1.2. *Sean $f : I \to I$ una función continua y $n, k \in \mathbb{N}$. Si y es un punto periódico de f^n con período k, entonces es un punto periódico de f con período $\frac{kn}{s}$ donde s divide a n y $(k, s) = 1$.*

Demostración. Como $y = (f^n)^k(y) = f^{kn}(y)$, entonces el período de y bajo f es $\frac{kn}{s}$ para algún entero positivo s. Por la proposición anterior $k = \frac{\frac{kn}{s}}{(\frac{kn}{s}, n)}$. Así, $\frac{n}{s} = (\frac{kn}{s}, n) = (\frac{n}{s}k, \frac{n}{s}s) = \frac{n}{s}(k, s)$. Por tanto, n divide a s y $(k, s) = 1$. $\square$

1.2. Función Tienda.

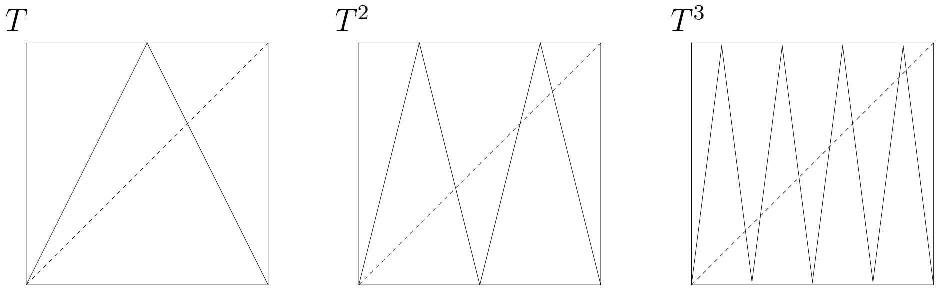
Definición 1.4. A la función $T : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por:

$$T(x) = 1 - |1 - 2x|,\ x \in [0, 1],$$

se le llama función tienda.

Proposición 1.3. *La función tienda tiene un número finito de puntos periódicos para cada período.*

Demostración. Consideremos la función tienda $T(x) = 1 - |1 - 2x|$, entonces como las figuras a seguir son:



por medio de un análisis gráfico se observa que T^n tiene exactamente 2^n puntos fijos. $\square$

Proposición 1.4. *El conjunto de puntos periódicos de la función tienda es denso.*

Demostración. Por medio de un análisis gráfico se observa que T^n tiene un punto fijo en $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ para todo $i = 0, \ldots, 2^n - 1$, por tanto T tiene un punto periódico en $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ para todo $i = 0, \ldots, 2^n - 1$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Sea $x \in [0,1]$, entonces $x \in [\frac{i}{2^N}, \frac{i+1}{2^N}]$ para algún $i = 0, \ldots, 2^N - 1$. Por tanto, existe un punto periódico p de T tal que $d(p,x) \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Luego, $Per(T)$ es denso en $[0,1]$. $\square$

1.3. Caos a la Li-Yorke.

A continuación presentamos la definición de *conjunto scrambled* introducida sin nombre en el artículo "Period three implies chaos" de Li & Yorke, concepto que ha dado origen a lo que actualmente se conoce con el nombre de Caos en el sentido Li-Yorke, el cual es objeto de una intensa investigación en dinámica topológica.

Definición 1.5. Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Un par de puntos (x,y) se dice:

- distal si
$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$$
- asintótico si
$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$$
- Li-Yorke si no es distal ni asintótico, esto es,
$$0 = \liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) < \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y))$$

Definición 1.6. Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to X$ continua. Se dice que un punto $x \in X$ es:

- asintóticamente periódico si existe un punto periódico p tal que
$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0,$$
- aproximadamente periódico si para cada $\varepsilon > 0$, existe un punto periódico p y un entero positivo N tal que
$$d(f^n(x), f^n(p)) < \varepsilon \text{ para todo } n > N.$$

Nótese que cualquier punto asintóticamente periódico es también aproximadamente periódico.

Definición 1.7. Sea $f : X \to X$ una función continua. Un subconjunto S de X, con al menos dos elementos, se dice *conjunto scrambled* si, y solo si, no contiene puntos asintóticamente periódicos y para cada par de puntos $x, y \in S$, con $x \neq y$ el par (x, y) es un par de Li-Yorke, esto es, para cada $x, y \in S$ con $x \neq y$,

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0, \tag{1.1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0. \tag{1.2}$$

Para cada $x \in S$ y cada punto periódico $p \in X$,

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) > 0. \tag{1.3}$$

Definición 1.8. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es caótica en el sentido de Li-Yorke si existe un conjunto $S \subset X$ scrambled no numerable.

Observación 1.1. La definición de conjunto scrambled puede variar según los autores. En particular algunos omiten la propiedad (1.3). Sin embargo esto no induce diferencias en el caos en el sentido de Li-Yorke pues si S es un conjunto tal que cada par de puntos distintos $x, y \in S$, el par (x, y) es un par de Li-Yorke, entonces es posible obtener un conjunto scrambled removiendo a lo más un punto de S. Esto es una consecuencia directa del siguiente lema.

Lema 1.2. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua y $S \subset X$. Supongamos que para todo par de puntos distintos $x, y \in S$ se tiene que*

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$$

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0,$$

entonces S contiene a lo más un punto aproximadamente periódico.

Demostración. Supongamos que existen x_1, x_2 dos puntos distintos en S que son aproximadamente periódicos. Sea $\delta = \limsup d(f^n(x_1), f^n(x_2)) > 0$. Tomemos $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{5}$. Entonces existen puntos periódicos p_1 y p_2 y un entero positivo N tal que para todo $n \geq N$ se verifica $d(f^n(x_i), f^n(p_i)) < \varepsilon$ para $i = 1, 2$.
Sea k el mínimo común múltiplo de los períodos de p_1 y p_2. Como $f^n(x_i) \in B_\varepsilon(f^n(p_i))$ para todo $n \geq N$, donde $B_\varepsilon(f^n(p_i)) = \{x \in X : d(f^n(p_i), x) < \varepsilon\}$, entonces

$$f^n(x_i) \in \bigcup_{j=0}^{k-1} B_\varepsilon(f^j(p_i)) \text{ para todo } n \geq N.$$

Consideremos el conjunto

$$K = \bigcup_{i=1,2} (\bigcup_{m=0}^{N-1} \{f^m(x_i)\} \cup \bigcup_{j=0}^{k-1} cl(B_\varepsilon(f^j(p_i)))).$$

Entonces, K es compacto y $\mathcal{O}(x_i, f), \mathcal{O}(p_i, f) \subset K$ para $i = 1, 2$. Como f es continua en X, entonces f es uniformemente continua en K. En consecuencia, existe $\eta_j > 0$ tal que si $x, y \in K$ y $d(x, y) < \eta_j$ entonces $d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon$ para $0 \leq j < k$.
Tomando $\eta = \min\{\eta_j : j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}\}$ se tiene que si $x, y \in K$ y $d(x, y) < \eta$, entonces $d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon$ para todo $0 \leq j < k$. Por otro lado, como $\liminf d(f^n(x_1), f^n(x_2)) = 0$, entonces existe $M > N$ tal que $d(f^M(x_1), f^M(x_2)) < \eta$. Entonces para todo $0 \leq j < k$ se tiene que $d(f^{M+j}(x_1), f^{M+j}(x_2)) < \varepsilon$. Así

$$\begin{aligned} d(f^{M+j}(p_1), f^{M+j}(p_2)) &\leq d(f^{M+j}(p_1), f^{M+j}(x_1)) + d(f^{M+j}(x_1), f^{M+j}(x_2)) \\ &\quad + d(f^{M+j}(x_2), f^{M+j}(p_2)) \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Por el algoritmo de la división tenemos que dado $n > M$, $n = M + (kt + j)$, con $t \in \mathbb{N}$ y $0 \leq j < k$. Así,

$$\begin{aligned} d(f^n(p_1), f^n(p_2)) &= d(f^{M+(kt+j)}(p_1), f^{M+(kt+j)}(p_2)) \\ &= d(f^{M+j}((f^{kt}(p_1)), f^{M+j}(f^{kt}(p_2))) \\ &= d(f^{M+j}(p_1), f^{M+j}(p_2)) < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, para todo $n > M$

$$\begin{aligned} d(f^n(x_1), f^n(x_2)) &\leq d(f^n(x_1), f^n(p_1)) + d(f^n(p_1), f^n(p_2)) + d(f^n(p_2), f^n(x_2)) \\ &< \varepsilon + 3\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon < \delta, \end{aligned}$$

lo que contradice la definición de δ. □

Lema 1.3. *Sea $f : (X, d) \to (X, d)$ una función uniformemente continua. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ y $(y_n)_{n\geq 0}$ son sucesiones en X tales que $d(x_n, y_n) \to 0$, entonces $d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como f es uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Por otro lado, dado que $d(x_n, y_n) \to 0$ existe $N > 0$ tal que $d(x_n, y_n) < \delta$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Luego, $d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$. □

Lema 1.4. *Sean (X, d) un espacio métrico, $f : X \to X$ una función continua y S un conjunto scrambled de f. Si f es uniformemente continua, entonces S es también un conjunto scrambled de f^n para cualquier entero $n > 0$.*

Demostración. Sea S un conjunto scrambled de f, entonces para todo $x, y \in S$:

$$\limsup_{m\to\infty} d(f^m(x), f^m(y)) > 0, \text{ y}$$
$$\liminf_{m\to\infty} d(f^m(x), f^m(y)) = 0.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como f es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ y $0 \leq j \leq n$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon.$$

Como $\liminf d(f^m(x), f^m(y)) = 0$, existe una subsucesión tal que

$$\lim_{l\to\infty} d(f^{m_l}(x), f^{m_l}(y)) = 0;$$

por el algoritmo de la división se tiene que para todo l tal que $m_l \geq n$ $m_l = p_l n + r_l$ con $0 \leq r_l < n$.

Dado que para todo l tal que $m_l \geq n$, $r_l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ existe $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $r_l = r$ para infinitos l, por tanto, existe una subsucesión $(l_j)_{j\geq 0}$ tal que $r_{l_j} = r$ para todo $j \geq 0$. Así,

$$d(f^{m_{l_j}}(x), f^{m_{l_j}}(y)) \to 0, \text{ y}$$

$$d(f^{p_{l_j}n+r}(x), f^{p_{l_j}n+r}(y)) \to 0.$$

Por el lema 1.3

$$d(f^{n-r}(f^{p_{l_j}n+r}(x)), f^{n-r}(f^{p_{l_j}n+r}(y))) = d(f^{(p_{l_j}+1)n}(x), f^{(p_{l_j}+1)n}(y)) \to 0.$$

Luego,

$$\liminf_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0.$$

Así

$$\liminf_{k\to\infty} d((f^n)^k(x), (f^n)^k(y)) = 0. \tag{1.4}$$

Por otro lado, existe $(k_l)_{l\geq 0}$ tal que $\lim d(f^{k_l}(x), f^{k_l}(y)) = \alpha > 0$.
Supongamos, por reducción al absurdo, que

$$\lim_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0. \tag{1.5}$$

Por el algoritmo de la división se tiene que para todo l tal que $k_l \geq n$ existen $q_l, r'_l \in \mathbb{N}$ tal que $k_l = q_l n + r'_l$ con $0 \leq r'_l < n$.
Así, $f^{k_l}(x) = f^{r'_l}(f^{q_l n}(x))$.

Dado que para todo l tal que $k_l \geq n$ $r'_l \in \{0, 1, \ldots n-1\}$, existe un $r' \in \{0, 1, \ldots n-1\}$ tal que $r'_l = r'$ para infinitos l, por tanto, existe una subsucesión $(l_j)_{j\geq 0}$ tal que $r'_{l_j} = r'$ para todo $j \geq 0$, y en consecuencia, $k_{l_j} = q_{l_j}n + r'$ para todo $j \geq 0$. De (1.5) y el lema anterior se tiene que

$$d(f^{r'}(f^{q_{l_j}n}(x)), f^{r'}(f^{q_{l_j}n}(y))) \to 0.$$

Así, $d(f^{q_{l_j}n+r'}(x), f^{q_{l_j}n+r'}(y)) \to 0$; esto es, $d(f^{k_{l_j}}(x), f^{k_{l_j}}(y)) \to 0$. Lo cual es una contradicción.
Luego,

$$\limsup_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) > 0.$$

Así,

$$\limsup_{k\to\infty} d((f^n)^k(x),(f^n)^k(y)) > 0. \tag{1.6}$$

y de (1.4) y (1.6), se tiene que S es un conjunto scrambled de f^n. $\square$

Proposición 1.5. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua, y $n \in \mathbb{N}$ entonces, f es caótica en el sentido de Li-Yorke si, y solo si, f^n lo es.*

Demostración. Supongamos que f es caótica en el sentido de Li-Yorke, entonces existe un conjunto $S \subset X$ scrambled no numerable. Como f es continua y X es compacto se tiene que f es uniformemente continua, así por el lema 1.4 se tiene que S es también un conjunto scrambled para f^n, por tanto, f^n es caótica en el sentido de Li-Yorke.

Recíprocamente, si f^n es caótica en el sentido de Li-Yorke, existe un conjunto S tal que para todo $x, y \in S$

$$\limsup_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) > 0, \text{ y}$$

$$\liminf_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0.$$

Por propiedades de $\liminf$ y $\limsup$ se tiene que

$$0 \leq \liminf d(f^k(x), f^k(y)) \leq \liminf d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0$$

y

$$\limsup d(f^k(x), f^k(y)) \geq \limsup d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) > 0.$$

Por tanto, S es un conjunto scrambled de f. Luego, f es caótica en el sentido de Li-Yorke. $\square$

2 Teorema de Sharkovsky.

2.1. Algo de historia.

Tal y como ocurre con algunos nombres propios rusos que son traducidos a otros idiomas, el nombre del matemático ucraniano autor de los resultados que serán relatados en el Trabajo Especial de Grado admite varias formas de escribirse con el alfabeto romano: Alexandr Nicolaevich Sharkovski y Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky, aunque algunas combinaciones con estos también son encontradas en la literatura matemática; acá adoptamos la segunda por ser la que aparece en "The MacTutor History of Mathematics archive" (`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`).

El matemático Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky nació en Kiev, Ucrania, el 7 de diciembre de 1936, en la actualidad es un destacado matemático y miembro de la Academia Nacional de Ciencias de Ucrania.

A continuación se presentan unas palabras sobre la historia del Teorema de Sharkovsky y su relación con el Teorema de Li - Yorke:

En 1964 se publicó en la revista "Ukrainian Mathematical Journal" un artículo escrito por el matemático ucraniano Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky, titulado (en inglés) "Coexistence of cycles of a continuous mapping of a line into itself" cuyo objetivo principal era demostrar lo que en la actualidad se conoce con el nombre de Teorema de Sharkovsky. Aunque ya en el año 1962, Sharkovsky había publicado algunos resultados que pueden ser considerados como una introducción a dicho teorema. Sin embargo, el trabajo de Sharkovsky permaneció sin conocerse fuera de Europa Oriental hasta la segunda mitad de la década de 1970. Los motivos por los cuales el artículo y su trabajo pasaron inadvertidos durante tantos años pueden ser varios, aunque princialmente se debió a que el artículo original fue escrito en ruso y publicado en una revista matemática soviética y otra razón podría ser que el tema no estaba de moda en aquel momento.

En 1975 la revista "American Mathematical Monthly" publicó el famoso artículo titulado "Period three implies chaos" escrito por Tien-Yien Li y James A. Yorke, allí se demuestra parcialmente un caso particular del Teorema de Sharkovsky, y además se introduce la idea de conjuntos “scrambled”. Algún tiempo después de la publicación de su artículo, Yorke asistió a una conferencia en Berlín Oriental, en la que conoció a Sharkovsky y, aunque ellos no tuvieran ninguna lengua en común, Sharkovsky dió a conocer a Yorke que él ya había demostrado sus resultados sobre los puntos periódicos de funciones continuas en el intervalo. Así, el trabajo de Li & Yorke además de introducir la noción de caos a una amplia audiencia, condujo al reconocimiento mundial del trabajo de Sharkovsky.

Otro artículo que atrajo la atención de la comunidad matemática sobre el trabajo de Sharkovsky fue el artículo titulado: “A theorem of Šharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line” [13], publicado por el matemático eslovaco Peter Štefan en el año 1977. Como tantos artículos y conferencias sobre iteraciones, caos y fenómenos relacionados, aparecieron a finales de los años 1970 muchas personas comenzaron a trabajar sobre el teorema de Sharkovsky. Uno de los objetivos iniciales era simplificar su demostración; muchas demostraciones nuevas y más cortas aparecieron. Alrededor de 1980, al menos tres demostraciones del teorema fueron publicadas, todas bastante similares, las cuales en la actualidad son consideradas como “la demostración estándar” del teorema de Sharkovsky, debidas a Block, Guckenheimer, Misiurewicz y Young, Burkart, Ho y Morris.

2.2. Orden y enunciados.

Los resultados de la dinámica unidimensional que conforman lo que en la actualidad se conoce con el nombre de *Teorema de Sharkovsky* involucran una función continua del intervalo I en sí mismo, y un orden en los enteros positivos: el *orden de Sharkovsky*, el cual está dado por:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2{\cdot}3 \rhd 2{\cdot}5 \rhd \cdots \rhd 2^2{\cdot}3 \rhd 2^2{\cdot}5 \rhd \cdots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2^1 \rhd 2^0 = 1.$$

Dado que todo número entero positivo puede ser escrito de manera única en la forma $2^m(2n+1)$, para algunos enteros $m, n \geq 0$, el orden definido anteriormente es un orden total, y se escribe $m \rhd l$, o $l \lhd m$, si m está a la izquierda de l y este orden también puede ser definido formalmente por:

$$2^a(2b+1) \rhd 2^\alpha(2\beta+1) \text{ si y solo si } \begin{cases} a < \alpha \text{ y } 0 < b, \beta \\ a = \alpha \text{ y } 0 < b < \beta \\ a > \alpha \text{ y } 0 = b = \beta \end{cases}$$

La lista comienza con los números impares mayores que 1 ordenados de forma creciente. Luego se repite la secuencia con cada impar multiplicado por 2, después la secuencia inicial es multiplicada por 2^2, despues por 2^3 y así sucesivamente, al final se colocan las potencias de 2 en orden decreciente.

