UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Funciones de p-Variación Acotada”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Marcos Pérez

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional.
Tutor: MCs. Mireya Bracamonte.

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2012

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"FUNCIONES DE p-VARIACIÓN ACOTADA"

Presentado por el ciudadano BR. MARCOS PÉREZ titular de la Cédula de Identidad Nº 18.104.037. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.
Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.
En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

*Dedicado a Dios, a mis padres
"Pastora y José Antonio", a mi tia
" Coromoto", a mis hermanos
"Joaly y José Gregorio" y a todos
aquellos quienes siguen en la
busqueda del éxito personal.*

AGRADECIMIENTOS

A Dios , por estar siempre conmigo, permitirme alcanzar esta meta de arduo trabajo y mucho esfuerzo, no dejarme desmayar en momentos de cruda realidad y mantenerse siempre a mi lado ante las adversidades.

A mi máma , porque sin ti nada de esto sería posible, por tu sabiduría, por tu motivación, por tu cariño, por tu amor, por tus consejos, por ser mi inspiración y por simplemente ser la mejor madre del mundo, *Te amo.*

A mi pápa, por apoyarme en todo momento, por estar cada vez que te necesito, por tu amor y palabras sabias, *Te amo.*

A mis Hermanos, **Joaly y José Gregorio**, este logro es de los tres.

A mi tia **Coromoto**, porque Dios te colocó en mi vida como mi segunda madre y porque sin tu apoyo y cariño no estaría donde estoy, *Te amo.*

A todos mis **tios y tias**, por siempre darme un motivo para seguir estudiando.

A todos mis **primos y primas**, para los que han triunfado en sus estudios gracias por inspirarme a seguir, y para los que su triunfo está en la universidad de la vida gracias por estar alli.

A mi tutora **Mireya Bracamonte**, por estar siempre en los momentos claves de mi trayectoria dentro de la universidad, al comienzo cuando solo pensaba que la matemática era una carrera imposible de lograr, a mediados de carrera cuando creí que no podría y tuve deseos de abandonar, y justamente al final cuando pense que hacer una tesis yo no podría lograr, gracias profe por demostrarme que estaba equivocado.

A mis tres Marías, **(Glennimar, Dannymar y Datsy)** , por hacer del tiempo en la universidad algo mas que solo tiempo para estudiar, por sacarme una sonrisa cuando lo necesitaba, desde que entramos supe que juntos podriamos lograrlo.

A mis amigos y compañeros que ya se graduaron, Elvis, Massiel, Juan carlos, Mariangel, Aura y Beatriz. Y mis amigos y compañeros que aún quedan en la uni, Yennys, Ana, Eleiny, Javier y José, animo muchachos, si se puede.

A mis compañeros de promoción, gracias por contribuir a que este último semestre fuera la locura total y el mejor semestre que pude tener.

A todos aquellos quienes de una u otra forma influyeron academicamente y personalmente durante estos años de estudio.

Resumen

El siguiente trabajo tiene como objetivo general estudiar algunas caracterizaciones de las funciones de p-Variación acotada, así como sus relaciones con otras clases de funciones. El trabajo se realizó siguiendo la Tesis presentada por Rolby Milian Pérez [15] en el año 2008, completando con el trabajo de Y. Puig de Dios, *Espacios de Funciones Abstractas de p-Variación Acotada* [17].

Se comienza exponiendo las propiedades de algunos espacios que poseen variación acotada, haciendo un estudio detallado de las funciones de variación acotada presentadas por Jordan, con algunas definiciones básicas y propiedades que nos permiten definir en el siguiente capítulo las funciones de p-variación acotada como una generalización presentada por Winner en [23], desarrollando en éste algunas propiedades básicas como base fundamental para estudiar luego la relación de estas funciones con la integral de Riemann-Stieltjes, sin realizar éste último estudio.

Finalizamos el trabajo con una breve descripción del espacio de las funciones p-continuas Absolutamente, algunas de sus propiedades y su relación directa con las funciones de p-variación acotada así como una generalización inmediata de las propiedades de las funciones de p-variación acotada para funciones definidas sobre un intervalo $[a, b]$ con valores en un espacio normado E.

Introducción

Es una tarea difícil tratar de aislar, en la historia, el origen de las funciones de variación acotada, sin embargo muchos autores coinciden al afirmar que esta clase tiene su origen en la búsqueda de resolver la conjetura, planteada en 1807, por Fourier que establece: "Toda función arbitraria definida en un intervalo puede representarse como una serie de senos y cosenos" [9]. En 1829 P. L. Dirichlet demostró, el hoy llamado Criterio de Dirichlet sobre la convergencia de series de Fourier, que garantiza que: " Toda función real, definida por medio de un número finito de partes monótonas, tiene serie de Fourier puntualmente convergente en $\mathbb{R}$" [5], y es en 1881, cuando C. Jordan [11] introduce las funciones de variación acotada y demuestra que ellas se pueden representar como diferencia de funciones monótonas y en consecuencia satisfacen el teorema de Dirichlet. Esta noción de funciones de variación acotada, introducido por Jordan, desempeñan un papel central en muchas investigaciones y ha dado lugar a algunas generalizaciones del concepto, sobre todo, la intención de buscar una clase de funciones "más grande" cuyos elementos tengan serie de Fourier puntualmente convergente.

Norbert Wiener fue probablemente el primero en modificar la definición dada por Jordan y mejorar el teorema de la convergencia. Posteriormente, se han dado otras generalizaciones, y en este trabajo especial de grado se desarrolla un resultado de gran importancia dentro del análisis funcional: las funciones de p-variación acotada, obtenido por F. Riez, a principios del siglo pasado, al encontrar una representación de los funcionales lineales continuos sobre el espacio de las funciones absolutamente continuas sobre un intervalo. Así, en el trabajo se presenta las bases teorícas de las funciones de p-variación acotada, sus propiedades, caracterizaciones y la relación existente entre el espacio de las funciones de p-variación acotada y el espacio de las funciones absolutamente p-continuas.

El trabajo está estructurado en tres capítulos: el primer capítulo dedicado a los preliminares, definiciones básicas y propiedades sobre el espacio de variación acotada, comenzando por la definición clásica de función de variación acotada dada por **Jordan** en 1881, pasando por algunos resultados importantes sobre la relación entre las funciones integrables y las funciones de variación acotada, y terminando con un estudio de las funciones absolutamente continuas, las cuales presentadas en primera instancia en 1905 por **Vitali.** De esta forma se da paso al capítulo 2, el cual es el de mayor importancia para este trabajo, pues es donde se presenta el estudio detallado de las funciones de p-variación acotada, con $1 < p < \infty$, introducida por **Wiener** en 1924 como una generalización del concepto de función de variación acotada presentado por Jordan; denotando al conjunto de todas las funciones de p-variación acotada por $V_p[a,b]$, se define $V_{\infty,0}[a,b]$ y se demuestra que éste es un espacio vectorial y un espacio de Banach. Se presentan algunas propiedades de las funciones de p-variación acotada que son generalizaciones de las propiedades de las funciones de variación acotada. Finalmente se define el espacio $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas en $[a,b]$ y se demuestran algunos resultados importantes que relacionan dichos espacios.

Finalizamos el trabajo, con un tercer capítulo sobre Funciones vectoriales de p-Variación Acotada, dedicado a presentar una generalización inmediata de las propiedades de las funciones de p-variación acotada para funciones definidas sobre un intervalo $[a,b]$ con valores en un espacio normado E, que sientan las bases para hacer el estudio de la integral abstracta de Stieltjes que conlleve a un teorema análogo al de Representación de Riesz y se encuentra una representación de los operadores lineales y continuos del espacio de las funciones absolutamente p-continuas sobre un intervalo en un espacio normado débilmente completo a través de las funciones abstractas de p-variación acotada; aún cuando sólo se presentan las bases dejando el estudio de la integral y sus consecuencias para otro estudio.

Índice

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a exponer resultados importantes sobre la teoría de las funciones de variación acotada, de forma que podamos contar con un marco teórico en que se presenten las definiciones básicas así como algunas propiedades que nos permitan realizar en el siguiente capítulo un estudio más detallado de las funciones de p-variación acotada, como generalización de dicho concepto, presentado inicialmente por Jordan, en 1881 ([11]). Aquí, sólo demostramos los resultados que son consecuencia directa de la definición de funciones de variación acotada y aquellos resultados que son de análisis clásico, pero necesarios para realizar las demostraciones, nos limitaremos a citarlos e indicar las referencias donde el lector interesado puede consultarlos.

§1.1. Definiciones básica

En esta sección presentamos algunos resultados necesarios para el buen desarrollo del trabajo y cuya bibliografía principal utilizada para su desarrollo han sido [16, 19].

Recordemos que una función se dice monótona si es creciente o decreciente. Estas funciones monótonas juegan un papel decisivo en la caracterización de las funciones de variación acotada.

En lo que sigue hacemos uso de la medida de Lebesgue y consideramos la integral con respecto a dicha mediad, la cual denotaremos por m, y recordemos que para un conjunto (Lebesgue) medible E, diremos que una propiedad se cumple en casi todas partes de E, o se cumple para casi todo $x \in E$, si existe un subconjunto E_0 de E para el cual

$m(E_0) = 0$ y la propiedad se cumple para todo $x \in E - E_0$. En este caso abreviaremos que la propiedad se cumple c.t.p de E.

Teorema 1.1 (Lebesgue)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función monótona sobre el intervalo (a, b), entonces f es diferenciable casi en todas partes.*

Como corolario de este teorema se encuentra:

Corolario 1.2. *Sea f una función creciente sobre el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Entonces f' es integrable sobre $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

Definición 1.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Diremos que f satisface la condición de* ***Lipschitz*** *si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \textit{para todo} \quad x, y \in [a, b].$$

Además diremos que f satisface la condición de ***Lipschitz de orden*** *α, o es una* ***función de Hölder****, si existen constantes $\alpha > 0$ y $M > 0$ de manera que*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha} \quad \textit{para todo} \quad x, y \in [a, b].$$

§1.2. Funciones de variación acotada

Los primeros estudios realizados sobre la variación acotada, fueron presentados por Jordan ([11]) en 1881, quien introduce el concepto de función de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ y que hoy día juegan un papel tan importante en el análisis real.

El objetivo de este trabajo es presentar un estudio detallado de las funciones de p-variación acotada, las cuales son una generalización de las funciones de variación acotada, es justificable dedicar espacio a la consideración estas funciones y una colección de sus propiedades.

Recordemos la definición de partición de un intervalo: Dado un intervalo $[a, b]$, una partición de $[a, b]$ es un conjunto finito $\xi = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 <$

$\cdots < x_n = b$. A los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, con $i = 0, \cdots, n-1$ se les llama intervalos de la partición ξ. El diámetro de la partición se define por $\delta(\xi) = \max\{x_{i+1} - x_i|$. Dadas dos particiones ξ y ξ' de $[a, b]$, diremos que ξ' es más fina que ξ si $\xi \subseteq \xi'$. Además denotaremos por $\pi([a, b])$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

Definición 1.2. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de **variación acotada** sobre $[a, b]$ si $\sup \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ es acotado, donde el supremo es tomado sobre $\pi([a, b])$.*

*Cuando este supremo es finito, $\sup \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ es llamado **variación total** de f sobre $[a, b]$.*

Reproducíamos aquí parte del estudio realizado en [19] sobre las funciones de variación acotada:

Sea f una función a valores reales definida sobre un intervalo $[a, b]$ y sea $\xi = \{x_i\}_{i=0}^{k} \in \pi([a, b])$ definimos:

$$p_\xi = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

$$n_\xi = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

$$t_\xi = n + p = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

donde

$$r^+ := \begin{cases} r & \text{si} \quad r \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad r < 0. \end{cases}$$

y

$$r^- = |r| - r^+.$$

Note que $f(b) - f(a) = p - n$. Definimos:

$$P_a^b = \sup\left\{p_\xi : \xi \in \pi([a, b])\right\}, \quad N_a^b = \sup\left\{n_\xi : \xi \in \pi([a, b])\right\}, \quad \text{y} \quad T_a^b = \sup\left\{t_\xi : \xi \in \pi([a, b])\right\}.$$

Veamos la relación entre estas constantes: para ello comencemos observando que para cualquier partición ξ se tiene que

$$n_\xi \leq p_\xi \leq t_\xi,$$

en consecuencia,

$$N_a^b \leq P_a^b \leq T_a^b.$$

- P_a^b es llamada **variación positiva** de f sobre $[a, b]$,
- N_a^b es llamada **variación negativa** de f sobre $[a, b]$,
- T_a^b es llamada **variación total** de f sobre $[a, b]$.

El siguiente lema nos presenta un resultado natural que se desprende de la definición de función de variación acotada.

