



MONOPOLOS DE 'T HOOFT POLYAKOV  
Y  
MEMBRANAS COMPACTIFICADAS.

Presentado por : **Lic. Genaro González.**  
Tutor: **Dr. Rafael S. Torrealba.**

Trabajo Especial de Grado para optar al Título de  
Magister Scientiarum en Ciencias Mención Física Matemática

5 de febrero de 2007

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Monopolos Magnético</b>	<b>9</b>
2.1. Monopolo magnético o cuerda de Dirac. . . . .	9
2.2. El monopolo de Wu y Yang . . . . .	14
2.3. Cuantización de la carga . . . . .	18
<b>3. Geometría de los Monopolos</b>	<b>21</b>
3.1. Teorías abelianas de calibre y dualidad . . . . .	21
3.2. Topología del monopolo de Dirac-Wu-Yang . . . . .	29
<b>4. Monopolos Geométricos</b>	<b>36</b>
4.1. Proyección estereográfica . . . . .	36
4.2. Mapa proyectivo de Hopf . . . . .	39
4.3. Estructura topológica del fibrado de Hopf . . . . .	40
4.4. El fibrado de Hopf y el Monopolo de Wu-Yang. . . . .	43
<b>5. El Monopolo de 't Hooft Polyakov</b>	<b>48</b>
5.1. Ruptura espontánea de simetría . . . . .	48
5.2. Solución de 't Hooft y Polyakov . . . . .	50
<b>6. Monopolos de Membranas</b>	<b>54</b>
6.1. Mapas de membranas. . . . .	54
6.2. Monopolos de membranas toroidales. . . . .	60
6.3. Monopolos de membranas esféricas . . . . .	66
<b>7. Discusión y conclusiones</b>	<b>71</b>

# Índice de figuras

2.1. Monopolo magnético o cuerda de Dirac . . . . .	11
2.2. Cartas locales del Monopolo de Wu Yang . . . . .	15
3.1. Estructura de un fibrado principal . . . . .	22
3.2. Fibrado principal de Dirac . . . . .	30
4.1. Proyección estereográfica de la esfera . . . . .	37
6.1. Mapa de la membrana bosónica . . . . .	55
6.2. Mapa de la membrana toroidal . . . . .	61
6.3. Mapa de la membrana esférica . . . . .	67

# Capítulo 1

## Introducción

Los monopolos son soluciones singulares a las ecuaciones para campos de calibre en el vacío, donde la variedad formada por las soluciones de vacío  $\mathbf{m}_0$  tiene segundo grupo de homotopía no trivial  $\Pi_2(\mathbf{m}_0) \neq Id$ , es decir, diferente de la identidad.

En 1931 P.A.M. Dirac [1], propuso una solución no trivial de las ecuaciones de Maxwell para el vacío en donde clásicamente no hay cargas eléctricas, pero si una distribución de corriente sobre un conjunto de medida nula. Este conjunto es interpretado como un solenoide seminfinito muy delgado, con un extremo abierto en el origen por donde sale el campo magnético en todas direcciones: el **monopolo magnético**. El campo magnético, está definido en todo el espacio excepto a lo largo del eje del solenoide, llamado la *cuerda de Dirac*, que constituye una singularidad para las ecuaciones del campo [2]. Posteriormente Dirac aplicó estas ideas al estudio cuántico de una partícula masiva cargada eléctricamente, que se mueve en el campo creado por una cuerda de Dirac (i.e un monopolo) al considerar la ecuación de Schrödinger de la partícula con el requerimiento de que la función de onda sea univaluada, demostró la existencia de una relación de cuantización entre la carga magnética la carga eléctrica (puede verse [3]).

En 1975 T. Wu y C. Yang, dotaron de una estructura topológica al monopolo de Dirac [6]. Demostraron que un fibrado principal representa la topología adecuada para describir el monopolo magnético, ellos notaron que empleando más de una carta local para potencial vectorial se podía describir el campo del monopolo sin singularidades, lo que significa, soluciones topológicamente no triviales y energía finita en todas partes. Es así, como el

monopolo magnético empieza a formar parte de un conjunto mas amplio de objetos llamados defectos topológicos, que pueden clasificarse de acuerdo a sus grupos principales de homotopía y/o homología.

Los monopolos (magnéticos) de Dirac son aquellas soluciones *topológicas* ó soluciones no triviales del vacío (sin fuentes eléctricas) aparentemente singulares (en cartas locales inadecuadas) con homología entera y el grupo fundamental de homotopía  $\Pi_1(\mathbf{U}(1))$  isomórfico a  $\mathbb{Z}$ . La *carga* del monopolo se identifica con los invariantes topológicos que caracterizan estas soluciones, estos invariantes se obtienen mediante ciertas integrales de los campos llamado números o caracteres de Chern que de forma general corresponden a generalizaciones de la ley de Gauss<sup>1</sup>, en el caso del monopolo de Dirac se obtienen cargas magnéticas puntuales no nulas, a diferencia del electromagnetismo usual (cuando excluimos las soluciones singulares), para el cuál siempre la carga magnética total es nula.

A partir de los trabajos de Dirac, el estudio del monopolo ha sido objeto de una intensa investigación. En 1974, de forma independiente G. 't Hooft [4] y A. Polyakov [5], partiendo del modelo de Georgi-Glashow, obtuvieron soluciones con carga magnética de energía finita para una teoría de Yang Mills con grupo de estructura  $\mathbf{SO}(3)$ . Al romper la simetría del modelo de Georgi-Glashow a un subgrupo  $\mathbf{U}(1)$ , es posible recobrar el monopolo de Dirac partiendo de la solución de 't Hooft-Polyakov en condiciones asintóticas. En la década de los '80 se asoció de forma definitiva el monopolo con el rompimiento espontaneo de simetría [8] de TODAS las teorías de gran unificación (GUT por sus siglas en inglés). El monopolo de 't Hooft-Polyakov puede ser considerado como el patrón fundamental cuando se estudian soluciones tipo monopolos para las teorías de calibre.

Por ruptura de simetría entenderemos la existencia de una solución de vacío que no tiene la misma simetría que la acción. Esto ocurre cuando tenemos un mínimo del potencial degenerado, es decir hay varios minimos, continuos o discretos entre los cuales interpola una solución llamada solución de vacío o simplemente vacío. Mientras que la acción es invariante bajo la acción de un grupo  $\mathbf{G}$  llamado grupo de calibre, la solución de vacío es invariante por un grupo más pequeño  $\mathbf{H}$ , en este caso decimos que hay una

---

<sup>1</sup>El flujo de campo (eléctrico) por una superficie, es proporcional a la carga (eléctrica) encerrada.

*ruptura espontanea de simetría.* Las soluciones de vacío tienen una importancia fundamental en teoría cuántica de campos ya que todos los estados de un sistema pueden generarse a partir de la solución de vacío, y cuando se cuantiza perturbativamente esto se hace a partir de un background constituido precisamente por la solución de vacío.

Las consideraciones topológicas [9], conducen al resultado general de que soluciones estables se obtienen en teorías para la cual, el grupo de calibre  $\mathbf{G}$  se rompe espontáneamente a un grupo más pequeño  $\mathbf{H} = h \times \mathbf{U}(1)$ , el cual contiene un producto de grupos explícito. La presencia del grupo  $\mathbf{U}(1)$  en  $\mathbf{H}$  indica la existencia de monopolos de tipo Dirac y la cuantización de la carga, los monopolos son por tanto consecuencia del rompimiento espontáneo de simetría del grupo de calibre original  $\mathbf{G}$ . Así las teorías gran unificadas (GUT) [10], en donde la simetría es rota desde algún grupo simple de orden mayor a un producto de grupos de menor orden que incluye al menos un  $\mathbf{U}(1)$ , necesariamente predicen Monopolos de tipo Dirac.

La variedad de vacío en un fibrado principal con grupo de estructura  $\mathbf{G}$ , se obtiene de forma geométrica como el espacio cociente de los grupos

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{G}/\mathbf{H}$$

Por el segundo teorema fundamental de homotopía [19] tenemos el siguiente isomorfismo de grupos:

$$\Pi_2\left(\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{H}}\right) \cong \Pi_1(\mathbf{H})$$

Las GUT parten de un grupo semisimple  $\mathbf{G}$  que se rompe en varias etapas para finalizar con  $\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{U}(1)$  que es la teoría de *Weinberg-Salam* ó electro-débil, donde  $\mathbf{U}(1)$  representa el electromagnetismo usual y esta asociado a la presencia de un campo vectorial  $A^\mu(x)$  (Potencial vectorial) que representa el fotón y  $\mathbf{SU}(2)$  implica la presencia de los llamados bosones vectoriales intermedios, descubiertos por el grupo de Carlo Rubia en los '90. Toda GUT que pretenda ajustarse a este resultado experimental debe romperse hasta finalizar con  $\mathbf{H} \cong \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{U}(1)$  por lo cual

$$\Pi_2(\mathbf{m}_0) \cong \Pi_1(\mathbf{U}(1)) \cong \mathbb{Z}$$

indicando que las GUT predicen inevitablemente Monopolos.

En 1996, I. Martin y A. Restuccia [11] desarrollaron un método usando el mapa de Hopf para obtener y clasificar todas soluciones de campos de Yang Mills en superficies de Riemann de género arbitrario en 2 dimensiones  $\Sigma_2$  utilizando los monopolos tipo Dirac- Hopf que se obtienen de los fibrados de línea  $\mathbf{U}(1)$  sobre dichas superficies. Este trabajo fue extendido al escenario de la teoría de membranas en 1997, I. Martin, A. Restuccia y R. Torrealba [12], encontraron todas las soluciones tipo monopolo de Dirac, a partir de la acción efectiva para la membrana bosónica compactificadas utilizando el Mapa de Hopf para proyectar superficies bidimensionales de género arbitrario sobre un toro  $S^1 \times S^1$  con número de *enrollamiento* no trivial. Esto permite establecer las condiciones necesarias para construir vacíos estables para de las supermembranas, ya que se demostró que estos monopolos son efectivamente minimales y cumplen la desigualdad BPS, la existencia de la carga BPS indica la existencia de una supra-teoría supersimétrica (con campos que conmutan y anticonmutan) a partir de la cual se obtienen las soluciones bosónicas mediante la ruptura de la supersimetría. El estudio de las teorías supersimétricas de membranas va más allá de los objetivos de este trabajo especial de grado.

El objetivo fundamental de este trabajo es estudiar las soluciones tipo monopolo de Dirac para la membrana bosónica cuando está asume una topología esférica o toroidal. Estas geometrias puede obtenerse en dimensión espacial mayor a 2, compactificando sobre la esfera ó el Toro (como se ha realizado en los trabajos [21]) el límite en que las dimensiones extra son muy pequeñas y las derivadas de los campos respecto a ellas son nulas

$$X^\mu \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial X^\mu} f(x) \rightarrow 0 \quad \text{para } \mu > 2$$

esto también puede realizarse simplemente cuando se establece un mapa biyectivo del espacio base al toro ( $X : \Sigma_2 \rightarrow S^1 \times S^1$ ) o la esfera ( $X : \Sigma_2 \rightarrow S^2$ ) y se trabaja con teorías de Yang Mills en 2 dimensiones sin entrar en consideraciones con las dimensiones extra.

En el trabajo [12] usando compactificación dimensional en un fibrado  $\mathbf{U}(1)$ , se encontraron soluciones tipo monopolo para las membranas compactificadas sobre el Toro. En este trabajo se revisan estos resultados, con la variante de asumir una membrana en 2 dimensiones que viene determinada, mediante mapas biyectivos desde el espacio base hacia membranas

con topología esférica o toroidal desde un principio. Se encuentra que las soluciones estacionarias para las membranas toroidales constituyen a un fibrado  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$  sobre el Toro, así mismo las soluciones minimales son los monopolos y las coinciden con las encontradas en [12]. También se obtienen soluciones para campos de Yang Mills equivalentes a la teoría de membranas, y las cargas topológicas que caracterizan los mapas de membranas sobre la esfera. Estos monopolos se obtienen para los mínimos de potencial efectivo corresponden a conexiones minimales para la teoría de Yang-Mills. Este trabajo complementa y extiende los resultados conocidos para la membranas compactificadas sobre el Toro.

Desde el punto de vista de teoría de campos los monopolos tipo 't Hooft-Polyakov presentan varias ventajas sobre los monopolos de Dirac, ya que permite establecer soluciones de vacío con rompimiento espontaneo de simetría, sabemos que la simetría de la membrana debe ser rota con la finalidad de obtener un modelo con características fenomenológicas deseables. La supermembrana es una teoría inestable y no renormalizable [22] y los monopolos de Dirac encontrados en [12] constituyen soluciones estabilizadas topológicamente debido a la geometría (toroidal) escogida y la condición de irreducibilidad o enrollamiento exigida. Una solución dinámica para los monopolos de la membrana, tipo 't Hooft - Polyakov, que incorpore el rompimiento de simetría de manera natural es más interesante desde el punto vista físico que los monopolos de Dirac para la membrana conocidos actualmente [21]. La relación entre ambos tipos de monopolos es análoga a la existente entre las paredes de dominio delgadas que constituyen reales defectos topológicos y las paredes de dominio gruesas que se obtienen mediante soluciones con rompimiento espontaneo de simetría y que poseen un límite de pared delgada, de la misma manera los monopolos de 't Hooft- Polyakov, corresponden a soluciones con un potencial con rompimiento espontaneo de simetría que poseen un límite asintótico donde se recupera el monopolo de Dirac.

En el segundo capítulo se presenta una revisión de los resultados clásicos del monopolo de Dirac y la versión de Wu y Yang del monopolo magnético, en el tercer capítulo se presentan un resumen de las herramientas geométricas necesarias para el estudio de las teorías de calibre y su aplicación al monopolo de Dirac, en el cuarto capítulo se presenta la construcción del fibrado de Hopf que constituye una versión totalmente geométrica que generaliza los monopolos de Dirac, en el quinto capítulo se presenta el monopolo de 'tHooft

Polyakov, en el último capítulo se presentan los monopolos a partir de la membrana bosónica, se propone una nueva estructura de calibre  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$  y se calcula la carga topológica, en la sección final de este trabajo, se propone una solución estática (tipo monopolo) para membranas, mapeadas biyectivamente sobre la esfera  $S^2$ . Esta solución se obtiene como un caso límite de las membranas mapeadas sobre el Toro que tiene grupo de calibre  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$ . Este límite rompe la simetría original del Toro, por lo tanto los monopolos sobre la esfera pueden interpretarse como un límite tipo *'t Hooft- Polyakov* de los monopolos del Toro.

# Capítulo 2

## Monopolos Magnético

### 2.1. Monopolo magnético o cuerda de Dirac.

P.A.M.Dirac en 1931[1] propuso una modificación a las ecuaciones de Maxwell, con la finalidad de restaurar la simetría completa entre las ecuaciones para los campos eléctricos y magnéticos, introduciendo la existencia de cargas magnéticas puntuales (monopolos) y corrientes magnéticas que corresponden al flujo de estas cargas magnéticas<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_e & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\mathbf{J}_m. \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J}_e.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Las ecuaciones así modificadas son invariantes bajo los siguientes cambios:

$$\begin{array}{ll}\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{B} & \mathbf{B} \longrightarrow -\mathbf{E} \\ \rho_e \longrightarrow \rho_m & \rho_m \longrightarrow -\rho_e \\ \mathbf{J}_e \longrightarrow \mathbf{J}_m & \mathbf{J}_m \longrightarrow -\mathbf{J}_e\end{array}$$

Consideremos el caso estático ( $\partial_t = 0$ ) y sin corrientes ( $\mathbf{J}_e = 0$ ,  $\mathbf{J}_m = 0$ ),

---

<sup>1</sup>Esta sección se basa en el desarrollo en la referencia [3] y [2] modificado para adaptarlo a una corriente de la forma  $\mathbf{J}_{Sol} \cdot \Theta(-z) \delta(r-a)$ .

ahora las ecuaciones de Maxwell (2.1) toman la forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_e & \nabla \times \mathbf{E} &= 0. \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m & \nabla \times \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Estas ecuaciones indican que es posible realizar una integración del campo magnetostático independientemente al campo electrostático, en esta sección consideraremos el caso en que existe una carga magnética puntual " $m$ " situada en el origen de coordenadas  $\mathbf{r} = 0$ , y por tanto con una densidad de carga magnética

$$\rho_m = 4\pi m \delta^3(\mathbf{r}),$$

cuya solución es completamente análoga a la carga eléctrica puntual de coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi m \delta^3(\mathbf{r})$$

al usar las identidades vectoriales  $\nabla \cdot \nabla(1/r) = -4\pi \delta^3(\mathbf{r})$  y  $\nabla(1/r) = \hat{u}_r/r^2$  se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left( \mathbf{B} - m \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right) &= 0 \\ \mathbf{B} &= \frac{m}{r^2} \hat{u}_r\end{aligned}\quad (2.3)$$

el campo magnético obtenido es singular en el origen, tiene simetría radial  $\hat{u}_r$  y varía como el inverso de la distancia al cuadrado y representa al campo magnético debido a un monopolo de intensidad de carga  $m$ , fija en el origen.

En toda superficie cerrada  $\partial V$  alrededor del origen, el flujo magnético se obtiene por integración del campo magnético sobre una esfera  $S^2$  que contenga a  $V$ .

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = m \int_{S^2} \frac{r^2 d\Omega}{r^2} = 4\pi m.$$

Como el flujo de campo magnético no es nulo, este resultado entra en contradicción con la ley de Gauss usual para el magnetismo  $\int_{\partial V=S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , y aparentemente corresponde a un caso no físico. Sin embargo Dirac consiguió un caso semejante al del monopolo, pero utilizando las ecuaciones de Maxwell estáticas usuales,

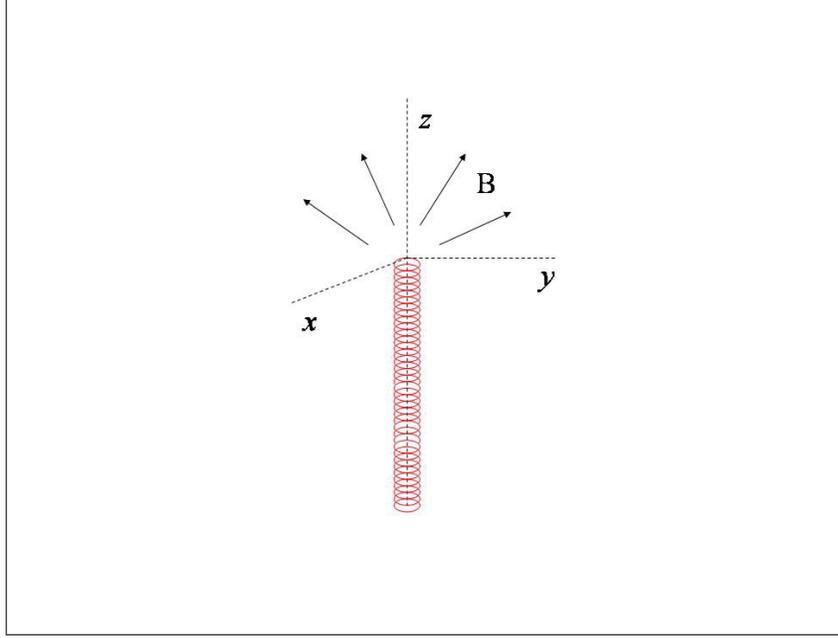


Figura 2.1: Monopolo magnético o cuerda de Dirac

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_{Sol} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E}_{Sol} &= \mathbf{0}. \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{Sol} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B}_{Sol} &= \mathbf{J}_{Sol} \cdot \Theta(-z) \delta(r-a). \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{J}_{Sol} = m/\pi a^2$  que representa un solenoide rígido delgado semi-infinito (de radio  $a \rightarrow 0$ ), por el cuál circula una corriente eléctrica uniforme, con un extremo abierto en el origen y el otro extremo del solenoide es enviado al infinito, como muestra la figura 2.1.