$impares, 2 \cdot impares, 2^2 \cdot impares, 2^3 \cdot impares, ..., 2^3, 2^2, 2^1, 2^0 = 1$

Definición 2.1. Una cola del orden de Sharkovsky es un conjunto $\mathfrak{T} \subset \mathbb{N}$ tal que $s \rhd t$ para todo $s \notin \mathfrak{T}$, y todo $t \in \mathfrak{T}$.

Hay tres tipos de colas: $\{m\} \cup \{l \in \mathbb{N} : l \lhd m\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{..., 2^4, 2^3, 2^2, 1\}$ de todas las potencias de 2, y $\emptyset$.

Sharkovsky demostró que el orden de los números naturales introducido por él describe los números que pueden ser períodos de una función continua en un intervalo, más precisamente:

Teorema 2.1. *Si m es un período para f y $m \rhd l$, entonces l también es un período para f.*

Esto muestra que el conjunto de períodos de una función continua en un intervalo es una *cola* del orden de Sharkovsky.

El Teorema 2.1 nos asegura que dados dos números $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \rhd n$, y una función continua con un punto de período m, implica la existencia de otro punto de período n. Ahora, la pregunta siguiente es ¿existe una función continua que tenga un punto de período n, pero no puntos de período m? es decir, ¿la implicación contraria se cumple? La respuesta a esta pregunta, es afirmativa. Lo anterior se puede ver en el siguiente resultado, el cual algunas veces es llamado el recíproco del Teorema de Sharkovsky, aunque este fue demostrado por Sharkovsky en su artículo original.

Teorema 2.2. *Cada cola del orden de Sharkovsky es el conjunto de períodos para una función continua de un intervalo en sí mismo.*

El teorema de Sharkovsky es la unión de los dos teoremas anteriores:

Teorema 2.3 (Teorema de Sharkovsky)**.** *Un subconjunto de* $\mathbb{N}$ *es el conjunto de períodos para una función continua de un intervalo en sí mismo si, y solo si, el conjunto es una cola del orden de Sharkovsky.*

2.3. Ciclos, intervalos y relaciones de cubrimiento.

Definición 2.2. Diremos que un intervalo I cubre un intervalo J si $J \subset f(I)$ y lo denotaremos por $I \to J$. Si $f(I) = J$ diremos que I cubre exactamente a J y lo denotaremos por $I \rightarrowtail J$.

Un intervalo cuyos extremos están en un ciclo $\mathcal{O}$ de f es llamado $\mathcal{O} - intervalo$. Si contiene solo dos puntos de $\mathcal{O}$ entonces diremos que es un $\mathcal{O} - intervalo$ básico, y que estos dos puntos son adyacentes.

Por el Teorema del Valor Intermedio, $I \to J$ siempre que f envíe los extremos de un intervalo I a lados opuestos de un intervalo J. Así, la información acerca de un ciclo $\mathcal{O}$ nos da información acerca de cómo los $\mathcal{O} - intervalos$ son movidos por la función.

La otra idea básica es que el conocimiento de cómo son movidos los intervalos produce información acerca de la presencia de otros puntos periódicos.

Lema 2.1. *Sea f una función continua y sean I, J intervalos cerrados y acotados, si $I \to J$, entonces existe un intervalo cerrado y acotado $K \subset I$ tal que $f(K) = J$; esto es, existe $K \subset I$ tal que $K \rightarrowtail J$.*

Demostración. Sea $J = [a, b] \subset f(I)$, entonces existen $\alpha, \beta \in I$ tales que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Así, $J = [f(\alpha), f(\beta)]$.

Para el caso $\alpha < \beta$ es posible que existan puntos distintos de α en $[\alpha, \beta]$ cuya imagen mediante f sea a. Sea

$$c = \text{máx}\,\{x \in [\alpha, \beta] : f(x) = a\} = \text{máx}\{f^{-1}(\{a\}) \cap [\alpha, \beta]\},$$

ahora es posible que existan puntos en $[c, \beta]$ cuya imagen sea b. Sea

$$d = \text{mín}\{x \in [c, \beta] : f(x) = b\} = \text{mín}\{f^{-1}(\{b\}) \cap [c, \beta]\}.$$

Sea $K = [c, d] \subset I$. Como f es continua, por el Teorema del Valor Intermedio se tiene que $[f(c), f(d)] \subset f(K)$. Así, $J \subset f(K)$.
Supongamos que existe $y \in f(K)$ tal que $y \notin J = [a, b]$, entonces $y < a$ ó $y > b$. Si $y < a$, entonces $y \neq f(c) = a$. Así existe $c < x \leq d$ tal que $f(x) = y < a$. Además, $f(d) = b > a$.
Luego, dado que f es continua, por el Teorema del Valor Intermedio existe $w \in (x, d)$ tal que $f(w) = a$, lo cual es una contradición ya que $c < x < w$ y $c = \text{máx}\{x \in [\alpha, \beta] : f(x) = a\}$. Análogamente se tiene que no puede ocurrir que $y > b$. Luego, $f(K) \subset J$. Por tanto $f(K) = J$. □

Lema 2.2. *Sean $g : J \to \mathbb{R}$ una función continua e $I \subset J$ un intervalo compacto. Si $I \to I$, entonces g tiene un punto fijo en I.*

Demostración. Sea $I = [\beta_0, \beta_1]$. Dado que $I \subset g(I)$, existen $\alpha_0, \alpha_1 \in I$ tales que $g(\alpha_i) = \beta_i$ para $i = 0, 1$. Así, $\alpha_0 - g(\alpha_0) = \alpha_0 - \beta_0 \geq 0$ y $\alpha_1 - g(\alpha_1) = \alpha_1 - \beta_1 \leq 0$. Dado que g es continua, por el Teorema del Valor Intermedio, se tiene que $g(x) - x = 0$ para algún x entre α_0 y α_1. Por tanto, $g(x) = x$ para algún $x \in I$. □

Lema 2.3 (Lema del Itinerario)**.** *Si $J_0, \ldots, J_{n-1}$ son intervalos cerrados y acotados y $J_0 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ (esto es llamado un lazo o n-lazo de intervalos), entonces hay un punto fijo p de f^n tal que $f^i(p) \in J_i$ para todo $0 \leq i < n$.*

Demostración. Dado que $J_{n-1} \to J_0$, por el lema 2.1 se tiene que existe un intervalo $K_{n-1} \subset J_{n-1}$, tal que $K_{n-1} \rightarrowtail J_0$. Como $J_{n-2} \to J_{n-1}$ y $K_{n-1} \subset J_{n-1}$ entonces $f(J_{n-2}) \supset J_{n-1} \supset K_{n-1}$. Así, $J_{n-2} \to K_{n-1}$, y por lema el 2.1, existe $K_{n-2} \subset J_{n-2}$ tal que $K_{n-2} \rightarrowtail K_{n-1}$.

Continuando con este proceso, existen intervalos $K_i \subset J_i$, $0 \leq i < n$ tales que
$$K_0 \rightarrowtail K_1 \cdots \rightarrowtail K_{n-2} \rightarrowtail K_{n-1} \rightarrowtail J_0.$$

Para cualquier $x \in K_0$ se cumple que $f^i(x) \in K_i$, $0 \leq i < n$ y $f^n(x) \in J_0$. Como $K_0 \subset J_0 = f^n(K_0)$, por el lema 2.2 se tiene que f^n tiene un punto fijo en K_0. □

Lema 2.4. *Sean $f : J \to J$ una función continua y $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de intervalos compactos con $I_n \subset J$ e $I_{n+1} \subset f(I_n)$ para todo $n \geq 0$. Entonces* *existe una sucesión de intervalos compactos* $\{Q_n\}$ *tal que* $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ *y* $f^n(Q_n) = I_n$ *para todo* $n \geq 0$*. Además, para cualquier* $x \in Q = \cap Q_n$ *se tiene* $f^n(x) \in I_n$ *para todo* $n \geq 0$*.*

Demostración. La demostración se realizará por indución.
Definamos $Q_0 = I_0$. Entonces $f^0(Q_0) = I_0$.
Veamos que la proposición se cumple para $k = 1$, como por hipótesis $I_0 \subset J$, e $I_1 \subset f(I_0)$, entonces por el lema 2.1, existe $Q_1 \subset I_0$ tal que $f(Q_1) = I_1$.

Supongamos ahora que el lema se cumple para $k \leq n-1$, es decir, que existe Q_{n-1} tal que $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$ $(Q_{n-1} \subset Q_{n-2} \subset \cdots \subset I_0)$.

Veamos que se cumple para $k = n$. Como $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$ entonces por hipótesis se tiene que $I_n \subset f(I_{n-1}) = f^n(Q_{n-1})$. Por el lema 2.1 aplicado a $g = f^n$ en Q_{n-1}, se tiene que existe $Q_n \subset Q_{n-1}$ tal que $f^n(Q_n) = I_n$ y $Q_n \subset Q_{n-1} \subset \cdots \subset Q_1 \subset I_0$.

Ahora, sea $x \in Q = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n$, entonces $x \in Q_n$ para todo $n \geq 0$, y dado que $f^n(Q_n) = I_n$ para todo $n \geq 0$. Entonces $f^n(x) \in I_n$ para todo $n \geq 0$. $\square$

Definición 2.3. Diremos que un punto p sigue el lazo $J_0 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ si satisface la conclusión del lema 2.3. Note que si p sigue un lazo de longitud n, entonces su período debe ser un divisor de n.

Deseamos asegurar que el período del punto p encontrado en el lema 2.3 es n y no un divisor propio de n, tal como ocurre con el 2-lazo $[-1, 0] \rightleftarrows [0, 1]$ de $f(x) = -2x$ el cual es seguido sólo por el punto fijo 0.

Definición 2.4. Se dice que un lazo $J_0 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ de intervalos es elemental si cada punto p que lo sigue tiene período n.

Con la definición anterior, empleando el lema 2.3 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1. *La presencia de un lazo elementeal* $J_0 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ *implica la existencia de un punto periódico* p *con período* n *que sigue el lazo.*

Esto hace interesante dar criterios convenientes para decidir si un lazo es elemental. El más simple es que cualquier lazo de longitud 1 es elemental (ya que el período de un punto que sigue el lazo debe ser 1). Un criterio de mayor utilidad es el siguiente:

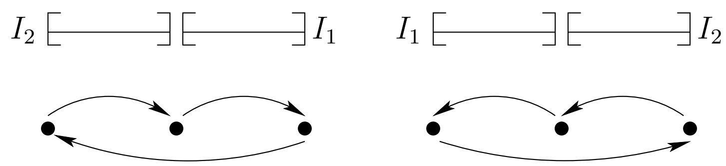
Lema 2.5. *Un lazo $J_0 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ de $\mathcal{O}-$ intervalos es elemental si no es seguido por un punto de $\mathcal{O}$ y el interior de J_0 ($Int(J_0)$) es disjunto de cada J_i con $1 \leq i \leq n-1$ ($Int(J_0) \cap J_i = \emptyset$, $1 \leq i \leq n-1$).*

Demostración. Supongamos que el lazo $J_0 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ no es seguido por puntos de $\mathcal{O}$. Así, si $f^n(p) = p$ y p sigue el lazo, entonces $p \notin \mathcal{O}$. Por tanto, $p \in Int(J_0)$. Si $0 < i < n$ entonces $f^i(p) \notin int(J_0)$ ($f^i(p) \in J_i$ $i = 1, \ldots, n-1$). Así, $f^i(p) \neq p$ para $0 < i < n$. Luego, p tiene período n. $\square$

2.4. Casos particulares.

2.4.1. Período 3 implica todos los períodos

Un 3-ciclo puede presentarse en dos versiones que son una el reflejo de la otra:



Para el ciclo mostrado en la izquierda, denotamos los intervalos izquierdo y derecho entre los puntos por I_2 e I_1 respectivamente. Para el ciclo en la derecha hacemos la elección opuesta. Como se muestra en la figura arriba. Entonces $I_1 \to I_1$, $I_1 \to I_2$ e $I_2 \to I_1$.

Lo anterior puede resumirse de la siguiente forma $\circlearrowleft I_1 \rightleftarrows I_2$. Como $I_1 \to I_1$, por el lema 2.2 se tiene que I_1 contiene un punto fijo de f.

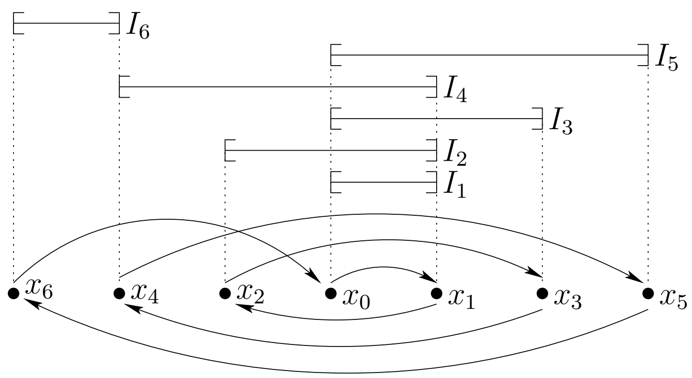
Los puntos de $\mathcal{O}$ no pueden seguir el lazo $I_1 \to I_2 \to I_1$ porque son puntos de período 3, mientras que un punto que sigue el lazo debe tener período 1 ó 2. Además, $Int(I_1) \cap I_2 = \emptyset$. Así, por el lema 2.5, se tiene que el lazo $I_1 \to I_2 \to I_1$ es elemental, por tanto f tiene una órbita de período 2.
Los puntos de $\mathcal{O}$ no pueden permanecer en el intervalo I_1 por más de dos iteraciones consecutivas de f. Por lo tanto, los puntos de $\mathcal{O}$ no pueden seguir el lazo:

$$I_2 \to \overbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}^{l-1 \text{ copias de } I_1} \to I_2 \text{ , si } l > 3$$

Así, por el lema 2.5 se tiene que el lazo anterior es elemental para $l > 3$. Por lo tanto, f tiene un punto de período l para cada $l > 3$.
Esto demuestra un caso especial del Teorema de Sharkovsky: la presencia de una órbita de período 3 implica que cada entero positivo sea un período de f.

2.4.2. Un 7-ciclo.

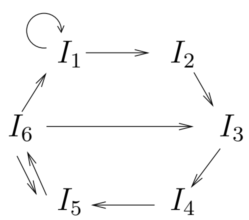
Consideremos un 7-ciclo $\mathcal{O}$ y una elección de $\mathcal{O} - intervalos$ como la siguiente:



Con esta elección de intervalos obtenemos las siguientes relaciones de cubrimiento:

1. $I_1 \to I_1$,
2. $I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_6 \to I_1$, y
3. $I_6 \to I_5, I_3, I_1$.

Esta información puede resumirse en el siguiente grafo:



De este grafo podemos extraer los siguientes lazos:

4. $I_1 \to I_1$

5. $I_6 \to I_5 \to I_6$

6. $I_6 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_6$

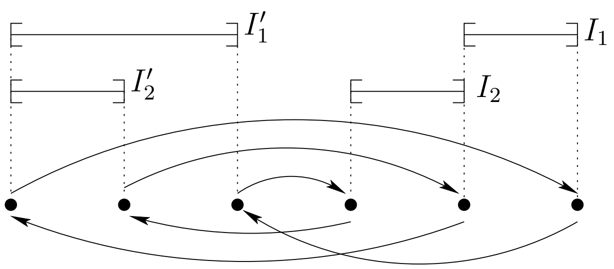
7. $I_6 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_6$

8. $I_6 \to I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_6$ con 3 o más copias de I_1.

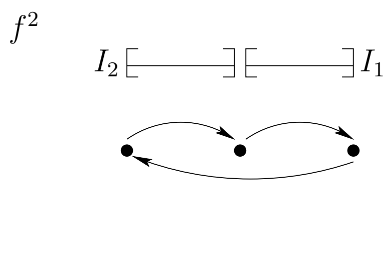
El lazo $I_1 \to I_1$ es elemental porque tiene longitud 1. Los lazos restantes son elementales por el lema 2.5, porque el interior de I_6 es disjunto de los otros intervalos (I_i con $1 \leq i < 6$) y los lazos no pueden ser seguidos por un punto de $\mathcal{O}$ por las mismas razones que en el ejemplo anterior. Las longitudes de estos ciclos son 1, 2, 4, 6 y cualquiera mayor que 7, lo cual demuestra que este 7-ciclo implica la existencia de puntos de período l para todo $l \lhd 7$.

2.4.3. Un 6-ciclo.

Consideremos el 6-ciclo:



En este caso el hecho fundamental es que los 3 puntos en la mitad izquierda son enviados a los 3 puntos en la mitad derecha y viceversa. Por lo tanto, los 3 puntos en la mitad derecha forman un ciclo para la segunda iterada f^2 y más especificamente es un ciclo de la forma:



el cual es igual al del primer ejemplo en esta sección.

De este ciclo, obtenemos las relaciones de cubrimiento $I_1 \to I_1$, $I_1 \to I_2$ e $I_2 \to I_1$. Así, al igual que en la sección 2.4.1, podemos concluir que f^2 tiene lazos elementales de todas las longitudes.