Teorema 1.3. *Si f es una función de variación acotada sobre $[a, b]$ entonces $f(b) - f(a) = P_a^b$-N_a^b y $T_a^b = P_a^b$+N_a^b.*

Demostración. Sea $\xi = \{x_i\}_{i=0}^k$ una partición del intervalo $[a, b]$, luego

$$\begin{aligned} p_\xi - n_\xi &= \sum_{i=1}^{k}[f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - \sum_{i=1}^{k}[f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \\ &= \sum_{i=1}^{k}[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Así, $$p_\xi = n_\xi + f(b) - f(a) \leq N_a^b + f(b) - f(a).$$

Luego $N_a^b + f(b) - f(a)$ es cota superior para el conjunto $\{p_\xi : \xi \in \pi([a, b])\}$, así $\sup\{p_\xi : \xi \in \pi([a, b])\} = P_a^b \leq N_a^b + f(b) - f(a)$, por lo tanto $P_a^b - N_a^b \leq f(b) - f(a)$.

Por otro lado, usando nuevamente (1.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} p_\xi - n_\xi &= f(b) - f(a) \\ n_\xi &= p_\xi - f(b) + f(a) \\ n_\xi &\leq P_a^b - f(b) + f(a). \end{aligned}$$

Luego, $P_a^b - f(b) + f(a)$ es cota superior para el conjunto $\left\{n_\xi : \xi \in \pi([a, b])\right\}$, así

$$\sup\{n_\xi : \xi \in \pi([a, b])\} = N_a^b \leq P - f(b) + f(a), \tag{1.2}$$

esto es,

$$P_a^b - N_a^b \geq f(b) - f(a). \tag{1.3}$$

En consecuencia, de (1.2) y (1.4) se sigue

$$P_a^b - N_a^b = f(b) - f(a).$$

Ahora veamos que $T_a^b = P_a^b + N_a^b$, la segunda parte del teorema. Para este fin, consideremos una partición ξ de $[a,b]$, en consecuencia $p_\xi + n_\xi = t_\xi \leq T_a^b < \infty$, esto es, $T_a^b \geq p_\xi + n_\xi$.
De (1.1) obtenemos que $n_\xi = p_\xi - f(b) + f(a)$, y en consecuencia,

$$\begin{aligned} T_a^b \geq p_\xi + n_\xi &= p_\xi + p_\xi - f(b) + f(a) = 2p_\xi - f(b) + f(a) \\ 2p_\xi &\leq T_a^b + f(b) - f(a) \end{aligned}$$

luego $\dfrac{T_a^b + f(b) - f(a)}{2}$ es cota superior para el conjunto $\{p_\xi : \xi \in \pi([a,b])\}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sup\{p_\xi : \xi \in \pi([a,b])\} = P_a^b &\leq \frac{T_a^b + f(b) - f(a)}{2} \\ 2P_a^b &\leq T_a^b + f(b) - f(a) \\ T_a^b &\geq f(a) - f(b) + 2P_a^b \\ T_a^b &\geq N_a^b - P_a^b + 2P_a^b \\ T_a^b &\geq N_a^b + P_a^b. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ahora bien, dado que $T_a^b \leq N_a^b + P_a^b$ y de (1.4), se obtiene $T_a^b = N_a^b + P_a^b$. ■

Jordan además de presentar el concepto de funciones de variación acotada demuestra una caracterización de estas funciones: una función es de variación acotada si y sólo si se puede escribir como diferencia de funciones monótonas, en particular funciones crecientes.
La relevancia de este resultado radica en que un gran número de propiedades de las funciones monótonas se pueden transferir a las funciones que tienen variación acotada. A continuación se presenta formalmente este resultado.

Teorema 1.4. *Las funciones $g(x) = P_a^x$ y $h(x) = N_a^x$ son funciones crecientes, como función de x.*

Teorema 1.5 (Teorema Jordan)**.** *Una función f es de variación acotada sobre $[a, b]$ si y sólo si f es la diferencia de dos funciones monótonas a valores reales sobre $[a, b]$.*

Demostración. Sea f una función de variación acotada y definimos las funciones $g(x) = P_a^x$ y $h(x) = N_a^x$ para $a \leq x \leq b$ las cuales son funciones crecientes a valores reales, de acuerdo al teorema 1.5.
El lema (1.3) nos garantiza:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= P_a^x - N_a^x \\ f(x) &= f(a) + g(x) - h(x) \\ f(x) &= g(x) - (h(x) - f(a)). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la traslación de una función monótona creciente sigue siendo creciente, entonces f se puede expresar como la diferencia de dos funciones monótonas crecientes.
Recíprocamente, sean $f = g - h$ con g y h crecientes, entonces para $\xi = \{x_i\}_{i=0}^n$ una partición del intervalo $[a, b]$

$$\begin{aligned} V(f, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) + h(x_i) - g(x_{i-1}) - h(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})| \\ &= |g(b) - g(a)| + |h(b) - h(a)| < \infty, \end{aligned}$$

esto es, $T_a^b(f) \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$ quedando demostrado el teorema. ■

Corolario 1.6. *Si f es una función de variación acotada en $[a, b]$, entonces $f'(x)$ existe para casi todo x en $[a, b]$.*

Demostración. Como f es una función de variación acotada en $[a, b]$, por el teorema 1.5 f puede ser expresada como la diferencia de dos funciones crecientes y por el teorema de Lebesgue 1.1, cada una de estas funciones es diferenciable en casi todo punto de $[a, b]$. Además, dado que la diferencia de funciones diferenciables es diferenciable se tiene que $f'(x)$ existe para casi todo x en $[a, b]$. ■

Dado que la discontinuidad de las funciones monótonas son a lo más de salto, esto es los límites $f(x^+) := \lim_{x \to x^+} f(x)$ y $f(x^-) := \lim_{x \to x^-} f(x)$ existen para cada x, y son a lo más una cantidad numerable (Ver [21]), se sigue que cualquier función de variación acotada es continua excepto, posiblemente, en una cantidad numerable de puntos.

§1.3. Diferenciación de una Integral

A continuación se presentan algunos resultados importantes sobre la teoría de funciones integrables y su comparación con las funciones de variación acotada.

Lema 1.7 ([21]). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces la función F definida por*

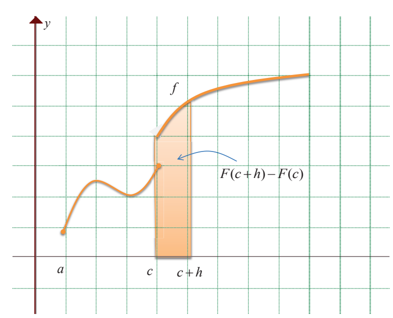
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es una función continua de variación acotada.

Demostración. Primero demostremos que F es continua. En efecto, sean $c \in [a, b]$ y $\epsilon > 0$. Al ser f integrable sobre $[a, b]$ está, por definición, acotada en $[a, b]$; digamos que $|f(x)| \leq M$, para alguna constante $M > 0$.

Si $h > 0$, entonces

$$\begin{aligned} F(c+h) - F(c) &= \int_a^{c+h} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \\ &= \int_c^{c+h} f(x). \end{aligned}$$



Ahora bien, dado que $|f(x)| \leq M$ se tiene que

$$-M \cdot h \leq \int_c^{c+g} f(x)dx \leq M \cdot h. \tag{1.5}$$

Si $h < 0$,

$$\begin{aligned} F(c+h) - F(c) &= \int_a^{c+h} f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \\ &= \int_{c+h}^c f(x) = -\int_c^{c+h} f(x). \end{aligned}$$

Así, de forma similar al caso anterior,

$$\begin{aligned} -M &\leq f(x) &&\leq M \\ -\int_{c+h}^c Mdx &\leq \int_{c+h}^c f(x) &&\leq \int_{c+h}^c M \\ hM &\leq \int_{c+h}^c f(x) &&\leq -hM. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Luego, de (1.5) y (1.6) se obtiene que

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M|h|.$$

Por lo tanto, si $|h| < \dfrac{\epsilon}{M}$, se obtiene que

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M|h| < \epsilon.$$

Esto demuestra que F es continua.

Veamos ahora que F es de variación acotada. Para ello, consideramos una partición $\xi := \{x_i\}_{i=0}^k$ de $[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} t_\xi &= \sum_{i=1}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^k \left| \int_a^{x_i} f(t)dt - \int_a^{x_{i-1}} f(t)dt \right| \\ &= \sum_{i=1}^k \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt \\ &\leq \int_b^a |f(t)|dt < \infty. \end{aligned}$$

Luego, $T_a^b < \infty$ y así F es de variación acotada. ■

Teorema 1.8. *Si f es Lebesgue integrable en $[a,b]$ y $\int_a^x f(t)dt = 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $f(t) = 0$ casi en todo punto en $[a,b]$.*

Demostración. Comenzamos definiendo los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
E_{n,+} &= \{x : f(x) > 1/n\} \\
E^+ &= \{x \in [a,b] : f(x) > 0\} = \bigcup_n E_{n,+} \\
E_{n,-} &= \{x : f(x) < -1/n\} \\
E^- &= \{x \in [a,b] : f(x) < 0\} = \bigcup_n E_{n,-} \\
E &= \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\} = E^+ \bigcup E^-.
\end{aligned}$$

Note que, si $x \in E^+$ se tiene que $f(x) > 0$ y así podemos hallar un entero positivo k tal que $kf(x) > 1$, por lo tanto, $x \in E_{k,+}$. Esto verifica que $E^+ \subset E_{k,+} \subseteq \bigcup_n E_{n,+}$. Recíprocamente, si $x \in \bigcup_n E_{n,+}$ se tiene que $x \in E_{k,+}$ para algún entero positivo k por lo que satisface en cuyo caso $f(x) > \frac{1}{k} > 0$, es decir, $x \in E^+$. Con esto se verifica que

$$E^+ = \bigcup_n E_{n,+}.$$

De forma análoga, se demuestra que que $E^- = \bigcup_n E_{n,-}$.
Veamos que la medida de Lebesgue de E es cero, es decir, $m(E) = 0$. Supongamos que este no es el caso, es decir, $m(E) > 0$ entonces $m(E^+) > 0$ o $m(E^-) > 0$, y sin pérdida de generalidad supongamos que $m(E^+) > 0$.
Dado que f es integrable, f es medible y en consecuencia $E_{n,+}$ es medible para todo $n \in \mathbb{N}^*$
Al menos uno de los $E_{n,+}$ tiene medida positiva pues si todos los $E_{n,+}$ tienen medida cero, entonces $m(E^+) = 0$ ya que $m(E^+) \leq \sum_n m(E^+) = 0$ lo cual contradice lo supuesto de que $m(E^+) > 0$
Digamos que $m(E_N) > 0$ y también $m(E_N) < \infty$ por ser cada $E_{n,+}$ medible. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F \subseteq E_N$ tal que

$$m(E_N \setminus F) < \epsilon$$

Luego,

$$m(E_N) = m(F) + m(E_N \setminus F) < m(F) + \epsilon$$

Asi,

$$m(F) > m(E_N) - \epsilon$$

Si tomamos $\epsilon = \frac{m(E_N)}{2}$, entonces $m(F) > 0$.
Sea $A = [a, b] \setminus F$ el cual es abierto en $\mathbb{R}$ y por lo tanto se puede escribir como unión numerable y disjunta de intervalos abiertos, entonces existen (a_n, b_n) con $n \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$A = \bigcup_n (a_n, b_n)$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \int_F f &\geq \int_F \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{N} m(F) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$0 = \int_a^b f = \int_A f + \int_F f \Rightarrow \int_A f = - \int_F f \neq 0$$

Pero

$$\int_A f = \int\limits_{\bigcup_n (a_n,b_n)} f = \sum_n \int\limits_{a_n}^{b_n} f = \sum_n \left(\int\limits_a^{b_n} f - \int\limits_a^{a_n} f \right) = \sum_n (0 - 0) = 0$$

Lo cual es una contradicción que proviene de suponer que $m(E) > 0$
Asi, $m(E) = 0$ y entonces $f(t) = 0$ casi en todo punto en $[a, b]$. ■

Lema 1.9. *Si f es acotada y medible sobre [a,b] y $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$ entonces $F'(x) = f(x)$ para casi todo punto de $[a, b]$.*

Demostración. Ya se ha visto que F es continua y de variación acotada en [a,b], por tanto es diferenciable casi en todo punto de $[a, b]$. Para $n \in \mathbb{N}$,sea $f_n(x) = n[F(x + \frac{1}{n}) -$

$F(x)]$ como f es acotada existe $k > 0$ tal que $|f(t)| \leq k$ para todo $t \in [a,b]$ y así

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= n|F(x+\frac{1}{n}) - F(x)| \\
&= n|\int_a^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| \\
&= n|\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt| \\
&\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(t)|dt \\
&\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} kdt \\
&= k
\end{aligned}$$

es decir $|f_n(x)| \leq k$ para todo n, y además

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} (n[F(x+\frac{1}{n}) - F(x)]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} \\
&= F'(x) \qquad \text{casi en todo punto de } [a,b]
\end{aligned}$$