Esta configuración está libre de fuentes e incluso la corriente eléctrica es nula excepto en la línea del solenoide y genera un campo similar al de la carga magnética colocada en su extremo libre en  $r = 0$ .

$$\nabla \times \mathbf{B}_{Sol} = 0. \quad \forall \quad r \neq 0 \quad \wedge \quad z > 0$$

El campo magnético  $\mathbf{B}_{Sol}$  del solenoide infinitamente largo extendido a lo largo del semieje negativo  $z$  viene dado por:

$$\mathbf{B}_{Sol} = \frac{m}{r^2} \hat{u}_r + 4\pi m \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{u}_z \quad (2.4)$$

en donde  $\hat{u}_z$  expresa la dirección en  $z$  y  $\Theta(-z)$  es la función escalón unitaria. Como este campo se encuentra libre de fuentes y corrientes

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{Sol} = 0 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B}_{Sol} = \nabla \times \mathbf{A}_{Sol}. \quad (2.6)$$

Comparando (2.3) con (2.4) se tiene que  $\mathbf{B}_{Sol}$  difiere de  $\mathbf{B}$  del monopolo en un término que representa al flujo magnético a lo largo del solenoide, así

$$\mathbf{B}_{Sol} = \mathbf{B} + 4\pi m \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{u}_z \quad (2.7)$$

y con la ecuación (2.5) queda

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{Sol} - 4\pi m \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{u}_z. \quad (2.8)$$

Es decir, el campo magnético del monopolo es igual al campo generado por el solenoide, excluyendo el campo generado por el interior del solenoide.

La línea magnética generada por el solenoide acompañando al monopolo ha sido llamada “cuerda de Dirac” y dentro del convencionalismo de la teoría electromagnética [2], puede verse como una línea sucesiva de dipolos extendida desde el infinito a cero, generando infinitos campos dipolares elementales cuya contribución total es el campo del solenoide.

Se calcula el potencial vectorial  $\mathbf{A}_{Sol}$  para ello se usa el potencial de un elemento dipolar magnético con la fuente de corriente arriba indicada

$$\mathbf{d}\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\Delta V'} \vec{\mathbf{r}}' \times \mathbf{J}_{Sol} \cdot \Theta(-z') \delta(r' - a) \mathbf{d}\mathbf{r}'^3 = m d\vec{\ell}$$

con lo cual se obtiene un potencial vectorial dado por la ley Biot-Savart:

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{r}}) = -m \int d\vec{\ell} \times \nabla \left( \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) \quad (2.9)$$

en donde

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}} &= x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + (z)\hat{u}_z \\ r &= |\vec{\mathbf{r}}|, \quad \vec{\mathbf{r}}' = z'\hat{u}_z, \quad \mathbf{d}\vec{\ell} = \mathbf{d}z'\hat{u}_z, \end{aligned}$$

la cantidad integrada de la ecuación (2.9) queda

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} \times \nabla \left( \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) &= dz' \hat{u}_z \times \left( -\frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \right) \\ &= \frac{y}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} dz' \hat{u}_x - \frac{x}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} dz' \hat{u}_y \end{aligned}$$

por lo tanto el potencial para el solenoide es

$$\mathbf{A}_{Sol}^N(\vec{\mathbf{X}}) = -g \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{y}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} dz' \hat{u}_x - \frac{x}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} dz' \hat{u}_y \right] \quad (2.10)$$

en esta solución  $N$  es el indicador de la solución del solenoide con una punta (el “monopolo”) en  $z = 0$  y el otro extremo en  $z = -\infty$ .

Con el cambio de variable  $h = z - z'$  y  $H^2 = x^2 + y^2$ , se hace el cálculo de la integral

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dz'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = - \int_{-\infty}^z \frac{dh}{[H^2 + h^2]^{3/2}} = \frac{1}{r(r+z)}$$

el potencial magnético para el solenoide es

$$\mathbf{A}_{Sol}^N(\vec{\mathbf{r}}) = -m \left[ \frac{y}{r(r+z)} \hat{u}_x - \frac{x}{r(r+z)} \hat{u}_y + 0 \hat{u}_z \right], \quad r \neq 0. \quad (2.11)$$

Para todo punto  $P$  (menos para la cuerda), este potencial está dirigido hacia afuera del origen y varía inversamente al cuadrado de la distancia.

En la región  $\{\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \mid z \leq 0\}\}$  el potencial  $\mathbf{A}_{Sol}^N$  coincide totalmente con el potencial del monopolo magnético. Al desarrollar el rotacional de  $\mathbf{A}_{Sol}^N$ , se verifica el campo magnético para el solenoide

$$\nabla \times \mathbf{A}_{Sol}^N = \frac{m}{r^2} \hat{u} + 4\pi m \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{u}_z \quad (2.12)$$

lo cual da el campo esperado (2.4) más la contribución singular.

No existe restricción para colocar de manera arbitraria la cuerda de Dirac en el espacio, al cambiar la dirección de la cuerda, con un extremo en el

origen y ahora extendida a lo largo del eje  $z$  positivo (dirección opuesta a la anterior), es decir con la punta en  $z = 0$  y el otro extremo en  $z = +\infty$ , pueden repetirse los cálculos, demostrando que la solución para el potencial vectorial es

$$\mathbf{A}_{Sol}^S(\vec{r}) = m \left[ \frac{y}{r(r+z)} \hat{u}_x - \frac{x}{r(r+z)} \hat{u}_y + 0 \hat{u}_z \right], \quad r \neq 0. \quad (2.13)$$

En la región  $\{\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \mid z \geq 0\}\}$  la solución de nuevo es coincidente con el potencial del monopolo magnético.

Las soluciones obtenidas en (2.11) y en (2.13) sugieren la posibilidad de definir un potencial para el monopolo en un dominio que sea la suma de dos regiones que cubran el espacio  $\mathbb{R}^3$  y en donde las singularidades obtenidas por la cuerda de Dirac podrían ser excluidas deliberadamente, mediante una mejor elección del sistema de coordenadas. La próxima sección está dedicada al examen de tales consideraciones.

## 2.2. El monopolo de Wu y Yang

El modelo de Wu y Yang (1975) [6] establece que las singularidades presentes en el monopolo de Dirac dependen de la estructura geométrica elegida para describir el monopolo magnético, así, es posible mover arbitrariamente la cuerda al escoger de forma conveniente el sistema de coordenadas para describir el potencial magnético  $\mathbf{A}$ , y obtener la intensidad de campo magnético  $\mathbf{B}$ .<sup>2</sup>

Para evitar las singularidades se adopta la simetría esférica alrededor del monopolo, se definen al menos dos mapas sobre la esfera  $S^2$  en un dominio de abiertos, cuya intersección sea distinta del vacío, por ejemplo un abierto para el hemisferio norte y otro para el sur,  $U_N \cap U_S \neq \emptyset$  respectivamente, tal que:  $U_N \cap U_S = E \iff \theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0 \leftrightarrow 2\pi$ , aquí,  $E$  es una banda delgada definida en el ecuador de la esfera, y  $\varphi$  es la longitud azimutal,  $\theta$  es la latitud axial de un punto sobre la esfera de coordenadas polares  $(r, \theta, \varphi)$

---

<sup>2</sup>En esta sección básicamente se sigue lo presentado en [3], [7] y [14]

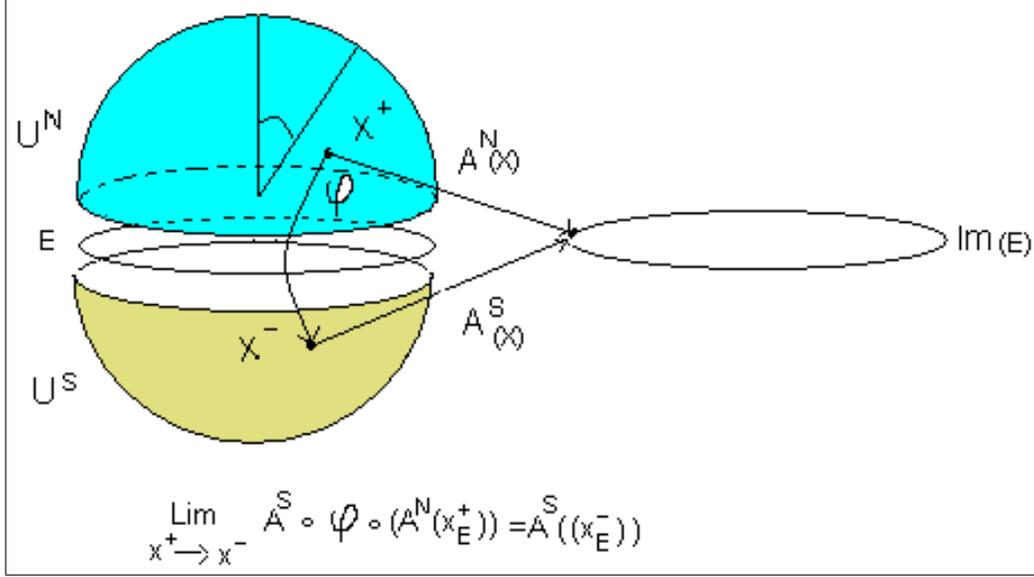


Figura 2.2: Cartas locales del Monopolo de Wu Yang

en la forma usual (ver figura 2.2):

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi \\
 y &= r \sin \theta \sin \varphi \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Usando los potenciales obtenidos en coordenadas cartesianas por las ecuaciones (2.11) y (2.13), se realizan los cambios de variables de acuerdo a (2.14) y se obtienen  $\mathbf{A}_N$  y  $\mathbf{A}_S$  expresados en el hemisferio norte y en el hemisferio sur de la esfera

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_N(\vec{\mathbf{r}}) &= -m \left[ \frac{y}{r(r+z)} \hat{u}_x - \frac{x}{r(r+z)} \hat{u}_y + 0 \hat{u}_z \right], \quad \vec{\mathbf{r}} \in U_N \\
 \mathbf{A}_S(\vec{\mathbf{r}}) &= -m \left[ \frac{r \sin \theta \sin \varphi}{r(r+r \cos \theta)} \hat{u}_x - \frac{r \sin \theta \cos \varphi}{r(r+r \cos \theta)} \hat{u}_y + 0 \hat{u}_z \right], \quad \vec{\mathbf{r}} \in U_N
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

simplificando y tomando en cuenta que  $\widehat{u}_\varphi = -\sin \varphi \widehat{u}_x + \cos \varphi \widehat{u}_y$ , el potencial  $\mathbf{A}_N$  en el hemisferio norte queda escrito como

$$\mathbf{A}_N(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{m(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \widehat{u}_\varphi \quad \text{singular en } \theta = \pi \notin U_N \quad (2.16)$$

Procediendo de igual forma para el hemisferio sur el potencial  $\mathbf{A}_S$  es ahora

$$\mathbf{A}_S(\vec{\mathbf{r}}) = -\frac{m(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} \widehat{u}_\varphi \quad \text{singular en } \theta = 0 \notin U_S. \quad (2.17)$$

Queda entonces

$$\mathbf{A}_r = 0, \quad \mathbf{A}_\theta = 0, \quad \mathbf{A}_\varphi = \begin{cases} A_N(\vec{\mathbf{r}}) \\ A_S(\vec{\mathbf{r}}) \end{cases}$$

el potencial vectorial tiene solo componente azimutal ( $\mathbf{A}_\varphi$ ) que no tiene singularidades en sus respectivos dominios.

Por medio del rotacional expresado en coordenadas polares esféricas se prueba que estos dos potenciales  $\mathbf{A}_N$  y  $\mathbf{A}_S$  dan exactamente el campo magnético del monopolo

$$\nabla \times \mathbf{A}_N(\vec{\mathbf{r}}) = \nabla \times \mathbf{A}_S(\vec{\mathbf{r}}) = \mathbf{B} = m/r^2 \widehat{u}_r.$$

Por lo tanto, el potencial definidos por (2.16) y (2.17) no presenta singularidades sobre la esfera, reproduce el campo magnético del monopolo dado por la ecuación (2.3).

La condición de compatibilidad para los potenciales se obtiene al definir el mapa  $\varphi : U_N \rightarrow U_S$ , que determina el paso desde el hemisferio norte al sur, además en la intersección de los abiertos debe existir el límite que implica la equivalencia entre los valores de potencial en el ecuador  $E$  con  $\theta = \pi/2$ .

$$\lim_{E^+ \rightarrow E^-} \mathbf{A}_S \circ \varphi \circ (\mathbf{A}_N(E^+))^{-1} = \mathbf{A}_S(E^+). \quad (2.18)$$

En el ecuador de la esfera  $E$ , que es la frontera común entre los hemisferios norte y sur (una región de superposición), ambos vectores potenciales  $\mathbf{A}_N$  y  $\mathbf{A}_S$  arrojan el mismo rotor y la diferencia entre ellos por ende, debe ser un rotor nulo, y estar relacionados por el gradiente de una función  $\lambda$  esto es, por

una transformación de calibre (gauge) y así mantener la unicidad del campo  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S = \nabla\lambda.$$

Para obtener esta función  $\lambda$ , restamos las ecuaciones (2.16) y (2.17) y resulta

$$\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S = \frac{m(1 - \cos\theta)}{r \sin\theta} \hat{u}_\varphi - \left[ -\frac{m(1 + \cos\theta)}{r \sin\theta} \hat{u}_\varphi \right]$$

$$\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S = \frac{2m}{r \sin(\theta)} \hat{u}_\varphi \quad (2.19)$$

$$\frac{2m}{r \sin\theta} \hat{u}_\varphi = \nabla\lambda \quad (2.20)$$

al usar la expresión del gradiente en coordenadas esféricas

$$\nabla f = \partial_r(f) \hat{u}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta(f) \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi(f) \hat{u}_\varphi \quad (2.21)$$

se obtiene

$$\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S = \nabla(2m\varphi) \quad (2.22)$$

y de aquí, la función de calibre es

$$\lambda = 2m\varphi, \quad (2.23)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo azimutal. Se observa que  $\varphi$  no se encuentra definido para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , por eso la transformación de calibre se aplica solo para  $\theta = \pi/2$ , en donde no se manifiesta dicha singularidad.

Si se calcula el flujo total producido por la carga, es necesario cubrir las dos regiones de la esfera

$$\Phi = \oint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{U_N} \nabla \times \mathbf{A}^N \cdot d\mathbf{S} + \oint_{U_S} \nabla \times \mathbf{A}^S \cdot d\mathbf{S} \quad (2.24)$$

Del teorema de Stokes se obtiene

$$\Phi = \oint_E \mathbf{A}_N \cdot d\vec{\ell} - \oint_E \mathbf{A}_S \cdot d\vec{\ell} = \oint_E (\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S) \cdot d\vec{\ell} \quad (2.25)$$

las integrales de línea están en contra dirección y determinan una contribución al flujo dado por el borde entre las regiones norte y sur (el ecuador  $E$ ), de (2.22) finalmente

$$\Phi = \oint_E \nabla (2m\varphi) dl = 4\pi m \quad (2.26)$$

este resultado esta de acuerdo con la carga magnética encerrada de acuerdo a la ley de gauss.

El monopolo de Wu y Yang es el mismo monopolo de Dirac expresado en coordenadas esféricas y por eso puede llamarse monopolo de Dirac-Wu-Yang, por medio de este modelo es posible evitar las singularidades que se manifiestan en coordenadas rectangulares, la llamadas cuerdas de Dirac: es necesario entonces, dividir el espacio en dos regiones en las que se definen los potenciales que difieren en una transformación de calibre, bajo esta geometría aparece un enfoque que implica la existencia de una estructura topológica para el monopolo que se desarrollara en el próximo capítulo.

### 2.3. Cuantización de la carga

El problema de la cuantización es de importancia significativa para la Electrodinámica Cuántica y fué estudiado por Dirac como consecuencia de su modelo del monopolo, además la estructura topológica del campo de calibre no puede estar completa si no se consideran las interacciones entre la carga eléctrica y la carga magnética<sup>3</sup>.

Se considera el caso del movimiento de una partícula puntual con carga eléctrica  $e$  y masa  $M$ , que es deflectada por el campo de un monopolo magnético estacionario de carga  $g$ , la ecuacion de Schrödinger para la función de onda  $\psi(\mathbf{r})$  de un electrón que se mueve próxima al campo magnético tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}_N)^2 \psi_N(\mathbf{r}) + V\psi_N(\mathbf{r}) &= E\psi_N(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}_S)^2 \psi_S(\mathbf{r}) + V\psi_S(\mathbf{r}) &= E\psi_S(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

---

<sup>3</sup>Puede ser consultado en cualquier libro del tema, por ejemplo [17]

En ella aparece la carga eléctrica relacionada con el monopolo magnético por medio del potencial  $\mathbf{A}$ , teniendo en cuenta las ecuaciones para los potenciales definidos en los hemisferios norte  $U_N$  y sur  $U_S$  respectivamente, (2.16) y (2.17), la ecuación de Schrödinger queda expresada para las dos regiones en donde  $\psi_N$  y  $\psi_S$  son las funciones de ondas correspondientes a los dos hemisferios.

En un dominio común estas ecuaciones (2.27) son invariantes bajo la transformación de calibre de los potenciales  $\mathbf{A}_N$  y  $\mathbf{A}_S$  y difieren por el gradiente de una función de la posición de acuerdo a (2.22), se debe cumplir la invariancia bajo una transformación de un factor de fase, es decir

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\lambda(\mathbf{r}), \\ \psi &\longrightarrow \exp(ie\lambda(\mathbf{r}))\psi.\end{aligned}$$

Aquí  $\lambda(\mathbf{r})$  es la función escalar de calibre ya definida en (2.23) y tiene el valor  $\lambda(\mathbf{r}) = 2m\varphi$ , donde  $\varphi$  es el ángulo azimutal, se obtiene que

$$\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S = \nabla(2m\varphi).$$

y se cumple para las funciones de onda  $\psi_N$  y  $\psi_S$  solución de (2.27) que

$$\begin{aligned}\psi_N(\mathbf{r}) &= \exp(ie\lambda)\psi_S(\mathbf{r}). \\ \psi_N(\mathbf{r}) &= \exp(2iem\varphi)\psi_S(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2.28}$$

La intersección de los dominios de los dos hemisferios es básicamente el ecuador  $E$ , aquí  $\psi_N$  pertenece completamente a  $U_N$  y es univaluada; por otro lado, ya que  $E$  también está completamente en  $U_S$ , entonces  $\psi_S$  es igualmente univaluada, así al dar una vuelta  $\varphi = 2\pi + \varphi_0$  alrededor del ecuador las funciones deben volver periódicamente al mismo valor que en  $\varphi_0$ , es decir

$$\exp(2iem(2\pi + \varphi_0))\psi_S(\mathbf{r}) = \exp(2iem(\varphi_0))\psi_S(\mathbf{r})$$

esto es posible solo si

$$n = 2em \quad n \in \mathbb{Z}.\tag{2.29}$$

con  $n$  entero y esta ecuación se conoce como la condición de cuantización de las cargas fundamentales.

Si el monopolo existe, la carga magnética toma valores discretos múltiplos de una función de la carga eléctrica,

$$m = \frac{n}{2e} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.30)$$

por igual razón, si existe el monopolo magnético de carga  $m$ , todas las cargas eléctricas están cuantizadas. En esta sección se han usado las unidades naturales, definidas por los valores unitarios de las constantes fundamentales:  $\hbar = c = 1$ .