Una forma de producir lazos elementales para f a partir de esto, es la siguiente:
Para cada k-lazo para f^2 obtenido empleando algunas de las siguientes relaciones de cubrimiento $I_1 \to I_1$, $I_1 \to I_2$ e $I_2 \to I_1$ reemplazaremos la aparición de "$I_1 \to$"por "$I_1 \to I_1' \to$" y cada aparición de "$I_2 \to$"por "$I_2 \to I_2' \to$". Esto produce un $2k$-ciclo para f, el cual es elemental por la siguiente razón.

Si un punto p sigue el $2k$-ciclo de f, entonces p sigue el original k-ciclo elemental de f^2 y por tanto tiene período k para f^2.

Por otro lado, las iteradas de p bajo f alternan lados ya que el $2k$-lazo para f alterna entre intervalos con prima y sin prima. Por lo tanto, el período de p para f es $2k$. Como en el argumento anterior k era arbitario, se tiene que este 6-ciclo implica todos los períodos pares, así como el período 1, que se obtiene del intervalo no etiquetado en el centro, el cual se cubre a sí mismo bajo la acción de f.

2.5. Teorema de Sharkovsky: Caso Directo.

Sea $\mathcal{O}$ un ciclo de f con longitud m. Demostraremos que hay órbitas de período l para todo $l \lhd m$, para ello encontraremos l-lazos elementales de $\mathcal{O} - intervalos$ para todo $l \lhd m$ y luego aplicaremos la proposición 2.1 para deducir la existencia de ciclos de esas longitudes. Para hacerlo trabajaremos directamente con el ciclo $\mathcal{O}$, no necesitamos suponer que m es el período de f que aparece primero en el orden de Sharkovsky.

Si $\mathcal{O}$ es un ciclo no trivial; es decir, si $m \geq 2$. Sean $p = \max\{x \in \mathcal{O} : f(x) > x\}$ y q el punto de $\mathcal{O}$ que está inmediatamente a la derecha de p. Entonces $f(p) \geq q$ y $f(q) \leq p$. Consideremos $I = [p, q]$, esta elección tiene como consecuencia inmediata que $I \to I$. Fijemos un punto $c \in Int(I)$. El punto medio de I es una elección natural, pero cualquier punto en $Int(I)$ funcionará. Para $x \in \mathcal{O}$ denotamos por $\mathcal{O}_x$ el conjunto de puntos de $\mathcal{O}$ en el intervalo cerrado acotado por x y c.

Definición 2.5. Diremos que $x \in \mathcal{O}$ cambia de lado si x y $f(x)$ están a distintos lados de c.

Los extremos del intervalo I, p y q, cambian de lado.

Observación 2.1. Si todos los puntos de $\mathcal{O}$ cambian de lado, entonces f es una biyección entre $\mathcal{O}_L$ y $\mathcal{O}_R$ donde $L := \min \mathcal{O}$ y $R := \max \mathcal{O}$. En particular m es par.

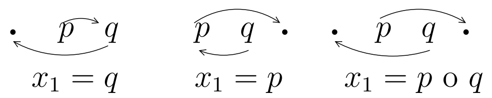
La demostración comienza con el caso en que no todos los puntos cambian de lado. Este es el contenido de la siguiente proposición, la cual luego provee la base para un argumento inductivo.

2.5.1. El caso principal.

Proposición 2.2. *Si un m-ciclo $\mathcal{O}$, con $m \geq 2$, contiene un punto que no cambia de lado, entonces hay un l-lazo elemental de $\mathcal{O}-$intervalos para cada $l \lhd m$.*

Demostración. Comenzamos construyendo una secuencia $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ de puntos en $\mathcal{O}$ "que salen en espiral tan rápido como es posible".

Seleccionemos x_0 y x_1 tales que sean los extremos de I, etiquetados de forma que $f(x_1) \neq x_0$. Tal etiquetamiento es posible ya que de lo contrario $\mathcal{O} = \{x_0, x_1\}$ y todos los puntos de $\mathcal{O}$ cambiarían de lado, lo que contradice la hipótesis de la proposición.



Extendemos la secuencia inductivamente de la siguiente forma.
Si $i \geq 1$ y todos los puntos de $\mathcal{O}_{x_i}$ cambian de lado, entonces x_{i+1} es el punto de $f(\mathcal{O}_{x_i})$ que está más lejos de c; en otro caso x_{i+1} no está definida. Nótese que este proceso es finito ya que hay al menos un punto de $\mathcal{O}$ que no cambia de lado. Además, los términos consecutivos de esta secuencia están en lados opuestos de c. En consecuencia, $x_0, x_2, \ldots, x_{2i}, \ldots$ están a un lado de c y $x_1, x_3, \ldots, x_{2i+1}, \ldots$ están todos al otro lado de c.

Lema 2.6. *El punto x_{i+2} está más lejos de c que x_i, si ambos están definidos.*

Demostración. Para $i = 0$ se sigue del hecho que $x_2 = f(x_1) \neq x_0$. Si $i \geq 1$ y x_{i+1} y x_{i+2} están definidos, todos los puntos de $\mathcal{O}_{x_i}$ y $\mathcal{O}_{x_{i+1}}$ cambian de lado y tenemos la inclusión $f(\mathcal{O}_{x_i}) \subset \mathcal{O}_{x_{i+1}}$ y $f(\mathcal{O}_{x_{i+1}}) \subset \mathcal{O}_{x_{i+2}}$, por lo tanto, $f^2(\mathcal{O}_{x_i}) \subset \mathcal{O}_{x_{i+2}}$. Como f es inyectiva en $\mathcal{O}$ se tiene que $\mathcal{O}_{x_{i+2}}$ tiene al menos tantos puntos como $\mathcal{O}_{x_i}$. En consecuencia x_{i+2} está al menos tan lejos de c como x_i.
Por otro lado, no podemos tener que $x_i = x_{i+2}$ porque entonces

$$f(\mathcal{O}_{x_i} \cup \mathcal{O}_{x_{i+1}}) = f(\mathcal{O}_{x_i}) \cup f(\mathcal{O}_{x_{i+1}}) \subset \mathcal{O}_{x_{i+1}} \cup \mathcal{O}_{x_{i+2}} = \mathcal{O}_{x_i} \cup \mathcal{O}_{x_{i+1}}, \quad (2.1)$$

pero $\mathcal{O}_{x_i} \cup \mathcal{O}_{x_i} \neq \mathcal{O}$ porque todos los puntos de $\mathcal{O}_{x_i} \cup \mathcal{O}_{x_{i+1}}$ cambian de lado, pues x_{i+1} y x_{i+2} están ambos definidos.

Por lo tanto, lo ocurrido en (2.1) es imposible ya que f es una permutación cíclica de $\mathcal{O}$ (para algún punto $p \in \mathcal{O}_{x_i} \cup \mathcal{O}_{x_{i+1}}$ debe ocurir que $f(p) \notin \mathcal{O}_{x_i} \cup \mathcal{O}_{x_{i+1}}$ pues $\mathcal{O}_{x_i} \cup \mathcal{O}_{x_{i+1}} \neq \mathcal{O}$ y f es una permutación cíclica de $\mathcal{O}$). $\square$

Corolario 2.1. *Los puntos $x_0, x_1, \ldots$ son todos distintos, y este proceso termina con x_k para algún $k < m$.*

Ahora construimos una secuencia de $\mathcal{O}-$*intervalos* para la cual tenemos relaciones de cubrimiento que producirán lazos de longitud 1, longitud l para todo número par $l \leq k$ y longitud l para todo $l \geq k$ excepto posiblemente m.

Emplearemos el lema 2.5 para verificar que estos lazos sean elementales. Como $k < m$ $(m \geq k+1)$, este conjunto de longitudes incluye 1, todo número par $l < m$, y todo $l > m$, esto es, todo $l \lhd m$.

Una elección simple de intervalos que produce las relaciones de cubrimiento deseadas (pero no permite la aplicación del lema 2.5) es la siguiente: Para $1 \leq i < k$, sea J_i el $\mathcal{O}-$ *intervalo* más corto que contiene a $\mathcal{O}_{x_i}$ y a ambos extremos del intervalo I.
Del lema 2.6 se sigue que $J_{k-1} \supset J_{k-3} \supset J_{k-5} \supset \cdots$ y $J_{k-2} \supset J_{k-4} \supset \cdots$.
Sea J_k el $\mathcal{O}-$ *intervalo* más corto que contiene a $\mathcal{O}_{x_k}$. Con esta elección tenemos:

1. $J_1 \to J_1$,

2. $J_i \to J_{i+1}$ para $1 \leq i < k$,

3. $J_k \to J_{k-1}$.

Obtenemos 1 porque $J_1 = I \to I$, como vimos anteriormente. Obtenemos 2 porque J_i contiene los puntos extremos de I y el punto $y_i \in \mathcal{O}_{x_i}$ para el cual $f(y_i) = x_{i+1}$, esto asegura que $f(J_i)$ contiene el intervalo I y el punto x_{i+1}, y como f es continua y J_i es un intervalo, entonces $f(J_i)$ es un intervalo. Así, $f(J_i) \supset J_{i+1}$.

Como $\mathcal{O}_{x_k} \supset \mathcal{O}_{x_{k-2}}$ por el lema 2.6, J_k contiene un punto y_{k-2} que cambia de lado y tal que $f(y_{k-2}) = x_{k-1}$. Pero J_k también contiene un punto $z \in \mathcal{O}$ que no cambia de lado. Se sigue que $f(J_k)$ contiene a x_{k-1} y a $f(z)$, el cual está al otro lado de c desde x_{k-1}. Por lo tanto $J_k \to J_{k-1}$.

Ahora restringimos los intervalos J_i a los intervalos I_i que tienen todas las propiedades deseadas. Para $1 \leq i < k$ sea I_i el $\mathcal{O} -$ *intervalo* más corto que contiene a y_i y a ambos extremos de I. Sea I_k el $\mathcal{O} -$ *intervalo* acotado por y_{k-2} y el punto z seleccionados anteriormente.

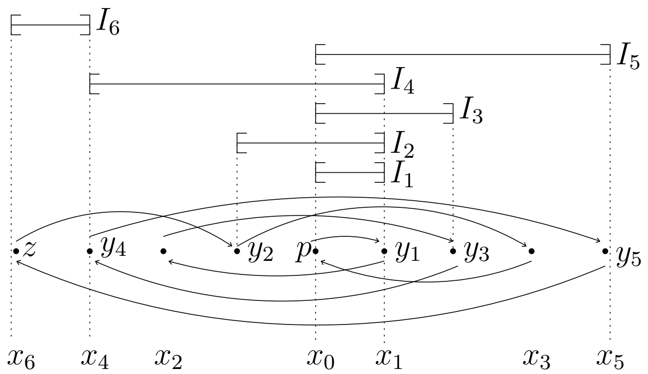
De la definición se tiene que $I_i \subset J_i$ para $1 \leq i < k$ e $I_1 = J_1 = I$. Los argumentos explicados anteriormente también pueden emplearse para demostrar que $I_1 \to I_1$, $I_i \to J_{i+1}$ para $1 \leq i < k$, e $I_k \to J_{k-1}$. Como $J_{k-1} \supset I$ y $J_{k-1} \supset J_{k-3} \supset \cdots$ obtenemos las siguientes relaciones de cubrimiento:

4. $I_1 \to I_1$

5. $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1$

6. $I_k \to I_{k-1}, I_{k-3}, \cdots$

Ejemplo 2.1. Aquí se muestran los intervalos $I_1, I_2, \ldots$ para una órbita típica.

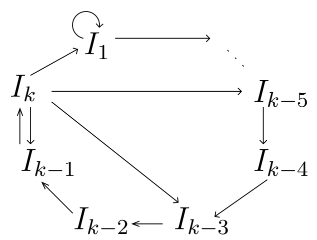


La ventaja de los I-intervalos sobre los J-intervalos es que podemos aplicarles el lema 2.5 a los lazos que involucran I-intervalos.

Lema 2.7. *$I_i \cap Int(I_k) = \emptyset$ para $1 \leq i < k$.*

Demostración. El punto z está más lejos de c que x_{k-2} porque z no cambia de lado y todos los puntos de $\mathcal{O}_{x_{k-2}}$ cambian de lado. En consecuencia $Int(I_k)$ está al lado opuesto de x_{k-2} respecto a c. Por otro lado, $J_{k-2} \cup J_{k-1}$ están en el mismo lado que c con respecto a x_{k-2} e $I_i \subset J_{k-2} \cup J_{k-1}$ para $1 \leq i < k$. $(J_{k-1} \supset J_{k-3} \supset J_{k-5} \supset \cdots, J_{k-2} \supset J_{k-4} \supset J_{k-6} \supset \cdots)$ □

Las relaciones de cubrimiento (4 - 6) pueden ser resumidas en el siguiente grafo:



Del cual obtenemos los siguientes lazos:

7. $I_1 \to I_1$,

8. $I_k \to I_{k-(l-1)} \to I_{k-(l-2)} \to \cdots \to I_{k-2} \to I_{k-1} \to I_k$ para $l \leq k$ par,

9. $I_k \to I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{k-1} \to I_k$ con j apariciones de I_1.

El lazo en 7 es elemental porque tiene longitud 1.
Los lemas 2.7 y 2.5 nos dicen que los lazos en 8 y 9 son elementales una vez hayamos probado que ellos no pueden ser seguidos por un punto de $\mathcal{O}$.

Este es el caso para los lazos en 8 porque tienen longitud $l \leq k < m$.
Los lazos en 9 no son seguidos por un punto de $\mathcal{O}$ en los siguientes casos:

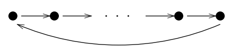
- $j = 1$, ya que este ciclo tiene longitud $k < m$,
- $j = 2$ y $k < m - 1$, ya que este lazo tiene longitud $k + 1 < m$,
- $j > 2$, ya que estos lazos tienen al menos 3 repeticiones de I_1.

El caso excepcional es $j = 2$ y $k = m - 1$ en el que el lazo en 9 tiene longitud m y no necesariamente produce un punto periódico. El lazo en 7 tiene longitud 1. Los lazos en 8 tienen todas las longitudes pares hasta k (menores o iguales que k). Los lazos elementales en 9 tienen todas longitudes $l \geq k$, excepto posiblemente m.

Note que si $l \lhd m$ entonces ó $l = 1$, $l > m$ ó $l < m$ y l es par. Luego, hay lazos elementales de logitud l para todo $l \lhd m$. $\square$

Comentario 2.1. Como notamos en la demostración, si $k < m - 1$ en el corolario 2.1, la órbita $\mathcal{O}$ implica períodos $l = 1$, pares $l \leq k$ y todo $l \geq k$, y esto incluye algunos períodos que anteceden a m en el orden de Sharkovsky.

Una situación extrema de este tipo está dada por cualquier ciclo en el que el punto q seleccionado en el principio de esta sección es $R = \max \mathcal{O}$ y $f(q) = L = \min \mathcal{O}$; es decir, un ciclo de la forma

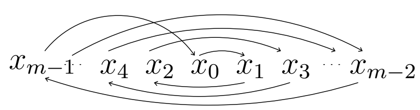


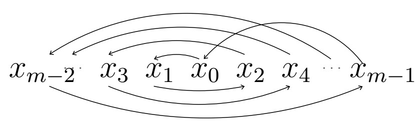
De lo anterior se tiene que $k = 2$; más aún:

- Si $k = 2 < m - 1$, entonces $I_2 \to I_1 \to I_1 \to I_2$ es un ciclo elemental de longitud 3 y produce un punto de período 3 y por tanto hay puntos de todos los períodos.

- Si $2 = k = m - 1$, entonces $m = 3$, y por tanto hay puntos de todos los períodos.

Por otro lado, si $k = m - 1$, habrá solo un punto de $\mathcal{O}$, llamado x_{m-1} que no cambia de lado. El punto x_{m-1} debe ser el punto más a la derecha o más a la izquierda de $\mathcal{O}$ y la secuencia $x_0, x_1, \ldots$ debe salir en espiral en sentido horario o antihorario, como se muestra en la siguiente figura:





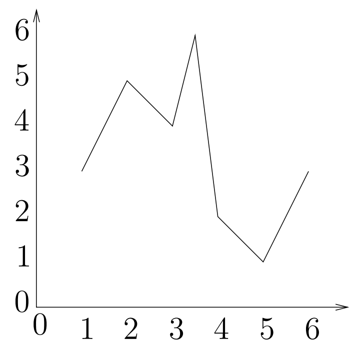
Adicionalmente debemos tener que $f(x_i) = x_{i+1}$ para $0 \leq i < m - 1$. Estas órbitas son llamadas ciclos de Štefan. Ellos son fundamentales en la demostración estándar del Teorema de Sharkovsky. Nuestra demostración es más direta porque no necesitamos estos ciclos, pero ellos inspiran para construir la secuencia de x_i en la prueba de la proposición 2.2.

2.5.2. El caso general: argumento inductivo.

El directo del Teorema de Sharkovsky sigue inmediatamente de la proposición 2.1 una vez que hayamos establecido que un m-ciclo $\mathcal{O}$ tiene un l-lazo elemental de $\mathcal{O} - intervalos$ para cada $l \lhd m$. Este hecho será demostrado por indución sobre m. Para llevar a cabo esta inducción primero necesitamos hacer una observación acerca de un hecho de los lazos obtenidos en la proposición 2.2 que no comentamos previamente. Este es que cada relación de cubrimiento en esos lazos fue obtenida a partir de información sobre cómo se mueven los puntos de un ciclo dado. Esto quiere decir que todas las relaciones de cubrimiento producidas por estos argumentos tienen la siguiente propiedad:

Definición 2.6. Una relación de cubrimiento $I \to J$ de $\mathcal{O}-intervalos$ se dice que es $\mathcal{O} - forzada$ si J está contenido en el intervalo cerrado cuyos puntos extremos son los puntos más a la izquierda y más a la derecha de $f(I \cap \mathcal{O})$; es decir, si $J \subset [\min f(I \cap \mathcal{O}), \max f(I \cap \mathcal{O})]$. Un lazo de $\mathcal{O} - intervalos$ se dice que es $\mathcal{O} - forzado$ si cada relación de cubrimiento en él es $\mathcal{O} - forzada$.