También tenemos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles por ser F continua y en consecuencia medible. Entonces aplicando el teorema de convergencia acotada, para $p \in [a,b]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^p F' &= \lim_{n\to\infty} \int_a^p f_n \\
&= \lim_{n\to\infty} (n\int_a^p F(x+\frac{1}{n}) - F(x))dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (n\int_{a+\frac{1}{n}}^{p+\frac{1}{n}} F(t)dt - \int_a^p F(t))dt
\end{aligned}$$

$$\int_a^p F' = \lim_{n\to\infty} (n\int_p^{p+\frac{1}{n}} F(t)dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t))dt \tag{1.7}$$

Veamos que $\lim_{n\to\infty} n\int_p^{p+\frac{1}{n}} F(t)dt = F(p)$ para todo $p \in [a,b]$

Dado que F es continua en p, para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t-p|<\delta \Rightarrow |F(t)-F(p)|<\epsilon$$

Por la propiedad arquimediana, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$ entonces

$$n \geq N \Rightarrow \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{1}{N} < \delta$$

$$\begin{aligned}
\left| n \int_{p}^{p+\frac{1}{n}} F(t)dt - F(p) \right| &= |n \int_{p}^{p+\frac{1}{n}} F(t)dt - n \int_{p}^{p+\frac{1}{n}} F(p)dt| \\
&\leq n \int_{p}^{p+\frac{1}{n}} |F(t)-F(p)|\, dt \\
&< n\epsilon \frac{1}{n} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

De esta forma, de (1.7) tenemos que $\int_a^p F' = F(p) - F(a) = \int_a^p f$ para todo $p \in [a,b]$
Luego

$$\int_a^p (F' - f) = 0 \text{ para todo } p \in [a,b]$$

Como F' y f son integrables por el lema 1.6 $F-$f$=0$ casi en todo punto en $[a,b]$ entonces $F' = f$ casi en todo punto en $[a,b]$ ■

Teorema 1.10. *Sea f una función integrable sobre $[a,b]$ y suponga que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$. Entonces $F'(x) = f(x)$ en c.t.p de $[a,b]$.*

Demostración.
Por definición f es integrable si y solo si f^+ y f^- son integrables. Supongamos sin perdida de generalidad que $f \geq 0$, en este caso, F es una función creciente y por tanto diferenciable c.t.p en $[a,b]$ y en virtud al corolario 1.2 se obtien $\int_a^b F' \leq (F(b) - F(a))$. Ahora, para cada $n \in N$, consideramos:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \leq n \\ n, & \text{si } f(x) > n, \end{cases}$$

$$f_n \geq 0, \qquad\qquad f_n \leq f$$

Así, $f - f_n \geq 0$, f_n es integrable $\forall n$.

Sea $G_n(x) = \int_a^x (f - f_n)(t)dt$ luego $G_n(x)$ es creciente, diferenciable c.t.p en $[a, b]$.

$G_n' \geq 0$ c.t.p

$$\int_a^x f(t)dt = G_n(x) + \int_a^x f_n(t)dt$$

Por el lema anterior

$$F' = \tfrac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt) = G_n'(x) + f_n(x) \geq f_n(x)$$

Luego $F'(x) \geq f_n(x) \forall n$ Por tanto

$$F'(x) \geq f(x) = \lim_n f_n(x) \tag{1.8}$$

$$\int_a^b F' \geq \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

De esta forma

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

Lo que implica que

$$\int_a^b (F' - f) = 0$$

por (1.8) $F' -$f≥ 0 $\qquad$ *c.t.p*

Por tanto $F' = f$ c.t.p de $[a, b]$ ■

§1.4. Funciones absolutamente continuas

En 1905 es Vitali [22] quien introduce un primer concepto de las funciones absolutamente continuas. Es importante para este trabajo hacer una breve reseña de las propiedades de dichas funciones, por su estrecha relación con las funciones de variación acotada.

Definición 1.3. *Diremos que una función $f : [a, b] \to R$ es absolutamente continua en $[a, b]$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier colección de intervalos abiertos disjuntos dos a dos $\{(x_i, x_i')\}_{i=1}^n$ en $[a, b]$ que verifiquen la condición $\sum_{i=1}^n |x_i' - x_i| < \delta$, se tiene que $\sum_{i=1}^n |f(x_i') - f(x_i)| < \epsilon$.*

El espacio de las funciones absolutamente continuas en el intervalo $[a, b]$ se denota por $AC[a, b]$, es conocido que toda función absolutamente continua en $[a, b]$ es continua en $[a, b]$ y tiene variación acotada. Este segundo resultado se presenta formalmente como el siguiente lema.

Teorema 1.11. *Si f es absolutamente continua en [a,b] entonces f es de variación acotada.*

Demostración. Para $\epsilon = 1$, de la continuidad absoluta de f se tiene que, existe un $\delta > 0$ tal que $\{(x_i, x_i')\}_{i=1}^{n}$ disjuntos tal que $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$ se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < 1.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{b-a}{k} < \delta < \dfrac{b-a}{k-1}$, $P = \{a = t_0, t_1, t_2, ..., t_n = b\} \in \pi([a, b])$, $Q = \{x_i = a + i\frac{b-a}{k} / i = 0, 1, ..., k\}$ y $P' = P \cup Q$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=n_1+1}^{n_i+1} |f(s_{n_i} + j + 1) - f(s_{n_i} + j)| \\
&< \sum_{i=0}^{k-1} 1 \\
&= k
\end{aligned}$$

Dado que P es arbitraria se tiene que

$$T_a^b \leq k < \infty$$

■

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del corolario 1.6 y el teorema anterior 1.11.

Corolario 1.12. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua entonces f es diferenciable casi en todas partes de $[a, b]$.*

Lema 1.13. *Si f es absolutamente continua en$[a,b]$ y f'=0 c.t.p en $[a,b]$, entonces f es constante.*

Demostración. Elegimos $c \in (a,b]$. Nuestro objetivo consiste en verificar que $f(c) = f(a)$. Sea $A \subseteq (a,c)$ tal que $m(A) = c - a$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a,c]$. Elegimos números arbitrarios $\epsilon > 0$ y $\eta > 0$. Dado que f es absolutamente continua, existe $\delta > 0$ de manera que para toda colección finita $\{(a_i, b_i)\}$ de intervalos disjuntos en $[a,b]$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \quad \text{se cumple la desigualdad} \quad \sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Además, dado que $f'(x) = 0$ para cada $x \in A$, de la definición de derivada existe un $y > x$ de forma que

$$|f(y) - f(x)| < \eta(y - x).$$

Los intervalos de este tipo forman una cobertura de Vitali de A, así podemos elegir una familia $\{[x_k, y_k]\}_{k=1}^{n}$ de intervalos disjuntos tales que $\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) > c - a - \delta$. Pongamos $y_0 = a$, $x_{n+1} = c$ y consideremos la partición

$$a = y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_m < y_m < x_{n+1} = c.$$

Tendremos que

$$|f(c) - f(a)| \leq \sum_{k=1}^{n}|f(y_k) - f(x_k)| + \sum_{k=1}^{n}|f(x_{k+1} - f(y_k)| \leq \eta(c - a) + \epsilon.$$

De la arbitrariedad de η y ϵ, se obtiene que $f(c) = f(a)$. ■

Teorema 1.14. *Sea $f \in AC[a,b]$. Entonces $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.*

Demostración. Sea $f \in AC[a,b]$, entonces el teorema 1.11 nos garantiza que f es de variación acotada y en consecuencia f puede escribirse como diferencia de dos funciones crecientes, digamos $f = f_1 - f_2$. De ahí,

$$|f'(x)| \leq f_1'(x) + f_2'(x),$$

y

$$\int_a^b |f'(x)|dx \leq f_1(b) - f_1(a) + f_2(b) - f_2(a)$$

por el teorema sobre la derivada de una función monótona. Esto demuestra que f' es integrable.
Consideremos ahora,

$$g(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Entonces $g \in AC[a,b]$ y $h = f - g \in AC[a,b]$. Luego, $g' = f'$ en casi todas partes de $[a,b]$. Por ello, $h(x) = 0$ en casi todo punto de $[a,b]$, y por el lema anterior h es constante, $h(x) = h(a) = 0$ para todo $x \in [a,b]$, esto es $f = g$. ■

Teorema 1.15. *Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una integral indefinida entonces F es absolutamente continua.*

Demostración. Supongamos que $F(x) = \int_a^x f$ para $x \in [a,b]$ con f una función integrable en $[a,b]$. Sea $\epsilon > 0$ entonces existe $\delta > 0$ de manera que

$$m(A) < \delta \quad \text{implica que} \quad \int_A |f| < \epsilon. \tag{1.9}$$

Consideremos $\{(x_i, x_i')\}_{i=1}^n$ disjuntos y $(x_i, x_i') \subseteq [a,b]$ tales que $\sum_{i=1}^n |x_i' - x_i| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |F(x_i') - F(x_i)| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_a^{x_i'} f(t)dt - \int_a^{x_i} f(t)dt \right| \\
&= \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_i}^{x_i'} f(t)dt \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_i'} |f(t)|dt \\
&= \int_{\bigcup_i (x_i, x_i')} |f|.
\end{aligned}$$

Note que los $\{(x_i, x_i')\}_{i=1}^n$ son tales que $\sum_{i=1}^n |x_i' - x_i| < \delta$, así $m(\bigcup_{i=1}^n (x_i, x_i')) < \delta$, esto implica de (1.9) que

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i') - F(x_i)| \leq \int_{\bigcup_i (x_i, x_i')} |f| < \epsilon.$$

■

Capítulo 2

Funciones de p-Variación Acotada

§2.1. Introducción

Sea h una función continua a la derecha en un intervalo compacto K. Se ha demostrado que si para toda función continua g las sumas Riemann-Stieltjes

$$\sum_{i=1}^{n} g(y_i)[h(x_{i+1}) - h(x_i)]$$

convergen para toda partición $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ y subdivisiones intermedias $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ de K, entonces h es de variación acotada.

Una pregunta interesante que surge es: ¿Es posible restringir el espacio de los integrandos y conseguir la convergencia de la sumas de Riemann-Stieltjes de un integrador que no es de variación acotada?

Una respuesta es dada en base al concepto de funciones de p-variación acotada, con la cual se puede demostrar la convergencia de las sumas Riemann-Stieltjes para integrandos adecuados.

En este capítulo sólo se presentan las funciones de p-variación acotada, base fundamental para estudiar luego la relación de estas funciones con la integral de Riemann-Stieltjes; y posteriormente sus aplicaciones tanto en el cálculo estocástico como en las matemáticas financieras, dado que se ha demostrado gran aplicabilidad en estos campos (Ver [6, 7]).

§2.2. p-variación

En [23] Wiener introdujo el concepto de funciones de p-variación acotada ($p > 0$), en 1924, como una generalización del concepto de variación acotada dado por Jordan, donde juega un papel fundamental la función $\varphi(t) = t^p$ con $p \geq 1$. Debemos recordar que esta función es una función convexa, por lo cual satisface algunas desigualdades conocidas, relacionada con las funciones convexas. Recordemos que una función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa, si para todo $x, y \in [a, b]$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y). \tag{2.1}$$

Para $x, y \in [a, b]$, $\alpha + \beta > 0$, (2.1) es equivalente a

$$\varphi\left(\frac{\alpha x + \beta y}{\alpha + \beta}\right) \leq \frac{\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)}{\alpha + \beta}. \tag{2.2}$$

Ver [14].

Definición 2.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ y $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ una partición de $[a, b]$. Se define la variación de f con respecto a ξ por*

$$V_p(f, \xi) := \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se define la p-variación de f como

$$V_p(f; a, b) := \sup_{\xi} V_p(f, \xi) = \sup_{\xi} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

*Si $V_p(f) < +\infty$ se dice que f tiene p-**variación acotada** sobre $[a, b]$.*

En caso de no existir posibilidad de confusión, si está claro el intervalo donde se trabaja, emplearemos $V_p(f)$ en lugar de $V_p(f; a, b)$.
El conjunto de todas las funciones de p-variación acotada se denotará por $V_p[a, b]$.
Aparentemente, Wiener trató sobre todo el caso $p = 2$, llamada también variación cuadrática. Para el caso $p \neq 2$, la primera gran obra, incluyendo la teoría de la teoría de dualidad, se llevó a cabo a finales de 1930 por L.C Young, en parte con E. R. Love.