Bajo un análisis de las propiedades de simetría de las ecuaciones de campo electromagnético 2.1 en donde resulta la invariancia bajo transformaciones de dualidad, y como esta discutido en [2], es posible demostrar que solo por convención se define la carga eléctrica de una partícula y no su carga magnética, el hecho significativo es que, teóricamente todas las partículas tienen la misma razón de cargas magnética a eléctrica y existe la posibilidad de escoger un caso en que la carga eléctrica sea muy pequeña y la carga magnética muy grande ó recíprocamente el caso en que la carga magnética sea muy pequeña y la eléctrica muy grande.

Experimentalmente [20] se obtiene que la carga eléctrica está cuantizada en múltiplos de  $1,60217733 \times 10^{-19}$  C lo que nos daría una carga del monopolo enorme en el sistema MKS. Realmente lo que debe compararse es la constante de acoplamiento que para el caso eléctrico es  $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ , mientras que para el monopolo, usando 2.29, se obtiene  $\frac{m^2}{\hbar c} = \frac{137}{4}n^2$  lo cuál es enorme. Esta constante indica que la interacción del monopolo con la materia es al menos  $\frac{137^2}{4}$  veces más intenso que la interacción con el electrón. La masa del monopolo en los modelos supersimétricos puede obtenerse utilizando la cota BPS o a partir de teorías de gran unificación GUT, los modelos arrojan diferentes resultados que dependen del modelo y el orden al cuál se rompe la simetría que origina al monopolo, los últimos resultados experimentales parecen excluir masa inferiores a los  $125 \text{ GeV}$  sin embargo algunos modelos basados en GUT establecen valores del orden de  $800 \text{ GeV}$  e incluso algunos modelos supersimétricos establecen valores gigantescos como  $10^{16} \text{ GeV}$ . La importancia del monopolo radica, en que la existencia de un solo monopolo en el universo implica la cuantización de la carga eléctrica de forma inmediata.

# Capítulo 3

## Geometría de los Monopolos

### 3.1. Teorías abelianas de calibre y dualidad

La teoría de campo electromagnético de Maxwell se describe geométricamente por un **fibrado principal**<sup>1</sup>

$$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{E}, \mathbf{M}, \mathbf{F}, \pi, \mathbf{G})$$

donde  $\mathbf{E}$  es el espacio total, el cual se identifica localmente con el producto directo de los abiertos  $\{U\}$  con el espacio fibra  $\mathbf{F}$ , es decir

$$\mathbf{E} \subset \{U_i \times \mathbf{F}\} \quad \text{donde } \{U_i\} \text{ es un cubrimiento de } \mathbf{M}$$

El espacio base  $\mathbf{M}$  es el espacio tiempo 4-dimensional de Lorentz-Minkowski, con la acción del grupo de estructura  $\mathbf{G}$  (un grupo de Lie) sobre los elementos de la fibra  $\mathbf{F}$  que asumimos es una variedad homeomórfica al grupo  $\mathbf{G}$ . El fibrado principal muchas veces se abrevia como

$$\mathbf{P} = (\mathbf{M}, \mathbf{G}, \pi)$$

La fibra es un espacio topológico tal que su espacio tangente  $\mathbf{T}_a\mathbf{F}$  está formado por los campos vectoriales  $(A_\mu^a(\mathbf{x}), T_u\mathbf{M})$  solución de las ecuaciones de Maxwell (Yang Mills) que corresponden a todos los posibles campos de calibre y constituye un **espacio principal homogéneo**  $\mathbf{F}$ . Esto significa que todo par de puntos de la fibra están conectadas por un único elemento  $a$  del

---

<sup>1</sup>Acá se sigue el enfoque de [9] y [14]

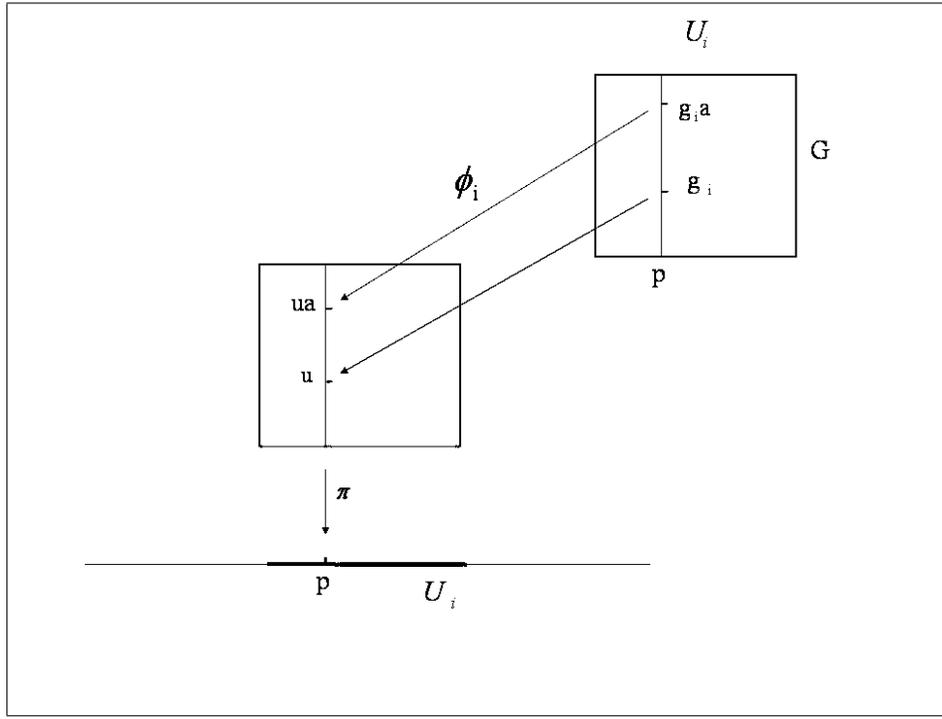


Figura 3.1: Estructura de un fibrado principal

grupo (referase a la fig 3.1 ), la cual a su vez es homeomórfica al grupo  $\mathbf{G}$ , de hecho los campos  $A_\mu^a$  constituyen una realización del álgebra  $\mathfrak{g}$  del grupo  $\mathbf{G}$ . Una solución particular de las ecuaciones de campo corresponde a tomar una sección  $\sigma$  tal que dicha sección es una función inversa del mapa proyección :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{M} \\ \pi(u) &= \pi(x, g) = x \\ \pi \circ \sigma &= Id_M \end{aligned}$$

donde  $g$  es un elemento del grupo  $\mathbf{G}$  (homeomorfo a  $\mathbf{F}$ ) y donde  $x$  es un punto de la variedad de base  $\mathbf{M}$ . La proyección queda determinada (al menos localmente) y el mapa sección nos indica como realizar la *alzada* desde el espacio base (la proyección en cambio *baja*).

A partir de la escogencia de una sección particular podemos definir una 1-forma de conexión, también llamada conexión local en el cotangente (local)

del fibrado

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_U &\in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(\mathbf{U}) \\ \mathcal{A}_U &= T_a A_\mu^a(\mathbf{x}) dx^\mu\end{aligned}$$

donde  $T_a$  son los generadores del Algebra de Lie asociada al grupo  $\mathfrak{g} \approx \mathbf{TG}$  y donde  $\Omega^1(\mathbf{U}) \in \mathbf{T}^*\mathbf{M}$  es el espacio de 1- formas dual al tangente local de la base sobre el abierto  $\mathbf{U}$ .

El espacio cociente  $\mathbf{P}/\mathbf{G}$  es homeomorfo a la variedad de base  $\mathbf{M}$ . Cuando este cociente es contractible a un punto existe una sección globalmente definida y por lo tanto el fibrado  $\mathbf{P}$  es trivial y se requiere una única trivialización local. Entonces la curvatura local puede expresarse en forma global sobre toda la variedad  $M$  y esta construcción permite recobrar la formulación tradicional de las ecuaciones de Maxwell, sin monopolos ni otras singularidades topológicas. Sin embargo el caso general abarca los llamados defectos topológicos que en el caso de Maxwell son los monopolos.

Si escogemos una base local de coordenadas para las secciones (se explicará más ) podemos definir una **conexión** en este fibrado principal  $\mathbf{P}$  de forma tal que se puede definir una **derivada covariante** en cada **fibrado asociado** a  $\mathbf{P}$ . Los fibrados asociados al principal se construyen reemplazando la fibra  $\mathbf{F}$  por un nuevo espacio ó fibra  $\mathbf{F}_2$ , usualmente un espacio de funciones  $C^\infty$  que son campos escalares, vectoriales, espinoriales, etc., que representarán partículas físicas de la teoría. En la sección anterior (*Cuantización de la carga*), la fibra asociada  $\mathbf{F}_2$  estaba constituida por las funciones solución a la ecuación de Schrödinger (2.27) donde la acción del grupo  $\mathbf{G}$  viene dada por las funciones de transición  $\exp(ie\lambda)$  (2.28). Tomando en consideración la condición de cuantización de Dirac, para diferentes cargas  $n \in \mathbb{Z}$  deben corresponder diferentes múltiplos de la *realización del álgebra* que resulta ser una *representación irreducible* del grupo de  $\mathbf{U}(1)$  sobre las funciones complejas

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(1) &\longrightarrow \mathbf{GL}(\mathbb{C}) \\ e^{i\lambda} &\longmapsto (\psi \mapsto e^{in\varphi}\psi)\end{aligned}$$

y por lo tanto establece que el grupo de estructura del fibrado es  $\mathbf{G} = \mathbf{U}(1)$ .<sup>2</sup> para la teoría electromagnética de Maxwell.

---

<sup>2</sup>Esto descarta  $\mathbb{R}$  como posible grupo de estructura, ya que en ese caso las representación sobre la fibra asociada  $\psi \mapsto e^{ia\varphi}\psi$  con a contínuo

Es deseable establecer una separación del espacio tangente al fibrado  $\mathbf{T}_u\mathbf{P}$  en suma directa de un espacio tangente a la fibra que es llamado subespacio vertical y es isomorfo al Algebra  $\mathfrak{g}$  del grupo  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{V}_u \equiv \mathbf{T}_u(\mathbf{F}) \approx \mathfrak{g}$$

y su complemento ortogonal que se obtiene como el conjunto de los campos vectoriales del espacio nulo o kernel de la 1-forma conexión de Ehresmann

$$\mathbf{H}_u\mathbf{P} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{T}_u\mathbf{P} / \omega(\mathbf{X}) = 0\}$$

La conexión de Ehresmann  $\omega$  es una 1-forma que proyecta desde el espacio tangente del fibrado  $\mathbf{T}_u\mathbf{P}$  hasta el espacio tangente a la fibra o espacio vertical  $\mathbf{V}_u$  (que es isomorfo al álgebra del grupo):

$$\omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathbf{T}^*\mathbf{P}$$

es decir, la conexión aplicada sobre campos vectoriales del tangente  $\omega(\mathbf{X})$  estará valuada sobre  $\mathfrak{g} \approx \mathbf{V}_u$ , es decir sobre el subespacio vertical. De forma tal que la conexión descompone el espacio tangente en suma directa:

$$\mathbf{T}_u(\mathbf{P}) = \mathbf{V}_u \oplus \mathbf{H}_u$$

Esta descomposición se mantiene invariante tanto bajo la acción de un elemento  $g$  del grupo como al moverse sobre la variedad de base  $\mathbf{M}$ , ella tiene la información del transporte paralelo y permite la construcción de las derivadas covariantes.

Dada una sección local  $\sigma$ , es decir una inversa local (en un abierto  $U$  del cubrimiento) de la proyección  $\pi$  del fibrado en  $M$

$$\begin{aligned} \sigma_U: \mathbf{U} \subset \mathbf{M} &\rightarrow \mathbf{E} \\ \pi \circ \sigma_U &= Id_M \end{aligned}$$

se define la conexión local mediante el pullback de la sección sobre los cotangentes  $\sigma^*: \mathbf{T}^*\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{T}^*\mathbf{M}$  a partir de la conexión de Ehresmann

$$\mathcal{A}_U = \sigma_U^* \omega$$

La derivada covariante se define para todo campo tensorial, en este trabajo utilizaremos la derivada covariante mediante

$$D(\cdot) = d(\cdot) + \mathcal{A} \wedge (\cdot) \quad (3.1)$$

y se tienen las siguientes reglas de transformación bajo la acción del grupo por la derecha:  $\mathcal{A}' = R_g[\mathcal{A}]$ , donde  $R_g$  es una representación del grupo  $G$

$$\sigma_U^* \omega = \mathcal{A}'_U = g^{-1} \mathcal{A}_U g + g^{-1} dg \quad (3.2)$$

La expresión local tensorial de la conexión es el potencial de calibre (gauge)  $\mathcal{A}_\mu$  es igual al potencial vectorial usual en electromagnetismo  $\mathbf{A}_\mu$  multiplicado por el generador del álgebra de Lie de  $\mathbf{U}(1)$ :

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^a T_a = i A_\mu$$

donde hay un único generador: el número imaginario  $i$  ya que

$$T_a = T = i$$

y se obtiene la acción del grupo uniparamétrico  $\mathbf{U}(1)$  mediante multiplicación de los elementos de la fibra por un elemento del grupo, i.e. la exponencial del álgebra de Lie generada por  $T = i$  con parámetro  $\lambda$ :

$$g = \exp[i\lambda] \in \mathbf{U}(1)$$

es fácil chequear que el generador se obtiene derivando la acción del grupo

$$T = \left. \frac{dg}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = i \quad (3.3)$$

La 1-forma de conexión se define tomando las bases naturales en el espacio cotangente de la variedad de base  $\mathbf{M}$ , sin embargo no debemos olvidar que también está valuada en el tangente a la fibra  $\mathbf{V}_x$ :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu \quad (3.4)$$

La 2-forma local de la curvatura asociada a la conexión es la intensidad de campo

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}. \quad (3.5)$$

En componentes, tenemos

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.6)$$

y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.7)$$

note que  $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv iF_{\mu\nu}$ . Ya que  $\mathcal{F}$  es exacta,  $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ ; y por lo tanto cerrada,  $d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0$ , entonces  $\mathcal{F}$  satisface la identidad de Bianchi

$$d\mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} = 0. \quad (3.8)$$

La identidad de Bianchi en componentes es

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (3.9)$$

Para completar la descripción se requieren los principios variacionales, primero encontramos el operador de dualidad que esta involucrado en la construcción de las ecuaciones dinámicas del campo, el complemento ortogonal del espacio base es el espacio dual, se define el operador estrella  $*$  como aquel que transforma las cantidades de un espacio a su espacio dual, así el dual de  $\mathcal{F}$  esta dado por

$$*\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{F}^{\kappa\lambda}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu},$$

donde  $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 2[\delta_{\kappa\alpha}\delta_{\lambda\beta} - \delta_{\kappa\beta}\delta_{\lambda\alpha}]$  y se obtiene que

$$**\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}.$$

La densidad Lagrangiana invariante gauge  $\mathcal{L}$  es la forma cuadrática  $\mathcal{F} \wedge *\mathcal{F}$   $\mathfrak{G}$ -invariante en el álgebra  $\mathfrak{g}$  del grupo, más el término de interacción  $\mathcal{A} \wedge *\mathcal{J}$  en el cual se ha expresado el dual de la 1-forma que describe las fuentes del campo  $\mathcal{J}$ , se tiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{F} \wedge *\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge *\mathcal{J} \quad (3.10)$$

si agregamos la identidad de Bianchi (3.8) a la ecuación de Euler-Lagrange se obtienen las ecuaciones dinámicas del campo

$$d(\mathcal{F}) = 0 \quad (3.11)$$

$$d(*\mathcal{F}) = *\mathcal{J} \quad (3.12)$$

En ausencia de fuentes, se tienen las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$d(\mathcal{F}) = 0 \quad (3.13)$$

$$*d(*\mathcal{F}) = 0 \quad (3.14)$$

estas ecuaciones son claramente simétricas bajo la **transformación de dualidad**

$$\mathcal{F} \longrightarrow *\mathcal{F} \qquad *\mathcal{F} \longrightarrow -\mathcal{F} \quad (3.15)$$

(el signo menos es debido al carácter métrico del espacio tiempo). Es decir las ecuaciones (3.14) son invariantes bajo la transformación de dualidad (3.15) y significa la posibilidad de intercambiar el papel jugado por el campo  $\mathcal{F}$  y su dual  $*\mathcal{F}$ , es decir en el lenguaje del electromagnetismo, intercambiar el campo eléctrico por el campo magnético [2]. A diferencia de (3.15) el sistema (3.11) en donde  $*\mathcal{J} \neq 0$  pareciera romper inmediatamente la simetría de dualidad. Para salvar la dualidad se incluye un término adicional, una fuente de campo dual (de campo magnético en caso de las ecuaciones de Maxwell) en la primera ecuación del sistema (3.11) esta modificación podría arruinar la interpretación geométrica de  $\mathcal{F}$  como la 2-forma curvatura constante, pues se violaría la identidad de Bianchi. La salida a esta contradicción es admitir la existencia de cierto dominio de singularidad para el potencial de calibre (gauge) y mantener la fuente adicional, y así  $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$  no se definiría globalmente.

Al restablecer la simetría en las ecuaciones de campo, nos queda

$$d(\mathcal{F}) = \mathcal{J} \quad (3.16)$$

$$d(*\mathcal{F}) = *\mathcal{J}. \quad (3.17)$$

donde se reobtiene la dualidad generalizada bajo las transformaciones

$$\mathcal{F} \longrightarrow *\mathcal{F} \qquad \mathcal{J} \longrightarrow *\mathcal{J} \quad (3.18)$$

$$*\mathcal{F} \longrightarrow -\mathcal{F} \qquad *\mathcal{J} \longrightarrow -\mathcal{J} \quad (3.19)$$

Hasta ahora se ha establecido las ecuaciones de campo para toda 4-variedad  $\mathbf{M}$ , se hace preciso especificar un caso especial la descomposición de  $\mathbf{M}$  para recuperar de manera natural las ecuaciones de Maxwell en su forma convencional conocida. Para esto escribimos el sistema (3.17) en componentes, usando las propiedades del operador estrella  $*$  y el hecho de que

el potencial  $\mathcal{A}$  y la intensidad de campo  $\mathcal{F}$  difieren del potencial  $A$  y la intensidad  $F$  por el factor del álgebra de Lie  $i$  :

$$\mathcal{A}_\mu = iA_\mu \quad (3.20)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = iF_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

El sistema (3.17) queda

$$\partial_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathcal{J}^\mu \quad (3.22)$$

$$\partial_\nu * \mathcal{F}^{\mu\nu} = * \mathcal{J}^\mu. \quad (3.23)$$

Establecemos el cuadro de identificación de variables de las cantidades electromagnéticas:  $A$  el potencial gauge,  $J_e$  fuente de campo eléctrico,  $J_g$  fuente de campo magnético,  $F$  intensidad de campo (curvatura)

#### Cuadro de identificación de variables

1-forma conexión	$A = A_\mu dx^\mu$	$A_\mu = (+\phi, \mathbf{A})$
1-forma de fuente eléctrica	$J_e = -J_{e\mu} dx^\mu$	$J_{e\mu} = (\rho_e, J_{e\mu})$
1-forma de fuente magnética	$J_g = -J_{m\mu} dx^\mu$	$J_{g\mu} = (\rho_m, J_{m\mu})$
2-forma curvatura	$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\text{Campos Vectoriales } E_i = F_{i0}, B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.24)$$

El sistema (3.17) se reduce a las ecuaciones de campo electromagnético simétricas si en estas admitimos el hecho de que  $J_{m\mu} = 0$ , el sistema resultante sería el conjunto de ecuaciones de Maxwell en su forma original para el campo electromagnético, con asimetría dual debido a la ausencia de la carga magnética. Así, la existencia de la dualidad electromagnética general depende de la presencia de cargas magnéticas siendo posible intercambiar el papel jugado por el campo eléctrico  $E$  y el magnético  $B$ .