Ejemplo 2.2. Consideremos la función $f : [1, 6] \to [1, 6]$ cuyo gráfico es el siguiente:



Entonces f es continua y se tiene que 1 es un punto periódico de período 5, y $\mathcal{O} = \{1, 3, 4, 2, 5\}$. Además:
$[1, 2] \to [3, 4]$, es una relación de cubrimiento $\mathcal{O} - forzada$ pues

$$[3, 4] \subset [3, 5] = [\min f([1, 2] \cap \mathcal{O}), \max f([1, 2] \cap \mathcal{O})], \text{ y}$$

$[3, 4] \to [2, 6]$ pero esta relación de cubrimiento no es $\mathcal{O} - forzada$ pues

$$[2, 6] \not\subseteq [2, 4] = [\min f([3, 4] \cap \mathcal{O}), \max f([3, 4] \cap \mathcal{O})].$$

Para nuestro argumento inductivo es importante notar que todos los lazos obtenidos en la demostración de la proposición 2.2 son $\mathcal{O} - forzados$. (En efecto, cualquier relación de cubrimiento derivada sólo de información sobre la dinámica en $\mathcal{O}$ será $\mathcal{O} - forzada$).

El siguiente hecho nos permitirá realizar la demostración por inducción:

Proposición 2.3. *Un m-ciclo $\mathcal{O}$ tiene un l-lazo elemental $\mathcal{O} - forzado$ de $\mathcal{O} - intervalos$ para cada $l \lhd m$.*

Demostración. Usaremos indución sobre m. El enunciado es cierto para $m = 1$ ya que no existe $l \lhd 1$.
Supongamos que la proposición 2.3 se cumple para todos los ciclos de longitud menor que m.
Sea $\mathcal{O}$ un m-ciclo. Si hay un punto que no cambia de lado, entonces la conclusión de la proposición 2.3 se sigue de la proposición 2.2 y de nuestra observación que la proposición produce lazos $\mathcal{O} - forzados$.
Por otro lado, si todos los puntos cambian de lado, por la observación 2.1 se tiene que m es par y f es una biyección entre $\mathcal{O}_L$ y $\mathcal{O}_R$ donde $L := \min \mathcal{O}$ y $R := \max \mathcal{O}$.

Para la segunda iterada, f^2, $\mathcal{O}_L$ y $\mathcal{O}_R$ son ciclos de longitud $m/2$, y por la hipótesis inductiva podemos aplicar la proposición 2.3 a cualquiera de estos, en particular a $\mathcal{O}_R$. Por lo tanto f^2 tiene un k-lazo elemental $\mathcal{O}_R$-forzado de $\mathcal{O}_R$-intervalos para cada $k \lhd m/2$.

Resta deducir a partir de esto que f tiene un $2k$-lazo elemental $\mathcal{O} - forzado$ de $\mathcal{O} - intervalos$ para cada $k \lhd m/2$ además de un 1-lazo elemental. En consecuencia, la siguiente proposición concluye la inducción.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{O}$ un ciclo de f tal que todos sus puntos cambian de lado, y supongamos que el ciclo $\mathcal{O}_R$ de f^2 da origen a un k-lazo elemental*

$\mathcal{O}_R$-intervalos para f^2. Entonces hay un $2k$-lazo elemental $\mathcal{O}-forzado$ de $\mathcal{O}-intervalos$ para f. Además, hay un 1-lazo elemental $\mathcal{O}-forzado$ para f.

Demostración. El 1-lazo se obtiene del $\mathcal{O}-intervalo$ que está en el medio, que está comprendido entre el punto de $\mathcal{O}_L$ que se encuentra más a la derecha ($\max \mathcal{O}_L$) y el punto de $\mathcal{O}_R$ más a la izquierda ($\min \mathcal{O}_R$).

Como $f(\max \mathcal{O}_L) \geq \min \mathcal{O}_R$ y $f(\max \mathcal{O}_L) \leq \min \mathcal{O}_R$, se tiene que dado $I = [\max \mathcal{O}_L, \min \mathcal{O}_R]$ se cumple que $I \rightleftarrows I$.

Para un k-lazo elemental

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{k-1} \to J_0 \tag{2.2}$$

de $\mathcal{O}_R$-intervalos para f^2.
Sea J_i' el intervalo cerrado más corto que contiene a $f(J_i \cap \mathcal{O}) \subset \mathcal{O}_L$. Los intervalos $J_1', \ldots, J_{k-1}'$ están a la izquierda de c; donde c es el punto medio del intervalo $I = [p, q]$ con $p = \max\{x \in \mathcal{O} : f(x) > x\}$ y q el punto de $\mathcal{O}$ que está inmediatamente a la derecha de p.

Como la relación de cubrimiento $J_i \to J_{i+1}$ es $\mathcal{O}_R$-forzada para f^2 se tiene que $J_{i+1} \subset [\min f^2(J_i \cap \mathcal{O}), \max f^2(J_i \cap \mathcal{O})]$.
Dado que $J_i' = [\min f(J_i \cap \mathcal{O}), \max f(J_i \cap \mathcal{O})]$, entonces

$$\min f^2(J_i \cap \mathcal{O}), \max f^2(J_i \cap \mathcal{O}) \in f(J_i').$$

Por tanto, si $y \in [\min f^2(J_i \cap \mathcal{O}), \max f^2(J_i \cap \mathcal{O})]$, existe $x \in J_i'$ tal que $f(x) = y$. Luego, $J_{i+1} \subset [\min f^2(J_i \cap \mathcal{O}), \max f^2(J_i \cap \mathcal{O})] \subset f(J_i')$. En consecuencia, $J_i' \to J_{i+1}$ para f, y esta relación de cubrimiento es $\mathcal{O}-forzada$. Así, obtenemos un $2k-lazo$ $\mathcal{O}-forzado$ para f:

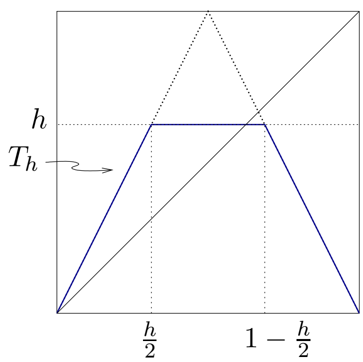
$$J_0 \to J_0' \to J_1 \to J_1' \to \cdots \to J_{k-1} \to J_{k-1}' \to J_0 \tag{2.3}$$

Un punto periódico p para f que sigue el lazo (2.3) es un punto periódico para f^2 que sigue el lazo elemental (2.2) y por tanto tiene período k con respecto a f^2. Como los intervalos en (2.3) están alternativamente a la derecha y a la izquierda del centro, también lo están los iterados de p bajo f. Por lo tanto, p tiene período $2k$ con respecto a f, y el lazo en (2.3) es elemental. $\square$

2.6. Teorema de Sharkovsky: Caso Recíproco.

Para demostrar que cada cola del orden de Sharkovsky es el conjunto de períodos para una función continua de un intervalo en sí mismo consideraremos la familia de funciones tienda truncadas $T_h : [0,1] \to [0,1]$, definidas para cada $x \in [0,1]$ por:

$$x \mapsto \text{mín}\,(h, 1 - 2|x - \frac{1}{2}|),\ \text{ para } 0 \leq h \leq 1$$



A continuación varias propiedades de la familia T_h, las dos primeras son obvias.

(a) T_0 ($T_0(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$) sólo tiene un punto periódico (el punto fijo 0) mientras que la función tienda T_1 tiene los siguientes 3-ciclos: $\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ y $\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$ y por lo tanto tiene todos los números naturales como períodos por el directo del Teorema de Sharkovsky.

(b) T_1 tiene un número finito de puntos periódicos para cada período.

(c) Si $h \leq k$, cualquier ciclo $\mathcal{O} \subset [0,h)$ de T_h es un ciclo para T_k, y cualquier ciclo $\mathcal{O} \subset [0,h]$ de T_k es un ciclo para T_h.

Demostración. Dado $h \in [0,1]$ se tiene que $T_1(x) \leq h$ si, y solo si, $x \in [0, \frac{h}{2}] \cup [1 - \frac{h}{2}, 1]$. Por tanto, para cualquier $0 \leq h \leq k \leq 1$ las funciones T_h y T_k coinciden en el conjunto

$$J_h = [0, \frac{h}{2}] \cup [1 - \frac{h}{2}, 1].$$

Además, la función T_h es constante en el intervalo abierto $K_h = (\frac{h}{2}, 1 - \frac{h}{2})$ y por tanto tiene a lo más un punto periódico en $cl(K_h) = [\frac{h}{2}, 1 - \frac{h}{2}]$.

Sea $0 \leq h \leq k \leq 1$ dado que $T_1(K_h) = (h, 1]$ se tiene que para cualquier ciclo $\mathcal{O} \subset [0, h)$ de T_h, $\mathcal{O} \subset J_h$ y en consecuencia $\mathcal{O}$ también es un ciclo para T_k. Por otro lado, dado un ciclo $\mathcal{O} \subset [0, h]$ de T_k se tiene que $\mathcal{O} \subset J_h$ y en consecuecia $\mathcal{O}$ es también un ciclo para T_h. $\square$

Lo que hace esta prueba tan elegante es que h juega tres roles: como un parametro, como el valor máximo de T_h y como un punto de una órbita.

Para $m \in \mathbb{N}$, sea

$$h(m) := \text{mín}\,\{\text{máx}\,\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ es un } m\text{-ciclo de } T_1\}$$

(d) T_h tiene un l-ciclo $\mathcal{O} \subset [0, h)$ si, y solo si, $h(l) < h$.

Demostración. Si T_h tiene un l-ciclo $\mathcal{O} \subset [0, h)$, entonces por (c) $\mathcal{O}$ es un l-ciclo para T_1 y $\text{máx}\,\mathcal{O} < h$. Así, por la definición de $h(l)$ se tiene que $h(l) < h$.

Recíprocamente, si $h(l) < h$, entonces existe al menos un l-ciclo $\mathcal{O}$ de T_1 tal que $\mathcal{O} \subset [0, h)$ y por (c) se tiene que $\mathcal{O}$ es un l-ciclo de T_h. $\square$

(e) La órbita de $h(m)$ es un m-ciclo para $T_{h(m)}$, y todos los otros ciclos para $T_{h(m)}$ están contenidos en $[0, h(m))$.

Demostración. Dado que $h(m) = \text{mín}\,\{\text{máx}\,\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ es un } m\text{-ciclo de } T_1\}$, es claro que la órbita de $h(m)$ es un m-ciclo de T_1 y está contenida en $[0, h(m)]$, y por (c) se tiene que la órbita de $h(m)$ es un m-ciclo para $T_{h(m)}$; además, cualquier otro ciclo para $T_{h(m)}$ es disjunto de la órbita de $h(m)$ y por tanto está contenido en $[0, h(m))$. $\square$

(f) Si $m \neq l$, entonces $h(m) \neq h(l)$ ya que los ciclos de diferentes longitudes son disjuntos.

(g) $l \lhd m$ si, y solo si, $h(l) < h(m)$.

Demostración. De (e) y el directo del Teorema de Sharkovsky se tiene que $T_{h(m)}$ tiene un l-ciclo contenido en $[0, h(m))$ para todo $l \lhd m$. Así por (d), $h(l) < h(m)$.
Recíprocamente, supongamos que $h(l) < h(m)$ y que $m \lhd l$ o $m = l$, entonces por lo anterior se tiene que $h(m) \leq h(l)$ lo cual es una contradicción. Luego, $l \lhd m$. $\square$

Note que para cada $m \in \mathbb{N}$, $T_{h(m)}$ tiene un l-ciclo para todo $l \lhd m$. Por otro lado, si $\mathcal{O}$ es un l-ciclo de $T_{h(m)}$, con $l \neq m$, entonces $\mathcal{O} \subset [0, h(m))$. Así, $h(l) < h(m)$, y en consecuencia $l \lhd m$.
Luego, el conjunto de períodos de $T_{h(m)}$ es una cola del orden de Sharkovsky dada por m y todo $l \lhd m$.

El conjunto de todas las potencias de 2 es la otra cola del orden de Sharkovsky (junto con $\emptyset$ el cual es el conjunto de períodos de la transformación $x \mapsto x + 1$ en $\mathbb{R}$).

Por otra parte, por (g) se tiene que la sucesión $(h(2^n))_{n \geq 0}$ es creciente. Sea $h(2^\infty) := \sup_k h(2^k)$. Dado que $h(2^\infty) > h(2^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $T_{h(2^\infty)}$ tiene un 2^k*−ciclo* para todo $k \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que $T_{h(2^\infty)}$ tiene un m*−ciclo* tal que m no es potencia de 2. Por el directo del Teorema de Sharkovsky $T_{h(2^\infty)}$ tiene también un $2m$ *− ciclo*. Como el m *− ciclo* y el $2m$ *− ciclo* son disjuntos, al menos uno de ellos está contenido en $[0, h(2^\infty))$. Dado que $2^k \lhd 2m \lhd m$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por (g) se tiene $h(2^\infty) \leq h(2m) < h(m)$, lo que contradice a (d).Por lo tanto los únicos períodos de $T_{h(2^\infty)}$ son potencias de 2.

3 Caos Li-Yorke Unidimensional

3.1. Teorema de Li-Yorke.

En este capítulo presentaremos un teorema que permite, a partir de la simple observación de una órbita periódica en particular, determinar no solo la coexistencia de órbitas periódicas de todos los períodos, sino también la presencia de órbitas de comportamiento errático que no se acumulan en ninguna órbita periódica. Este teorema se debe a Li y Yorke y se presenta a continuación:

Teorema 3.1. *Sean J un intervalo compacto y $f : J \to J$ una función continua. Si existe un punto $a \in J$ para el cual los puntos $b = f(a)$, $c = f^2(a)$, y $d = f^3(a)$ satisfacen $d \leq a < b < c$ (ó $d \geq a > b > c$). Entonces*

1. *Para cada $k = 1, 2, \ldots$ hay un punto periódico en J con período k.*
2. *f es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Observación 3.1. Nótese que si una función f tiene un punto periódico de período tres, entonces la hipótesis del teorema se satisface y por tanto f es caótica en el sentido de Li-Yorke.

Por el Teorema de Sharkovsky, si una función tiene un punto de período tres, entonces tiene puntos periódicos de cualquier período. No obstante, su enunciado nos proporciona mayor información: dice que la existencia de puntos de período tres no solo implica la existencia de puntos periódicos de cualquier período, sino que además existe un conjunto no numerable $S \subset J$, tal que para cualquier par de puntos $x, y \in S$, la distancia entre las dos sucesiones de iteraciones $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{f^n(y)\}_{n=0}^{\infty}$, tienen la propiedad que cuando n tiende a infinito, el límite inferior es igual a cero mientras que el límite superior es positivo.

Observe que el límite inferior sea igual a cero, quiere decir que existe una infinidad de n's tales que $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$ están tan cercanos como se quiera; y que el límite superior sea positivo, quiere decir que existe una infinidad de n's tales que la distancia entre $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$ siempre es positiva. En otras palabras, bajo las iteraciones de f, diferentes puntos de S están algunas veces cercanos y otras veces separados, y ninguno de estos es periódico.

A continuación ofrecemos una demostración de este teorema.

Demostración. Supongamos que $d \leq a < b < c$; el caso $d \geq a > b > c$ es similar. Sean $K = [a, b]$, $L = [b, c]$ y k un entero positivo. Para $k > 1$, sea $\{I_n\}$ la sucesión de intervalos dada por: $I_n = L$ para $n = 0, 1, 2, \ldots, k-2$ e $I_{k-1} = K$; definamos I_n periódicamente por $I_{n+k} = I_n$ para $n \geq 0$. Si $k = 1$, entonces $I_n = L$, para todo $n \geq 0$.

Claramente L y K son compactos, $K, L \subset [d, c] = [f(c), f(b)] \subset f(L)$ y $L = [b, c] = [f(a), f(b)] \subset f(K)$; por tanto $I_n \to I_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. De lo anterior se tiene que la sucesión de intervalos $\{I_n\}$ satisface las hipótesis del lema 2.4, en consecuencia existe una sucesión de intervalos compactos $\{Q_n\}$ tal que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ y $f^n(Q_n) = I_n$ para todo $n \geq 0$. Por tanto se cumple que $f^k(Q_k) = I_k = I_0 \supset Q_k$. Por el lema 2.2, $g = f^k$ tiene un punto fijo $p_k \in Q_k$; además, p_k no puede tener período menor que k para f. En efecto, supongamos que p_k tiene período $m < k$, entonces si $m = k-1$, $f^{k-1}(p_k) = p_k \in Q_k \subset I_0 = L$; dado que $Q_k \subset Q_{k-1}$, $p_k \in Q_{k-1}$ y $f^{k-1}(p_k) \in I_{k-1} = K$, por tanto $f^{k-1}(p_k) = b$. De esta forma $f^{k+1}(p_k) = d \notin L$, lo cual es una contradicción porque $f^{k+1}(p_k) = f(p_k) \in I_1 = L$ $(Q_k \subset Q_1)$. Así que p_k no puede tener período $k-1$.

Por otro lado, si $m < k-1$, $\mathcal{O}(p_k) = \{p_k, f(p_k), \ldots f^{m-1}(p_k)\}$; y dado que $f^{k-1}(p_k) \in \mathcal{O}(p_k)$, existe $0 < l < m$ tal que $f^{k-1}(p_k) = f^l(p_k)$. Así $f^{k-1}(p_k) = f^l(p_k) \in I_l = L$, pues $Q_k \subset Q_l$ y $l \leq k-2$. Como antes $p_k \in Q_{k-1}$ y en consecuencia $f^{k-1}(p_k) \in I_{k-1} = K$, por tanto $f^{k-1}(p_k) = b$. Entonces $f^{k+1}(p_k) = d \notin L$, lo cual es una contradicción porque $f^{k+1}(p_k) = f(p_k) \in I_1 = L$. Luego p_k no puede tener período $m < k-1$. Por tanto p_k es de período k.