Definición 2.2. *Para la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se define $V_\infty(f)$ como:*

$$V_\infty(f) := \sup \{|f(x) - f(y)|; \quad x, y \in [a, b]\}.$$

Note que si f es acotada, f tiene una oscilación finita.
Al conjunto $V_\infty[a,b]$ se le puede dotar de todas las operaciones, usuales, de suma y multiplicación por un escalar. Esto es,

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \qquad \text{y} \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \tag{2.4}$$

para cada $x \in [a,b]$ y escalar α. Este es un espacio vectorial, es fácil verificar que tanto la suma como el producto por un escalar, están en el espacio. En eféсto: Sean f y g en $V_\infty[a,b]$, esto es $V_\infty(f) < \infty$ y $V_\infty(g) < \infty$. Ahora

$$\begin{aligned}
V_\infty(f+g) &= \sup\{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|, \qquad x,y \in [a,b]\} \\
&= \sup\{|f(x)-f(y)+g(x)-g(y)|, \qquad x,y \in [a,b]\} \\
&\le \sup\{|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|, \qquad x,y \in [a,b]\} \\
&\le \sup\{|f(x)-f(y)|, \quad x,y \in [a,b]\} + \sup\{|g(x)-g(y)|, \quad x,y \in [a,b]\} \\
&= V_\infty(f)+V_\infty(g).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(f+g) \in V_\infty[a,b]$.
Por otra parte, sea $f \in V_\infty[a,b]$ y α un escalar,

$$\begin{aligned}
V_\infty(\alpha f) &= \sup\{|(\alpha f)(x)-(\alpha f)(y)| \quad x,y \in [a,b]\} \\
&= \sup\{|\alpha f(x)-\alpha f(y)| \quad x,y \in [a,b]\} \\
&= \sup\{|\alpha(f(x)-f(y))| \quad x,y \in [a,b]\} \\
&\le |\alpha| \sup\{|f(x)-f(y)| \quad x,y \in [a,b]\} \\
&\le |\alpha| V_\infty(f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\alpha f) \in V_\infty[a,b]$

Teorema 2.1. *El espacio* $V_{\infty,0}[a,b] := \{f \in V_\infty[a,b] : f(a) = 0\}$ *es un espacio de Banach con la norma*

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)-f(y)|; x,y \in [a,b]\}.$$

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $V_{\infty,0}[a,b]$, entonces dado $\epsilon > 0$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$\begin{aligned} n, m > n_0 &\Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \\ &\Rightarrow sup\{|(f_n - f_m)(t)|, t \in [a,b]\} < \epsilon \\ &\Rightarrow |f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon \qquad \forall t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Esto significa, que para cada $t \in [a,b]$, la sucesión $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo tanto es convergente. Se define una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de la forma:

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t), \qquad t \in [a,b]. \tag{2.5}$$

Veamos que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Para tal fin, consideremos $\epsilon > 0$, y como antes, podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \qquad \text{para cada} \qquad n, m \geq N.$$

En consecuencia,

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| < \epsilon \quad \text{para cada} x, y \in [a,b] \text{ y cada} \quad n, m \geq N. \tag{2.6}$$

Luego, para cada par $x, y \in [a,b]$ y $k > N$ fijo, en virtud de la continuidad de la función valor absoluto, tendremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |(f_k - f_n)(x) - (f_k - f_n)(y)| &= |\lim_{n\to\infty}(f_k - f_n)(x) - \lim_{n\to\infty}(f_k - f_n)(y)| \\ &= |(f_k - f)(x) - (f_k - f)(y)|. \end{aligned}$$

Así, si hacemos uso de (2.6) y la igualdad anterior nos permite concluir que

$$|(f - f_m)(x) - (f - f_m)(y)| = \left|\left(\lim_{n\to\infty} f_n - f_m\right)(x) - \left(\lim_{n\to\infty} f_n - f_m\right)(y)\right| < \epsilon, \tag{2.7}$$

para cada $x, y \in [a,b]$ y cada $m \geq N$. De aquí se tiene que $\|f - f_m\|_\infty \to 0$.
Además, como $f_k \in V_{\infty,0}[a,b]$, para cada $x, y \in [a,b]$ tendremos que

$$|f(x) - f(y)| - \|f_k\|_\infty \leq |f(x) - f(y)| - |f_k(x)| - |f_k(y)| \leq |(f - f_k)(x) - (f - f_k)(y)| \leq \epsilon,$$

es decir,

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon + \|f_k\|_\infty \qquad \text{para todo} \quad k \geq N \qquad \text{y todo} \quad x \in [a,b].$$

Esto garantiza, conjuntamente con (2.5), que $f \in V_{\infty,0}[a,b]$. ■

§2.3. Propiedades

El concepto de funciones de p-variación acotada representa una generalización del concepto de variación acotada, como puede observarse en la definición (2.3) si reemplazamos p por 1, es decir, la 1-variación coincide con la definición clásica de funciones de variación acotada. Por tal razón, es importante conocer si las propiedades conocidas de funciones de variación acotada las preserva esta nueva definición.

Teorema 2.2. *Toda función de p-variación acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ es acotada en ese intervalo.*

Demostración. Sea $x \in [a,b]$, y consideremos la partición $\{a,x,b\}$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a) - f(b) + f(b)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(a)| + |f(b)| \\ &\leq |f(x) - f(a)|^p + |f(b) - f(a)|^p + |f(b)| \\ &\leq |V_p(f)|^p + |f(b)| \end{aligned}$$

por lo tanto f es acotada en $[a,b]$. ■

Lema 2.3. *Sea f una función de p-variación acotada entonces $g = f \pm a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ es también de p-variación acotada.*

Demostración. En efecto, como f es de p-variación acotada se tiene que

$$V_p(f) = \sup_{\pi}(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ahora sin perder generalidad tomemos $g = f + a$, así

$$\begin{aligned} V_p(g) &= \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |(f+a)(t_i) - (f+a)(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) + a - f(t_{i-1}) - a|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto g es de p-variación acotada y $V_p(f+a) = V_p(f)$. ■

Teorema 2.4. *Toda función de la clase* $Lip_{\frac{1}{p}}[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$ *es de p-variación acotada en* $[a,b]$.

Demostración. Sea f de $Lip_{\frac{1}{p}}[a,b]$, esto es, para todas x, y de f de $[a,b]$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\frac{1}{p}}$$

donde M es una constante que sólo depende de f, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|\right)^{\frac{1}{p}},$$

esto es,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}},$$

para toda partición $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de $[a,b]$. De aquí se deduce que

$$V_p(f) \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}}.$$

Así f es de p-variación acotada en $[a,b]$. ■

En el siguiente ejemplo se presenta una función que cumple con la condición de suficiencia para la pertenencia de una función f al espacio $V_p[a,b]$ demostrada anteriormente.

Ejemplo 1 (Función de Weierstrass)**.** *Sea a un número natural mayor que 1. Entonces la función*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{-n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \qquad x \in [0,1]$$

es de 2-variación acotada.

Veamos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{-n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \tag{2.8}$$

converge absolutamente para $a > 1$, en efecto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a^{\frac{-n}{2}}| |\cos(2\pi a^n x)| < \sum_{n=1}^{\infty} \left|a^{\frac{-n}{2}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a^{\frac{n}{2}}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right|^n.$$

Además, note que

$$a > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} < 1,$$

así la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^n$ es una serie geométrica, de razón $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, la cual es convergente. Así, el criterio de comparación para series nos garantiza que, la serie (2.8) converge absolutamente. Luego $f(x)$ está bien definida y además es continua, por ser límite uniforme de una sucesión de funciones continuas.

En efecto, calculemos la diferencia $f(x+h) - f(x)$ para un número real h cualquiera. Consideremos el caso en que $h < \frac{1}{2a}$ con $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{-n}{2}} \cos(2\pi a^n(x+h)) - \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{-n}{2}} \cos(2\pi a^n x)\right| \\ &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{-n}{2}} (\cos(2\pi a^n(x+h)) - \cos(2\pi a^n x))\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{-n}{2}} \left|\cos(2\pi a^n(x+h)) - \cos(2\pi a^n x)\right|. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por otra parte la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2})sen(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

es valida para todos α y β números reales. Así

$$\begin{aligned} & |\cos(2\pi a^n(x+h)) - \cos(2\pi a^n x)| \\ = & \left|2sen\left(\frac{2\pi a^n(x+h) + 2\pi a^n x}{2}\right) sen\left(\frac{2\pi a^n(x+h) - 2\pi a^n x}{2}\right)\right| \\ = & |2sen(\pi a^n(2x+h))sen(\pi a^n h)|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Luego de (2.9) y (2.10) se tiene que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{-n}{2}} |2sen(\pi a^n(2x+h))sen(\pi a^n h)|.$$

Ahora bien, la función $sen(x)$ está acotada para cualquier x, esto es $|sen(x)| \leq 1$, así

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{-n}{2}} |2sen(\pi a^n h)|.$$

Además, dado que $ah < \dfrac{1}{2}$, tendremos que

$$h > 0 \quad \Rightarrow \quad a < \frac{1}{2h} = \frac{1}{2|h|} \Rightarrow -a > \frac{1}{-2|h|} \tag{2.11}$$

$$h < 0 \quad \Rightarrow \quad a > \frac{1}{2h} \Rightarrow -a < \frac{1}{-2h} = \frac{1}{2|h|}. \tag{2.12}$$

De (2.11) y (2.12) se tiene que

$$-\frac{1}{2|h|} < -a < \frac{1}{2|h|} \Rightarrow \frac{1}{2|h|} > a > -\frac{1}{2|h|} \Rightarrow a <| \frac{1}{2|h|} |= \frac{1}{2|h|}.$$

Así,

$$\log_a a < \log_a \left(\frac{1}{2|h|}\right), \text{ esto es } 1 < \log_a \left(\frac{1}{2|h|}\right).$$

Podemos entonces elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\begin{aligned} n_0 < \log_a \left(\frac{1}{2|h|}\right) &\leq n_0 + 1 \\ \Rightarrow a^{n_0} < \frac{1}{2|h|} &\leq a^{n_0+1} \\ \Rightarrow a^{n_0}|h| < \frac{1}{2} &\leq a^{n_0+1}|h|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Verifiquemos que:

$$\begin{aligned} |sen(\pi a^n h)| &\leq \pi a^n |h| \qquad \text{para} \qquad n \leq n_0 \\ |sen(\pi a^n h)| &\leq 1 \qquad \text{para} \qquad n \geq n_0. \end{aligned}$$

En efecto, si $n \leq n_0$ y $h > 0$, como $a > 1$

$$\begin{aligned} a^n \leq a^{n_0} \Rightarrow \pi h a^n \leq \pi h a^{n_0} &= \pi |h| a^{n_0} \leq \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow 0 < \pi h a^n &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ahora bien en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ la función seno se encuentra por debajo de la función identidad, esto es, $sen(x) \leq x$.

Así

$$sen(\pi h a^n) \leq \pi h a^n = \pi |h| a^n. \tag{2.14}$$

Por otra parte si $n \leq n_0$ y $h < 0$, como $a > 1$

$$\begin{aligned} a^n \leq a^{n_0} &\Rightarrow -h\pi a^n \leq -h\pi a^{n_0} = \pi|h|a^{n_0} \leq \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow 0 < -h\pi a^n \leq \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq h\pi a^n < 0. \end{aligned}$$

Ahora bien en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ la función seno se encuentra por encima de la función identidad, así

$$\begin{aligned} sen(h\pi a^n) &\geq h\pi a^n \\ \Rightarrow sen(h\pi a^n) &\geq -|h|\pi a^n. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Luego de (2.14) y (2.15) se tiene que

$$-|h|\pi a^n \leq sen(h\pi a^n) \leq |h|\pi a^n.$$

Por lo tanto

$$|sen(h\pi a^n)| \leq |h|\pi a^n.$$

Obteniendo así, lo deseado:

$$\begin{aligned} & |sen(\pi a^n h)| \leq \pi a^n |h| \qquad para \qquad n \leq n_0 \\ y \qquad & |sen(\pi a^n h)| \leq 1 \qquad para \qquad n \geq n_0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} a^{-\frac{n}{2}} |2sen(\pi a^n h)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} |2sen(\pi a^n h)| \\ \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} a^{-\frac{n}{2}} 2|h|\pi a^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} |2| \\ &= 2|h|\pi \sum_{n=1}^{n_0} a^{\frac{n}{2}} + 2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora, dado que $\sum\limits_{n=1}^{n_0} a^{\frac{n}{2}}$ es una suma geométrica finita, se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{n_0} a^{\frac{n}{2}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}(a^{\frac{n_0}{2}}-1)$ en efecto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{n_0} a^{\frac{n}{2}} &= a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{2}} + a^{\frac{3}{2}} + ... + a^{\frac{n_0}{2}} \\
&= a^{\frac{1}{2}}\left(1 + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{2}} + a^{\frac{3}{2}} + ... + a^{\frac{n_0-1}{2}}\right) \\
&= a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-a^{\frac{n_0}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}(1-a^{\frac{n_0}{2}}) \\
&= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}-1}}(a^{\frac{n_0}{2}}-1).
\end{aligned}
$$

De la misma forma $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}}$ es una serie geométrica que converge para $a > 1$. Así

$$
\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}-1}}\left(\frac{1}{a^{\frac{n_0+1}{2}}}\right).
$$