Si se quiere mantener la simetría de dualidad general y obtener el campo  $A_\mu$  para un monopolo magnetico, expresado por la ecuación (3.7), debe suponerse puntos singulares en el dominio del potencial y permitir así un flujo magnético discreto distinto de cero, tal como se hizo para el caso del monopolo de Dirac.

## 3.2. Topología del monopolo de Dirac-Wu-Yang

En el modelo de Dirac-Wu-Yang, el espacio base del fibrado es la esfera  $\mathbf{M} = S^2$  alrededor del monopolo y la fibra típica o estandar es  $\mathbf{F}_p = \mathbf{G} \cong \mathbf{U}(1)$ . En esta formulación <sup>3</sup>, se define el cubrimiento abierto  $\{U_N, U_S\}$  de  $S^2$  consistente de dos regiones, los hemisferios norte y sur de la esfera parametrizados por las coordenadas polares,  $\theta$  la axial y  $\varphi$  la azimutal (ver la fig 2.2)

$U_N$  es la carta que cubre la region del hemisferio norte

$$U_N = \{(\theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2 + \varepsilon, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (3.25)$$

$U_S$  es la carta para el hemisferio sur

$$U_S = \{(\theta, \varphi) \mid \pi/2 - \varepsilon \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (3.26)$$

el espesor  $\varepsilon$  es un numero infinitesimal positivo y expresa la zona de superposición ( la región de intersección) de los abiertos definidos por el cubrimiento. La region de intersección  $U_N \cap U_S$  es el círculo máximo  $S^1$  de la esfera con valores  $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ ,  $z = 0$  y es el ecuador de la esfera  $E$ . Un punto  $p$  en el ecuador puede expresarse por las coordenadas locales de las cartas correspondientes a los abiertos  $U_N$  y  $U_S$ , en el espacio de las funciones de trivialización.

Las trivializaciones locales están expresadas por los mapas (ver fig.3.2)

$$\phi : U_j \times \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{F}_p$$

en este caso se cumple:

$$\phi_N^{-1}(u) = (p, e^{i\alpha_N}) \quad \phi_S^{-1}(u) = (p, e^{i\alpha_S}) \quad (3.27)$$

con  $p$  en  $U_N \cap U_S$  y coordenadas  $p = (\pi/2, \varphi)$ , ya que se encuentra en  $E$  y  $u \in \mathbf{F}_p$ , además,  $g_N = e^{i\alpha_N}$  y  $g_S = e^{i\alpha_S}$  son elementos del grupo de estructura

---

<sup>3</sup> Adaptado de [3]

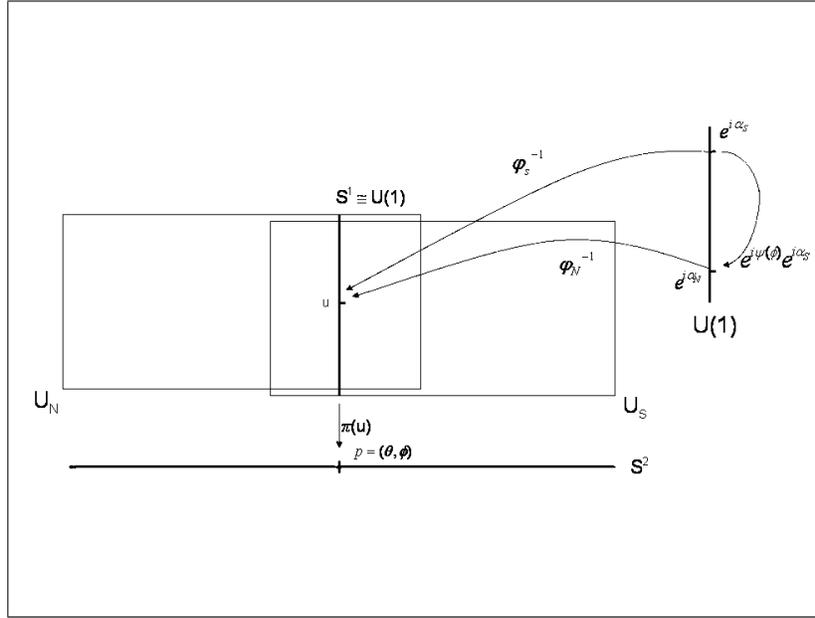


Figura 3.2: Fibrado principal de Dirac

$\mathbf{U}(1)$  y  $\alpha_N$ ,  $\alpha_S$  las coordenadas locales de la fibra en  $p$ , correspondientes a las secciones para cada carta

$$\sigma_N(p) : S^2 \longrightarrow \mathbf{P} \quad , \quad \sigma_S(p) : S^2 \longrightarrow \mathbf{P}$$

Se define el mapa proyectivo  $\pi(u) = p$ , que es la sobreyección de las fibras de  $P$  sobre la esfera  $S^2$  (el espacio base), así

$$\pi : \mathbf{P} \rightarrow S^2 \quad \pi^{-1}(p) = \mathbf{F}_p \quad \pi(u) \circ \sigma(p) = Id_{S^2}$$

Se define la función de transición como

$$\begin{aligned} t_{NS}(\varphi) &= \exp[i\lambda(\varphi)] & \lambda : S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}, & (3.28) \\ \lambda(\varphi) &= n\varphi & n &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

para el ecuador  $U_N \cap U_S$  la función  $t_{NS}$  es un mapa desde  $S^1$  al grupo de estructura  $t_{NS}(p) : S^1 \longrightarrow \mathbf{U}(1)$ .

Las secciones locales están relacionadas por medio de la ecuación

$$\sigma_S(p) = \sigma_N(p)t_{NS}(p). \quad (3.29)$$

$$\sigma_S(p) = \sigma_N(p) \exp[in\varphi]. \quad (3.30)$$

Así las trivializaciones  $\phi_N$  y  $\phi_S$  se relacionan por

$$\phi_S(p, e^{i\alpha_S}) = \phi_N(p, e^{i\lambda(\varphi)} e^{\alpha_N i}) \quad (3.31)$$

y las coordenadas de la fibra quedan

$$\alpha_S = \alpha_N + \lambda(\varphi) \quad (3.32)$$

este resultado muestra la acción del grupo sobre la fibra, esta acción se denomina una transformación de calibre- $\mathbf{U}(1)$  ( transformación gauge). Cuando  $\mathcal{A}_j : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisface a las ecuaciones de Maxwell se obtiene el monopolo magnético.

En coordenadas locales la 1-forma conexión local se puede expresar partir de la conexión de Ehresmann [3]. Cuando realizamos una transformación bajo la acción del elemento  $g$  del grupo de calibre  $\mathbf{G}$  de la conexión local (3.4) cambia como

$$\sigma_j^* \omega = \mathcal{A}'_j = g^{-1} \mathcal{A}_j g + g^{-1} dg \quad j = S, N$$

La conexión local  $\mathcal{A}_\mu = T_1 A_\mu^1$  son entonces las componentes de la 1-forma potencial donde  $T_1 = i$  es el único elemento del álgebra de Lie de  $\mathbf{U}(1)$ . Para este fibrado principal  $g = e^{i\alpha}$ , así queda

$$\omega = \mathcal{A} + id\alpha \quad (3.33)$$

en  $S^2$  que esta cubierta por los hemisferios  $U_N$  y  $U_S$ ,

$$\mathcal{A}'_N = \mathcal{A}_N + id\alpha_N$$

$$\mathcal{A}'_S = \mathcal{A}_S + id\alpha_S$$

la conexión debe cumplir con la unicidad, entonces igualando sobre el ecuador  $E = U_N \cap U_S$

$$\mathcal{A}_N + id\alpha_N = \mathcal{A}_S + id\alpha_S$$

de la ecuación (3.32)

$$\mathcal{A}_N + id\alpha_N = \mathcal{A}_S + id(\alpha_N + \boldsymbol{\lambda}(\varphi))$$

y

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_S + id\boldsymbol{\lambda}(\varphi)$$

también, por medio de la función de transición  $t_{NS}$ , podemos encontrar este resultado, ahora al pasar de un hemisferio al otro

$$\mathcal{A}_N = t_{NS}^{-1}\mathcal{A}_S t_{NS} + t_{NS}^{-1}dt_{NS} \quad (3.34)$$

y usando el hecho que  $t_{NS}(\varphi) = \exp[i\boldsymbol{\lambda}(\varphi)]$  queda

$$\mathcal{A}_N = \exp[-i\boldsymbol{\lambda}(\varphi)]\mathcal{A}_S \exp[i\boldsymbol{\lambda}(\varphi)] + \exp[-i\boldsymbol{\lambda}(\varphi)] \exp[i\boldsymbol{\lambda}(\varphi)]i\boldsymbol{\lambda}(\varphi)d\varphi$$

como antes

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_S + id\boldsymbol{\lambda}(\varphi). \quad (3.35)$$

A partir de los potenciales vectoriales locales  $\mathbf{A}_N(\vec{\mathbf{r}})$  y  $\mathbf{A}_S(\vec{\mathbf{r}})$  dados en el modelo de Wu-Yang por la ecuación (2.16) se obtienen las conexiones locales

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N &= \mathbf{A}_N \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{m}{r} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \hat{u}_\varphi \cdot (dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \hat{u}_\varphi) \\ \mathcal{A}_S &= \mathbf{A}_S \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\frac{m}{r} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \hat{u}_\varphi \cdot (dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \hat{u}_\varphi) \end{aligned}$$

en donde  $m$  es la intensidad de carga del monopolo. Por tanto, los potenciales de calibre (conexiones) quedan expresados por las formas

$$\mathcal{A}_N = im(1 - \cos\theta)d\varphi \quad \mathcal{A}_S = -im(1 + \cos\theta)d\varphi \quad (3.36)$$

De la ecuación (3.35) se obtiene la condición de acoplamiento de las fibras

$$d\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = -i(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_S) = 2md\varphi. \quad (3.37)$$

se considera que  $\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = n\varphi$  mientras  $\varphi$  varia desde 0 a  $2\pi$  alrededor del ecuador,  $\boldsymbol{\lambda}(\varphi)$  toma los valores

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}(\varphi) \equiv \int d\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \int_0^{2\pi} n d\varphi = 2\pi n. \quad (3.38)$$

por la unicidad de  $t_{NS}$ ,  $\Delta\lambda(\varphi)$  debe ser un entero múltiplo de  $2\pi$ , esto asegura que la estructura resultante sea una variedad en donde las fibras deban acoplarse exactamente cada vez que se complete una vuelta alrededor del ecuador, por lo tanto

$$\frac{\Delta\lambda(\varphi)}{2\pi} = \frac{2\pi n}{2\pi} = n \in \mathbb{Z} \quad (3.39)$$

y como en la ecuación (2.29)

$$n = 2m. \quad (3.40)$$

con  $e = 1$ .

En el contexto de la física la fijación de la función  $\lambda = 2\pi n$  corresponde a una fijación de calibre, lo cual elimina los grados libertad no físicos del campo electromagnético  $A_\mu$  y las expresiones dada por las ec. (2.16) corresponden ahora a una descripción exacta del potencial de un monopolo magnético en el centro de la esfera.

En el contexto de la teoría de los fibrados, esto significa que la multiplicidad entera clasifica al fibrado de acuerdo al grupo fundamental de homotopía  $\pi_1(E \sim S^1) \cong \mathbb{Z}$ , es decir la fibra encierra al ecuador  $n$  veces y es imposible que esta configuración pueda deformarse continuamente en otra con un valor de vueltas diferentes. El número  $n$  tiene una importancia fundamental en la topología, es llamado **número cíclico** (winding number) ó también llamado *índice de Pontryagin*. Referido a la teoría de campos de calibre, de acuerdo a la ecuación (2.29) este número  $n$  da la conocida *condición de cuantización de Dirac* para el monopolo con  $n = 2eg$ , el entero  $n$  que expresa la cuantización de las interacciones electromagnéticas, representa la clase de homotopía a la cual pertenece este fibrado, el dobléz de las fibras acopladas en el ecuador  $E$ .

La forma local de la curvatura del fibrado se identifica con la intensidad de campo magnético del monopolo, por (4.46)

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ F &= \frac{1}{2} (\partial_\theta A_\varphi - \partial_\varphi A_\theta) d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

como la componente  $A_\theta$  se anula

$$F = \frac{m}{2} \sin(\theta) d\varphi \wedge d\theta \quad (3.41)$$

Se puede demostrar que el número cíclico se obtiene al considerar el flujo total  $\Phi$  hecho por el campo al cruzar la variedad  $S^2$ . Con la curvatura del fibrado expresada como la intensidad del campo (el campo magnético  $\mathbf{B}$ )  $F_N = dA_N$  y  $F_S = dA_S$  es:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot dS = \int_{U_N} F_N + \int_{U_S} F_S \\ &= \int_{U_N} dA_N + \int_{U_S} dA_S \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$= \int_E A_N - \int_E A_S = 2m \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi m. \quad (3.43)$$

Entonces la curvatura del fibrado  $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ , caracteriza también el doblez del fibrado de acuerdo con su número de homotopía, y está en concordancia con la condición de cuantización de Dirac.

Otro aspecto importante de la teoría de calibre relacionado con el número topológico  $n$  proviene del análisis de la ecuación (3.35), por medio de la función de transición, ec. (3.28), resulta

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_S + in.d\varphi \quad (3.44)$$

por otro lado la transformación de calibre para  $A_N$  y  $A_S$  se escribe como

$$A_{N\mu} = A_{S\mu} + \partial_\mu \Lambda \quad (3.45)$$

comparando las dos últimas ecuaciones, se puede afirmar que la carga magnética del monopolo se puede interpretar directamente como el número de vueltas de la transformación de calibre  $\partial\Lambda$  (la fibra en el fibrado) que define el mapa de la función de transición en el ecuador (region superpuesta) desde  $S^1$  al grupo de calibre  $\mathbf{U}(1)$

$$\partial\Lambda : S^1 \longrightarrow \mathbf{U}(1) \quad (3.46)$$

Entonces, considerando que  $n$  determina las clases de homotopías del fibrado, puede afirmarse que si  $n = 0$ , la función de transición  $t_{NS}(\phi) = \exp[in\varphi]$  es el elemento identidad de  $\mathbf{U}(1)$  y tendremos un fibrado trivial

$$\mathbf{P}_0 = S^2 \times \mathbf{Id}$$

Si  $n \neq 0$ , el fibrado  $\mathbf{U}(1)$  está “ $n$  veces enrollado”; cuando  $n = 1$  describiendo el monopolo de Dirac de carga  $e = 1$  y  $g = 1/e$ , así el monopolo de Dirac es un fibrado principal no trivial  $\mathbf{U}(1)$  con base  $S^2$ .

$$\mathbf{P} = (S^2, \mathbf{U}(1)) \tag{3.47}$$

La estructura del fibrado de Dirac-Wu-Yang que esta caracterizada por el entero que determina como dos conexiones locales son pegadas en el ecuador correspondiendo al grupo de homotopía

$$\Pi_1(\mathbf{P}(S^2, \mathbf{U}(1))) = \mathbb{Z}.$$

# Capítulo 4

## Monopolos Geométricos

En este capítulo se demuestra que al construir el fibrado de Hopf se obtiene la versión geométrica del monopolo de Dirac-Wu-Yang utilizando cantidades estrictamente geométricas como coordenadas y proyecciones en lugar de campos eléctricos, magnéticos y otras magnitudes físicas. El mapa proyectivo de Hopf marca el camino para la obtención de un fibrado principal  $\mathbf{P}_1(S^2, \mathbf{U}(1))$  primero, por medio de la proyección estereográfica se obtiene un atlas que define a  $S^2$  como una variedad compleja denominada la esfera de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , por otro lado, se aplica la proyección homotópica llamada de Hopf a la 3-esfera  $\mathbf{S}^3$  sobre  $S^2$  de Riemann, lo cual permite descomponer localmente este espacio en el producto  $S^2 \times S^1$ , y como  $S^1 \cong \mathbf{U}(1)$  se obtiene un fibrado principal que se identifica con el fibrado del monopolo de Dirac-Wu-Yang.

### 4.1. Proyección estereográfica

La proyección estereográfica (vea la figura 4.1), se define como la proyección de un punto del espacio sobre un plano: todo punto de coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  que está en el hemisferio norte  $U_N^* \equiv S^2 - \{PS\}$  de una esfera inscrita en  $\mathbb{R}^3$ , se proyecta sobre el plano ecuatorial ( $\mathbb{P}_{UV}$ ) de la esfera, con punto de proyección el Polo Sur ( $PS$ ), originando las coordenadas estereográficas  $(U, V)$ .

Sea la esfera unitaria de coordenadas cartesianas  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , la línea del ecuador de la esfera pertenece al plano cartesiano llamado plano

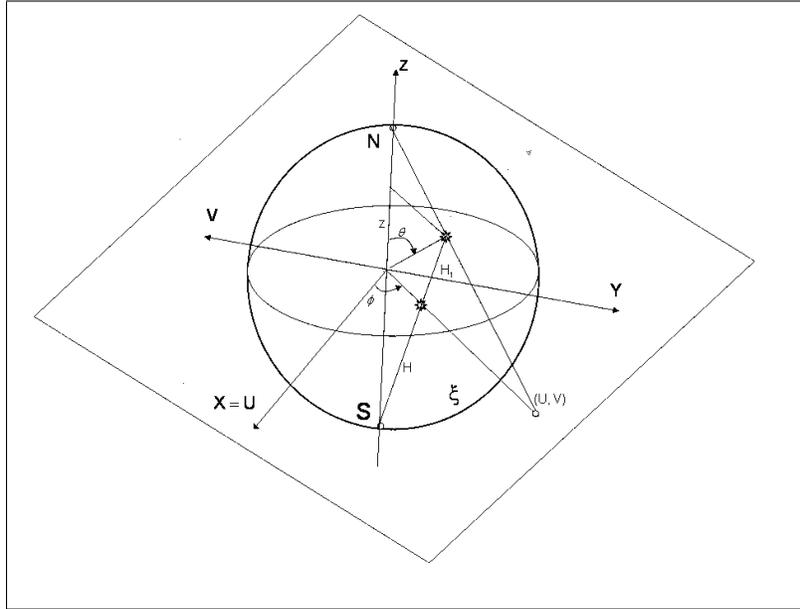


Figura 4.1: Proyección estereográfica de la esfera

ecuatorial de la esfera, referido a la figura 4.1 se tiene

$$\cos \beta = \frac{1+z}{H} = \frac{1}{H-H_1} \quad (4.1)$$

por razones de semejanza de triángulos

$$\frac{H}{H-H_1} = \frac{x}{U} = -\frac{y}{V} \quad (4.2)$$

de aquí

$$(U, V) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{-y}{1+z} \right) \quad (x, y, z) \in U_N^*. \quad (4.3)$$

De igual modo, las consideraciones anteriores valen para las coordenadas estereográficas  $(X, Y)$ , que se originan por la proyección de los puntos del hemisferio sur  $U_S^* \equiv S^2 - \{PN\}$ , proyectados desde el Polo Norte ( $PN$ ) sobre el plano ecuatorial  $(\mathbb{P}_{XY})$ . Quedando

$$(X, Y) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \quad (x, y, z) \in U_S^*. \quad (4.4)$$

Considerando estos dos conjuntos de coordenadas se obtiene así el cubrimiento de  $S^2$  por  $U_S^* \cup U_N^*$ .