Ahora, veamos que existe un conjunto scrambled no numerable $S \subset J$.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de sucesiones de intervalos compactos $M = \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, siendo que:

$$M_n = K, \text{ o } M_n \subset L \text{ y } M_n \to M_{n+1}; \tag{3.1}$$

además;

$$\text{si } M_n = K, \text{ entonces } n \text{ es el cuadrado de un entero,} \tag{3.2}$$

donde $K = [a,b]$ y $L = [b,c]$. Observe que si $M_n = K$ de (3.2) sigue que $M_{n+1}, M_{n+2} \subset L$ pues si n es el cuadrado de un entero, entonces $n+1$ y $n+2$ no lo son.

Para cada $M \in \mathcal{M}$, sea $P(M,n)$ el número de i's en $\{1,2,..,n\}$ para el cual $M_i = K$.

En lo que sigue $[|r|]$ denota la parte entera de r; eso es, $[|r|]$ es el menor entero mayor que r.

Consideremos una sucesión $M^{\frac{3}{4}} \in \mathcal{M}$ tal que

$$P(M^{\frac{3}{4}}, m) = [|\tfrac{3}{4}n|], \text{ si } n^2 \leq m < (n+1)^2.$$

Note que $M^{\frac{3}{4}}_{(4n+r)^2} = K$ si $n \geq 1$ y $r \in \{0,2,3\}$.

Para cada $r \in [\frac{3}{4}, 1)$ consideremos una sucesión $M^r = \{M^r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{M}$ tal que $P(M^r, m) = [|rn|]$ si $n^2 \leq m < (n+1)^2$, además $M^r_n = M^{\frac{3}{4}}_n$ si $M^{\frac{3}{4}}_n = K$.

Dado que $rn - 1 < [|rn|] \leq rn$, tenemos que $\frac{rn-1}{n} < \frac{[|rn|]}{n} \leq \frac{rn}{n}$ y como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{rn-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{rn}{n} = r,$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(M^r, n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[|rn|]}{n} = r. \tag{3.3}$$

Sea $\mathcal{M}_0 = \{M^r : r \in (\frac{3}{4}, 1)\} \subset \mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{M}_0$ es no numerable ya que $M^{r_1} \neq M^{r_2}$ para $r_1 \neq r_2$: por unicidad del límite. Así, $r \mapsto M^r$ es inyectiva. Por el lema 2.4, para cada $M^r = \{M^r_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}_0$ existe un punto x_r con $f^n(x_r) \in M^r_n$ para todo n. Sea $S = \{x_r : r \in (\frac{3}{4}, 1)\}$.

Para $x \in S$, sea $P(x,n)$ el número de i's en $\{1,2,\ldots,n\}$ para las cuales $f^i(x) \in K$.

Proposición 3.1. *Dado $x_r \in S$, $f^k(x_r) \neq b$ para todo k.*

Demostración. Sea $x_r \in S$. Supongamos por absurdo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = b$.

Si $d \neq a$, $f^{k+2}(x_r) = d \notin K \cup L$, lo cual es una contradicción pues $f^{k+2}(x_r) \in M^r_{k+2}$ y por (3.1) se tiene que $M^r_{k+2} = K$ o $M^r_{k+2} \subset L$.

Si $d = a$, x_r es eventualmente periódico de período 3. Sea l de manera que $(l+1)^2 - l^2 > 3$, entonces $M_n = L$ para todo $l^2 < n < (l+1)^2$ lo cual es una contradicción. Luego, $f^k(x_r) \neq b$ para todo k. □

Observación 3.2. Dado que $P(x_r, n)$ cuenta el número de i's tal que $f^i(x_r) \in K$ y como $f^n(x_r) \in M^r_n$ para todo n, entonces contar el número de i's tales que $f^i(x_r) \in K$ es equivalente a contar el número de veces que $M^r_n = K$, pues nunca ocurre que $f^k(x_r) = b = K \cap L$. De aquí que $P(x_r, n) = P(M^r, n)$ para todo n y así

$$\rho(x_r) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(x_r, n^2)}{n} = r \text{ para todo } r \in (\tfrac{3}{4}, 1).$$

Veamos ahora que S es no numerable. Sean $r_1, r_2 \in (\frac{3}{4}, 1)$ con $r_1 \neq r_2$. Note que $\rho(x_{r_1}) \neq \rho(x_{r_2})$, por tanto existe $k \geq 1$ tal que $P(x_{r_1}, k^2) \neq P(x_{r_2}, k^2)$. Así, existe $1 \leq m \leq k^2$ tal que $f^m(x_{r_1}) \in K$ y $f^m(x_{r_2}) \notin K$, o $f^m(x_{r_1}) \notin K$ y $f^m(x_{r_2}) \in K$. En consecuencia $x_{r_1} \neq x_{r_2}$. Luego, $r \mapsto x_r$ es inyectiva, y por tanto S es no numerable.

Proposición 3.2. *Si $x_{r_1}, x_{r_2} \in S$ con $r_1 \neq r_2$, entonces existen infinitos n's tales que $f^n(x_{r_1}) \in K$ y $f^n(x_{r_2}) \in L$, o viceversa.*

Demostración. Supongamos que solo hay una cantidad finita de $n's$ tales que $f^n(x_{r_1}) \in K$ y $f^n(x_{r_2}) \in L$ o viceversa. Sea k el mayor número natural tal que $f^n(x_{r_1}) \in K$ y $f^n(x_{r_2}) \in L$ o viceversa. Luego, para todo $n > k$ se tiene que $f^n(x_{r_1})$ y $f^n(x_{r_2})$ están ambos en K o ambos en L. Así,

$$P(x_{r_1}, n^2) - P(x_{r_2}, n^2) = P(x_{r_1}, k) - P(x_{r_2}, k), \text{ para todo } n \geq k.$$

En consecuencia,

$$r_1 - r_2 = \rho(x_{r_1}) - \rho(x_{r_2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(x_{r_1}, n^2) - P(x_{r_2}, n^2)}{n} = 0$$

lo cual es una contradicción pues $r_1 \neq r_2$. □

Como $f^2(b) = d \leq a$ y f^2 es continua, entonces dado $\varepsilon = \frac{b-d}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f^2(x) - f^2(b)| < \frac{b-d}{2}$, si $|x - b| < 2\delta$. Así

$$f^2(x) < \frac{b-d}{2} + f^2(b) = \frac{b-d}{2} + d = \frac{b+d}{2}, \text{ para todo } x \in [b-\delta, b] \subset K$$

Si $x \in S$ y $f^n(x) \in K$, entonces (3.2) implica que $f^{n+1}(x)$, $f^{n+2}(x) \in L$. Por tanto $f^n(x) < b-\delta$, por que si $f^n(x) \geq b-\delta$, entonces $f^{n+2}(x) < \frac{b+d}{2} < b$ de aquí que $f^{n+2}(x) \notin L$, y esto no es posible.

Si $f^n(y) \in L$, entonces $f^n(y) \geq b$, así $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Por la proposición 3.2, para cualquier $x, y \in S$, con $x \neq y$ se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| \geq \delta > 0.$$

Probemos que S no tiene puntos periódicos.

Supongamos que existe $p \in S$ periódico de período k. Sin importar que tan grande sea k es posible elegir l de tal modo que $(l+1)^2 - l^2 \geq 2k$. En consecuencia los iterados de p permanecen en L un número mayor que k veces, y dado que p es periódico, debe ocurrir que todos ellos permanecen en L; en cuyo caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(x, n^2)}{n} = 0,$$

por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(M^r, n^2)}{n} = 0 = r$$

para la sucesión M^r que generó este p, lo cual contradice el hecho que $r \in (\frac{3}{4}, 1)$. Luego, en S no hay puntos periódicos.

Por otra parte, como $f(b) = c$, $f(c) = d \leq a$, $[b, c] \subset f([b, c])$.

Ahora consideremos

$$b^1 = \max\{x \in [b, c] : f(x) = c\} \text{ y } c^1 = \min\{x \in [b^1, c] : f(x) = b\}$$

Así, $[b, c] \supset [b^1, c^1]$, $f([b^1, c^1]) = [b, c]$, $f(b^1) = c = c^0$, $f(c^1) = b = b^0$, y $f(x) \in (b^0, c^0)$ para todo $x \in (b^1, c^1)$

Definamos por inducción

$$b^{n+1} = \max\{x \in [b^n, c^n] : f(x) = c^n\} \text{ y } c^{n+1} = \min\{x \in [b^{n+1}, c^n] : f(x) = b^n\}$$

Así, $[b^n, c^n] \supset [b^{n+1}, c^{n+1}]$, $f([b^{n+1}, c^{n+1}]) = [b^n, c^n]$, $f(b^{n+1}) = c^n$, $f(c^{n+1}) = b^n$ y $f(x) \in (b^n, c^n)$ para todo $x \in (b^{n+1}, c^{n+1})$

Sea $A = \bigcap_{n=0}^{\infty}[b^n, c^n]$, entonces $A \neq \emptyset$. Sean $b^* = \inf A$ y $c^* = \sup A$. Como $\{b^n\}$ es una sucesión monotona creciente entonces $b^n \to b^*$ y como $\{c^n\}$ es una sucesión monótona decreciente, $c^n \to c^*$. Por la continuidad de f, se tiene que

$$f(b^*) = f(\lim_{n\to\infty} b^{n+1}) = \lim_{n\to\infty} c^n = c^*.$$

Análogamente se prueba que $f(c^*) = b^*$.

Para probar que $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ debemos ser más específicos en la elección de las sucesiones M^r. Además de los anteriores requerimientos sobre $M \in \mathcal{M}$, supondremos que si $M_k = K$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$, entonces $M_k = [b^{2n-(2j-1)}, b^*]$ para $k = n^2 + (2j-1)$, $M_k = [c^*, c^{2n-2j}]$ para $k = n^2 + 2j$ donde $j = 1, 2, \ldots, n$.

Para las restantes k's que no son cuadrados de enteros, se supondrá que $M_k = L$.

Del hecho que $\rho(x)$ es el límite de la fracción de n's para las cuales $f^{n^2}(x) \in K$, se sigue que para cualquier $r^*, r \in (\frac{3}{4}, 1)$ existen una infinidad de n's tales que $M_k^r = M_k^{r^*} = K$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$.

Sea $x_r, x_{r^*} \in S$. Ya que $b_n \to b^*$, $c^n \to c^*$ cuando $n \to \infty$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b^n - b^*| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |c^n - c^*| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n > N.$$

Entonces, para cualquier n con $n > N$ y $M_k^r = M_k^{r^*} = K$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$, se tiene

$$f^{n^2+1}(x_r) \in M_k^r = [b^{2n-1}, b^*], \text{ con } k = n^2 + 1.$$

Así que $f^{n^2+1}(x_r)$ y $f^{n^2+1}(x_{r^*})$ pertenecen a $[b^{2n-1}, b^*]$. Por lo tanto

$$|f^{n^2+1}(x_r) - f^{n^2+1}(x_{r^*})| < \varepsilon.$$

Ya que hay una infinidad de n's con esta propiedad, sigue que

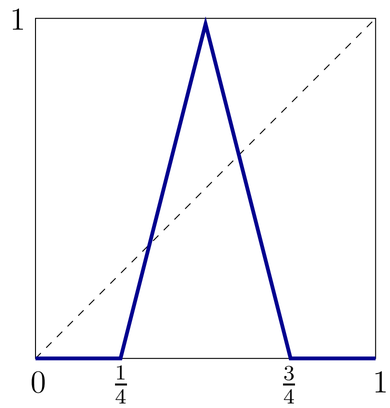
$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x_r) - f^n(x_{r^*})| = 0.$$

$\square$

3.1.1. Ejemplos

Ejemplo 3.1. Una función con un conjunto scrambled de medida cero.
Sea $I = [0,1]$ y $f : I \to I$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 0{,}25; \\ 4x - 1, & \text{si } 0{,}25 \le x < 0{,}5; \\ -4x + 3, & \text{si } 0{,}5 \le x < 0{,}75; \\ 0, & \text{si } 0{,}75 \le x \le 1. \end{cases}$$

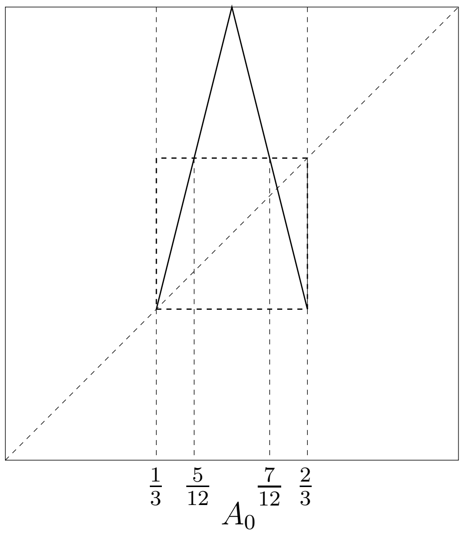


Como f es continua y $\mathcal{O}(\frac{23}{65}) = \{\frac{23}{65}, \frac{27}{65}, \frac{43}{65}\}$ es una órbita de período 3, f satisface las hipótesis del Teorema de Li-Yorke, por tanto es caótica en I. Mostraremos que f tiene un conjunto scrambled $S \subset I$ de medida cero.

Primero observe que:

- 0, $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{5}$ son puntos fijos.
- Si $x \in (0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$, entonces $f(x) = 0$, y por tanto x es eventualmente fijo.
- Si $x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$, entonces $f(x) = 4x - 1 < x$. Así, si $f^n(x) \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(f^n(x))_{n \ge 0}$ es decreciente y acotada inferiormente, por tanto convege a un punto fijo. Pero en $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ no hay puntos fijos, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \le \frac{1}{4}$. En consecuencia, x es eventualmente fijo.
- Si $x \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$, $f(x) = -4x + 3 \in (0, \frac{1}{3})$ y por tanto x es eventualmente fijo.

De lo anterior sigue que todo punto en $[0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1]$ es eventualmente fijo; de hecho, para todo $x \in [0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1]$, existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = 0$. Adicionalmente, f en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ es como en la figura



De acá que todo punto $x \in A_0 = (\frac{5}{12}, \frac{7}{12})$ es eventualmente fijo a 0, pues si $x \in (\frac{5}{12}, \frac{7}{12})$, $f(x) \in (\frac{2}{3}, 1]$.
Por otra parte, todo x en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ que sea eventualmente fijo a 0, debe ser tal que su órbita pasa por $(\frac{5}{12}, \frac{7}{12})$. De hecho, los puntos x en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ que no son eventualmente fijos a 0 son aquellos para los cuales toda su órbita está en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Sea Λ tal conjunto; note que

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}([\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}])$$

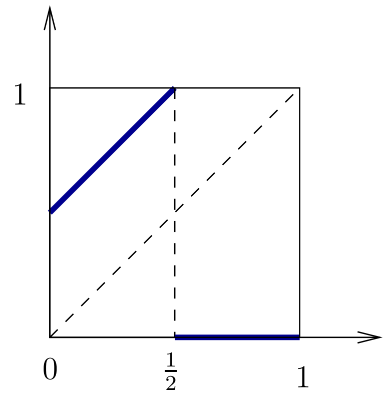
Claramente $f(\Lambda) \subset \Lambda$. Veremos que Λ es un conjunto de Cantor con medida cero. Ello es un procedimiento estándar: se procede de la misma forma como se hace para demostrar que en la familia logística $f_\mu(x) = \mu x(x-1)$, $\mu > 4$ y $x \in [0, 1]$, el conjunto de puntos con órbita acotada es un conjunto de Cantor. Remitimos a [6].

Como el conjunto de puntos que no son eventualmente fijos, $S_0 \subset \Lambda$, tiene medida cero, entonces el conjunto scrambled $S \subset I$ que se obtiene como resultado del Teorema de Li-Yorke, tiene medida cero, pues $S \subset S_0$.

El siguiente ejemplo muestra que la condición de continuidad en el teorema de Li-Yorke no puede debilitarse.

Ejemplo 3.2. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$



Obsérvese que $\mathcal{O}(0, f) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ es una órbita de período 3. Por lo anterior se podría pensar que f es caótica en el sentido de Li-Yorke. Pero nótese que cada órbita de f en $[0,1]$ es eventualmente periódica de período 3. Por ejemplo, si $x = \frac{1}{5}$, $f(x) = \frac{7}{10}$, $f^2(x) = 0$. Por tanto, no satisface las condiciones de la definición, es decir f no es caótica. Esto se debe a que f es discontinua en $\frac{1}{2}$.

El siguiente ejemplo muestra que el Teorema de Li-Yorke no admite extensiones a dimensiones mayores que 1.

Ejemplo 3.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación en $\mathbb{R}^2$ de $\frac{2\pi}{3}$ alrededor del origen, es decir $f(r, \theta) = (r, \theta + \frac{2\pi}{3})$. f tiene una órbita de período 3 y sin embargo, no es caótica en el sentido de Li-Yorke pues todos sus puntos, excepto el origen, son puntos periódicos de período 3.

3.2. Propiedades adicionales.

En esta sección presentaremos algunas propiedades adicionales de las funciones caóticas en el sentido de Li-Yorke.