De esta forma

$$
\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &\leq 2\pi|h|\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}-1}}\left(a^{\frac{n_0}{2}}-1\right) + 2\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}-1}}\left(\frac{1}{a^{\frac{n_0+1}{2}}}\right) \\
&= 2\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}-1}}\left[\pi|h|\left(a^{\frac{n_0}{2}}-1\right) + \left(\frac{1}{a^{\frac{n_0+1}{2}}}\right)\right] \\
&= 2\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}-1}}\frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}}\left[\pi|h|\left(a^{\frac{n_0}{2}}-1\right) + \left(\frac{1}{a^{\frac{n_0+1}{2}}}\right)\right] \\
&= 2\frac{\sqrt{a}\sqrt{|h|}}{\sqrt{a}-1}\left[\frac{\pi|h|\left(a^{\frac{n_0}{2}}-1\right)}{\sqrt{|h|}} + \frac{1}{\sqrt{a^{n_0+1}}\sqrt{|h|}}\right] \\
&= 2\frac{\sqrt{a}\sqrt{|h|}}{\sqrt{a}-1}\left[\pi\sqrt{|h|}\left(\sqrt{a^{n_0}}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{a^{n_0+1}|h|}}\right]. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Ahora de la desigualdad (2.13) y dado que $\sqrt{a^{n_0}}-1 < \sqrt{a^{n_0}}$ se obtiene $|f(x+h)-f(x)| \leq$

$\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}(\frac{\pi}{2}+1)\sqrt{|h|}$. En efecto

$$\begin{aligned}\pi\sqrt{|h|}(\sqrt{a^{n_0}}-1)+\frac{1}{\sqrt{a^{n_0+1}|h|}} &\leq \pi\sqrt{|h|}\sqrt{a^{n_0}}+\frac{1}{\sqrt{a^{n_0+1}|h|}}\\ &\leq \pi\sqrt{|h|a^{n_0}}+\sqrt{2}\\ &< \frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\\ &= \pi\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|f(x+h)-f(x)| \leq \frac{2\sqrt{2}\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}(\tfrac{\pi}{2}+1)\sqrt{|h|}.$$

Ahora sea $k=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)$ entonces $|f(x+h)-f(x)|\leq k\sqrt{|h|}$, esto es, la función f pertenece a las clases de $Lip_{\frac{1}{2}}[0,1]$ y por el teorema 3.4, se obtiene que f también pertenece a $V_2[0,1]$.
En el caso en que $h\geq \dfrac{1}{2a}$ consideramos la aplicación lineal que mapea el intervalo $[0,1]$ en $\left[0,\dfrac{1}{2a}\right]$ dada por $y=2ax$ y se procede de forma similar.

§2.4. Espacio $V_p[a,b]$

El objetivo de esta sección es demostrar que el conjunto formado por todas las funciones f tales que $V_p(f)<+\infty$ $(1<p<\infty)$ puede ser dotado de una norma con la cual es un espacio de Banach. Por ello comenzamos dotando a $V_p[a,b]$ de las operaciones básicas, dadas en (2.4) y verificando que la p-variación define una seminorma sobre dicho espacio. Para facilitar los cálculos, en el resto de la sección, trabajamos con el conjunto

$$V_{p,0}[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\,:\,V_p(f)<+\infty \quad \text{y}\, f(a)=0\}. \tag{2.17}$$

Comencemos verificando que la función $V_p(\cdot)$, es una seminorma.

Teorema 2.5. *(i) La función* $V_p^p(\cdot):V_p[a,b]\to\mathbb{R}$ *es convexa y simétrica.*

(ii) $V_p(f)=0$ *si y sólo si* f *es constante.*

Demostración.

(i) Sean $1 \leq p < \infty$, $f, g \in V_{p,0}[a,b]$ y consideremos una partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$.

Entonces, haciendo uso de la desigualdad triangular (de valor absoluto) y de la convexidad de la función t^p tendremos que, para cada α, β números reales no negativos tales que $\alpha + \beta = 1$.

$$\begin{aligned} |(\alpha f + \beta g)(t_i) - (\alpha f + \beta g)(t_{i-1})| &\leq \alpha |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \beta |g(t_i) - g(t_{i-1})| \\ (|(\alpha f + \beta g)(t_i) - (\alpha f + \beta g)(t_{i-1})|)^p &\leq (\alpha |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \beta |g(t_i) - g(t_{i-1})|)^p \\ &\leq \alpha |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p + \beta |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\sum_{i=0}^{n} |(\alpha f + \beta g)(t_i) - (\alpha f + \beta g)(t_{i-1})|^p \leq \sum_{i=0}^{n} \alpha |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p + \sum_{i=0}^{n} \beta |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p,$$

en consecuencia, $V_p^p(\alpha f + \beta g) \leq \alpha V_p^p(f) + \beta V_p^p(g)$.
La simetría se sigue como consecuencia inmediata de la simetría de la función valor absoluto.

(ii) Es claro que si f es constante, entonces $V_p(f) = 0$, además si suponemos que $V_p(f) = 0$ y consideremos $x \in [a,b]$, y sin pérdida de generalidad supongamos que $a \neq x$.

Este punto, determina la partición $\xi = \{a, x, b\}$, luego

$$|f(x)|^p = |f(x) - f(a)|^p \leq V_p(f) = 0.$$

Esto nos garantiza que $f(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$. ∎
Como consecuencia inmediata de este teorema que $V_{p,0}[a,b]$ es un espacio normado.

Teorema 2.6. *El espacio $V_{p,0}[a,b]$ (definido en (2.17)) es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{V_p} = V_p(\cdot)$.*

Demostración.
Primero debemos verificar que la variación satisface las condiciones necesarias para ser norma. Es fácil verificar que si $f \equiv 0$ entonces $V_p(f) = 0$. Por otra parte, haciendo uso

de la segunda parte del teorema 2.5, se tiene que $V_p(f) = 0$ si y sólo si f es constante en $[a, b]$, y dado que $f(a) = 0$ se tiene que $f \equiv 0$.

Por otra parte, si λ es un número real, tendremos que para toda partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |(\lambda f)(t_i) - (\lambda f)(t_{i-1})|^p &= |\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p, \\
\left(\sum_{i=1}^{n} |(\lambda f)(t_i) - (\lambda f)(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} &= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

en consecuencia, $V_p(\lambda f) = |\lambda| V_p(f)$.

Para verificar que la V_p satisface la desigualdad triangular, consideremos $f, g \in V_p[a, b]$ y una partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$, y haciendo uso de la desigualdad de Minkowski se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} |(f+g)(t_i) - (f+g)(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1}) + (g(t_i) - g(t_{i-1}))|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

en consecuencia, $V_p(f + g) \leq V_p(f) + V_p(g)$.

Para completar la demostración, consideremos $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $V_{p,0}[a, b]$, así, dado $\epsilon > 0$ podemos elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$V_p(f_n - f_m) = \|f_n - f_m\|_{V_p} < \epsilon \quad \text{para cada} \quad n, m > n_0.$$

Note que, para cada par de elementos $x, y \in [a, b]$, podemos elegir una partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ de forma que $x, y \in \xi$. Luego,

$$\begin{aligned}
|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|^p &< \sum_{i=1}^{n} |(f_n - f_m)(t_i) - (f_n - f_m)(t_{i-1})|^p \\
|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| &< \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_n - f_m)(t_i) - (f_n - f_m)(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| &< V_p(f_n - f_m) < \epsilon. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| < \epsilon.$$

Esto significa que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $V_{\infty,0}[a,b]$, así el teorema 2.1 nos garantiza la existencia de una función $f \in V_{\infty,0}[a,b]$, de forma que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Luego, dada una partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$, podemos hallar un $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$|(f - f_m)(t_i) - (f - f_m)(t_{i-1})| < \frac{\sqrt[p]{\|f - f_m\|_\infty}}{\sqrt[p]{n}} \quad \text{para toda} \quad m \geq N.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|(f - f_N)(t_i) - (f - f_N)(t_{i-1})|^p &< \frac{\|f - f_N\|_\infty}{n} \\
\left(\sum_{i=1}^n |(f - f_N)(t_i) - (f - f_N)(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} &< \left(\sum_{i=1}^n \frac{\|f - f_N\|_\infty}{n}\right)^{1/p} = \|f - f_N\|_\infty^{1/p}.
\end{aligned}$$

Como esta desigualdad la podemos obtener para toda partición ξ se sigue que cuando $m \to \infty$, $V_p(f - f_m) \to 0$. Además, si procedemos de forma similar, podemos obtener que

$$V_p(f,\xi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{n}\right)^p \leq \|f\|_\infty < \infty,$$

esto es, $f \in V_{p,0}[a,b]$; Como esta desigualdad la podemos obtener para toda partición ξ se sigue que cuando $m \to \infty$, $V_p(f - f_m) \to 0$. Además, si procedemos de forma similar, podemos obtener que

$$V_p(f,\xi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{n}\right)^p \leq \|f\|_\infty < \infty,$$

esto es, $f \in V_{p,0}[a,b]$; con lo cual concluye la demostración. ■

§2.5. Otras propiedades

Teorema 2.7. *Sean $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ entonces se cumple que $V_p \subseteq V_q$ si $p < q$.*

Demostración. Sea $f \in V_p[a,b]$, el teorema 2.2 nos garantiza que f es acotada, en consecuencia podemos considerar $M = \sup\{|f(x) - f(y)|\} : \quad x, y \in \mathbb{R}\}$. Entonces, para una partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{q-p}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p M^{q-p}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq M^{q-p}(V_p(f; a, b)^p)^{\frac{1}{q}} < \infty.
\end{aligned}$$

Dado que esta desigualdad se cumpla para cualquier partición ξ de $[a,b]$ se sigue que $f \in V_q[a,b]$. ■

Teorema 2.8. *Sea $f \in V_p[a,b]$ y $a < c < b$, entonces se cumple:*

$$(V_p^p(f;a,c) + V_p^p(f;c,b))^{1/p} \leq V_p(f), \tag{2.19}$$

donde $V_p[\alpha,\beta]$ representa la p-variación de la función f en el intervalo cerrado $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

Demostración. Sea $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ una partición de $[a,c]$, en este caso, $\xi \cup \{b\}$ es una partición de $[a,b]$, en cuyo caso

$$V_p(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p + |f(b) - f(c)|^p = V_p(f, \xi \cup \{b\}).$$

Esto significa, que $V_p(f,\xi) \leq V_p(f;a,b)$, en consecuencia, $f \in V_p[a,c]$ y $V_p(f;a,c) \leq V_p(f;a,b)$. De forma similar se obtiene que $f \in V_p[c,b]$ y $V_p(f;c,b) \leq V_p(f;a,b)$.
Además, para verificar que se satisface (2.19) consideramos $\epsilon > 0$, así haciendo uso de la definición de p-variación, podemos garantizar la existencia de particiones $\xi' : a = t_0' < t_1' < ... < t_m' = c$ y $\xi'' : c = t_1'' < t_2'' < ... < t_s'' = b$ de los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} |f(t_i') - f(t_{i-1}')|^p &> V_p^p(f;a,c) + \epsilon/2 \\ \sum_{i=1}^{s} |f(t_i'') - f(t_{i-1}'')|^p &> V_p^p(f;c,b) + \epsilon/2. \end{aligned}$$

Note que $\xi = \xi' \cup \xi''$ es una partición del intervalo $[a,b]$, para la cual se cumple que

$$\begin{aligned} V_p^p(f;a,b) &\geq \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \\ &= \sum_{i=1}^{m} |f(t_i') - f(t_{i-1}')|^p + \sum_{i=1}^{s} |f(t_i'') - f(t_{i-1}'')|^p \\ &> V_p^p(f;a,c) + V_p^p(f;c,b) + \epsilon. \end{aligned}$$

Dado que esta desigualdad se cumple para cada $\epsilon > 0$, se tiene que

$$V_p^p(f;a,b) \geq V_p^p(f;a,c) + V_p^p(f;c,b),$$

de lo cual se obtiene inmediatamente (2.19). ■

En el capítulo de preliminares se estudió una caracterización para las funciones de variación acotada con respecto a la monotonía, el siguiente teorema nos presenta una propiedad de monotonía de las funciones de p-variación acotada.

Teorema 2.9. *Si f es una función de p-variación acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ entonces la función $V_p(f;a,x)$ es monótona creciente en $[a,b]$.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$, ξ una partición del intervalo $[a,x_1]$ de la forma $\xi : \{a = t_0, t_1, ..., t_n = x_1\}$ entonces $\xi \cup \{x_2\}$ es una partición del intervalo $[a, x_2]$.
Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p + |f(x_2) - f(x_1)|^p \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \\
&\leq V_p^p(f, a, x_2).
\end{aligned}$$

Luego, dado que esto se cumple para toda partición ξ de $[a, x_1]$, $V_p^p(f, a, x_2)$ es una cota superior para el conjunto de las sumas $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$ lo que implica que

$$V_p^p(f, a, x_1) = \sup_{\xi} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right) \leq V_p^p(f, a, x_2).$$

De donde, $V_p(f, a, x_1) \leq V_p(f, a, x_2)$, quedando demostrado que $V_p(f; a, x)$ es monótona creciente, como función de x. ■
Antes de continuar, presentamos la siguiente definición.