Se definen las proyecciones estereográficas (ver fig 4.1) en el plano complejo por las funciones

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} Z &= X+iY \\ W &= U+iV \end{aligned} \tag{4.5}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} Z^2 &= X^2+Y^2 = \left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z}\right)^2 = \frac{1+z}{1-z} \\ W^2 &= U^2+V^2 = \left(\frac{x}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{-y}{1+z}\right)^2 = \frac{1-z}{1+z} \end{aligned}$$

Resulta que  $W$  es una función holomórfica de  $Z$  :

$$W = \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z} = \frac{1-z}{1+z} \left(\frac{x-iy}{1-z}\right) \tag{4.6}$$

$$W = \frac{1-z}{1+z} (X-iY) = \frac{(1-z)^2}{1-z^2} (X-iY) \tag{4.7}$$

pero  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  entonces  $x^2 + y^2 = 1 - z^2$  por tanto

$$W = \frac{X-iY}{X^2+Y^2} = \frac{1}{X+iY} \tag{4.8}$$

$$W = \frac{1}{Z}. \tag{4.9}$$

Para demostrar el holomorfismo entre  $W$  y  $Z$ , se tiene que

$$W = U+iV = \frac{X}{X^2+Y^2} - i\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

efectivamente satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{Y^2 - X^2}{(X^2 + Y^2)^2}$$

esto garantiza que los dos atlas  $W$  y  $Z$  de  $S^2$  definen una misma estructura compleja (la union de ellos es un atlas) y los cálculos sobre las variedades complejas pueden efectuarse independientemente de las coordenadas escogidas de uno u otro atlas. Queda por lo tanto demostrado que,  $S^2$  es una variedad compleja que se identifica con la esfera de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

## 4.2. Mapa proyectivo de Hopf

La 3-esfera  $S^3$  inmersa en  $\mathbb{R}^4$  se escribe como

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1 \quad (4.10)$$

al definir  $S^3$  sobre el plano complejo

$$z^0 = x^1 + ix^2 \quad z^1 = x^3 + ix^4 \quad (4.11)$$

$z^0$  y  $z^1 \in \mathbb{C}$ , la ecuación (4.10) es

$$|z^0|^2 + |z^1|^2 = 1.$$

Además, se parametriza  $S^2$  como

$$(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 + (\zeta^3)^2 = 1. \quad (4.12)$$

ahora  $\zeta^1 = x, \zeta^2 = y, \zeta^3 = z$  y  $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$  es el punto de coordenadas rectangulares.

Se define el **Mapa de Hopf** en forma explícita en coordenadas cartesianas y estereográficas

$$\pi : S^3 \longrightarrow S^2 \quad (4.13)$$

en este mapa  $u = (x^1, x^2, x^3, x^4)$  y  $p = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ , por lo tanto

$$\pi(u) = p$$

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= 2(x^1 x^3 + x^2 x^4) \\ \zeta^2 &= 2(x^2 x^3 + x^1 x^4) \\ \zeta^3 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

y se verifica que  $\pi$  es el mapa proyección de  $S^3$  a  $S^2$

$$(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 + (\zeta^3)^2 = \left[ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 \right]^2 = |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1. \quad (4.15)$$

De las ecuaciones (4.4) y (4.5) se obtienen las coordenadas estereográficas complejas del mapa proyección

$$Z = \frac{\zeta^1 + i\zeta^2}{1 - \zeta^3} = \frac{x^1 + ix^2}{x^3 + ix^4} = \frac{z^0}{z^1}, \quad \zeta \in U_S \quad (4.16)$$

de aquí que  $Z$  es invariante bajo la acción del grupo  $\mathbf{U}(1)$  en  $S^3$ , es decir bajo la transformación

$$(z^0, z^1) \longmapsto (z^0\lambda, z^1\lambda) \quad (4.17)$$

donde  $\lambda \in \mathbf{U}(1)$ . El punto  $(z^0\lambda, z^1\lambda)$  esta en  $S^3$  ya que  $|\lambda| = 1$ .

De las coordenadas estereográficas  $(U, V)$  se tiene

$$W = \frac{\zeta^1 - i\zeta^2}{1 + \zeta^3} = \frac{x^3 + ix^4}{x^1 + ix^2} = \frac{z^1}{z^0}, \quad \zeta \in U_N \quad (4.18)$$

En el ecuador  $U_S \cap U_N$ , se tiene que  $\zeta^3 = 0$ , y de las ecuaciones anteriores (4.16) y (4.18) se cumple

$$Z = \zeta^1 + i\zeta^2 = \frac{1}{\zeta^1 - i\zeta^2} = \frac{1}{W}. \quad (4.19)$$

en concordancia con la ecuación (4.9)

### 4.3. Estructura topológica del fibrado de Hopf

En base a lo obtenido en el apartado anterior se puede definir un fibrado con proyección de Hopf de la manera siguiente:

La estructura topológica del **fibrado de Hopf** esta conformado por los siguientes elementos

- (i) El espacio total  $E \equiv S^3$ .

- (ii) El espacio Base  $M \equiv S^2$ .
- (iii) La fibra  $F \equiv \mathbf{U}(1)$ .
- (iv) La proyección  $\pi$  dado por el mapa de Hopf.
- (v) El grupo de Lie  $G \equiv \mathbf{U}(1)$  con una acción-d sobre  $S^3$ .
- (vi) Un cubrimiento de  $S^2$  dado por  $\{U_S, U_N\}$ , (se prefiere en este caso el cubrimiento definido por (3.25 y (3.26) al definido para la proyección estereográfica  $\{U_S^*, U_N^*\}$ , ya que esto no produce perdida de generalidad y se gana uniformidad en la formulación).

$$\mathbf{P}_1 = (\{\mathbf{E} = S^3\}, \{\mathbf{M} = S^2\}, \{\mathbf{F} = \mathbf{U}(1)\}, \pi \text{ es el mapa de Hopf}). \quad (4.20)$$

Las funciones para las trivializaciones locales  $\phi_S$  y  $\phi_N$ , son los difeomorfismos siguientes

$$\phi_S^{-1} = \pi^{-1}(U_S) \longrightarrow U_S \times \mathbf{U}(1) \quad (4.21)$$

$$(z^0, z^1) \longmapsto \left( \frac{z^0}{z^1}, \frac{z^1}{|z^1|} \right) \quad (4.22)$$

$$\phi_N^{-1} = \pi^{-1}(U_N) \longrightarrow U_N \times \mathbf{U}(1) \quad (4.23)$$

$$(z^0, z^1) \longmapsto \left( \frac{z^1}{z^0}, \frac{z^0}{|z^0|} \right). \quad (4.24)$$

funciones que están bien definidas en cada carta, ya que  $z^0 \neq 0$  en  $U_N$ , de aquí  $z^1/z^0$  y  $z^0/|z^0|$  no son singulares, idénticamente para  $z^1 \neq 0$  en  $U_S$ .

En el ecuador si  $\zeta^3 = 0$ , entonces

$$|z^0| = |z^1| = 1/\sqrt{2}.$$

En conformidad con (4.22) y (4.24), las trivializaciones locales en el ecuador

$$\phi_S^{-1} : (z^0, z^1) \longmapsto \left( \frac{z^0}{z^1}, \sqrt{2}z^1 \right) \quad (4.25)$$

$$\phi_N^{-1} : (z^0, z^1) \longmapsto \left( \frac{z^1}{z^0}, \sqrt{2}z^0 \right). \quad (4.26)$$

(vii) La función de transición  $t_{NS} : U_S \cap U_N \longrightarrow \mathbf{U}(1)$ , como

$$\phi_S(p, f) = \phi_N(p, t_{NS}(p)f) \quad (4.27)$$

con  $p \in U_S \cap U_N$  y  $f \in \mathbf{U}(1)$ , entonces

$$t_{NS}(\zeta) \equiv \phi_{N,\zeta}^{-1} \circ \phi_{S,\zeta} : F \longrightarrow F \quad (4.28)$$

$$\left(\frac{z^0}{z^1}, \sqrt{2}z^1\right) \longmapsto \left(\frac{z^1}{z^0}, \sqrt{2}z^0\right) \quad (4.29)$$

quedando que

$$t_{NS}(\zeta) = \frac{\sqrt{2}z^0}{\sqrt{2}z^1} = \zeta^1 + i\zeta^2 \in \mathbf{U}(1). \quad (4.30)$$

aquí  $\zeta^3 = 0$ , puesto que nos encontramos en  $U_S \cap U_N$  y por lo tanto  $(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 = 1$  es un círculo unitario isomórfico a  $U(1)$ .

Es posible una interpretación distinta del mapa de Hopf, para esto se define a  $S^3$  como la 1-esfera compleja

$$S_{\mathbb{C}}^1 = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1\}.$$

y el mapa de proyección homotópica por

$$\begin{aligned} \pi^* & : S_{\mathbb{C}}^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ (z^0, z^1) & \longmapsto [(z^0, z^1)] = \{\lambda(z^0, z^1) \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}. \end{aligned}$$

Bajo este mapa, los puntos de  $S^3$  de la forma  $\lambda(z^0, z^1)$ ,  $|\lambda| = 1$  son mapeados a un solo punto de  $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ .

Por lo tanto

$$\pi^* = \pi : S^3 \longrightarrow S^2$$

obtenido anteriormente ec. (4.13).

Al circunnavegar el ecuador, la función de transición (4.30) recorre el círculo unitario en el plano complejo una vez, por tanto el mapa fibrado de  $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$  caracteriza la clase de homotopía  $\Pi_1(\mathbf{P}_1) = \mathbb{Z}$  que es el número de vueltas que se da al ecuador. Este fibrado es llamado el monopolo de Hopf, así el espacio fibrado  $\mathbf{P}_1$  es un fibrado principal con espacio base  $S^2$  y grupo de estructura dado por la acción de la función  $t_{NS}(\zeta) \in \mathbf{U}(1)$ , sobre la fibra típica  $\cong \mathbf{U}(1)$ , por ello se afirma que  $S^3$  es equivalente localmente a  $\mathbf{P}_1$ , más no globalmente, ya que tiene grupo fundamental diferente ( $\Pi_1(S^3) = e$ ).

## 4.4. El fibrado de Hopf y el Monopolo de Wu-Yang.

Para encontrar la conexión y la curvatura del fibrado seguimos a [11], partimos de la proyección de Hopf definidas por la composición obtenida en las ecuaciones (4.5), de forma que, asociamos los ángulos esféricos  $(\theta, \phi)$  sobre  $S^2$  a  $Z \in \mathbb{C}$  según (4.16) por medio de la proyección estereográfica, en el hemisferio sur  $U_S$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \\ Z &= \frac{z^0}{z^1} \end{aligned}$$

igual para el hemisferio norte  $U_N$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \\ W &= \frac{z^1}{z^0} \end{aligned}$$

En la esfera unitaria  $S^2$  además se cumple

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \zeta^2 &= \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \zeta^3 &= \cos(\theta) \end{aligned} \tag{4.31}$$

así para  $Z = \rho \exp[i\varphi]$ , es

$$Z = \frac{\zeta^1 + i\zeta^2}{1 - \zeta^3} \tag{4.32}$$

quedando

$$\rho = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}.$$

Es posible escribir el elemento de línea de  $S^3$  como (vease [18])

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\bar{z}^0 dz^0 + d\bar{z}^1 dz^1) \\ ds^2 &= ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Podemos calcular la métrica de  $S^3$  inducida por la métrica euclídea en  $\mathbb{R}^4$ , para ello utilizaremos la representación espinorial de  $\mathbb{R}^4$

$$M = \begin{pmatrix} x^1 + ix^2 & x^3 + ix^4 \\ -x^3 + ix^4 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix}$$

Una rotación de un espinor se obtiene mediante la acción del grupo  $\mathbf{SU}(2)$ . Esta rotación puede describirse en función de los ángulos de Euler  $\vartheta, \phi, \chi$  dados en el rango  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \chi \leq 4\pi$  mediante [3]

$$\begin{aligned} x^1 &= \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right), & x^2 &= \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right), & u &= \phi + \chi \\ x^3 &= \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{v}{2}\right), & x^4 &= \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{v}{2}\right), & v &= \chi - \phi. \end{aligned} \quad (4.34)$$

y la rotación en  $\mathbb{C}^2$  es

$$\begin{aligned} z^0 &= e^{\frac{1}{2}i(\chi+\phi)} \cos(\vartheta/2) \\ z^1 &= e^{\frac{1}{2}i(\chi-\phi)} \sin(\vartheta/2) \end{aligned} \quad (4.35)$$

La métrica en  $S^3$  inducida por la métrica euclídea de  $\mathbb{R}^4$  es

$$ds_{S^3}^2 = \frac{1}{4}(d\vartheta^2 + d\phi^2 + d\chi^2 + 2 \cos(\vartheta)d\phi d\chi). \quad (4.36)$$

este es el elemento de línea del fibrado de Hopf en la representación de los ángulos de Euler.

Como  $d\phi^2 = (\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta))d\phi^2$  y descomponiendo en forma única a este elemento (4.36), como el elemento de línea de  $S^2$  y el cuadrado tensorial de la 1-forma  $\omega$

$$ds_{S^2 \times \mathbf{U}(1)}^2 = \frac{1}{4}(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\phi^2) + \frac{1}{4}\omega^2 \quad (4.37)$$

aquí, el término

$$\frac{1}{4} [d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\phi^2] \quad (4.38)$$

es el elemento de línea en  $S^2$  y  $\frac{1}{4}\omega^2$  el elemento de línea sobre la fibra  $\mathbf{U}(1)$ , se tiene

$$\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}(d\chi + \cos(\vartheta)d\phi) \quad (4.39)$$

que se identifica con la conexión sobre el fibrado  $S^2 \times \mathbf{U}(1)$  en la representación de los ángulos de Euler, se define ahora la conexión local de Hopf por

$$\tilde{A} = (1/2)\omega.$$

Es fácil persuadirse de que (4.38) es el elemento de línea en la fibración de Hopf correspondiente al propio en la proyección sobre la esfera  $S^2$ , si calculamos la equivalencia de los ángulos de Euler  $\vartheta, \phi, \chi$  con los ángulos polares esféricos  $\theta, \varphi$  por medio del mapa de Hopf (4.14), al sustituir en estas ecuaciones los valores de parametrización encontrados en (4.34) se obtiene

$$\begin{aligned}\sin \theta \cos \varphi &= \sin \vartheta \sin \chi \\ \sin \theta \sin \varphi &= \sin \vartheta \cos \phi \\ \cos \theta &= \cos \vartheta\end{aligned}$$

esta correlación mixta entre los ángulos, es posible aclararla al momento de practicar un corte de  $S^3$ , de donde se obtiene por consiguiente una esfera  $S^2$ , entonces hacemos una sección de la forma  $\chi = \phi$ , las ecuaciones (4.34) quedan

$$\begin{aligned}x^1 &= \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos \phi \\ x^2 &= \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \sin \phi \\ x^3 &= 0 \\ x^4 &= \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\end{aligned}$$

esto dice que el corte se hace por la coordenada  $x^3$ , entonces identificamos  $x^1 = \zeta^1$ ,  $x^2 = \zeta^2$ ,  $x^4 = \zeta^3$  y  $\phi = \varphi$ ,  $\frac{1}{2}\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$ , el ángulo azimutal  $\theta$  corresponde a la mitad del ángulo  $\vartheta$  de Euler y desfasado en  $\pi/2$  (medido como la mitad de la ascension recta). Por otro lado, el elemento de línea sobre  $S^2$  para  $\chi = \phi$ , se expresa en la forma

$$\frac{1}{4} (d\vartheta^2 + 2(1 + \cos \vartheta) d\phi^2)$$

al sustituir por los ángulos polares equivalentes, queda

$$\frac{1}{4} ([d(\pi - 2\theta)]^2 + 2[1 + \cos(\pi - 2\theta)]d\phi^2)$$

al simplificar se obtiene

$$ds_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2$$

que es la métrica esperada sobre la esfera  $S^2$ , queda entonces claro la separación de la métrica de  $S^3$  dada por la ecuación (4.37).

Para obtener, la conexión de Hopf sobre  $S^2$ , considere de nuevo el cubrimiento de  $S^2$  ya definido  $\{U_S, U_N\}$  y la sección local de  $U_S$  para la cual se hace  $\chi = \phi$ , en esta sección se tiene que

$$\hat{z}^0 = x^1 + ix_{\chi=\varphi}^2 \quad \text{y} \quad \hat{z}^1 = x^3 + ix_{\chi=\varphi}^4$$

ahora las ecuaciones (4.35) quedan

$$\hat{z}^0 = e^{i\varphi} \cos(\vartheta/2), \quad \hat{z}^1 = \sin(\vartheta/2) \quad (4.40)$$

y por tanto, la 1-forma conexión de Hopf

$$\tilde{A}_S = \frac{1}{2}(1 + \cos(\vartheta))d\phi. \quad (4.41)$$

que es regular en  $U_S$ .

Ahora se considera en cambio, la sección local  $U_N$  sobre  $S^2$ , en donde  $\chi = -\phi$ , al igual que lo anterior

$$\tilde{z}^0 = \cos(\vartheta/2), \quad \tilde{z}^1 = e^{-i\phi} \sin(\vartheta/2), \quad (4.42)$$

se obtiene la conexión para el hemisferio norte de  $S^2$

$$\tilde{A}_N = \frac{1}{2}(-1 + \cos(\vartheta))d\phi \quad (4.43)$$

regular en  $U_N$ .

En la region de intersección  $E = U_S \cap U_N$ , la condición de compatibilidad viene dada por la función de transición actuando en las fibras,

$$(\tilde{z}^0, \tilde{z}^1)_N = (e^{-i\phi} \hat{z}^0, e^{-i\phi} \hat{z}^1)_S \quad (4.44)$$

de acuerdo con la acción de  $\mathbf{U}(1)$  sobre  $S^2$ , restando las ecuación (4.41) de la (4.43) se obtiene

$$\tilde{A}_S = \tilde{A}_N + d\phi \quad (4.45)$$

La curvatura 2-forma  $\Omega$  definida en el fibrado por

$$\Omega_{\theta\varphi} = \partial_{\vartheta}A_{\phi} - \partial_{\phi}A_{\vartheta} + [A_{\vartheta}, A_{\phi}]$$

se obtiene de hecho, al hacer el cálculo para  $A_{\phi}$  dada por (4.41) y (4.43), con  $A_{\vartheta} = 0$ , queda

$$\Omega = \frac{1}{2} \sin(\vartheta) d\phi \wedge d\vartheta. \quad (4.46)$$

Llamaremos monopolo de Hopf a las conexiones dadas por las ecuaciones (4.41), (4.43) en el fibrado de Hopf  $\mathbf{P}_1$

$$\tilde{A}_S = \frac{1}{2}(1 + \cos(\vartheta))d\phi \quad \tilde{A}_N = \frac{1}{2}(-1 + \cos(\vartheta))d\phi$$

al comparar los resultados para las conexiones con aquellas del fibrado de Dirac-Wu-Yang (3.36) :

$$\mathcal{A}_N = i m(1 - \cos \theta)d\varphi \quad \mathcal{A}_S = -i m(1 + \cos \theta)d\varphi$$

queda en evidencia que el monopolo geométrico de Hopf, representa al monopolo de Dirac-Wu-Yang con carga  $g= 1/2$  y  $n = 1$ , este es el monopolo de carga unitaria.

Si comparamos las condiciones de compatibilidad en ambos casos, ecuaciones (3.44) y (4.45) se llega a las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S &= i\tilde{A}_S \longrightarrow i\mathcal{A}_N = -\tilde{A}_N \\ \mathcal{A}_N &= i\tilde{A}_N \longrightarrow i\mathcal{A}_S = -\tilde{A}_S \end{aligned}$$

lo que dice que estas relaciones son iguales, salvo el término del álgebra de Lie. Además, las curvaturas (4.46) para las conexiones (4.41) y (4.43) resultan idénticas  $F = \Omega$ , con  $dF = d\Omega = 0$  y corresponden a las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

Por lo tanto se demuestra la equivalencia entre el Monopolo de Hopf con el Monopolo de Dirac-Wu-Yang.