Teorema 3.2. *Si $f : J \to J$ es una función continua tal que f tiene un punto de período $m \cdot 2^n$ para algún entero impar $m \geq 3$ y para algún número natural n, entonces f es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Demostración. Supongamos que f tiene un punto periódico de período $m{\cdot}2^n$ para algún entero impar $m \geq 3$ y para algún número natural n, entonces por el Teorema de Sharkovsky se tiene que f tiene un punto de período $3 \cdot 2^{(n+1)}$; esto es, $f^{2^{(n+1)}}$ tiene un punto de período 3 y por tanto es caótica en el sentido de Li-Yorke. Luego, f es caótica en el sentido de Li-Yorke, por la proposición 1.4. $\square$

Proposición 3.3. *Sean $I = [\alpha, \beta]$ un intervalo compacto y $f : I \to I$ una función continua. Si f no tiene puntos periódicos de período 2, entonces $f(x) > x$ (resp. $f(x) < x$) implica que $f^n(x) > x$ (resp. $f^n(x) < x$).*

Demostración. Supongamos que existen $c \in I$ y $n \geq 1$ tales que $f^n(c) < c < f(c)$. Como f no tiene puntos periódicos de período 2, por el teorema de Sharkovsy se tiene que los únicos puntos periódicos de f son puntos fijos.

Si f no tiene puntos fijos menores que c, entonces $f^n(x) < x$ para todo $x < c$. En efecto, si existe $x < c$ tal que $f^n(x) \geq x$, entonces por el teorema del valor intermedio existe $y \in [x, c)$ tal que $f(y) = y$ lo cual es una contradicción.

Como $f^n(x) < x$ para todo $x < c$, entonces la sucesión $(f^{kn}(c))_{k\geq 0}$ es una sucesión decreciente y por tanto converge a un punto z, y por la continuidad de f tenemos que $f^{(k+1)n}(x) \to f^n(z)$. Así, $f^n(z) = z$, como los únicos puntos periódicos de f son puntos fijos, se tiene que z es un punto fijo, lo cual es una contradicción pues $z < c$.

Si f tiene puntos fijos menores que c. Consideremos $a = sup(Fix(f) \cap [\alpha, c)$, entonces existe una sucesión creciente $(x_n)_{n\geq 0}$ en $Fix(f) \cap [\alpha, c]$ tal que $x_n \to a$. Así, $x_n = f(x_n) \to f(a)$. Luego, $f(a) = a$ y $a < c$, en consecuencia $a \in Fix(f) \cap [\alpha, c]$.

Sea $a < x \leq c$. Supongamos que $f(x) \leq x$ entonces existe $y \in (x, c) \subset (a, c)$ tal que $f(y) = y$, lo cual es una contradicción. Así, $f(x) > x$ para todo $a < x \leq c$.

Dado $0 < \varepsilon < c - a$, por continuidad existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in (a, a + \delta_1] \subset (a, c]$, entonces $a < x < f(x) < a + \varepsilon < c$. Así, $f(x) \in (a, c)$, por tanto $f(x) < f^2(x)$. Por continuidad existe $\delta_2 > 0$ tal que si $x \in (a, a + \delta_2] \subset (a, c]$, entonces $a < f(x) < f^2(x) < a + \varepsilon < c$. Así, $f^2(x) \in (a, a + \varepsilon) \subset (a, c)$.

Continuando con este procedimiento, tomamos $\delta = \min\{\delta_i : 1 \leq i \leq n\}$. Si $x \in (a, a + \delta)$, entonces $a < x < f(x) < c$ y $f^k(x) < f^{k+1}(x)$ para $1 \leq k < n$. Por tanto, $x < f^n(x)$ para todo $x \in (a, a + \delta)$. Por el teorema del valor interemedio se tiene que existe $y \in (x, c) \subset (a, c)$ tal que $f^n(y) = y$ y dado que los únicos puntos periódicos son puntos fijos, tenemos que y es un punto fijo, lo cual es una contradicción.

Luego, si $f(x) > x$,entonces $f^n(x) > x$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Proposición 3.4. *Sean I un intervalo compacto y $f : I \to I$ una función continua. Si f no tiene puntos de período 2, entonces para todo $x \in I$ la órbita $(f^n(x))_{n\geq 0}$ converge a un punto fijo de f.*

Demostración. Sea $x \in I$, si $(f^n(x))_{n\geq 0}$ es eventualmente constante o eventualmente monótona, entonces $(f^n(x))_{n\geq 0}$ converge a un punto fijo.

Sea $x \in I$ tal que $x < f(x)$ y que la sucesión $(f^n(x))_{n\geq 0}$ no es eventualmente constante ni eventualmente monótona (el caso $x > f(x)$ es similar).

Definamos n_1 el menor entero tal que $f^{n+1}(x) < f^n(x)$. Sea n_2 el menor entero mayor que n_1 tal que $f^{n+1}(x) > f^n(x)$. Tomamos n_3 el menor entero mayor que n_2 tal que $f^{n+1}(x) < f^n(x)$. Continuando con este proceso tenemos que, para todo $i \in \mathbb{N}$: n_{2i} es el menor entero mayor que n_{2i-1} tal que $f^{n+1}(x) > f^n(x)$, y n_{2i+1} es el menor entero mayor que n_{2i} tal que $f^{n+1}(x) < f^n(x)$.

Así, por la proposición 3.3, tenemos que:

$$\begin{gathered}
f^{n_{2i}-1}(x) > f^n(x), \text{ para todo } n \geq n_{2i} \\
f^{n_{2i}}(x) < f^n(x), \text{ para todo } n > n_{2i} \\
f^{n_{2i+1}-1}(x) < f^n(x), \text{ para todo } n \geq n_{2i+1} \\
f^{n_{2i+1}}(x) > f^n(x), \text{ para todo } n > n_{2i+1}
\end{gathered}$$

De esto tenemos que:

$$\begin{aligned}
x &< f(x) < \cdots < f^{n_2}(x) < f^{n_2+1}(x) < \cdots \\
&< f^{n_3-1}(x) < f^{n_4}(x) < \cdots < f^{n_4-1}(x) < \cdots \\
&< f^{n_3+1}(x) < f^{n_3}(x) < f^{n_2-1}(x) < \cdots < f^{n_1+1}(x) < f^{n_1}(x).
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que $(f^{n_{2i}}(x))_{i>0}$ es un sucesión creciente y la sucesión $(f^{n_{2i+1}}(x))_{i>0}$ es decreciente; por tanto existen $y, z \in I$ tales que $f^{n_{2i}}(x) \to y$ y $f^{n_{2i+1}}(x) \to z$.

Además, para todo $i \in \mathbb{N}$:

$f^{n_{2i}}(x) < f^{n_{2i+1}-1}(x) < f^{n_{2(i+1)}}(x)$ y $f^{n_{2i+1}}(x) < f^{n_{2i}-1}(x) < f^{n_{2i-1}}(x)$.

Así, $f^{n_{2i+1}-1}(x) \to y$ y $f^{n_{2i}-1}(x) \to z$ por continuidad tenemos que $f^{n_{2i}}(x) \to f(z)$ y $f^{n_{2i+1}}(x) \to f(y)$. Por tanto, $y = f(z)$ y $z = f(y)$, dado que f no tiene puntos periódicos de período 2, debe ocurrir que $y = z$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $f^{n_{2i}}(x) \to y$ y $f^{n_{2i+1}}(x) \to y$, existe $N > 0$ tal que

$$f^{n_{2i}}(x), f^{n_{2i+1}}(x) \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon), \text{ para todo } i \geq N.$$

Sea $n > 2N+1$, entonces existe $i \geq N$ tal que

$$f^{n_{2i}}(x) < f^n(x) < f^{n_{2i+1}}(x)$$

Por tanto, $f^n(x) \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ para todo $n > 2N+1$. En consecuencia, $(f^n(x))_{n\geq 0} \to y$. □

Corolario 3.1. *Sea I un intervalo compacto. Si $f : I \to I$ no tiene puntos de período 2, entonces f no es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Demostración. Si f no tiene puntos de período 2, entonces por la proposición 3.4, se tiene que para todo $x \in I$, existe un punto fijo $y \in I$ tal que $f^n(x) \to y$, esto es, todo $x \in I$ es asintóticamente fijo. Por lo tanto f no es caótica en el sentido de Li-Yorke. □

De acá sigue:

Corolario 3.2. *Sea I un intervalo compacto. Si $f : I \to I$ es caótica en el sentido de Li-Yorke, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, f^n tiene al menos un punto de período 2.*

Proposición 3.5. *Sean I un intervalo compacto y $f : I \to I$ una función continua. Si f es caótica en el sentido de Li-Yorke, entonces f tiene puntos periódicos de período 2^k para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea f una función caótica en el sentido de Li-Yorke, entonces por el corolario 3.2, se tiene que dado $k \in \mathbb{N}$, f^{2^k} tiene un punto de período 2, entonces por la proposición 1.2, f tiene un punto periódico de período $\frac{2\cdot 2^k}{s}$, donde s divide a 2^k y $(s,2) = 1$.

Como $(s,2) = 1$, se tiene que s es impar y dado que 1 es el único impar que divide a 2^k se tiene que $s = 1$. Así, f tiene un punto periódico de período $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Como $k \in \mathbb{N}$ es arbitrario se tiene que f tiene puntos periódicos de período 2^k para todo $k > 1$. □

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de lo anterior.

Corolario 3.3. *Sean I un intervalo compacto y $f : I \to I$ una función continua. Si f es caótica en el sentido de Li-Yorke, entonces f tiene infinitos períodos.*

3.3. Caos y Estabilidad

En esta sección mostraremos, mediante un ejemplo, que pequeñas perturbaciones de una función de período 3, no necesariamente tiene puntos de período 3. Sin embargo, demostraremos que toda función continua suficientemente cercana a una función con un punto de período 3 es caótica en el sentido de Li-Yorke; esto es, si T es una función continua con un punto de período 3, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que toda función continua F con $\|F - T\| = \max\{|F(x) - T(x)| : x \in [0,1]\} < \varepsilon$, es caótica en el sentido de Li-Yorke. Entonces la propiedad de ser caótica en el sentido de Li-Yorke es estable.

Ejemplo 3.4. Período 3 puede ser destruido por pequeñas perturbaciones. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La órbita $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ es periódica de período 3. Ahora consideremos, para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ fijo, la función T_ε dada por

$$T_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \varepsilon, & \text{si } 0 \leq x \leq \varepsilon \\ x + \frac{1}{2}, & \text{si } \varepsilon < x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Entonces se tiene que $||T_\varepsilon - T|| < \varepsilon$ pero T_ε no tiene puntos de período 3.

En efecto,

- Si $x \in [0, \varepsilon]$ entonces, $T_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$. Por tanto, $T_\varepsilon^2(x) = 1 - 2\varepsilon \in (0, 1)$. Así,

$$T_\varepsilon^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \varepsilon, \text{ si } \frac{1}{3} < \varepsilon < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - 2\varepsilon, \text{ si } \frac{1}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{3} \\ 4\varepsilon, \text{ si } 0 < \varepsilon < \frac{1}{4} \end{cases}$$

  Por tanto, $T_\varepsilon^3(x) \neq x$.

- Si $x \in (\varepsilon, \frac{1}{2}]$ entonces, $T_\varepsilon(x) = x + \frac{1}{2} \in (\frac{1}{2} + \varepsilon, 1]$. Por tanto, $T_\varepsilon^2(x) = 1 - 2x$. Así,

$$T_\varepsilon^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \varepsilon, \text{ si } \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - 2x, \text{ si } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ 4x, \text{ si } x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

  Como $\frac{3}{2} - 2x = x$ si, y solo si, $x = \frac{1}{2}$, se tiene $T_\varepsilon^3(x) \neq x$.

- Si $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, entonces $T_\varepsilon(x) = 2 - 2x \in [0, 1)$.

  - Si $1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq 1$, entonces $T_\varepsilon^2(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Por tanto, $T_\varepsilon^3(x) = 1 - 2\varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x$.
  - Si $\frac{3}{4} \leq x \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ entonces, $T_\varepsilon^2(x) = \frac{5}{2} - 2x \in (\frac{1}{2}, 1]$ y por tanto, $T_\varepsilon^3(x) = -3 + 4x \in [0, 1 - 2\varepsilon)$. Como $-3 + 4x = x$ si, y solo si, $x = 1$ se tiene que $T_\varepsilon^3(x) \neq x$.
  - Si $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ entonces $T_\varepsilon^2(x) = -2 + 4x \in (0, 1)$. Por tanto,

$$T_\varepsilon^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \varepsilon, \text{ si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ -\frac{3}{2} + 4x, \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < x \leq \frac{5}{8} \\ 4 - 4x, \text{ si } \frac{5}{8} < x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

    Note que si $x \leq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{2} + \varepsilon = T_\varepsilon^3(x)$. Además, si $\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < x \leq \frac{5}{8}$, entonces $T_\varepsilon^3(x) \neq x$, pues $-\frac{3}{2} + 4x = x$ si, y solo si, $x = \frac{1}{2}$. Finalmente, si $\frac{5}{8} < x < \frac{3}{4}$, entonces $T_\varepsilon^3(x) \neq x$, pues $4 - 4x = x$ si, y solo si, $x = \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$.
    De lo anterior se tiene que $T_\varepsilon^3(x) \neq x$ si $x \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Luego, T_ε no tiene puntos de período 3.

En los siguientes lemas I es un intervalo compacto.

Lema 3.1. *Sea $g : I \to I$ una función continua y $\eta > 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $f : I \to I$ es una función continua tal que $||f - g|| < \varepsilon$, entonces $||f^2 - g^2|| < \eta$.*

Demostración. Sea $\eta > 0$, por continuidad uniforme de g, existe $0 < \varepsilon < \frac{\eta}{2}$ tal que

$$|x-y| < \varepsilon \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\eta}{2}, \text{ para todo } x, y \in I.$$

Así, si f es una función continua tal que $||f-g|| < \varepsilon$, entonces

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in I. \tag{3.4}$$

Sea $x \in I$ entonces

$$|g(f(x)) - g^2(x)| = |g(f(x)) - g(g(x))| < \frac{\eta}{2}. \tag{3.5}$$

Por otro lado, de (3.4) se tiene que

$$|f^2(x) - g(f(x))| = |f(f(x)) - g(f(x))| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Luego, de (3.5) y (3.6)

$$|f^2(x) - g^2(x)| \leq |f^2(x) - g(f(x))| + |g(f(x)) - g^2(x)| < \varepsilon + \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Como esto se cumple para todo $x \in I$, se tiene $||f^2 - g^2|| < \eta$. □

Lema 3.2. *Sea $g : I \to I$ una función continua y $\eta > 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $f : I \to I$ es una función continua tal que $||f-g|| < \varepsilon$, entonces $||f^3 - g^3|| < \eta$.*

Demostración. Sea $\eta > 0$, por continuidad uniforme de g y g^2, existe $0 < \varepsilon < \frac{\eta}{3}$ tal que

$$|x-y| < \varepsilon \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\eta}{3} \text{ y } |g^2(x) - g^2(y)| < \frac{\eta}{3}, \text{ para todo } x, y \in I.$$

Así, si f es una función continua tal que $||f-g|| < \varepsilon$, entonces

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in I. \tag{3.7}$$

Sea $x \in I$, entonces

$$|g^2(f(x)) - g^3(x)| = |g^2(f(x)) - g^2(g(x))| < \frac{\eta}{3}. \tag{3.8}$$

Por otro lado, se tiene que $|f^2(x) - g(f(x))| < \varepsilon$ y $|f^3(x) - g(f^2(x))| < \varepsilon$. Así, $|g(f^2(x)) - g^2(f(x))| < \frac{\eta}{3}$. Luego,

$$\begin{aligned} |f^3(x) - g^3(x)| &\leq |f^3(x) - g(f^2(x))| + |g(f^2(x)) - g^2(f(x))| + |g^2(f(x)) - g^3(x)| \\ &< \varepsilon + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} < \eta \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $x \in I$, se tiene que $||f^3 - g^3|| < \eta$. □

Lema 3.3. *Sea $g : I \to I$ una función continua y $\eta > 0$, entonces existe $0 < \nu < \eta$ tal que si $f : I \to I$ es una función continua tal que $||f^2 - g^2|| < \nu$ y $||f^3 - g^3|| < \nu$, entonces $||f^4 - g^4|| < \eta$.*

Demostración. Sea $\eta > 0$, por continuidad uniforme de g existe $0 < \nu < \frac{\eta}{3}$ tal que

$$|x - y| < \nu \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\eta}{3}, \text{ para todo } x, y \in I.$$

Así, si f es una función continua tal que $||f^2 - g^2|| < \nu$ y $||f^3 - g^3|| < \nu$, entonces

$$|f^2(x) - g^2(x)| < \nu \text{ y } |f^3(x) - g^3(x)| < \nu, \text{ para todo } x \in I. \tag{3.9}$$

Sea $x \in I$, entonces

$$|g(f^3(x)) - g^4(x)| = |g(f^3(x)) - g(g^3(x))| < \frac{\eta}{3}.$$

Por otro lado, se tiene que $|f^4(x) - g^3(f(x))| = |f^3(f(x)) - g^3(f(x))| < \nu$ y $|f^3(x) - g^2(f(x))| = |f^2(f(x)) - g^2(f(x))| < \nu$. De lo anterior, se tiene que $|g(f^3(x)) - g^3(f(x))| < \frac{\eta}{3}$.