Definición 2.3. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, una función $f : I \to \mathbb{R}$ se llama **reglada** o **regular** si para cada $x \in I$ existen*

$$f(x-) = \lim_{t \to x^-} f(t) \quad y \quad f(x+) = \lim_{t \to x^+} f(t).$$

Teorema 2.10. *Sea f una función de p-variación acotada en $[a,b]$. Entonces f es regular.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que existe $x \in [a,b]$ tal que el limite $f(x-) = \lim\limits_{x \to x^-} f(t)$, no existe. Note que si $f(x-) = \lim\limits_{x \to x^-} f(t) = +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos hallar $\delta > 0$ de manera que

$$x - t < \delta \quad \text{implica que} \quad f(t) > n.$$

En cuyo caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n \in (a,b]$ tal que $f(x_n) > n$.
De forma similar, si $f(x-) = \lim\limits_{x \to x^-} f(t) = -\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos hallar $\gamma > 0$ de manera que

$$x - t < \gamma \quad \text{implica que} \quad f(t) < -n.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n \in (a,b]$ tal que $f(x_n) < -n$.
Cualquiera sea el caso, esto nos permite garantizar que podemos elegir una sucesión $\{x_n\}$ que converge a x por la izquierda, tal que $\{f(x_n)\}$ no sea una sucesión de Cauchy, esto es, existe $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, existen $n, m \geq N$ para los que se cumple

$$|f(x_n) - f(x_m)| \geq \epsilon_0. \tag{2.20}$$

Ahora bien, los x_n no necesariamente convergen de manera ordenada a x, sin embargo dado que $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales, se puede obtener una subsucesión creciente, que denotaremos por $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Luego, hacemos $\xi_k : a = x_{n_0} < x_{n_1} < \ldots < x_{n_{k+1}} = x$.
Note que estos elementos de la partición satisfacen (2.20), luego

$$|f(x_{n_i}) - f(x_{n_{i-1}})|^p \geq \epsilon_0^p$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_{n_i}) - f(x_{n_{i-1}})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq n^{\frac{1}{p}} \epsilon_0.$$

Es decir, las sumas $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_{n_i}) - f(x_{n_{i-1}})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ crecen de manera no acotada, lo cual contradice la hipótesis de que f es de p-variación acotada. Por lo tanto $\lim\limits_{t \to x^-} f(t)$ existe. De forma similar se demuestra que $\lim\limits_{t \to x^+} f(x)$ existe, por lo cual podemos concluir que f es regular. ∎

Teorema 2.11. *Sea f una función de p-variación acotada en $[a,b]$. Entonces f sólo tiene una cantidad numerable de discontinuidades, a lo sumo de primera especie.*

Demostración. Por el teorema 2.10 se tiene que si f es discontinua entonces la discontinuidad debe ser de primera especie.
Para completar la demostración, debemos verificar que el conjunto de las discontinuidades es numerable. Definimos el conjunto

$$A_n = \left\{ x \in [a,b], |f(x) - f(x^-)|^p > \frac{1}{n} \quad \text{ó} \quad |f(x) - f(x^+)|^p > \frac{1}{n} \right\}.$$

Dado que la función f es de p-variación acotada estos conjuntos son finitos; dado que la suma de la potencia p-ésima de todos los saltos de la función f no pueden ser mayor a $V_p(f)$. Ahora como A_n es finito, para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $\bigcup\limits_n A_n$ es numerable. Por lo tanto f tiene una cantidad numerable de discontinuidades. ■

Definición 2.4 ([2, 10])**.** *Sea X un espacio lineal normado. Se dice que X es separable si existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en X es denso en X.*

Si recordamos que $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ denota un subespacio de ℓ_∞ de todas las sucesiones $\mathbf{x} = (x_i)$ tales que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$. Es conocido que este espacio es separable, en consecuencia

Teorema 2.12. *El espacio $V_p[a,b]$ es no separable.*

Demostración. La demostración se basa en demostrar que todo subconjunto M de $V_p[a,b]$ denso es no numerable. En efecto, sea M un subconjunto denso de $V_p[a,b]$. Para cada x_0 del intervalo abierto (a,b), definimos sobre $[a,b]$ la función característica de $\{x_0\}$, $\mathcal{X}_{x_0}$, por:

$$\mathcal{X}_{x_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t = x_0 \\ 0 & \text{si} \quad t \neq x_0. \end{cases}$$

Es fácil verificar que cada $\mathcal{X}_{x_0} \in V_p$, en consecuencia, existe $\{f_n^{x_0}\} \subseteq M$ tal que $\|f_n^{x_0} - \mathcal{X}_{x_0}\| \to 0$, así, dado $\varepsilon = 1/4 > 0$ existe $N_{x_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n^{x_0} - \mathcal{X}_{x_0}\|_{V_p} < 1/4 \quad \text{para todo} \quad n \geq N_{x_0}.$$

Consideramos ahora $x_0, y_0 \in (a,b)$ tales que $x_0 < y_0$, entonces existen $f_{N_{x_0}}^{x_0}, f_{N_{y_0}}^{y_0} \in M$ tales que

$$\|f_{N_{x_0}}^{x_0} - \mathcal{X}_{x_0}\|_{V_p} < 1/4 \quad \text{y} \quad \|f_{N_{y_0}}^{y_0} - \mathcal{X}_{y_0}\|_{V_p} < 1/4. \tag{2.21}$$

Por otra parte

$$\|\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0}\|_{V_p}=\sup_{\xi\in\pi[a,b]}\left(\sum_{i=1}^{n}|(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(t_i)-(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \tag{2.22}$$

Note que para todo $z\in(a,b)-\{x_0,y_0\}$

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(x_0)-(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(a)|+|(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(z)-(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(x_0)| \\
+ \;& |(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(y_0)-(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(z)|+|(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(b)-(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(y_0)| \\
= \;& |\mathcal{X}_{x_0}(x_0)-\mathcal{X}_{y_0}(x_0)-\mathcal{X}_{x_0}(a)-\mathcal{X}_{y_0}(a)| \\
= \;& 1+1+1+1=4.
\end{aligned}$$

de la misma forma

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(z)-(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(x_0)| &= 1\\
|(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(y_0)-(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(z)| &= 1\\
|(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(b)-(\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0})(y_0)| &= 1.
\end{aligned}$$

Así

$$\|\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0}\|_{V_p}\geq 4^{1/p}>1. \tag{2.23}$$

Luego, haciendo uso de la desigualdad triangular se tiene que:

$$\begin{aligned}
1<&\|\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0}\|_{V_p}=\|\mathcal{X}_{x_0}-\mathcal{X}_{y_0}+f_{x_0}-f_{x_0}+f_{y_0}-f_{y_0}\|_{V_p}\\
\leq&\|\mathcal{X}_{x_0}-f_{x_0}\|_{V_p}+\|\mathcal{X}_{y_0}-f_{y_0}\|+\|f_{x_0}-f_{y_0}\|_{V_p}\\
\leq&1/4+1/4+\|f_{x_0}-f_{y_0}\|_{V_p},
\end{aligned}$$

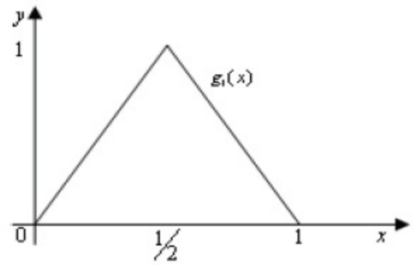
así, $\|f_{x_0}-f_{y_0}\|_{V_p}>1/2$; de lo cual podemos concluir que $f_{x_0}\neq f_{y_0}$, esto es, para cada $x_0\in(a,b)$ se obtiene $f_{n_0}^{x_0}\in M$, y como el intervalo (a,b) es no numerable, entonces la cantidad de $\{f_{n_0}^{x_0}\}$ en M, es no numerable, por lo que M es no numerable, obteniendo así que V_p es no separable. ■

Teorema 2.13. *Existe una sucesión de funciones de p-variación acotada, tal que* $\inf\limits_{n}\|f_n\|_{V_p}>0$.

Demostración. La demostración del teorema consiste en encontrar una sucesión de funciones de p-variación acotada, que cumpla la condición $\inf\limits_{n}\|x_n\|>0$ y cuya serie infinita es débil incondicionalmente convergente.

Consideremos las funciones $g_n(x)$ definidas según el siguiente esquema:

$$g_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ -2x + 2 & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

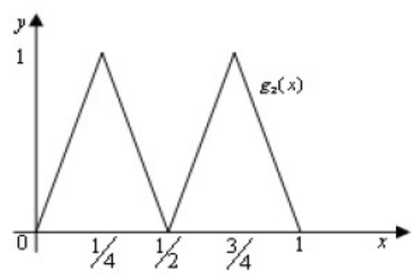


Notemos que, en el intervalo $[0, 1/2]$ la función g_1 es creciente y en el intervalo $[1/2, 1]$ es decreciente, de aquí se tiene que,

$$V_1(g_1, 0, 1/2) = g_1(1/2) - g_1(0) = 1 - 0 = 1,$$
$$V_1(g_1, 1/2, 1) = g_1(1/2) - g_1(1) = 1 - 0 = 1.$$

Luego, $V_1(g_1, 0, 1) = V_1(g_1, 0, 1/2) + V_1(g_1, 1/2, 1) = 2$.

$$g_2(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \in [0, 1/4] \\ -4x + 2 & \text{si } x \in [1/4, 1/2] \\ 4x - 2 & \text{si } x \in [1/2, 3/4] \\ -4x + 4 & \text{si } x \in [3/4, 1] \end{cases}$$



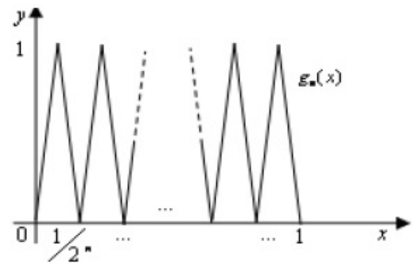
De la misma forma que en el caso anterior, se tiene que,

$$V_1(g_2, 0, 1/4) = g_2(1/4) - g_2(0) = 1 - 0 = 1,$$
$$V_1(g_2, 1/4, 1/2) = g_2(1/4) - g_2(1/2) = 1 - 0 = 1,$$
$$V_1(g_2, 1/2, 3/4) = g_2(3/4) - g_2(0) = 1 - 0 = 1,$$
$$V_1(g_2, 3/4, 1) = g_2(3/4) - g_2(1) = 1 - 0 = 1.$$

Luego $V_1(g_2, 0, 1) = V_1(g_2, 0, 1/4) + V_1(g_2, 1/4, 1/2) + V_1(g_2, 1/2, 3/4) + V_1(g_2, 3/4, 1) = 4$, así $V_1(g_2, 0, 1) = 2^2$.

Continuando con un procedimiento similar se obtiene que,

$$g_n(x) = \begin{cases} 2^n x - 2k & \text{si } x \in \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right] \qquad (k = 0, ..., 2^{n-1} - 1) \\ -2^n x + 2k & \text{si } x \in \left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right] \qquad (k = 1, ..., 2^{n-1}) \end{cases}$$



Donde $V_1(g_n) = 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, las funciones $g_n(x)$ es de 1-variación acotada con $V_1(g_n) = 2^n$. En consecuencia, g_n es de p-variación acotada en $[0,1]$, con $V_p(g_n) \leq 2^{n/p}$, para todo $1 \leq p < \infty$.
Consideremos ahora las funciones

$$f_n(x) = 2^{-n/p} g_n(x) \qquad (n = 1, 2, ...),$$

para las cuales tenemos que

$$V_p(f_n) = V_p(2^{-n/p} g_n) = 2^{-n/p} V_p(g_n) \leq 2^{-n/p} 2^{n/p} = 1.$$

Por lo que

$$V_p(f_n) \leq 1. \tag{2.24}$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la partición $\xi = \{t_i\}_{i=1}^{2^n}$ donde $t_i = \dfrac{i}{2^n}$, tendremos que

$$\begin{aligned}
V_p(f_n, \xi) &\geq \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \left| 2^{-n/p} 2^n \frac{2k+1}{2^n} - 2k - 2^{-n/p} 2^n \frac{2k}{2^n} + 2k \right|^p \\
&+ \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \left| 2^{-n/p} \left[-2^n \frac{2k}{2^n} + 2k \right] - 2^{-n/p} \left[-2^n \frac{2k-1}{2^n} + 2k \right] \right|^p \\
&= \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \left| 2^{-n/p}(2k+1) - 2^{-n/p} 2k \right|^p \\
&+ \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \left| 2^{-n/p} [-2k] - 2^{-n/p} [-(2k-1)] \right|^p \\
&= \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \left| 2^{-n/p} \right|^p + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \left| 2^{-n/p} \right|^p \\
&= 2^{n-1} 2^{-n} + 2^{n-1} 2^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Así de esta última igualdad y (2.24) se obtiene que $V_p(f_n) = 1$, en consecuencia,

$$\inf_n \|f_n\|_{V_p} = \inf_n V_p(f_n) = 1 > 0.$$

■

§2.6. Espacio $C_p[a, b]$

El módulo de la continuidad es una manera exacta de medir la suavidad de una función. Steffens [20] atribuye el primer uso de Omega para el módulo de la continuidad a Lebesgue [12] donde Omega refiere a la oscilación de una transformación de Fourier. De la Valleé Poussin en 1919 [3] menciona ambos nombres "módulo de continuidad" y "módulo de la oscilación". El concepto de p-continuidad absoluta aparece pro primera vez en 1937, introducido por Love y Young en [13].