# Capítulo 5

## El Monopolo de ‘t Hooft Polyakov

### 5.1. Ruptura espontánea de simetría

En 1974 G. 't Hooft y [4] y A. Polyakov [5], demostraron la existencia de soluciones estáticas de tipo monopolar y de energía finita a las ecuaciones de campo Yang-Mill acoplado con un conjunto de tres campos escalares (vector del grupo) con grupo de calibre  $\mathbf{SO}(3)$ .

El lagrangiano de esta teoría viene dado por el modelo de Georgi-Glashow (siguiendo a [9] y [7] con carga eléctrica  $e = 1$ )

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^a \cdot D_\mu\phi^a - V(\phi), \quad a = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \varepsilon^{aij}A_\mu^i A_\nu^j \quad (5.2)$$

donde  $D_\mu$  es la derivada covariante (ver ec.3.1) para  $\phi$  el potencial del campo escalar, donde se ha tomado la representación adjunta de los generadores del álgebra de  $\mathbf{SO}(3)$ , es decir la representación (adjunta) en término de las funciones de estructura de los generadores:  $T^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{iaj}$

$$D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a - \varepsilon^{aij}A_\mu^i\phi^j \quad (5.3)$$

y  $V(\phi)$  es el potencial tipo sombrero mexicano:

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^a\phi^a - v^2)^2 \quad (5.4)$$

El modelo de Georgi-Glashow está formulado sobre un fibrado asociado  $(\mathbb{R}^4, \mathbf{SO}(3), \mathbf{F}_2 = \{\phi^a = \pi_2^{-1}\})$ , con base en el espacio tiempo, grupo de estructura  $\mathbf{SO}(3)$ , la fibra asociada formada por los campos *escalares* y la conexión definida por los campos de Yang Mills.

En estas ecuaciones el campo de calibre  $\mathcal{F}$  esta en interacción con el campo  $\phi$ , interesan precisamente, aquellos valores de  $\phi$  que minimizan el potencial  $V(\phi)$ . Se obtiene como conjunto solución para  $V(\phi) = 0$  a la 2-esfera de potencial que se denomina variedad de vacío  $\mathbf{m}_0 \equiv S^2$ :

$$\mathbf{m}_0 = \{(\phi_0^1)^2 + (\phi_0^2)^2 + (\phi_0^3)^2 = v^2\} \quad (5.5)$$

Por otro lado la energía de esta configuración

$$E = \int [\frac{1}{2} |F|^2 + \frac{1}{2} |D\phi|^2 + V(\phi)] d^3r. \quad (5.6)$$

converge si para  $r \rightarrow \infty$ ,  $V(\phi) \rightarrow 0$  ([9] y [8]), esto implica que

$$|\phi_\infty^a| \rightarrow v \equiv \text{const.} \quad (5.7)$$

es decir, para  $r = \left(\sum_{i=1}^3 (x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$ , la función escalar  $\phi(r)$  se aproxima a valores en  $\mathbf{m}_0$ , de donde se concluye que, en el infinito espacial  $\mathbf{m}_\infty$  tiene la misma topología que el conjunto  $\mathbf{m}_0$  y resulta entonces que  $\phi(\mathbf{m}_\infty) \in \phi(\mathbf{m}_0)$ , o sea, una aplicación de  $S^2 \rightarrow S^2$ , esto implica que podemos mapear cada punto de  $S^2$  de  $\phi_\infty^a$  al punto correspondiente en  $S^2$  de  $\mathbf{m}_0$ .

$$\phi^a = v \cdot \frac{x^a}{r}. \quad (5.8)$$

Esta aplicación puede deformarse continuamente en el mapa de la configuración de vacío, donde todo  $S^2$  se mapea a un punto dado por el estado fundamental. Se puede escoger [7].

$$\phi_\infty^a = (0, 0, v) \quad (5.9)$$

Al tomar el límite al infinito de la solución de vacío, la fibra asociada se trivializa, quedando la estructura topologica de un fibrado principal, con espacio base la variedad de vacío  $\mathbf{m}_\infty \simeq S^2$ , con fibra y grupo de estructura

(para  $r \rightarrow \infty$ ) un subgrupo  $\mathbf{SO}(3)$ , conocido como el pequeño grupo  $\mathbf{H}$ , el cual consiste de los elementos de  $\mathbf{SO}(3)$ , que dado un  $\phi_\infty^a$  lo dejan invariante, este es el grupo de rotaciones entorno al eje  $(0, 0, v)$ , es decir  $\mathbf{H} \simeq \mathbf{SO}(2)$  el grupo de rotaciones en 2 dimensiones. Como  $\mathbf{SO}(2) \simeq \mathbf{U}(1)$  el fibrado principal es solamente una teoría Yang Mills con grupo de estructura  $\mathbf{U}(1)$ , es decir  $\mathbf{P}(S^2, \mathbf{U}(1))$  que es el fibrado (3.47) del monopolo de Dirac-Wu-Yang.

La variedad de vacío  $\mathbf{m}_0$  también puede obtenerse de manera geométrica como la variedad cociente [19] del grupo original  $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(3)$  con el subgrupo  $\mathbf{H} = \mathbf{U}(1)$  que queda al romper la simetría por la escogencia de una solución minimal ( $\phi_\infty^a$ ) que trivializa la fibra asociada. En este caso  $\mathbf{m}_0 = \frac{\mathbf{SO}(3)}{\mathbf{U}(1)}$ , teniendo en cuenta las identidades [3] de los grupos  $\frac{\mathbf{SO}(n+1)}{\mathbf{SO}(n)} \simeq S^n$ , se obtiene directamente  $\mathbf{m}_0 = S^2$ .

## 5.2. Solución de ‘t Hooft y Polyakov

Para obtener el monopolo, ‘t Hooft y Polyakov [4], [5] propusieron una solución a la ecuaciones de campo para el Lagrangiano de Georgi-Glashow (5.1) estática y esféricamente simétrica, en donde se expresa el potencial escalar  $\phi$  como una función  $f$  de: la carga eléctrica  $e = 1$ , el valor del campo escalar en el vacío  $v$  y la distancia radial al centro de la esfera  $r$ .

$$\phi_a = \frac{x^a}{r^2} f(v.r) \quad (5.10)$$

y el potencial  $\mathcal{A}$  en términos de  $T_a$ , las matrices generadoras del grupo y una función  $h$  del valor del campo escalar en el vacío  $v$  y la distancia radial al centro de la esfera  $r$ .

$$A_a^i = \frac{1 - h(v.r)}{r^2} (T_a)_j^i x^j dx^i, \quad A_a^0 = 0 \quad (5.11)$$

con

$$(T_a)_j^i = -\varepsilon_{aij}, \quad a, i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (5.12)$$

la forma de estas expresiones están justificadas ya que de (5.8) es  $\phi^a \propto \hat{r}^a$ , de aquí y del requerimiento de energía finita, esto es  $\mathbf{d}_\mu \phi_a = 0$ , válido hasta un orden de  $r^{-2}$  para  $\phi_a$ , implica la forma asintótica del campo de calibre, i.e.  $A_a^i \propto \varepsilon_{aij} \hat{r}_j$ . Las funciones  $f$  y  $h$  son adimensionales y poseen simetría radial.

Usando las soluciones dadas por (5.10) y (5.11), que son independientes del tiempo, al introducirlas en (5.6), la energía del sistema es ahora [10]

$$E = 4\pi v \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} \left[ \tau^2 \left( \frac{dh}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \tau \frac{df}{d\tau} - f \right)^2 + \frac{1}{2} (h^2 - 1)^2 + h^2 f^2 + \frac{\lambda}{4} (f^2 - \tau^2)^2 \right] \quad (5.13)$$

en donde se ha hecho el cambio de variables  $\tau = v.r$  y haciendo uso de la simetría esférica se obtiene el elemento de volumen  $d^3r = 4\pi r^2 dr$ . La condición para que  $E$  sea estacionaria con respecto a las variaciones de  $f$  y  $h$  se obtienen de (5.13) se obtiene:

$$2 \frac{dh}{d\tau} \frac{d^2h}{d\tau^2} + \left[ \frac{2}{\tau^2} (h^2 - 1) h + \frac{2hf^2}{\tau^2} \right] \frac{dh}{d\tau} = 0 \quad (5.14)$$

$$\left( \frac{df}{d\tau} - 2 \frac{f}{\tau} \right) \frac{d^2f}{d\tau^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{df}{d\tau} \right)^2 + \frac{df}{d\tau} \left[ \frac{4f}{\tau^2} + \frac{2h^2f}{\tau^2} + \frac{\lambda f^3}{\tau^2} - 4f \right] = 0 \quad (5.15)$$

que son equivalentes a resolver las ecuaciones de campo, al simplificar

$$\tau^2 \frac{d^2h}{d\tau^2} = hf^2 + h(h^2 - 1) \quad (5.16)$$

$$\tau^2 \frac{d^2f}{d\tau^2} = 2h^2f + \lambda.f(f^2 - \tau^2). \quad (5.17)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para condiciones asintóticas de contorno:

$$\begin{aligned} h(\tau) &\longrightarrow 0, & \tau &\longrightarrow \infty \\ h(0) &= 1, & f(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

y se encuentra que

$$\begin{aligned} h(\tau) &\longrightarrow e^{-\tau} \cong e^{-v.r} \\ f(\tau) - \tau &\longrightarrow e^{-\mu\tau/v} \cong e^{-\mu r} \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde  $\mu = (2\lambda)^{\frac{1}{2}} v$ . Tomando el límite cuando para  $\tau \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} h(\tau) &\longrightarrow 1 + \frac{1}{v^2} \tau^2 \\ f(\tau) &\longrightarrow \frac{1}{v^2} \tau^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

en particular la ecuación (5.20) demuestra que los campos  $A$  y  $\phi$  no son singulares en el origen.

Para encontrar la relación entre el monopolo de 't Hooft-Polyakov y el de Dirac, realizamos la siguiente transformación de calibre (3.2)

$$A \longrightarrow A' = \gamma^{-1}A\gamma + \gamma^{-1}d\gamma \quad (5.21)$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \gamma\phi \quad (5.22)$$

donde  $\gamma$  es una matriz de rotaciones valuada en  $\mathbf{SO}(3)$ , aquí,  $\theta$  y  $\varphi$  son las coordenadas sobre la esfera.

Se rota el campo escalar, el cual inicialmente señalaba en una dirección radial cualquiera (5.8), y se lleva a una dirección paralela al eje  $x^3$ (5.9), de forma tal que el campo  $A'$  rotado tiene coordenadas.

$$\begin{aligned} e\phi'^i &= \delta_{i3}f(r)/r, \\ A'^1 &= -h(r)(\sin\varphi d\theta + \cos\varphi \sin\theta d\varphi), \\ A'^2 &= h(r)(\cos\varphi d\theta - \sin\varphi \sin\theta d\varphi), \\ A'^3 &= -(1 - \cos\theta)d\varphi. \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde las funciones  $\gamma$  y  $A'^3$  son singulares a lo largo del eje  $x^3$  negativo. Como  $r \longrightarrow \infty$  por la condición de borde impuesta  $h$  se desvanece exponencialmente, y solo la tercera componente del campo de calibre sobrevive [7].

Comparando este potencial (ecuación(5.23))

$$-(1 - \cos\theta)d\varphi$$

con el potencial del monopolo de Dirac (3.33) y (3.36) y usando  $m = n/2$ , ver (3.40)

$$-\frac{n}{2}(1 - \cos\theta)d\varphi,$$

Concluimos que: el monopolo de Dirac con  $n = 2$  es el límite asintótico del monopolo de 't Hooft-Polyakov. Por lo tanto, el monopolo de 't Hooft - Polyakov, para distancias cortas, mantiene todo el campo excitado, originando una solución simétrica de energía finita  $\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)$  de mayor

generalidad que el monopolo de Dirac, mientras que para grandes distancias, se rompe la simetría no abeliana de todos los campos excepto el del fotón y se obtiene una solución de unidad de carga magnética  $m = 1$  que corresponde a la del monopolo de Dirac con número cíclico no trivial  $n = 2$ .

El ansatz dado por 't Hooft y Polyakov permite obtener un monopolo con una estructura definida en función del radio  $r$ . Para grandes distancias, esta estructura se desvanece dejando una configuración de campo sin distinción al del monopolo de Dirac. Además, tiene una estructura interna suave que satisface las ecuaciones de la teoría de calibre  $\mathbf{SO}(3)$  del monopolo de 't Hooft - Polyakov, en contraste al monopolo de Dirac, por lo tanto no se necesita introducir cuerdas singulares.

# Capítulo 6

## Monopolos de Membranas

### 6.1. Mapas de membranas.

La teoría de membranas es una teoría de calibre que representa las interacciones entre partículas mediante campos vectoriales definidos para objetos extendidos llamados 2-branas. Estas *membranas* son variedades diferenciales son 2-superficies (a tiempo constante) cuya evolución temporal esta descrita por los mapas de coordenadas desde el espacios de parámetros (2+1)dimensional al espacio tiempo  $d$ -dimensional.

En la figura (6.1) se muestra el mapa de la membrana:

$$\begin{aligned} X^\mu & : \Sigma_3 \longrightarrow M \\ X^\mu(\sigma_a, \tau) & = (X^1(\sigma_a, \tau), \dots, X^d(\sigma_a, \tau)) \end{aligned}$$

donde:

- La variedad base  $\Sigma_3$ , que es el espacio de los parámetros  $(\sigma_1, \sigma_2, \tau)$ .
- La variedad base  $\Sigma_2$  que es una foliación de  $\Sigma_3$  en secciones 2-dimensionales a tiempo  $\tau$  constante.
- La variedad de llegada  $\mathbf{V}$ , que es la imagen de  $\Sigma_3$  por el mapa  $X^\mu(\sigma_a, \tau)$  es 3-dimensional y está inmersa en  $M$  Minkoski  $d$ -dim.
- La 2-superficie  $\mathbf{S}$  que es la imagen de  $\Sigma_2$  por el mapa  $X^\mu(\sigma_a, \tau = cte)$ , donde  $\mu = 0, \dots, d$ .

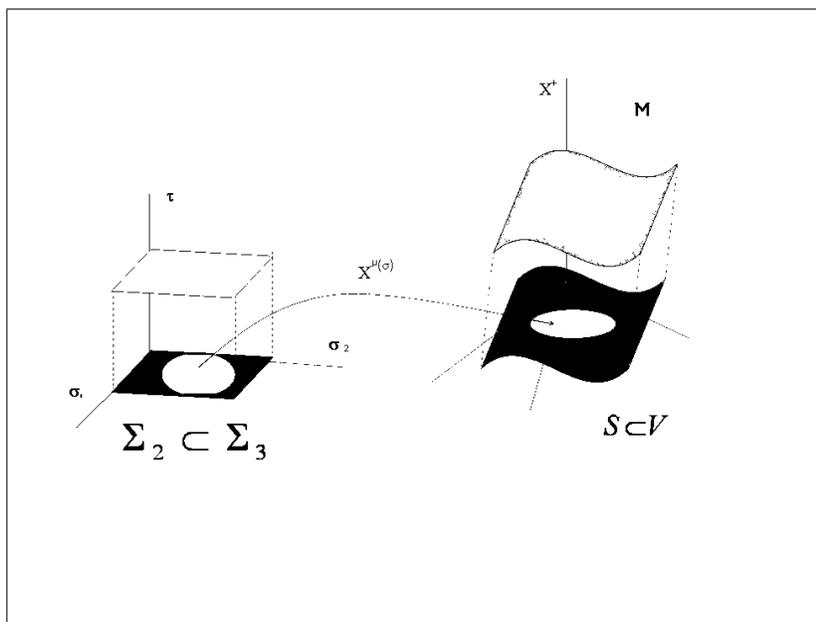


Figura 6.1: Mapa de la membrana bosónica

Identificando el tiempo del espacio base  $\tau$  con el tiempo de Minkowski tendremos una 2-superficie  $\mathbf{S}$  proveniente de la foliación del espacio base a tiempo constante ( $\Sigma_2$ ) es decir localmente estos mapas  $X^\mu(\sigma, \tau)$  son uno a uno y asignan para cada punto sobre la superficie base  $\Sigma_2$  un punto en la superficie  $\mathbf{S}$ .

La estructura topológica general de la membrana. es el fibrado principal

$$\mathbf{P}_{3brana} \equiv (\Sigma_3, V \subset M^d, \pi = X^{-1}, Diff(3)) \quad (6.1)$$

en donde  $\Sigma_3$  es la variedad base, la fibra  $V$  es el volumen mundo inmerso en  $M^d$  minkowski en d-dimensiones,  $\pi$  es la proyección o mapa fibrado y  $X^\mu$  es un conjunto de campos (escalares en  $\Sigma_3$  y vectoriales en  $M^d$ ) que constituyen una sección local, el grupo de Lie  $Diff(3) = G$  son los difeomorfismos en 3 dimensiones, bajo el cual la acción y las ecuaciones de movimiento son invariantes.

En este trabajo se consideran dos casos de membranas bosónicas estacionarias, con  $\Sigma_2$  una superficie de Riemann cerrada bidimensional (a tiempo

constante): la membrana compactificada sobre el toro ( $\mathbf{S} = S^1 \times S^1$ ), o membrana toroidal y la membrana compactificada en una esfera ( $\mathbf{S} = S^2$ ). Fijar el calibre es escoger una sección del fibrado principal, i.e dar un mapa, existen campos que son el resultado de la aplicación del grupo sobre la misma fibra, estos campos redundantes están conectados por el grupo de estructura y de ellos solo se toma un representante. En este casos solo se fija parcialmente el calibre y la teoría formulada en la sección del fibrado, tiene aun, un subgrupo de invariancia llamado “calibre residual”.

Partimos de la acción de Poliakov de la membrana, definida por

$$I = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_3} d^2\sigma d\tau \sqrt{-g} (g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu - 1) \quad (6.2)$$

con  $i = 0, 1, 2$ , y  $g_{ij} = \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu$  la métrica inducida sobre el volumen mundo que esta inmerso en minkowski en las  $d$ -dimensiones  $\mu = 0, \dots, d-1$

Realizando variaciones sobre la acción (6.2) las ecuaciones de movimiento son:

$$\partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j X_\mu) = 0 \quad (6.3)$$

y se obtienen los vinculos en la formulación lagrangiana:

$$\partial_0 X^\mu \partial_a X_\mu = 0 \quad (6.4)$$

$$[\partial_0 X^\mu]^2 + \gamma = 0 \quad (6.5)$$

donde  $\gamma = \det[\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu]$ , es el determinante de la matriz menor correspondiente a  $g_{oo}$  y donde  $a, b = 1, 2$ .

Es sabido que está acción es invariante bajo reparametrizaciones en 3 dimensiones generadas por estos vínculos y por lo tanto admite 3 fijaciones locales de calibre:

$$X^0 = \tau \quad (6.6)$$

$$g_{oa} = 0 \quad (6.7)$$

La fijación (6.6) corresponde a la fijación de una condición no covariante que permite foliar el espacio tiempo en  $\Sigma_3 = \mathbb{R} \times \Sigma_2$  (al menos localmente y es llamado el calibre sincrónico[15] donde el espacio tiempo se descompone en

coordenadas temporal y el sector transverso a estas, es decir  $X^\mu = (X^0, X^I)$  donde  $I = 1, 2, \dots, d-1$ .