Luego,

$$\begin{aligned} |f^4(x) - g^4(x)| &\leq |f^4(x) - g^3(f(x))| + |g^3(f(x)) - g(f^3(x))| + |g(f^3(x)) - g^4(x)| \\ &< \nu + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} < \eta \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $x \in I$, se tiene que $||f^4 - g^4|| < \eta$. □

Lema 3.4. *Sea $g : I \to I$ una función continua y $\eta > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $f : I \to I$ es una función continua tal que $||f^3 - g^3|| < \delta$ y $||f^4 - g^4|| < \delta$, entonces $||f^5 - g^5|| < \eta$.*

Demostración. Sea $\eta > 0$, por continuidad uniforme de g existe $0 < \delta < \frac{\eta}{3}$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\eta}{3}, \text{ para todo } x, y \in I.$$

Así, si f es una función continua tal que $||f^3 - g^3|| < \delta$ y $||f^4 - g^4|| < \delta$, entonces

$$|f^3(x) - g^3(x)| < \delta \text{ y } |f^4(x) - g^4(x)| < \delta \text{ para todo } x \in I.$$

Sea $x \in I$, entonces

$$|g(f^4(x)) - g^5(x)| = |g(f^4(x)) - g(g^4(x))| < \frac{\eta}{3}.$$

Por otro lado, se tiene que $|f^5(x) - g^4(f(x))| = |f^4(f(x)) - g^4(f(x))| < \delta$ y $|f^4(x) - g^3(f(x))| = |f^3(f(x)) - g^3(f(x))| < \delta$. De lo anterior, se tiene que $|g(f^4(x)) - g^4(f(x))| < \frac{\eta}{3}$

Luego,

$$\begin{aligned} |f^5(x) - g^5(x)| &\leq |f^5(x) - g^4(f(x))| + |g^4(f(x)) - g(f^4(x))| + |g(f^4(x)) - g^5(x)| \\ &< \delta + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} < \eta \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $x \in I$, se tiene que $||f^5 - g^5|| < \eta$. □

De las propiedades anteriores se tiene:

Lema 3.5. *Sea $g : I \to I$ una función continua y $\eta > 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $f : I \to I$ y $||f - g|| < \varepsilon$ entonces $||f^5 - g^5|| < \eta$.*

Lema 3.6. *Sea $g : I \to I$ una función continua tal que $J \subsetneq g^5(J)$ para algún subconjunto $J \subsetneq I$ compacto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda función continua $f : I \to I$ tal que $||f - g|| < \varepsilon$ se tiene que $J \subsetneq f^5(J)$.*

Demostración. Sea $g : I \to I$ una función continua tal que $J \subsetneq g^5(J)$ para algún subconjunto $J \subsetneq I$ compacto.
Sea $\eta = \frac{1}{2} \text{mín}\{|\text{máx}\, g^5(J) - \text{máx}\, J|, |\text{mín}\, g^5(J) - \text{mín}\, J|\}$, entonces por el lema 3.5 existe $\varepsilon > 0$ tal que si $f : I \to I$ es una función continua tal que $||f - g|| < \varepsilon$ entonces $||f^5 - g^5|| < \eta$ Por tanto,

$$-\eta + g^5(x) \leq f^5(x) \leq g^5(x) + \eta, \text{ para todo } x \in I.$$

Así,

$$-\eta + \max_J g^5 \leq \max_J f^5 \leq \max_J g^5 + \eta, \text{ y}$$
$$-\eta + \min_J g^5 \leq \min_J f^5 \leq \min_J g^5 + \eta$$

Luego,

$$f^5(J) = [\min_J f^5, \max_J f^5] \supset [\min_J g^5 + \eta, \max_J g^5 - \eta] \supsetneq J.$$

Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda función cotinua $f : I \to I$ tal que $||f - g|| < \varepsilon$ se tiene que $J \subsetneq f^5(J)$. □

Lema 3.7. *Sea $f : I \to I$ una función continua y J un intervalo compacto tal que f no tiene puntos fijos en J, entonces existe $\eta > 0$ tal que $|f(x)-x| \geq \eta$, para todo $x \in J$.*

Demostración. Supongamos, por absurdo, que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en J tal que $|f(x_n) - x_n| < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$, entonces $f(x_n) - x_n \to 0$. Por otro lado, como J es compacto, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \to x$ para algún $x \in J$. Como f es continua $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Así, $f(x_{n_k}) - x_{n_k} \to f(x) - x$. Luego, $f(x) - x = 0$.
Por tanto, $x \in J$ es un punto fijo de f en J, lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 3.8. *Sean $f, g : I \to I$ dos funciones continuas, $J \subset I$ un intervalo compacto y $\eta > 0$ tales que $|f(x) - x| \geq \eta$ para todo $x \in J$. Si $||f - g|| < \eta$, entonces g no tiene puntos fijos en J.*

Demostración. Sea $x \in J$, entonces $|f(x) - x| \geq \eta$. Así, $f(x) + \eta \leq x$ ó $f(x) - \eta \geq x$.
Por otro lado, dado que $|f(x) - g(x)| < \eta$, se tiene que

$$f(x) - \eta < g(x) < f(x) + \eta,$$

en consecuencia $g(x) < x$, o $g(x) > x$.
Luego, g no tiene puntos fijos en J. $\square$

Teorema 3.3. *Sea $T : I \to I$ un función continua tal que T tiene un punto de período 3. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si F es una función continua y $||F - T|| < \varepsilon$ entonces F tiene al menos un punto de período 5.*

Demostración. Sea $\{x_1, x_2, x_3\}$ una órbita de período 3 para T. Supongamos que $x_1 < x_2 < x_3$ (si $x_1 < x_3 < x_2$ la prueba es similar). Tenemos: $T(x_1) = x_2$, $T(x_2) = x_3$, $T(x_3) = x_1$.
Sea $y_1 \in [x_1, x_2]$ tal que $T(y_1) = x_2$ y T no tiene puntos fijos en $[y_1, x_2]$.
Como $[x_2, x_3] = [T(y_1), T(x_2)] \subset T([y_1, x_2])$, se tiene que

$$[x_1, x_3] = [T(x_3), T(x_2)] \subset T([x_2, x_3]) \subset T^2([y_1, x_2]).$$

Por tanto, existe $y_2 \in (y_1, x_2)$ tal que $T^2(y_2) = x_2$. Nótese que $y_2 \neq y_1$ y $y_2 \neq x_2$, en efecto, $T^2(y_1) = x_3$ y $T^2(x_2) = x_1$.
Como $[x_1, x_2] = [T^2(x_2), T^2(y_2)] \subset T^2([y_2, x_2])$ se tiene que

$$[x_2, x_3] = [T(x_1), T(x_2)] \subset T([x_1, x_2]) \subset T^3([y_2, x_2]).$$

Así, $[x_1, x_3] \subset T([x_2, x_3]) \subset T^4([y_2, x_2])$ y en consecuencia, $[x_1, x_3] \subset T^5([y_2, x_2])$. Por tanto, $[y_2, x_2] \subsetneq T^5([y_2, x_2])$ y por el lema 3.6 existe $\delta > 0$ tal que para toda función continua F tal que $||F - T|| < \delta$, $[y_2, x_2] \subsetneq F^5([y_2, x_2])$ y en consecuencia existe $x_0 \in [y_2, x_2]$ tal que $F^5(x_0) = x_0$.
Por otro lado, T no tiene puntos fijos en $[y_2, x_2]$, pues $[y_2, x_2] \subset [y_1, x_2]$. Entonces por el lema 3.7, se tiene que existe $\eta > 0$ tal que $|T(x) - x| \geq \eta$, para todo $x \in [y_2, x_2]$. Tomando $\varepsilon = \text{mín}\{\eta, \delta\}$ se tiene que para toda función continua F tal que $||F - T|| < \varepsilon$ existe $x_0 \in [y_2, x_2]$ tal que $F^5(x_0) = x_0$ y por el lema 3.8 se tiene que F no tiene puntos fijos en $[y_2, x_2]$. Luego, x_0 es un punto de período 5 de F. □

Concluimos con el siguiente corolario cuya demostración sigue inmediatamente del teorema anterior.

Corolario 3.4. *Sea $T : I \to I$ un función continua tal que T tiene un punto de período 3. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si F es una función continua y $||F - T|| < \varepsilon$ entonces F es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

4 Turbulencia y Caos Block-Coppel.

A continuación presentamos el concepto de función turbulenta, noción que sirve de base para dar una definición equivalente a la de caos en el sentido de Block-Coppel, y posteriormente establecemos una relación entre éste y el caos en el sentido de Li-Yorke.

Definición 4.1. Una función $f : I \to I$ se dice turbulenta si existen subintervalos compactos J, K de I, con a lo más un punto en común, tales que $J \cup K \subset f(J) \cap f(K)$. Si J y K pueden ser seleccionados de tal forma que J y K sean disjuntos, entonces se dice que f es estrictamente turbulenta.

Proposición 4.1. *Si $f : I \to I$ es turbulenta, entonces f tiene un punto periódico de período 3.*

Demostración. Como f es turbulenta existen subintervalos compactos J, K de I, con a lo más un punto en común, tales que $J \cup K \subset f(J) \cap f(K)$.
Sean $J = [a, b]$ y $K = [b', c]$ con $a < b \leq b' < c$.
Caso $b' \neq b$.
Si $b' \neq b$ entonces $J \cap K = \emptyset$, consideremos el $3 - lazo$ $K \to J \to K \to K$, entonces existe $p \in K$ tal que $f^3(p) = p$ y además $f(p) \in J$. Así, si $f(p) = p$, entonces $p \in J \cap K$ lo cual es una contradicción.
Por tanto, p es un punto periódico de período 3.
Caso $b' = b$.
Si $f(b) \neq b$, considremos el $3 - lazo$ $K \to J \to K \to K$, entonces existe $p \in K$ tal que $f^3(p) = p$ y además $f(p) \in J$. Así, si $f(p) = p$, entonces $p \in J \cap K = \{b\}$, lo cual es una contradicción.
Si $f(b) = b$, entonces dado que $J \to J \cup K$, existen $x, y \in J$ tales que $f(x) = a$ y $f(y) = c$, $a \leq x, y < b$. Por tanto, si $x < y$, $[x, y] \to J \cup K$ y además $[x, y] \subset J$ y $b \notin [x, y]$.
Consideremos ahora el $3 - lazo$ $K \to [x, y] \to J \to K$, entonces existe un punto $p \in K$ tal que $f^3(p) = p$. Si $f(p) = p$ entonces $p \in K \cap [x, y]$, pero $K \cap [x, y] = \emptyset$. Por tanto, p tiene período 3. $\square$

Es inmediato entonces:

Corolario 4.1. *Si f es turbulenta, entonces, f tiene puntos periódicos de todos los períodos.*

Lema 4.1. *Sea f una función con una órbita periódica de período impar $n > 1$, pero no tiene puntos de período impar estrictamente entre 1 y n. Si c es el punto medio de la órbita de período n, entonces los puntos de la órbita tienen el orden*

$$f^{n-1}(c) < f^{n-3}(c) < \cdots < f^2(c) < c < f(c) < \cdots < f^{n-2}(c),$$

o bien

$$f^{n-2}(c) < \cdots < f(c) < c < f^2(c) < \cdots < f^{n-3}(c) < f^{n-1}(c).$$

Demostración. Como el período de la órbita es impar, se tiene que no todos los puntos de la órbita cambian de lado, entonces existe $k < n$ tal que hay un l-lazo elemental para todo $l \geq k$ y todo $l \leq k$ par. Supongamos que $k < n - 1$. Si $k = n - 2$, entonces f tiene un punto de período impar menor que n. Si $k < n - 2$, impar, tendríamos un punto de período impar menor que n. Si k es par, entonces f tiene un punto de período $k + 1$ impar menor que n. En ambos casos se tiene una contradicción, por tanto debe ocurrir que $k = n - 1$. Así, por el comentario 2.1 se tiene que la órbita de c es un ciclo de Štefan. □

Lema 4.2. *Si f tiene un punto periódico de período impar $n > 1$, entonces f^2 es estrictamente turbulenta.*

Demostración. Supongamos que n es tal que f no tiene una órbita de período impar estrictamente entre 1 y n. Entonces, por el lema 4.1, la órbita de período n tiene la forma

$$f^{n-1}(x) < f^{n-3}(x) < \cdots < f^2(x) < x < f(x) < \cdots < f^{n-2}(x), \qquad (4.1)$$

o bien

$$f^{n-2}(x) < \cdots < f(x) < x < f^2(x) < \cdots < f^{n-3}(x) < f^{n-1}(x). \qquad (4.2)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la órbita de x tiene la forma dada por (4.1). Dado que $x \in [f^2(x), f(x)] \subset f([x, f(x)])$ existe $d \in [x, f(x)]$

tal que $f(d) = x$, por tanto, $f^2(d) = f(x) > d$.
Sea $\varepsilon = f^2(d) - d$, entonces existe $0 < \delta_1 < f^{n-3}(x) - f^{n-1}(x)$ tal que si $a \in (f^{n-1}(x), f^{n-1}(x) + \delta_1)$, entonces $|f^2(d) - f^2(a)| = |f^{n+1}(x) - f^2(a)| < \varepsilon$, y por tanto $d < f^2(a)$. Consideremos ahora $\varepsilon = a - f^{n-1}(x)$, entonces existe $0 < \delta_2 < f^{n-3}(x) - a$ tal que si $b \in (f^{n-3}(x) - \delta, f^{n-3}(x))$, entonces $|f^{n-1}(x) - f^2(b)| < \varepsilon$, así $f^2(b) < a$.
Para $\varepsilon = a - f^{n-1}(x)$ existe $0 < \delta_3 < d - f^{n-3}(x)$ tal que si $c \in (f^{n-3}(x), f^{n-3}(x) + \delta)$, entonces $|f^{n-1}(x) - f^2(c)| < \varepsilon$, por tanto $f^2(c) < a$.

De lo anterior se tiene que $a < b < f^{n-3}(x) < c < d$, $f^2(b), f^2(c) < a$ y $d < f^2(a), f^2(d)$.
Consideremos los intervalos $J = [a, b]$ y $K = [c, d]$, entonces $J \cap K = \emptyset$ y

$$f^2(J) \supset [f^2(b), f^2(a)] \supset [a, d] \supset J \cup K, \text{ y}$$

$$f^2(K) \supset [f^2(c), f^2(d)] \supset [a, d] \supset J \cup K$$

De acá, f^2 es estrictamente turbulenta. □

Definición 4.2. Una función continua $f : I \to I$ en un intervalo compacto I es caótica en el sentido de Block-Coppel si f^m es tubulenta para algún $m \in \mathbb{N}$.

Claramente se tiene:

Corolario 4.2. *Si f tiene un punto periódico de período impar $n > 1$, entonces f es caótica en el sentido de Block-Coppel.*

Corolario 4.3. *Si f tiene un punto periódico de período $2^n q$, con $q > 1$ impar y $n \in \mathbb{N}$, entonces f es caótica en el sentido de Block-Coppel.*

Demostración. Sea p un punto periódico de f de período $2^n q$ con q impar y $n \in \mathbb{N}$, entonces p es un punto periódico de f^{2^n} con período $q > 1$ impar. Por el corolario 4.2 se tiene que $f^{2^{n+1}}$ es estrictamente turbulenta. Por lo tanto, f es caótica en el sentido de Block-Coppel. □

Corolario 4.4. *Sea I un intervalo compacto. $f : I \to I$ es caótica en el sentido de Block-Coppel si, y solo si, tiene un punto periódico de período $2^n q$, con $q > 1$ impar y $n \geq 0$.*

Proposición 4.2. *Si $f : I \to I$ es caótica en el sentido de Block-Coppel, entonces f es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Demostración. Si $f : I \to I$ es caótica en el sentido de Block-Coppel, entonces f^m es turbulenta para algún $m \in \mathbb{N}$, y por la proposición 4.1, f^m tiene un punto periódico de período 3, y por tanto es caótica en el sentido de Li-Yorke. Así, por la proposición 1.4 f es caótica en el sentido de Li-Yorke.$\square$

Definición 4.3. Se dice que una función $f : I \to I$ es uniformemente no-caótica si cada punto $x \in I$ es aproximadamente periódico.

Proposición 4.3. *Si f no es caótica en el sentido de Block-Coppel, pero no es uniformemente no-caótica, entonces existe un conjunto scrambled no numerable $S \subset I$, y por tanto, f es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Demostración. Ver corolario VI.26 (pág. 142) de [3]. $\square$

Una función uniformemente no-caótica no puede tener un conjunto scrambled con dos o más puntos, por el lema 1.2; mientras que una función que no es uniformemente no-caótica tiene un conjunto scrambled no numerable por las proposiciones 4.3 y 4.2.

De lo anterior se tiene que una función $f : I \to I$ es caótica en el sentido de Li-Yorke si y sólo si no es uniformemente no-caótica, esto es, f es caótica en el sentido de Li-Yorke si y sólo si no todos los puntos en I son aproximadamente periódicos.

5 Tricotomía en el caos.

En este capítulo introducimos una clasificación de las funciones continuas en el intervalo que proporciona un criterio útil para estudiar su caoticidad.

Definición 5.1. Sea I un intervalo compacto. Si $f : I \to I$ es una función continua, diremos que:

- f es de tipo $< 2^\infty$ si existe k, entero no negativo, de modo que todos sus puntos periódicos posean período de la forma 2^j con $j \in \{0, 1, ..., k\}$.

- f es de tipo 2^∞ si tiene puntos periódicos de período 2^n para todo $n \geq 0$, pero no tiene otros períodos.

- f es de tipo $> 2^\infty$ si posee algún punto periódico de período no potencia de 2.

Es importante resaltar que, basados en lo desarrollado anteriormente, obtenemos la siguiente tricotomía para funciones continuas en un intervalo compacto:

- Si f es de tipo $< 2^\infty$, entonces f no es caótica, en ninguno de los sentidos estudiados anteriormente.

- Si f es de tipo $> 2^\infty$, entonces f es caótica, en los dos sentidos definidos en este trabajo.

- Si f es de tipo 2^∞, entonces no es caótica en el sentido de Block-Coppel.

Sin embargo, en el caso de que una función f sea de tipo 2^∞ no podemos afirmar nada con respecto al caos de Li-Yorke porque, como veremos posteriormente, existen funciones de tipo 2^∞ que son caóticas según Li-Yorke y otras que no lo son.