Definición 2.5. *Sea $p > 1$, se denomina **módulo de p-continuidad** de la función f al valor*

$$\omega_p(\delta)(f) = \sup_{\pi_\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{1/p} \tag{2.25}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi_\delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ del intervalo cerrado $[a, b]$ para los que se cumple $t_i - t_{i-1} < \delta$ para toda $1 \leq i \leq n$.

Observación 2.1. *En la sección del espacio $V_p[a, b]$ se demostró que para una función cualquiera de p-variación acotada en $[a, b]$ y un punto c cualquiera se cumple que:*

$$(V_p^p(f; a, c) + V_p^p(f; c, b))^{1/p} \leq V_p(f).$$

Ahora si $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$ entonces con una prueba similar a la del epígrafe 2.19 se tiene la acotación

$$\left(\sum_{i=1}^{n} V_p^p(f; t_{i-1}, t_i) \right)^{1/p} \leq \omega_p(\delta)(f). \tag{2.26}$$

Proposición 2.14. *Para dos funciones f y g de p-variación acotada en $[a, b]$ se cumple la desigualdad:* $\omega_p(\delta)(f + g) \leq \omega_p(\delta)(f) + \omega_p(\delta)(g).$

Demostración. Sean f, g funciones de p-variación acotada en $[a,b]$ y $\xi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a,b]$. Luego, haciendo uso de las desigualdad de Minkowski obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^{n} |(f+g)(t_i) - (f+g)(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \\
= & \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) + g(t_i) - f(t_{i-1}) - g(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \\
\leq & \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \\
\leq & \ \omega_p(\delta)(f) + \omega_p(\delta)(g).
\end{aligned}$$

Dado que esta desigualdad se cumple para cada partición ξ de $[a,b]$, se obtiene que

$$\omega_p(\delta)(f+g) \ \leq \ \omega_p(\delta)(f) + \omega_p(\delta)(g).$$

■

Definición 2.6. *Una función f de $V_p[a,b]$ se dice **absolutamente p-continua** si se cumple*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta)(f) = 0.$$

Se denotará al conjunto de las funciones absolutamente p-continua en $[a,b]$ por $C_p[a,b]$. Esto es,

$$C_p[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \in V_p[a,b] \quad y \quad \lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta)(f) = 0 \right\}.$$

Si consideramos ahora la norma del supremo para $p = \infty$, entonces $C_\infty[a,b] = C[a,b]$ es el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ con el valor inicial $f(a) = 0$. Pues, en ese caso es

$$\omega_\infty(\delta)(f) = \sup\left\{|f(x) - f(y)|;\ |x-y| < \delta \quad \text{y} \quad x,y \in [a,b]\right\}.$$

Teorema 2.15. *$C_p[a,b]$ es un subespacio cerrado de $V_p[a,b]$ para todos $1 < p < \infty$.*

Demostración. Por definición tenemos que $C_p[a,b] \subseteq V_p[a,b]$. Para verificar que $C_p[a,b]$ es un subespacio es suficiente combinar los teorema 2.5 y 2.14. Es suficiente verificar que el conjunto contiene todos sus puntos de acumulación. En efecto, sea

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $C_p[a,b]$, que converge a una función f de $V_p[a,b]$, esto es, para $\epsilon > 0$ existe un número natural n_ϵ tal que

$$\|f_n - f\|_{V_p} < \epsilon/2 \quad \text{para cada} \quad n \geq n_\epsilon. \tag{2.27}$$

Ahora bien, para toda partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \\
= & \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f_n(t_i) + f_n(t_i) - f_n(t_{i-1}) + f_n(t_{i-1}) - f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \\
= & \left(\sum_{i=1}^{n} |(f - f_n)(t_i) - (f - f_n)(t_{i-1}) + f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \\
\leq & \left(\sum_{i=1}^{n} |(f - f_n)(t_i) - (f - f_n)(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \\
\leq & \ \omega_p(\delta)(f - f_n) + \omega_p(\delta)(f_n).
\end{aligned}$$

Dado que la desigualdad se cumple para toda partición ξ de $[a,b]$ se tiene que

$$\omega_p(\delta)(f) \leq \omega_p(\delta)(f - f_n) + \omega_p(\delta)(f_n).$$

Luego, en virtud de la observación 2.1 y (2.27) se tiene que

$$\omega_p(\delta)(f) < \epsilon/2 + \omega_p(\delta)(f_n) \quad \text{para todo} \quad n \geq n_\epsilon.$$

En particular,

$$\omega_p(\delta)(f) < \frac{\epsilon}{2} + \omega_p(\delta)(f_{n_\epsilon}). \tag{2.28}$$

Ahora bien, dado que cada $f_{n_\epsilon} \in C_p[a,b]$ se tiene que $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_p(\delta) f_{n_\epsilon} = 0$, en consecuencia, podemos elegir $\delta_\epsilon > 0$ de manera que

$$|\delta| < \delta_\epsilon \implies \omega_p(\delta) f_{n_\epsilon} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.29}$$

Así, de (2.28) y (2.29) se tiene que para

$$|\delta| < \delta_\epsilon \implies \omega_p(\delta)(f) < \frac{\epsilon}{2} + \omega_p(\delta)(f_{n_\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

esto es, $\lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta) f_n = 0$, con lo cual se verifica que $f \in C_p[a,b]$ y en consecuencia este último conjunto contiene todos sus puntos de acumulación.

■

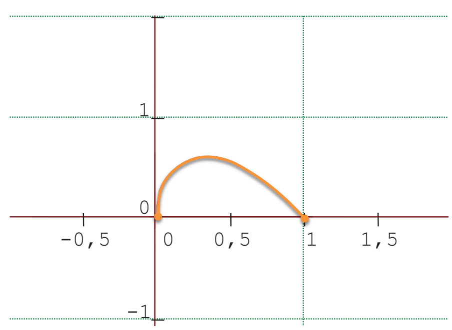
Observación 2.2. *Toda función absolutamente p-continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ es continua en el mismo intervalo.*

El recíproco de la observación anterior no es cierto en general. El siguiente ejemplo presenta una función continua en un intervalo cerrado, que no es de p-variación acotada en el mismo intervalo y en consecuencia no es absolutamente p-continua.

Ejemplo 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/p} \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & si \qquad x \in (0,1], \\ 0 & si \qquad x = 0. \end{cases}$$

donde p es un número real cualquiera con $p \geq 1$.



Demostración. *Sea $\xi : 0 = t_{2n+1} < t_{2n} < ... < t_1 = 1$ una partición del intervalo cerrado $[0,1]$ con $t_i = \frac{1}{i}$, entonces para $k = 1, ..., n$ es*

$$f(t_{2k-1}) = 0 \qquad y \qquad f(t_{2k}) = (-1)^k \left(\frac{1}{2k}\right)^{1/p}.$$

En este caso,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{2n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^q\right)^{1/q}\\
&= \left(\sum_{t:i \text{ sea par}}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^q+\sum_{t:i \text{ sea impar}}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^q\right)^{1/q}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{2k}\right)^{q/p}\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Esta última serie diverge para $q \leq p$. Entonces para $q \leq p$ existe una sucesión $\{\xi_n\}$ de particiones de $[0,1]$, tales que las sumas

$$\left(\sum_{i=1}^{2n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^q\right)^{1/q}$$

constituyen una sucesión creciente no acotada y con ello la función dada no es de q-variación acotada en el intervalo $[0,1]$, por lo que tampoco es de p-variación acotada para $q \leq p$ en el mismo intervalo y así tampoco es absolutamente p-continua.

Teorema 2.16. *Una función f de p-variación acotada en $[a,b]$ es absolutamente p-continua $(1 < p < \infty)$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$, tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|f(\alpha_i)-f(\beta_i)|^p\right)^{1/p} < \epsilon,$$

para todo conjunto finito de sub-intervalos disjuntos $(\alpha_i,\beta_i)(i=1,...,n)$ de $[a,b]$ para los que se cumple $\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)^p\right)^{1/p} < \delta$.

Demostración. Sea $f \in C_p[a,b]$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} < \epsilon,$$

para toda partición $\pi_\delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ para $1 \leq i \leq n$. Si $(\alpha_i,\beta_i) \subset [a,b]$ $(i=1,...,m)$ es un conjunto finito de sub-intervalos disjuntos tales que

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(\beta_i-\alpha_i)^p\right)^{1/p} < \delta.$$

Entonces $(\beta_i - \alpha_i) < \delta(i = 1, ..., m)$ y por hipótesis se cumple que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |f(\alpha_i) - f(\beta_i)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p} < \epsilon,$$

donde la partición $\xi_\delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$ está formada a partir de los intervalos (α_i, β_i) agregando una cantidad cualquiera de puntos t_{i_k} con

$$\beta_{i-1} < t_{i_1} < ... < t_{i_r} < \alpha_i,$$
$$(t_{i_k} - t_{i_{k-1}}) < \delta, (t_{i_1} - \beta_{i-1}) < \delta, (\alpha_i - t_{i_r}) < \delta.$$

Recíprocamente, sea $\epsilon > 0$, escogemos un número real $\delta > 0$, tal que para todo conjunto finito de sub-intervalos disjuntos $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ $(i = 1, ..., .)$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \alpha_i)^p\right)^{1/p} < \delta,$$

se cumple que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |f(\alpha_i) - f(\beta_i)|^p\right)^{1/p} < \epsilon.$$

Sean

$$\delta' = \left(\frac{\delta^p}{b-a}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{2.30}$$

de esta forma, si $0 < x < \delta'$ entonces $x^{p-1} < \dfrac{\delta^p}{b-a}$ y $\xi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ una partición de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta'$ entonces

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - t_{i-1}|^p}{|t_i - t_{i-1}|} |t_i - t_{i-1}|\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^{p-1} |t_i - t_{i-1}|\right)^{1/p} \\
&< \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^p}{b-a} |t_i - t_{i-1}|\right)^{1/p} \\
&= \frac{\delta}{(b-a)^{1/p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|\right)^{1/p} \\
&= \frac{\delta}{(b-a)^{1/p}} (b-a)^{1/p} \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Dado que $\left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^p\right)^{1/p} < \delta$ la hipótesis nos garantiza que

$$\left(\sum_{i=1} n|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} < \epsilon,$$

concluyendo que f es absolutamente p-continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. ■

Observación 2.3. *Si consideramos $p = 1$, en el teorema anterior, entonces la demostración no funcionaría dado que* (2.30) *no estaría definido.*

Ahora sea f una función absolutamente 1-continua, de modo que para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\omega_1(\delta)(f) = \sup_{\pi_\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|\right) < \epsilon$$

donde $\pi_\delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$. Si t es un punto de $[a, b]$ se escoge una partición $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$, de modo que $t = t_k$ $(1 \leq k \leq n)$ es un punto de la partición, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(a)| &\leq \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&\leq \omega_1(\delta)(f) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Dado que esta desigualdad se cumple para todo $\epsilon > 0$ se obtiene que $f(t) = f(a)$ para todo $t \in [a, b]$, esto es, $f \in C_1[a, b]$ es constante, de esta forma el espacio $C_1[a, b]$ sólo consta da las funciones constantes.
De aquí en adelante consideramos el caso mas general del espacio $C_p[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.17. *Sean $p, q > 1$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ dados, entonces se cumple que:*

$$\sum_{i=1}^{n} V_p(f; t_{i-1}, t_i)V_q(g; t_{i-1}, t_i) \leq \omega_p(\delta)(f)\omega_q(\delta)(g), \tag{2.31}$$

para toda partición $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$ y para dos funciones cualesquiera $f \in V_p[a, b]$ y $g \in V_q[a, b]$.