Las ecuaciones de movimiento (6.3) para el sector transverso (usando las fijaciones de calibre (6.6) y (6.7)) se pueden obtener a partir de la densidad lagrangeana transversa [15],[21]:

$$L_T = \frac{1}{2}[\partial_0 X^I]^2 - \frac{1}{2} \det[\partial_b X^I, \partial_a X_I]$$

que puede escribirse como :

$$L_T = \frac{1}{2}[\partial_0 X^I]^2 - \frac{1}{4}\{X^I, X^J\}_{lb}\{X^I, X^J\}_{lb} \quad (6.8)$$

donde se utilizan los corchetes de Lie definidos como:  $\{A, B\}_{lb} = \epsilon^{ab} \partial_a A \cdot \partial_b B$ .

En la formulaci3n ADM [23], se introducen las funciones  $\epsilon^a$ , que son multiplicadores de Lagrange asociados a los v3nculos (6.4) que generan los difeomorfismos en dos dimensiones espaciales y  $N$  es el multiplicador de lagrange asociado al v3nculo hamiltoniano (6.5). La fijaci3n de calibre (6.6) determina completamente el valor de  $N$ , sin embargo las fijaciones (6.7) no determinan completamente  $\epsilon^a$ . De hecho unicamente determinan que [16]

$$\epsilon^a = \epsilon^{ab} \partial_b \lambda(\sigma_1, \sigma_2)$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de lagrange (en 2 dimensiones) que corresponde al v3nculo

$$T = \epsilon^{ab} P_a^I X_b^I$$

que es un generador de difeomorfismos que preservan 3rea, sobre la superficie de 2 dim  $\mathbf{S}$  que es isomorfica a  $\Sigma_2$

El lagrangeano transverso (6.8) es equivalente a una acci3n de Yang Mills (3.10), que en forma tensorial es:

$$L_T = -\frac{1}{4}(\mathbb{F}^{\mu\nu}\mathbb{F}_{\mu\nu}) \quad (6.9)$$

donde el tensor  $\mathbb{F}_{\mu\nu}$  se define como

$$\mathbb{F}_{0I} = \partial_0 X^I \quad \text{y} \quad \mathbb{F}_{KI} = \{X^K, X^J\}_{lb} \quad (6.10)$$

que representa un tipo de especial de 2-tensor de las membranas que es muy semejante a Yang Mills..

Observe que (6.10) corresponde a la definición (5.2) de la 2-forma  $\mathcal{F}$  de Yang Mills sobre la membrana  $\mathbf{S}$ :

$$I_{YM} = -\frac{1}{4} \int_{\mathbf{S}} tr(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \quad (6.11)$$

$$= \frac{1}{2} tr\{[\partial_0 A^I + [A_0, A^I]]^2\} - \frac{1}{4} \{ tr(F_{KI} F_{KI}) \} \quad (6.12)$$

donde la 1-forma de conexión es:  $A = A_\nu dX^\nu$ , está valuada en el álgebra del grupo y en el cotangente de un fibrado principal de Yang Mills.

Las relaciones entre los tensores son:

$$F_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j + f^{jim} A_\mu^i A_\nu^m \quad (6.13)$$

$$A_\mu = A_\mu^j T_j \quad (6.14)$$

donde  $f^{jim}$  son las constantes de estructura y  $T_j$  son los generadores del álgebra de Lie con  $tr(T_i T_j) = -\delta_{ij}$

Al imponer la condición de fijación del calibre de Coulomb,

$$A_0 = 0$$

las ecuaciones anteriores se simplifican a:

$$F_{0I} = \partial_0 A_I \quad \text{y} \quad F_{IK} = \partial_I A_K - \partial_K A_I + [A_K, A_I] \quad (6.15)$$

donde  $[A, B]$  es el conmutador usual del álgebra de Lie del grupo de calibre.

Se obtiene una equivalencia entre las acciones de membranas (6.9) y Yang Mills (6.11) a nivel de los tensores, cuando

$$tr[(F_{0I})^2] = [\partial_0 X^I]^2 \quad \text{y} \quad tr(F_{KI} F_{KI}) = (\{X^K, X^I\}_{lb})^2$$

estas relaciones deben ser interpretadas como ecuaciones que definen la conexión en función de las coordenadas de la membrana, es decir de una teoría de Yang Mills valuada sobre la membrana.

Consideraremos solo los casos estacionarios, en los cuales las derivadas temporales desaparecen y en los lagrangeanos (6.8) y (6.11) se identifican, con lo cual las ecuaciones de la conexión en función de los campos de la membrana son:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{0I} &= F_{0I} = 0 \text{ es decir } \partial_0 A_I^a = \partial_0 X^I = 0 \\ \mathbb{F}_{KI} \mathbb{F}_{KI} &= F_{KI}^j F_{KI}^j \\ (\{X^K, X^I\}_{lb})^2 &= (\partial_I A_K^j - \partial_K A_I^j + f^{jim} A_K^i A_I^m)^2 \end{aligned}$$

donde se han utilizado las ec. (6.13), (6.14) y (6.10).

La acción para el caso estacionario se reduce a un potencial efectivo para la membrana

$$I_T = -\frac{1}{4} \int_{\Sigma_2} \{X^K, X^L\}_{lb} \{X^K, X^L\}_{lb} d\sigma^1 d\sigma^2 = V(X) \quad (6.16)$$

$$V(X) = \frac{1}{4} \int_{\Sigma_2} (\epsilon^{ab} \partial_a X^K \partial_b X^L)^2 d\sigma^1 d\sigma^2 \quad (6.17)$$

y resolver las ecuaciones de movimiento para el caso estacionario equivale a minimizar el potencial efectivo (acción).

Cuando se realiza un pullback de la membrana  $S$  hacia la variedad de base  $\Sigma_2$ , la acción de Yang Mills equivalente a la membrana para el caso estacionario en el calibre de coulomb se puede escribir

$$I_{YM} = -\frac{1}{4} \int_{\mathbf{S}} \text{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) = -\frac{1}{4} \int_{\Sigma_2} F_{KL}^j F_{KL}^j d\sigma^1 d\sigma^2 \quad (6.18)$$

donde  $K, L = 1, \dots, d-1$  denota las coordenadas locales en el espacio base bidimensional  $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$  (a tiempo constante)

Hay dos casos de particular interes:

1. Cuando el grupo es abeliano, en cuyo caso  $f^{jim} = 0$  e identificamos

$$(\{X^K, X^I\}_{lb})^2 = (\partial_I A_K^j - \partial_K A_I^j)^2 = (dA)^2$$

que es un campo tipo electromagnético usual. Esto no implica identificar  $X$  con  $A$ , en realidad es una ecuación para la conexión  $A$ , sobre un fibrado de YM abeliano equivalente a la membrana.

2. Cuando se realiza una compactificación dimensional como en [12] y [22]  $\partial_I A_K^j = \partial_I X_K = 0$  para  $I > 2$ , de forma tal que la membrana se enrolle sobre  $\mathbf{S}$ . En ese se considera  $\partial_a A_b^j - \partial_b A_a^j = \partial_a X_b - \partial_b X_a = 0$  e identificamos el corchete de Lie con el conmutador

$$(\{X^a, X^b\}_{lb})^2 = ([A_a, A_b])^2 = (f^{jim} A_a^i A_b^m)^2 \quad \text{donde } a, b = 1, 2$$

## 6.2. Monopolos de membranas toroidales.

Se estudian las configuraciones minimales que corresponden a los estados estacionarios de la membrana, se procede primero a reducir la topología a la foliación a tiempo constante del fibrado (6.1), es decir superficies inmersas  $\mathbb{R}^d$  que corresponden a dimensiones espaciales. La teoría de membranas está descrita por un fibrado principal

$$\mathbf{P}_{toro} \equiv (\Sigma_2, \{\mathbf{S} = S^1 \times S^1\} \subset \mathbb{R}^d, \pi = X^{-1}, \mathbf{G} = \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)) \quad (6.19)$$

donde  $\Sigma_2$  es un Toro que constituye el espacio base,  $\mathbf{S} = S^1 \times S^1$  es la fibra, que viene determinada por la sección  $X : \Sigma_2 \rightarrow S^1 \times S^1$

$$X^K = (X^1(\sigma_1, \sigma_2), X^2(\sigma_1, \sigma_2)) \quad K, L = 1, 2 \quad (6.20)$$

donde  $X^1$  y  $X^2$  son coordenadas curvilíneas ortogonales directamente sobre el Toro, i.e. el tensor métrico en 2 dimensiones es  $\eta_{KL} = \delta_{KL}$ .

Las coordenadas  $(\sigma_1, \sigma_2)$  del espacio base  $\Sigma_2$  pueden identificarse sin pérdida de generalidad con los ángulos  $(\theta_1, \theta_2)$  en  $S^1 \times S^1$  del Toro, como muestra la figura (6.2).

$$(\sigma_1, \sigma_2) = (\theta_1, \theta_2) \quad (6.21)$$

Como la fibra  $S^1 \times S^1$  tiene como grupo de invariancia (que preservan áreas) a ella misma  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$ , tomaremos el grupo de estructura del fibrado  $G = \mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$  que es isomorfo a la fibra misma.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Excluyendo el grupo modular.

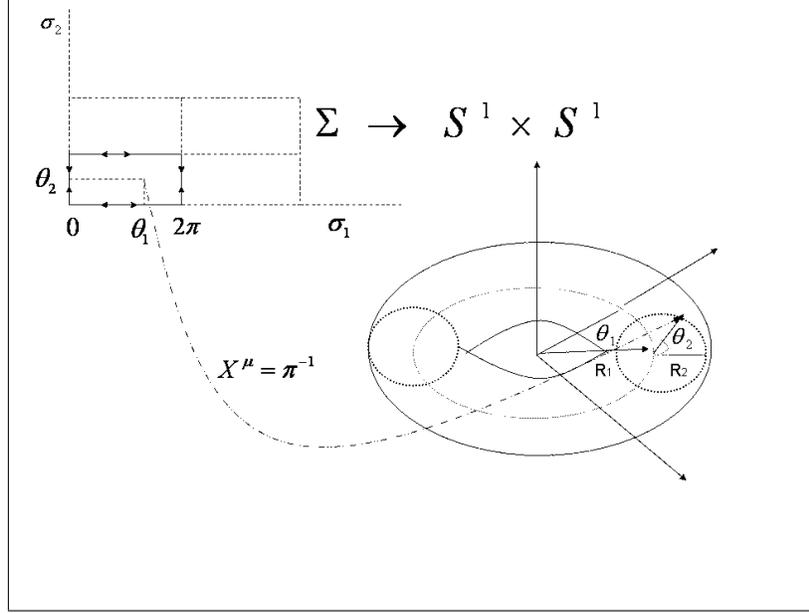


Figura 6.2: Mapa de la membrana toroidal

Tomando la sección biyectiva (6.20), la solución estacionaria de la membrana se obtiene al minimizar el potencial efectivo (6.17)

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_2} \left( \frac{1}{2} \epsilon^{rm} \partial_r X^K \partial_m X^L \right) \cdot (\partial_i X^K \partial_j X^L) \epsilon^{ij} d\sigma^1 d\sigma^2 \quad (6.22)$$

El potencial efectivo (acción transversa, estacionaria) se puede escribir como

$$I_{TE} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_2} *F^{KL} \cdot F^{KL} \quad (6.23)$$

donde se definen convenientemente la 2-forma

$$\begin{aligned} F^{KL} &= (\partial_i X^K \partial_j X^L) \frac{1}{2} \epsilon^{ij} d\sigma^1 d\sigma^2 = F_{ij}^{KL} d\sigma^i \wedge d\sigma^j \\ F_{ij}^{KL} &= \partial_i X^K \partial_j X^L \quad \text{donde } K, L = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

y la 0-forma mediante el dual de Hodge (cuando  $\sqrt{|\gamma|} = 1$  ver(6.5) ):

$$*\mathbb{F}^{KL} = \frac{1}{2} \epsilon^{lj} \mathbb{F}_{lj}^{KL} = \frac{1}{2} \epsilon^{rm} \partial_r X^K \partial_m X^L \quad (6.25)$$

NOTA

La definición usual del dual de Hodge incluye un factor  $\sqrt{\gamma}$  por lo tanto

$$*F^{KL} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \epsilon^{lj} F_{lj}^{KL},$$

para recuperar (6.22) se deben redefinir

$$*\tilde{F}^{KL} = \sqrt{\gamma}(*F^{KL}) \quad \text{y} \quad \tilde{F}^{KL} = \frac{\mathbb{F}^{KL}}{\sqrt{\gamma}} \quad (6.26)$$

Observe que la 2-forma se puede escribir como el producto exterior directo de 1-formas

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^{KL} &= (\partial_l X^K \partial_j X^L) d\sigma^l \wedge d\sigma^j \\ \mathbb{F}^{KL} &= (\partial_l X^K d\sigma^l) \wedge (\partial_j X^L d\sigma^j) \\ \mathbb{F}^{KL} &= dX^K \wedge dX^L \end{aligned} \quad (6.27)$$

La acción equivalente tipo Yang Mills (6.18), valuados sobre el toro, pueden escribir se

$$I_{YM} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{S}} tr(*\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \quad (6.28)$$

que representa una acción tipo Yang-Mills abeliano ( caso 1) equivalente con grupo de estructura  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$ . Observe que hasta el momento  $\mathbb{F}^{KL}$  es simplemente un tensor construido con las variables  $X^K$  es decir con las coordenadas de la membranas (6.20), mientras que una acción de Yang Mills equivalente requiere de una conexión  $\mathcal{A}$  valuada en al álgebra con un grupo de estructura abeliano entonces  $[\mathcal{A}_K, \mathcal{A}_L] = 0$ , por lo que el tensor de curvatura de una acción equivalente (6.15) de Yang Mills se reduce a:

$$\mathcal{F}_{KL} = \partial_L \mathcal{A}_K - \partial_K \mathcal{A}_L$$

Para obtener una equivalencia entre las formas en la acción (6.23) y la acción (6.28), definimos un conjunto de 1-formas de conexión, que representan

un conjunto de campos de calibre independientes, tal como se hizo en [12] (donde solo se usa  $\mathbf{G} = \mathbf{U}(1)$ )

$$\mathbb{A}^{KL} = X^K dX^L \quad \text{donde } K, L = 1, 2 \quad (6.29)$$

de forma tal que  $\mathbb{A}^{11} = \mathbb{A}^{22} = 0$  y  $\mathbb{A}^{12} = -\mathbb{A}^{21}$ .

Entonces como  $[T_i, T_j] = 0$  para el grupo abeliano  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$

$$\begin{aligned} d\mathbb{A}^{KL} &= d(X^K dX^L) = dX^K \wedge dX^L \\ d\mathbb{A}^{KL} &= (\partial_i X^K \partial_j X^L) d\sigma^i \wedge d\sigma^j \end{aligned}$$

que es consistente con las ecuaciones (6.24) cuando

$$\mathbb{F}^{KL} = d\mathbb{A}^{KL}$$

cuyas componentes tensoriales son  $\mathbb{F}_{ij}^{KL} = \partial_i X^K \partial_j X^L$ . Entonces podemos definir una 2-forma<sup>2</sup>

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} i \in_{KL} d\mathbb{A}^{KL} \quad (6.30)$$

que se puede interpretar como la conexión de una teoría de Yang Mills sobre  $S^1 \times S^1$ , y donde interpretamos el tensor antisimétrico con los generadores del grupo  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$

$$\begin{aligned} T^1 &= \frac{1}{2} i \in_{12} = i \\ T^2 &= \frac{1}{2} i \in_{21} = -i \end{aligned} \quad (6.31)$$

y donde  $T^0 = \frac{1}{2} i \in_{11} = T^4 = \frac{1}{2} i \in_{22} = 0$  representan la identidad del grupo.

Cada generador  $T$  introduce un factor imaginario, tal como ocurre con electromagnetismo  $\mathbf{U}(1)$  (ver ec.(3.3)), pero en este caso cada generador está asociado a un parámetro diferente que llamaremos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que cooresponden a los ángulos indicados en la figura (6.2).

Los elementos  $g$  de cada grupo  $\mathbf{U}(1)$  se obtienen mediante

$$\begin{aligned} g_1 &= \exp(i\theta_1) \\ g_2 &= \exp(i\theta_2) \end{aligned} \quad (6.32)$$

---

<sup>2</sup>En [12] no se obtiene esta 2-forma ni los generadores de  $U(1) \times U(1)$

Observe que la Identidad está contenida cuando  $\theta_1$  ó  $\theta_2$  son nulas (no se necesitan  $T^0$  ni  $T^4$ ) la representación es abeliana y corresponde a la acción del grupo en  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  donde el toro es representado por el par

$$(Z_1, Z_2) \text{ donde } \|Z_1\| = R_1 \text{ y } \|Z_2\| = R_2$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios correspondientes a cada uno de los  $S^1 \times S^1$  del toro.

La acción del grupo puede definirse en coordenadas  $X^1$  y  $X^2$  que corresponden al caso en que el mapa (6.20) es una transformación de escala:

$$\begin{aligned} X^1 &= R_1 \sigma_1 = R_1 \theta_1 \\ X^2 &= R_2 \sigma_2 = R_2 \theta_2 \end{aligned} \tag{6.33}$$

donde se utilizó la carta local (6.21).

En la representación  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  del toro:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 e^{i\beta_1} \\ Z_2 &= R_2 e^{i\beta_2} \end{aligned}$$

el grupo actúa mediante la realización del grupo  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$

$$g = g_1 \otimes g_2$$

de forma tal que el transformado es

$$(Z_1, Z_2)' = g_1 \otimes g_2 (Z_1, Z_2) = (g_1 \cdot Z_1, g_2 \cdot Z_2)$$

donde  $\cdot$  es el producto usual de  $\mathbb{C}$  de forma tal que

$$\begin{aligned} Z_1' &= Z_1 e^{i\beta_1} = R_1 e^{i(\theta_1 + \beta_1)} \\ Z_2' &= Z_2 e^{i\beta_2} = R_2 e^{i(\theta_2 + \beta_2)} \end{aligned}$$

A partir de la ec(6.33) y la definición de la conexión (6.29) se obtiene

$$\mathbb{A}^{12} = -\mathbb{A}^{21} = X^1 dX^2 = R_1 R_2 \theta_1 d\theta_2 \tag{6.34}$$

introduciendo los generadores y se puede calcular de forma explícita la 2-forma conexión de Yang Mills, que es el campo electromagnético  $\mathbf{U}(1) \times$

$\mathbf{U}(1)$  sobre el espacio base  $\Sigma$  (donde se hace uso de un pullback trivial de (6.33))

Si la membrana enrolla en forma irreducible, lo hace también en forma no trivial sobre cada uno de los  $S^1$  en  $S^1 \times S^1$ .

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}i \in_{KL} d\mathbb{A}^{KL} = i \mathbb{F}^{12} = i R_1 R_2 d\theta_1 d\theta_2 \quad (6.35)$$

En este caso se tiene que el determinante de la métrica en 2 dimensiones espaciales es  $\sqrt{|\gamma|} = R_1 R_2$  (6.5) por lo cual debemos redefinir la curvatura para que de el campo electromagnético correcto usando (6.26):

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \mathcal{F} = \frac{1}{R_1 R_2} \mathcal{F}$$

Se calcula la carga conservada, o número de Chern [3] [7] que corresponde a la carga del monopolo magnético.

$$Q = Ch_1 = \frac{-i}{2\pi} \int_{\mathbf{S}} \tilde{\mathcal{F}}$$

Entonces obtenemos

$$-i \int_{S^2} \tilde{\mathcal{F}} = \int_{\Sigma_2} d\theta_1 d\theta_2 = 4\pi^2 (n_\theta \cdot n_\phi) \quad (6.36)$$

con lo cual la carga del monopolo magnético es

$$Q = 2\pi (n_\theta \cdot n_\phi) = 2\pi \cdot N \quad (6.37)$$

donde  $N$  es un entero, obtenido como el producto:  $N = n_\theta \cdot n_\phi$  y asociados a los pares conjugados en la base de homología de curvas sobre  $\Sigma$ . Esta carga coincide con los reportado en varios trabajos [24].