5.1. Familia de funciones tienda truncadas y caos.

En esta sección determinaremos cuáles miembros de la familia de las funciones tienda truncadas son caóticos en el sentido de Li-Yorke y cúales no.

Proposición 5.1. *Para $0 \leq h < h(2^\infty)$ la función $T_{h(2^\infty)}$ no es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Demostración. Dado $h \in [0, h(2^\infty))$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $h < h(2^n)$. Como $h < h(2^n)$, cualquier ciclo $\mathcal{O} \subset [0, h)$ de T_h es un ciclo para $T_{h(2^n)}$, la cual tiene una cantidad finita de períodos, y dado que existe a lo más un ciclo $\mathcal{O}$ de T_h tal que $h \in \mathcal{O}$, se tiene que T_h tiene sólo una cantidad finita de períodos. Así, por el corolario 3.3, f no es caótica en el sentido de Li-Yorke.□

Proposición 5.2. *La función $T_{h(2^\infty)}$ es caótica en el sentido de Li-Yore pero no es caótica en el sentido de Block-Coppel.*

Demostración. $T_{h(2^\infty)}$ no es caótica en el sentido de Block-Coppel pues sus únicos períodos son potencias de 2. Sin embargo, en el ejemplo VI.29, pág. 146 de [3], se prueba que $T_{h(2^\infty)}$ no es uniformemente no-caótica y por tanto se tiene que $T_{h(2^\infty)}$ es caótica en el sentido de Li-Yorke, por la proposición 4.3. □

Proposición 5.3. *Si $h(2^\infty) < h \leq 1$, entonces T_h es caótica en el sentido de Block-Coppel.*

Demostración. Si $h(2^\infty) < h \leq 1$. Como el conjunto de puntos periódicos de T es denso en $[0, 1]$, se tiene que existe un punto periódico $p \in (h(2^\infty), h)$. Si $\mathcal{O}(p, T) \cap K_p = \emptyset$, entonces $\mathcal{O}(p, T_p) = \mathcal{O}(p, T_1)$.
Si $T^i(p) \in K_p$ para algún $i \in \mathbb{N}$, consideremos j el menor entero tal que $T^j(p) \in K_p$, entonces $T^{j+1}(p) = p$, en consecuencia p es un punto periódico de T_p con período $j+1$. Así, en cualquier caso p es un punto periódico de T_p. Sea m el período de p, bajo T_p. Si $m \notin \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces $m = 2^k q$, con $k \in \mathbb{N}$ y $q > 1$ impar, por tanto existe un punto p' de período $3 \cdot 2^{n+1}$ para T_p, así, $\mathcal{O}(p', T_p) \subset [0, p)$, dado que $p < h$, se tiene que $\mathcal{O}(p', T_p) = \mathcal{O}(p', T_h)$. Así,

T_h tiene un punto de período $3 \cdot 2^{n+1}$. Por tanto T_h es caótica en el sentido de Block-Coppel.

Si $m = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, definimos los intervalos:

$$K = [T_p^{2^n}(h(2^{n+1})), h(2^{n+1})] \text{ y } J = [h(2^{n+1}), p].$$

Como $p > h(2^\infty) > h(2^{n+1})$, J y K están bien definido y además, $\mathcal{O}(h(2^{n+1}), T_p) = \mathcal{O}(h(2^{n+1}), T_1)$.

Como p tiene período 2^n tenemos que

$$J = [h(2^{n+1}), p] \subset [T_p^{2^n}(h(2^{n+1})), p] \subset T_p^{2^n}(J), \text{ y}$$

$$K = [T_p^{2^n}(h(2^{n+1})), h(2^{n+1})] \subset [T_p^{2^n}(h(2^{n+1})), p] \subset T_p^{2^n}(J),$$

por tanto,

$$K \cup J \subset T_p^{2^n}(J). \tag{5.1}$$

Sean $x, y \in [0,1]$ y $j \in \mathbb{N}$. Note que:
Si $T_p^i(x), T_p^i(y) \geq 1 - \frac{p}{2}$, o $T_p^i(x), T_p^i(y) \leq \frac{p}{2}$ para todo $i \in \{0, \ldots, j\}$, entonces $|T_p^j(x) - T_p^j(y)| = 2^j |x - y|$.

Supongamos ahora que para todo $j \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ se cumple que $T_p^j(h(2^{n+1})), T_p^{2^n+j}(h(2^{n+1})) \leq \frac{p}{2}$ ó $T_p^j(h(2^{n+1})), T_p^{2^n+j}(h(2^{n+1})) \geq 1 - \frac{p}{2}$.

Como $h(2^{n+1})$ tiene período 2^{n+1}, entonces

$$\mathcal{O}(h(2^{n+1}), T_p) \subset [0, \frac{p}{2}] \text{ o } \mathcal{O}(h(2^{n+1}), T_p) \subset [1 - \frac{p}{2}, 1].$$

Así,

$$|T_p(h(2^{n+1})) - T_p(T_p^{2^n}(h(2^{n+1}))| = 2|h(2^{n+1}) - T_p^{2^n}(h(2^{n+1}))|$$

$$|T_p^{2^{n+1}+1}(h(2^{n+1})) - T_p^{2^{n+1}+1}(T_p^{2^n}(h(2^{n+1})))| = 2^{2^{n+1}+1}|h(2^{n+1}) - T_p^{2^n}(h(2^{n+1}))|$$

Por otro lado, dado que $h(2^{n+1})$ tiene período 2^{n+1}, ocurre que

$$\begin{aligned} |T_p^{2^{n+1}+1}(h(2^{n+1})) - T_p^{2^{n+1}+1}(T_p^{2^n}(h(2^{n+1})))| &= |T_p(h(2^{n+1})) - T_p(T_p^{2^n}(h(2^{n+1})))| \\ &= 2|h(2^{n+1}) - T_p^{2^n}(h(2^{n+1}))|. \end{aligned}$$

En consecuencia, $h(2^{n+1}) = T_p^{2^n}(h(2^{n+1}))$ lo cual es una contradicción. Luego, existe $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $T_p^j(h(2^{n+1})) \leq \frac{p}{2}$ y $T_p^{2^n+j}(h(2^{n+1})) \geq 1 - \frac{p}{2}$, o viceversa.

Así, $[\frac{p}{2}, 1-\frac{p}{2}] \subset [T_p^j(h(2^{n+1})), T_p^{2^n+j}(h(2^{n+1}))] \subset T_p^j(K)$ y por tanto, $p = T_p(\frac{p}{2}) \in T_p^{j+1}(K)$.
Como $T_p^{j+1}(h(2^{n+1})) \in T_p^{j+1}(K)$ y $T_p^{j+1}(h(2^{n+1})) \leq h(2^{n+1}) < p$, entonces

$$[h(2^{n+1}), p] \subset T_p^{j+1}(K) \tag{5.2}$$

Consideremos $r = 2^n+j+1$. De (5.2), $J \subset T_p^{j+1}(K)$ y por tanto, $T_p^{2^n}(J) \subset T_p^{2^n+j+1}(K)$. De (5.1) $K \cup J \subset T_p^{2^n}(J) \subset T_p^{2^n+j+1}(K) = T_p^r(K)$.

Definamos $N = r + 2^n$ entonces, $K \cup J \subset T_p^N(K)$ y $K \cup J \subset T_p^N(J)$. Luego, $K \cup J \subset T_p^N(K) \cap T_p^N(J)$; por tanto, T_p^N es turbulenta.

Así, T_p^N tiene un punto periódico p' de período 3, por tanto p' es un punto periódico de T_p con período $\frac{3 \cdot N}{s}$ donde s divide a N y $(3,s) = 1$. Luego, el período de p' es $3 \cdot q$, con $q \in \mathbb{N}$. Como p es de período 2^n para T_p, se tiene que $p' \notin \mathcal{O}(p, T_p)$, por tanto, $\mathcal{O}(p', T_h) = \mathcal{O}(p', T_p)$ y en consecuencia T_h tiene un punto de período $3 \cdot q$ con $q \in \mathbb{N}$.

Luego, T_h es caótica en el sentido de Block-Coppel. $\square$

5.2. Un función 2^∞ no Li-Yorke caótica.

En este ejemplo presentamos una función continua $F : I \to I$ con puntos de período 2^n, para todo $n \in \mathbb{N}$, y tal que todos los puntos en I son eventualmente periódicos de período 2^i para algún i.

Primero construiremos, para cada número natural n, una función continua $F_n : I_n \to I_n$, donde $I_n = [0, 2^n + 1]$, tal que F_n fija los puntos extremos de I_n, tiene puntos de período 2^n y todos los puntos de I_n son eventualmente periódicos de período 2^i para algún i con $1 \leq i \leq n$.

Dado $k \geq 1$ consideremos los conjuntos A_k, B_k dados por
$A_k = \{1, 2, \ldots 2^k\}$ y $B_k = \{2^k+1, 2^k+2, \ldots, 2^{k+1}\}$, $k = 1, 2, \ldots$.
Definamos $P_1 : A_1 \to A_1$ por $P_1(1) = 2$, $P_1(2) = 1$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos $P_{k+1} : A_{k+1} \to A_{k+1}$ por

$$P_{k+1}(i) = \begin{cases} i + 2^k, & \text{si } i \in A_k \\ P_k(i - 2^k), & \text{si } i \in B_k \end{cases}$$

Sea $F_n(i) = P_n(i)$ si $i \in A_n$, $F_n(0) = 0$, $F_n(2^n + 1) = 2^n + 1$, definamos $F_n : [0, 2^n + 1] \to [0, 2^n + 1]$ por extensión lineal. Para $n = 1$ tenemos:

$$F_1(x) = \begin{cases} 2x, \ 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x, \ 1 < x \leq 2 \\ 2x - 3, \ 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Note que:

- 0 y $\frac{3}{2}$ son puntos fijos.
- Si $x \in [1,2] \backslash \{\frac{3}{2}\}$ entonces x tiene período 2.
  En efecto, $F_1(1) = 2, F_1(2) = 1$, y si $x \in (1,2)$, $F_1(x) = 3 - x \in (1,2)$ y por tanto $F_1^2(x) = 3 - (3 - x) = x$.
- Si $x \in (0,1]$, entonces x es eventualmente periódico. Sea $x \in (0,1]$ y n el menor número natural tal que $2^n x \in [1,2)$. Luego, $F_1^n(x) = 2^n x \in [1,2)$, y x es eventualmente periódico de período 1 o 2.
- Si $x \in (2,3]$, entonces x es eventualmente periódico. Sea $x \in (2,3]$ y n el menor número natural tal que $2^n(x-3) \leq -1$, esto es, n es el menor número natural tal que $1 \leq 2^n(x-3)+3 \leq 2$, entonces para todo $m < n$, $2^m(x-3)+3 \in (2,3]$. Así, $F_1^n(x) = 2^n(x-3)+3 \in (1,2]$, por tanto x es eventualmente periódico.

Supogamos que para la función F_n los puntos $1, 2, \ldots, 2^n$ son periódicos de período 2^n y todos los puntos de $[0, 2^n]$ son eventualmente periódicos de períodos 2^i, $0 \leq i \leq n$. Demostraremos que esta hipótesis inductiva se extiende a la función F_{n+1}. Observemos que $P_{n+1}(A_{n+1}) \subset B_{n+1}$, $P_{n+1}(B_{n+1}) \subset A_{n+1}$.
Si $i \in A_n$, $P_{n+1}(i) = i + 2^n$ y $P_{n+1}^2(i) = P_n(i) \in A_n$. Si $i \in B_n$, $P_{n+1}(i) = P_n(i - 2^n)$ y $P_{n+1}^2(i) = 2^n + P_n(i - 2^n) \in B_n$. Así, para $r = 1, 2, \ldots$

$$P_{n+1}^{2r}(i) = P_n^r(i), \ i \in A_n$$
$$P_{n+1}^{2r}(i) = 2^n + P_n^r(i - 2^n), \ i \in B_n$$

Se sigue que $1, 2, \ldots, 2^{n+1}$ son puntos periódicos de período 2^{n+1} para F_{n+1}, y

$$F_{n+1}^2|_{[m,m+1]} = F_n|_{[m,m+1]}, \ m = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$$
$$F_{n+1}^2|_{[m,m+1]} = 2^n + F_n|_{[m-2^n, m+1-2^n]}, \ m{=}2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$$

Así, por la hipótesis inductiva se tiene que cualquier punto de $[m, m+1]$, $m \neq 0$, $m \neq 2^n$, es eventualmente periódico de período 2^i, $0 \leq i \leq n+1$. Ahora,

$$F_{n+1}(2^n) = 2^{n+1},\ F_{n+1}(2^n + 1) = 2^{n-1} + 1.$$

Sea $x \in [2^n, 2^n + 1]$. Si existe un número natural r tal que $F^r_{n+1}(x) \notin [2^n, 2^n + 1]$ y $F^{r-1}_{n+1}(x) \in [2^n, 2^n + 1]$, entonces $F^r_{n+1}(x) \in [m, m + 1]$ donde $1 \leq m < 2^{n+1}$, $m \neq 2^n$. Por tanto, x es eventualmente periódico de período 2^i, $0 \leq i \leq n + 1$. Por otro lado, en $[2^n, 2^n + 1]$ tenemos:

$$F_{n+1}(x) = (2^{n-1} + 1 - 2^{n+1})(x - 2^n - 1) + 2^{n-1} + 1 = \alpha + \lambda(x - \alpha),$$

donde $\alpha = 2^n(1 + \frac{1}{2^{n+1}-2^{n-1}})$, $\lambda = 1 + 2^{n-1} - 2^{n+1} = 1 - 3 \cdot 2^{n-1} \leq -2 < -1$. Así, α es un punto fijo de F_{n+1} y $\lambda^2 > 1$. Por lo tanto, si $F^r_{n+1}(x_0) \in [2^n, 2^n+1]$, $r = 1, 2, \ldots$, entonces

$$F^r_{n+1}(x_0) = \alpha + \lambda^r(x_0 - \alpha)\ ,\ r = 1, 2, \ldots$$

Luego, si $F^r_{n+1}(x_0) \in [2^n, 2^n + 1]$ $r = 1, 2, \ldots$, entonces $x_0 = \alpha$. En efecto, si $x_0 < \alpha$, $x_0 - \alpha < 0$ y dado que $\lambda^2 > 1$, existe r_0 tal que $\lambda^{2r_0}(x_0 - \alpha) < 2^n - \alpha$ y por tanto $F^{2r_0}_{n+1}(x_0) = \alpha + \lambda^{2r_0}(x_0 - \alpha) < 2^n$, y si $x_0 > \alpha$, $x_0 - \alpha > 0$ y dado que $\lambda^2 > 1$, existe r_0 tal que $\lambda^{2r_0}(x_0 - \alpha) > 2^n + 1 - \alpha$ y por tanto $F^{2r_0}_{n+1}(x_0) = \alpha + \lambda^{2r_0}(x_0 - \alpha) > 2^n + 1$.
Finalmente notemos que $F_{n+1}([0, 1]) = [0, 2^n + 1]$ y $F_{n+1}([2^{n+1}, 2^{n+1} + 1] = [1, 2^{n+1} + 1]$, y así se tiene que todos los puntos de $[0, 2^{n+1} + 1]$ son eventualmente periódicos de período 2^i, $0 \leq i \leq n+1$, lo que completa la construcción inductiva.
Ahora, dado $n \geq 1$ consideremos la función $h_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to [0, 2^n + 1]$ dada por

$$h_n(x) = \frac{1}{n(n + 1)(2^n + 1)}(x - \frac{1}{n + 1})$$

Definamos $G_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ por $G_n = h_n^{-1} \circ F_n \circ h_n$. Con lo anterior definimos $F : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $F(x) = G_n(x)$ si $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ y $F(0) = 0$, como los puntos extemos de I_n son puntos fijos de F_n. F está bien definida y es continua. Además F tiene puntos de período 2^n para todo $n \geq 1$ y todos los puntos de $I = [0, 1]$ son eventualmente periódicos de período 2^i para algún i. Luego, F tiene puntos de período 2^n para todo $n \geq 1$ y sin embargo no es caótica en el sentido de Li-Yorke.

Bibliografía recomendada

[1] B. Aulbach and B. Kieninger. *On three Definitions of Chaos.* Nonlinear Dynamics and Systems Theory, **1(1)** (2001), 23 – 37.

[2] R. Barton and K. Burns. *A simple special case of Sharkovskiis theorem.* Amer. Math. Monthly **107** (2000), 932 – 933.

[3] L. Block and W. A. Coppel. *Dynamics in one dimension.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1513, Springer-Verlag, Berlin (1992).

[4] K. Burns and B. Hasselblatt. *The Sharkovsky theorem: a natural direct proof.* Amer. Math. Monthly **118** (2011), 229 – 244.

[5] G.J. Butler and G. Pianigiani. *Periodic points and chaotic functions in the unit interval.* Bull. Austral. Math. Soc. **18** (1978), 255 – 265.

[6] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, California (1989).

[7] B.-S. Du. *A simple proof of Sharkovskys theorem revisited.* Amer. Math. Monthly **114** (2007), 152 – 155.

[8] B.-S. Du. *A simple proof of Sharkovsky's theorem rerevisited.* Preprint (2009) `http://arxiv.org/pdf/0711.3892/`

[9] S. Elaydi. *On a converse of Sharkovskys theorem.* Amer. Math. Monthly **103** (1996), 386 – 392.

[10] X.C. Huang. *From intermediate value theorem to chaos.* Math. Mag. **65** (1992), 91 – 103.

[11] T.-Y. Li and J. A. Yorke. *Period three implies chaos.* Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985 – 992.

[12] M. Misiurewicz. *Remarks on Sharkovsky's Theorem.* Amer. Math. Monthly, **104** (1997), 846 – 847.

[13] P. Štefan. *A theorem of Šharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line*. Commun. Math.Phys., **54** (1977), 237–248.