Una deducción alternativa puede encontrarse en [12] donde se asume que la membrana cierra en forma irreducible sobre el toro  $S^1 \times S^1$  cuando

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_2} dX^1 \wedge dX^2 \neq 0. \quad (6.38)$$

que corresponde a que ninguno de los  $n_i$  es cero, en otras palabras el área del toro es no degenerada y el mapa (6.20) corresponde efectivamente al recubrimiento de un objeto bidimensional.

El mapa del espacio base al toro  $\Sigma_2 \mapsto \mathbf{S} = S^1 \times S^1$  dado por la ecuación (6.33) es un **mínimo estricto** de la acción para la membrana (transversa estacionaria) ecuación (6.23) así como la conexión (6.34) corresponde a un mínimo estricto de la acción de Yang Mill (estacionaria en el calibre de Coulomb) ecuación (6.28). La prueba para Yang Mills puede encontrarse en [12] mientras que la condición de mínimo estricto para la membrana se deduce a partir de (6.23) y (6.17)

$$I_{TE} = \frac{1}{4} \int_{\Sigma_2} (\epsilon^{ab} \partial_a X^K \partial_b X^L)^2 d\sigma^1 d\sigma^2$$

observando que la acción es una forma cuadrática positiva definida y por lo tanto sus mínimos son estrictos.

### 6.3. Monopolos de membranas esféricas

En primer lugar definimos el fibrado para membranas esféricas que van de un espacio base bidimensional  $\Sigma_2$  sobre la esfera  $S^2$  inmersa en 3 dimensiones espaciales como

$$\mathbf{P}_{esf} \equiv (\Sigma_2, \{\mathbf{S} = S^2\} \subset \mathbb{R}^3, \pi = X^{-1}, \mathbf{G}) \quad (6.39)$$

la diferencia fundamental con el caso anterior sobre el toro(6.19), es que la fibra  $S^2$  a diferencia de  $S^1 \times S^1$  no constituye un grupo de Lie.

Para que el fibrado sea un fibrado principal es requisito que la fibra  $\mathbf{S}$  sea isomorfica al grupo  $\mathbf{G}$ . Sabemos que el grupo de invariancia de la esfera es  $\mathbf{SO}(3)$  y realmente la fibra es el conjunto de 1-formas de conexión definidas sobre el cotangente del fibrado  $T * \mathbf{P}_{esf}$  en cada punto de la esfera. Cuando se escoge una sección, es decir el mapa  $X : \Sigma_2 \longrightarrow S^2$

$$X^\mu = (x(\sigma_1, \sigma_2), y(\sigma_1, \sigma_2), z(\sigma_1, \sigma_2)) \quad \mu = 1, 2 \quad (6.40)$$

debe coincidir con el espacio (homogeneo principal) solución de las ecuaciones de campo para la membranas, que de acuerdo a (6.1) tiene como grupo  $G =$

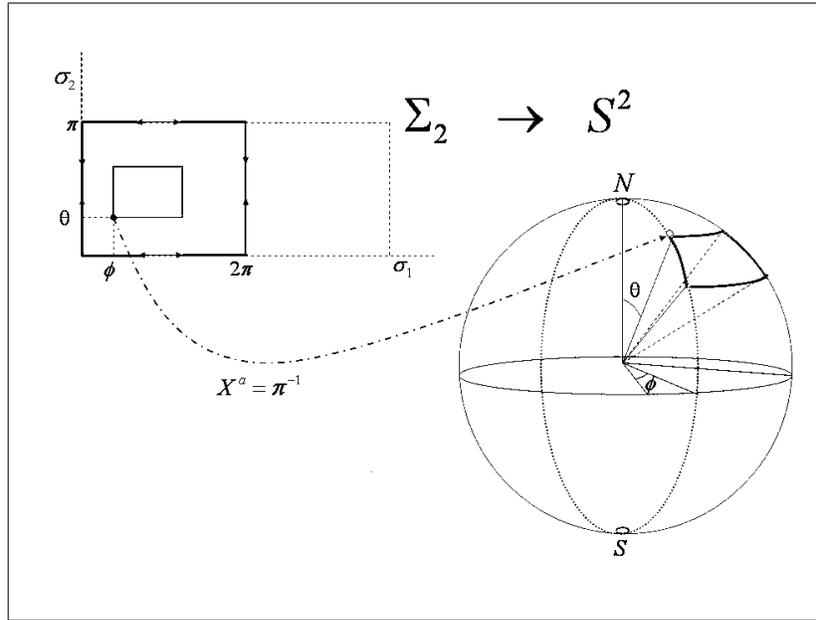


Figura 6.3: Mapa de la membrana esférica

$Diff(3)$  que es más general que  $\mathbf{SO}(3)$ . La razón de esta discrepancia es que la membrana en 3 dimensiones puede adoptar configuraciones más generales que la esfera. Para estudiar las configuraciones minimales estacionarias de la membrana sobre la esfera, utilizaremos un caso límite del Toro visto en la sección anterior, para ello tomaremos una representación de la membrana usando los ángulos esféricos:

$$\phi = [0, 2\pi] \quad y \quad \theta = [0, \pi]$$

como puede observarse en la figura 6.3:

Para efectuar el cubrimiento de la membrana esférica se efectúa la siguiente representación de la membrana toroidal

$$\rho = (R_1 + R_2 \sin \theta_2)$$

Utilizando las coordenadas indicadas para el toro podemos definir el área usando geometría elemental como:

$$dA = \rho d\theta_1 R_2 d\theta_2 = R_2(R_1 + R_2 \sin \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (6.41)$$

mientras que, utilizando los Campos de Yang-Mill equivalentes definidos sobre la membrana por la sección indicada en (6.20) y usando la ec.(6.29) se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{12} &= X^1 dX^2 \\ \mathbb{F}^{12} &= d[X^1 dX^2].\end{aligned}$$

Para que el área geométrica (6.41) de la membrana coincida con la 2-forma  $\mathbb{F}^{12}$  arriba indicada, se propone el mapa  $X^a = \Sigma_2 \rightarrow S^2$ :

$$\begin{aligned}X^1 &= R_2 \theta_1 \\ X^2 &= (R_1 \theta_2 - R_2 \cos \theta_2)\end{aligned}\tag{6.42}$$

con el, se obtienen las 1-forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{12} &= X^1 dX^2 = R_2(R_1 + R_2 \sin \theta_2) \theta_1 d\theta_2 \\ \mathbb{A}^{21} &= X^2 dX^1 = R_2(R_1 \theta_2 - R_2 \cos \theta_2) d\theta_1\end{aligned}\tag{6.43}$$

estas 1-formas son equivalentes a (6.34) y entre si mismas, salvo por diferenciales exactos. La curvatura puede calcularse a partir de ellas como:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^{12} &= d\mathbb{A}^{12} = d[X^1 dX^2] = R_2(R_1 + R_2 \sin \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ \mathbb{F}^{21} &= d\mathbb{A}^{21} = -\mathbb{F}^{12} = R_2(R_1 + R_2 \sin \theta_2) d\theta_2 d\theta_1\end{aligned}$$

donde se uso  $d\theta_1 \wedge d\theta_1 = d\theta_2 \wedge d\theta_2 = 0$  con lo cual se obtiene la equivalencia deseada 2-forma de curvatura y el área geométrica (6.41) tal como indica (6.27).

$$\mathbb{F}^{12} = dA\tag{6.44}$$

$$= R_2(R_1 + R_2 \sin \theta_2) d\theta_1 d\theta_2\tag{6.45}$$

Aunque el mapa (6.42) es diferente de la representación dada por (6.20), las conexiones obtenidas son equivalentes salvo una diferencial exacta. Esto se hace evidente al integrar la curvatura obtenida para el caso del Toro en la sección anterior

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma^2} \mathbb{F}^{12} &= R_1 R_2 \left[ \int_{\Sigma^2} d\theta_1 d\theta_2 + \int_{\Sigma^2} \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 \right] \\ &= R_1 R_2 \int_{\Sigma^2} d\theta_1 d\theta_2\end{aligned}$$

que coincide con el resultado (6.36), donde se usó  $\int_0^{2\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 = 0$ , y por lo tanto las cargas magneticas coinciden.

La esfera se puede obtener a partir del mapa (6.42) tomando el límite cuando el radio  $R_1$  indicado en la figura (6.2) tiende a cero;  $\lim R_1 \rightarrow 0$  y limitando los valores de  $\theta_2$  de forma tal que  $\theta_2 \in (0, \pi)$ . Entonces el Toro en la figura (6.2) coincide con la esfera de la figura (6.3) donde los ángulos esféricos se identifican con

$$\theta_1 = \phi \in [0, 2\pi] \quad \text{y} \quad \theta_2 = \theta \in (0, \pi) \quad (6.46)$$

entonces el mapa (6.42), tomando  $R_2 = R$ , se reduce a:

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow 0} & : & X^1 &= R \phi \\ \lim_{R_1 \rightarrow 0} & : & X^2 &= -R \cos \theta \end{aligned} \quad (6.47)$$

las 1-formas usando (6.43)

$$\mathbb{A}^{12} = X^1 dX^2 = R^2 \sin \theta \phi d\theta \quad (6.48)$$

$$\mathbb{A}^{21} = X^2 dX^1 = -R^2 \cos \theta d\phi \quad (6.49)$$

con lo cual la curvatura queda

$$\mathbb{F}^{12} = R^2 \sin \theta d\phi d\theta$$

$$\mathbb{F}^{21} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\mathbb{F}^{12}$$

Al calcular la característica de Chern con  $\tilde{\mathcal{F}} = \frac{i}{\sqrt{\gamma}} \mathbb{F}^{12}$  donde  $\sqrt{\gamma} = R^2 \sin \theta$  calculado a partir de (6.47)

$$Q = Ch_1 = -\frac{i}{2\pi} \int_{S^2} tr(\tilde{\mathcal{F}})$$

obtenemos

$$Q = \pi n_\phi \quad \text{donde} \quad n_\phi \in \mathbb{Z} \quad (6.50)$$

que corresponde a la carga magnética del monopolo de Wu-Yang, de forma tal que hemos obtenido el monopolo tipo Dirac, con grupo de estructura  $\mathbf{U}(1)$

para la membrana esférica con primer grupo de homotopía entero  $\Pi_1(\mathbf{U}(1)) = \mathbb{Z}$  a partir de la membrana toroidal que tiene grupo de estructura  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$  y primer grupo de homotopía  $\Pi_1(\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

De la misma manera que en el caso anterior para el Toro, las conexiones encontradas (6.48) y (6.49) son mínimos estrictos, ya que la acción es una forma cuadrática definida.

# Capítulo 7

## Discusión y conclusiones

Se presenta una revisión profunda, utilizando método de geometría diferencial, de los monopolos que se obtienen a partir de las membranas compactificadas sobre el Toro. Se propone una nueva interpretación (6.32) de la estructura de calibre  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$  que es homomorfica (más no isomorfica) al grupo de calibre  $\mathbf{U}(1)$  usado en trabajos anteriores [12]. Esta interpretación reproduce la simetría de los automorfismos del Toro que preservan áreas excluyendo el grupo modular. La ventaja de está interpretación es que da sentido a los dos campos de calibre que tiene la teoría como generadores (6.31) del grupo y permite la construcción de una teoría de Yang Mills completamente equivalente a la membrana enrollada de forma no trivial sobre el Toro. Las soluciones minimales y la carga topológica (magnética) encontradas (6.37) coinciden con lo reportado en la literatura. Estos resultados se obtienen utilizando un mapa biyectivo (6.33) entre el espacio base y la superficie del Toro que es equivalente a la compactificación dimensional que se ha usado ampliamente.

Utilizando un método de deformación topologica del Toro (6.47), se obtienen algunas soluciones tipo monopolo para la membrana bosónica compactificada sobre una esfera a partir de los campos de Yang Mills sobre el Toro. La carga topológica (6.50) es semejante al caso de la membrana enrollada sobre el Toro, sin embargo en este caso la carga magnética o número de Chern, viene determinada por un único número entero ( $n \in \mathbb{Z}$ ) mientras que para el Toro la carga viene dada por el producto de dos números ( $n_1.n_2 = N \in \mathbb{Z}$ ) de enrollamiento.

En ambos casos las conexiones de los monopolos encontradas (6.34) y

(6.43) de la membrana corresponden a configuraciones minimales ya que las acciones son definidas positivas al exigir la condición de irreducibilidad (i.e. las cargas son no nulas). En ambos fibrados (6.19 y 6.39) la carga o número de Chern da un entero para la esfera  $Ch_1(\mathbf{P}_{esf}) = \mathbb{Z}$  y para el Toro  $Ch_1(\mathbf{P}_{toro}) = \mathbb{Z}$ , esto no es extraño ya que  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1) \simeq \mathbf{U}(1)$ , sin embargo es no trivial ya que  $\Pi_1(S^2) = e$  mientras que  $\Pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Para clasificar estas soluciones como monopolos magnéticos, la carga magnética es un indicador físico determinante, sin embargo desde el punto de vista matemático lo define es el grupo fundamental de homotopía de la variedad de vacío  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{G}/\mathbf{H}$

El grupo de automorfismos que preservan áreas de la esfera es  $\mathbf{SO}(3)$ , el cual es más amplio que el  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$ . La deformación geométrica aplicada al Toro permite pasar del mapa del Toro al mapa de la esfera rompe la simetría del Toro y es una representación que mantiene simetría cilíndrica para la esfera, es conocido que el mapeo (6.46) no es completamente homeomórfico a la esfera, de hecho es necesario excluir los polos Norte y Sur ( $\theta = 0, \pi$ ). Excluir estos puntos es equivalente a fijar una solución de vacío en el caso de t'Hooft Polyakov (5.9) que rompe la simetría  $\mathbf{SO}(3)$  de la membrana esférica quedando  $\mathbf{H} = \mathbf{SO}(2) = \mathbf{U}(1)$  como el grupo de calibre después del rompimiento espontáneo de la simetría, y por lo tanto podemos identificar al menos, algunos de los Monopolos del fibrado  $\mathbf{P}_{esf}$  para la membrana esférica con los del Toro  $\mathbf{P}_{toro}$  deformado a una esfera. Como se explicó en la introducción, la variedad de vacío que se obtiene en este caso tiene

$$\Pi_2(\mathbf{m}_0) \cong \Pi_1(\mathbf{H}) = \Pi_1(\mathbf{U}(1)) \cong \mathbb{Z}$$

y por lo tanto pueden llamarse con propiedad monopolo de Dirac. En la membrana esférica, los monopolos se obtienen como un límite de los monopolos del Toro, y por lo tanto son una especie de monopolos de t'Hooft Polyakov para la membrana esférica.

Los monopolos se obtienen en el caso de la esfera por un procedimiento análogo a t'Hooft Polyakov. Es necesario un estudio más completo de la invariancia completa  $\mathbf{SO}(3)$  para obtener sus soluciones completas sin necesidad de tomar límites como el aplicado (6.47). Evidentemente se requiere un estudio que incluya todos los invariantes topológicos, en particular es claro que físicamente es necesario estudiar también los invariantes que dan origen a la carga "eléctrica". De hecho es interesante la posibilidad de la construcción

de “Diones” (monopolos con carga eléctrica y magnética) para la membrana así como el estudio de la condición de cuantización de Dirac para los monopolos sobre la esfera, pero estas consideraciones van más allá de los objetivos de este trabajo. Por otra parte, las conexiones tipo monopolo encontradas son mínimos estrictos, por lo tanto es posible construir una solución BPS sobre ellas, ya que se sabe [13] que para la Supermembrana la contribución a la acción admite la solución minimal para la parte bosónica y nula para la fermiónica y por lo tanto existe la posibilidad de extender estos resultados al caso supersimétrico.

# Bibliografía

- [1] P.M.A. DIRAC, *Magnetic monopoles over topologically non trivial Riemann Surfaces*, Proc. Roy. Soc., **A133** (1931).
- [2] J.D. JACKSON, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Son, Inc. (1999).
- [3] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing (2003).
- [4] G. T HOOFT, *Nucl. Phys.*, **B79** (1974) 276.
- [5] A. POLYAKOV, *JETP Lett.*, **20** (1974). 194. A. BELAVIN & A.POLYAKOV, *JETP Lett.*, **22** (1975). 194
- [6] T.T. WU, C.N. YANG, *Phys. Rev*, D12-3845, (1975).
- [7] M. GÖCKELER, T. SCHÜCKER, *Diferential geometry, gauge theories and gravity*, Cambridge University Press (1999).
- [8] G. SENJANOVIĆ, *Defectos topológicos en cosmología*, II Escuela "La Hechicera", Relatividad Campos y astrofísica, ULA-Mérida (1996).
- [9] C. GÓMEZ, R. HERNANDEZ. *Electric-Magnetic Duality And Effective Field Theories*, hep-th/9510023 v1, (1995)
- [10] YT.P. CHENG, L.F. LI, *Gauge Teory of Elementary Particle Physics*, Ed. Oxford University Press (2004).
- [11] I. MARTIN, A. RESTUCCIA, *Magnetic monopoles over topologically non trivial Riemann Surfaces*, Lett.Math.Phys. 39 (1997) 379-391.
- [12] I. MARTIN, A. RESTUCCIA Y R. TORREALBA, *On the Stability of Compactified  $D = 11$  Supermembranes*, Nucl.Phys. **B521** (1998) 117-128.

- [13] P SUTCLIFFE, *BPS Monopoles*. Int. J. Mod.Phys. **A12** (1997) 4663-4706
- [14] R. TORREALBA, *Monopolo Magnético*, Conferencia en: III Jornadas de Investigación y Postgrado. DCyT. UCLA, Barquisimeto (2002). R. TORREALBA, *Apuntes de Geometría Diferencial*, DCyT. UCLA, Barquisimeto (2002).
- [15] R. TORREALBA, *Membranas en Coordenadas Nulas y Cuantización BRST de Membranas*. Tesis Doctoral USB. Caracas (1993).
- [16] J. HOPPE & H. NICOLAI. Physics Letter **196 B** (1987) 451. R. TORREALBA, *Membrane's discrete spectrum and residual BRST symmetry in the Light Cone Gauge*. hep-th/9804198
- [17] CHEN NING YANG, *The Dirac Magnetic Monopole*, Primeras Jornadas Científicas, Equinoccio, Editorial de la Universidad Simon Bolivar. Caracas (1980).
- [18] Y. CHOQUET-BRUHATT, C. DE WITT-MORETTE T, M. DILLARD-BLEICK, *Analysis, Manifolds and Physics*, Elsevier science B.V. (1996).
- [19] A. VILENKIN & E.P.S SHELLARD, *Cosmic strings and other topological defects*, Cambridge University Press (1994).
- [20] S, EDELSTEIN ET AL (PARTICLE DATA GROUP), *Monopole Search* , Journal of Physics A (2000). 1.
- [21] B. DEWIT, H. NICOLAI, *Supermembrane a fond farewell?*. U. MARQUAD *Area Preserving Diffeomorphism SU(N) and Supermembrane*. A.V. SMILGA, *Super YM quantum mechanics and Supermembrane spectrum*. Eds Sezgin et al. World Scientific (1989).
- [22] B. DEWIT, M. LUSHER, H. NICOLAI, *Are supermembranes unstable?*. Nucl. Phys **B 320** (1989). 135.
- [23] R. ARNOWITT, S. DESER, & C. MISNER. *The Dynamics of General Relativity*. Eds Witten (1962). 227.
- [24] J. G. RUSSO. . Nucl. Phys. **B492** (1997) 205; R. KALLOSH, Phys Rev **D55** (1997) 3241; B.DEWIT, K. PEETERS AND J. PLEFKA, Phys Lett **B409** (1997) 117.