Demostración. Sean $f \in V_p[a, b]$, $g \in V_q[a, b]$ y $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ una partición de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$, en virtud de la desigualdad de Hölder y haciendo uso de (2.26) se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} V_p(f; t_{i-1}, t_i) V_q(g; t_{i-1}, t_i) &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} (V_p(f; t_{i-1}, t_i))^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} V_q(g; t_{i-1}, t_i))^q\right)^{1/q} \\ &\leq \omega_p(\delta)(f)\omega_q(\delta)(g).\end{aligned}$$

■

Teorema 2.18. *Si la función f pertenece a las clases de Lipchitz $Lip_\alpha[a, b]$ $(0 < \alpha \leq 1)$, entonces f es absolutamente p-continua para todo número real $p > 1/\alpha$.*

Demostración. Sean $p > 1/\alpha$, $f \in Lip_\alpha[a, b]$ $(0 < \alpha \leq 1)$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, donde x, y son puntos cualesquiera de $[a, b]$, $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ para $(1 \leq i \leq n)$ y un número real positivo δ, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|} |t_i - t_{i-1}|\right)^{1/p}.$$

Como $f \in Lip_\alpha[a, b]$, entonces

$$\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|} \leq \frac{M^p |t_i - t_{i-1}|^{\alpha p}}{|t_i - t_{i-1}|} = M^p |t_i - t_{i-1}|^{\alpha p - 1}.$$

Dado que $\alpha p - 1 > 0$

$$\begin{aligned}|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p &< M^p |t_i - t_{i-1}|^{\alpha p - 1} |t_i - t_{i-1}| \\ |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p &< M^p \delta^{\alpha p - 1} |t_i - t_{i-1}| \\ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p &< M^p \delta^{\alpha p - 1} \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| = M^p \delta^{\alpha p - 1}(b - a),\end{aligned}$$

así $\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{1/p} \leq M(b - a)^{1/p} \delta^{\frac{\alpha p - 1}{p}}$.

Esto es, si $p > \frac{1}{\alpha}$, para todo número real $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta = \left(\frac{\epsilon}{M(b - a)^{1/p}}\right)^{\frac{p}{\alpha p - 1}}$ de manera que para cada partición $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ se cumple que $\omega_p(\delta)(f) < \epsilon$,. Por lo que f es absolutamente p-continua con $p > \frac{1}{\alpha}$. ■

Capítulo 3

Funciones vectoriales de p-Variación Acotada

Este capítulo está dedicado a presentar una generalización inmediata de las funciones de p-variación acotada: funciones con p-variación acotada débil. Sin embargo, para ello debemos presentar antes la definición y propiedades de las funciones definidas sobre un intervalo $[a, b]$ con valores en un espacio normado E. La importancia del capítulo radica, en sentar las bases que nos permitan realizar el estudio de la integral abstracta de Stieltjes que conlleve a un teorema análogo al de Representación de Riesz y se encuentra una representación de los operadores lineales y continuos del espacio de las funciones absolutamente p-continuas sobre un intervalo en un espacio normado débilmente completo a través de las funciones abstractas de p-variación acotada.

§3.1. Funciones vectoriales con p-Variación acotada

La p-variación acotada está definida para funciones con dominio en un intervalo cerrado $[a, b]$ y valores reales, por lo tanto es natural pensar en generalizaciones donde se consideren funciones en otro espacio distinto a $\mathbb{R}$, en nuestro caso, funciones con valores en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$.

Definición 3.1. *Sea E un espacio normado, la función $f : [a, b] \to E$ y $1 \leq p < \infty$. Si $\xi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ es una partición de $[a, b]$, se define la p-**variación** (fuerte) de f con* *respecto a ξ por*

$$V_p^E(f,\xi) := \sum_{i=1}^{n} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^p.$$

*Se dice que f es una función de p-**variación acotada** si*

$$V_p^E(f) = \sup_{\xi} \left(V_p^E(f,\xi)\right)^{1/p} < +\infty, \tag{3.1}$$

cuando el supremo se toma sobre el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Como ejemplo inmediato, podemos observar que las funciones constantes son de p-variación acotada; de hecho, note que para cualquier partición ξ de $[a,b]$ se tiene que

$$V_p^E(f,\xi) := \sum_{i=1}^{n} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^p = 0,$$

en consecuencia, $V_p^E(f) = 0$. De hecho, el recíproco también se cumple, como puede verse en el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *$V_p^E(f) = 0$ si y sólo si f es constante.*

Demostración. Ya hemos observado anteriormente que si f es una función constante obtenemos que $V_p^E(f) = 0$. Para verificar el recíproco, supongamos que $V_p^E(f) = 0$ y sea x un punto en $[a,b]$, lo cual determina una partición del intervalo, a saber, $\xi_i := \{a, x, b\} := \{t_0, t_1, t_2\}$. Luego, dado que $V_p^E(f) = 0$, se tiene que $V_p^E(f,\xi) := \sum_{i=1}^{2} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^p = 0$, lo cual implica que $\|f(x) - f(a)\|_E = 0$ y por propiedades de norma se obtiene que $f(x) = f(a)$. Dado que esta igualdad se cumple para cada $x \in (a,b)$ se obtiene que f debe ser constante e igual a $f(a)$ en $[a,b]$.

■

Dados $1 \leq p < \infty$ y un espacio normado E, a la clase de todas las funciones de p-variación acotada en $[a,b]$, que se anulan en a, es denotado por $V_{p,0}^E[a,b]$, esto es:

$$V_{p,0}^E[a,b] = \left\{f : [a,b] \to E; f(a) = 0, \quad V_p^E(f) < \infty\right\}. \tag{3.2}$$

Y como en el caso de funciones de p-variación acotada, de valores reales, se presenta el espacio

$$V_p^E[a,b] = \left\{f : [a,b] \to E; \quad V_p^E(f) < \infty\right\}. \tag{3.3}$$

Se pueden demostrar resultados análogos a los obtenidos en el capítulo anterior que se resumen en los siguientes teoremas:

Teorema 3.2. *Sea E un espacio normado, la función $f : [a, b] \to E$ y $1 \leq p < \infty$.*

1) *f es acotada,*

2) *$g = f \pm a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ es también de p-variación acotada;*

3) *Si $c \in (a, b)$ se tiene que $(V_p^E)^p(f; a, c) + (V_p^E)^p(f; c, b) \leq (V_p^E)^p(f)$;*

Teorema 3.3. *Sea E un espacio normado y $1 \leq p < \infty$.*

1) *$V_q^E \subseteq V_p^E$ si $q < p$;*

2) *La función $(V_p^E)^p(\cdot) : V_p^E[a, b] \to \mathbb{R}$ es convexa y simétrica;*

3) *El espacio $V_{p,0}^E[a, b]$ es un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \| := V_p^E(\cdot)$;*

4) *El espacio $V_p^E[a, b]$ es un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \| := V_p^E(\cdot) + \|f(a)\|$;*

Las demostraciones de estos teoremas se omiten, como ya se dijo antes, sus demostraciones son similares a las presentadas para el caso de funciones con valores reales.

Definición 3.2. *Sea E un espacio normado, se definen las* ***clases de Liptchiz*** *$Lip_\alpha^E[a, b]$ con $0 < \alpha \leq 1$ para funciones $f : [a, b] \to E$ como el conjunto de las funciones que satisfacen la desigualdad*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M|t_1 - t_0|^\alpha, \quad \text{para cada} \quad x, y \in [a, b] \tag{3.4}$$

con M una constante que sólo depende de la función f.

De esta forma se puede enunciar la siguiente propiedad.

Proposición 3.4. *Si $X \in Lip_\alpha^E[a, b] \qquad (0 < \alpha \leq 1)$, entonces $X \in V_p^E[a, b]$.*

Demostración. Sea $f \in Lip_\alpha^E[a, b]$, entonces existen $M > 0$ de manera que f satisface (3.4). Entonces, para una partición $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$, se tiene que cada par de punto de la partición satisface (3.4), en particular, $\|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^p \leq M^p |t_i - t_{i-1}|^{\alpha p}$ para cada i, así,

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^p \leq M^p \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^{\alpha p} \leq M^p \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^p$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^p \right)^{1/p} \leq M(b-a).$$

Dado que la desigualdad se cumple para toda partición ξ de $[a, b]$ se tiene que

$$V_p^E(f) \leq M(b-a).$$

Por lo que f es de p-variación acotada en $[a, b]$. ■

§3.2. p-variación débil

Para comenzar esta sección recordemos, brevemente, algunas definiciones, necesarias para el buen desarrollo de la misma.

Un espacio normado es un para $(E, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial E y una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, llamada norma, con las propiedades siguientes:

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo x,

(ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

(iii) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Todo espacio normado es a su vez un espacio métrico, pues basta, dado $(E, \|\cdot\|)$, definir $d(x, y) = \|x - y\|$. Así, todas las nociones de espacios métricos están definidas también para espacios normados. En particular, los conjuntos

$$B_E = \{x \in E : \|x\| < 1\} \quad \text{y} \quad \overline{B_E} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

son las bolas unitarias abierta y cerrada de E, respectivamente.

Un espacio de normado completo, con la métrica definida por la norma, es llamado espacio de Banach.

Definición 3.3 ([1]). *Sean X y Y espacios vectoriales con campo de escalares $\mathbb{K}$. La función $T : X \to Y$ es llamada **Operador Lineal** si, para $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:*

1) *T es lineal, es decir, $T(x+y) = T(x) + (y)$,*

2) *T es homogéneo, es decir, $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.*

Un funcional es un operador cuyo rango está en el conjunto $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el cual denotaremos por $\mathbb{K}$. Un funcional lineal es un operador lineal $f : E \to \mathbb{K}$, donde E es un espacio vectorial. Un **funcional lineal acotado** es un operador lineal acotado cuyo rango está en $\mathbb{K}$, el cuerpo de escalares de E; es decir, si existe $K > 0$ de manera que

$$|f(x)| \leq K\|x\|, \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Se define la norma de f del mismo modo que el caso de operadores lineales, y se verifican las mismas propiedades obtenidas en el caso general.

Definición 3.4. *Sea E un espacio normado. **El espacio dual** de E, o conjugado de E, que denotaremos por E^*, es el espacio vectorial de todos los funcionales lineales continuos sobre E. Esto es,*

$$E^* = \{f^*; f^* : E \to \mathbb{K} \quad \textit{tal que} \quad f^* \quad \textit{es lineal y continuo}\},$$

donde $\mathbb{K}$ es un campo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

La suma y multiplicación de elementos de E^* son definidos por

$$(f_1^* + f_2^*)(x) := f_1^*(x) + f_2^*(x), \qquad (\alpha f_1^*)(x) := \alpha . f_1^*(x).$$

Además, E^* es un espacio de Banach con la norma definida por $\|f^*\|_{E^*} := \sup\limits_{x \in B_E} |f^*(x)|$, donde $B_E := \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$.
Es importante recordar que este espacio siempre será completo por serlo el cuerpo de escalares de E.
Teniendo presente estas definiciones, podemos determinar qué funciones pueden tener p-variación acotada débil.

Definición 3.5. *Sea E un espacio normado. La función $f : [a, b] \to E$ se dice que es de p-**variación acotada débil** en $[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, si y sólo si para todo $f^* \in E^*$ la función real $f^* f(\cdot)$ es de p-variación acotada en $[a, b]$ (Ver definición 2.1).*

De forma similar como la clase anterior, sea $1 \leq p < \infty$ y un espacio normado E, a la clase de todas las funciones de p-variación acotada débil en $[a, b]$, la denotaremos por

$$V^E_{p,w,0}([a, b]) = \{f : [a, b] \to E; f(a) = 0,\ f^*f \in V_p[a, b] \quad \forall\ f^* \in E^*\}, \tag{3.5}$$

y de forma similar se define

$$V^E_{p,w}([a, b]) = \{f : [a, b] \to E;\ f^*f \in V_p[a, b] \quad \forall\ f^* \in E^*\}. \tag{3.6}$$

El siguiente lema nos presenta un relación de inclusión entre estos dos espacios.

Lema 3.5. *La clase de las funciones de p-variación acotada $V^E_p([a, b])$ es subconjunto de la clase de las funciones de p-variación acotada débil, $V^E_{p,w}([a, b])$.*

Demostración. Sean $f \in V^E_p([a, b])$, $\xi = \{t_i\}^n_{i=0} \in [a, b]$ y $f^* \in E^*$, entonces en virtud de la linealidad y acotabilidad de f^* se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f^*f(t_i) - f^*f(t_{i-1})|^p &= \sum_{i=1}^{n} |f^*(f(t_i) - f(t_{i-1}))|^p \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|f^*\|^p \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^p \\ &\leq \|f^*\|^p V^E_p(X)^p, \end{aligned}$$

esto es, $(V_p(f^*f))^p \leq \|f^*\|^p V^E_p(f)^p$, luego $f \in V^E_{p,w}([a, b])$. ■

§3.3. Continuidad Débil

Definición 3.6. *Sean E un espacio normado y $f : [a, b] \to E$ una función. Se dice que f es* ***continua débilmente*** *en x, si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $[a, b]$ tal que $x_n \to x_0$ se tiene que $f(x_n) \overset{\omega}{\to} f(x)$, esto es, para toda $f^*f(x_n) \to f^*f(x)$.*

Proposición 3.6. *Si $f \in V^E_{p,w}([a, b])$, siendo E débilmente completo, entonces el conjunto de discontinuidades débil de f es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sea $f \in V^E_{p,w}([a, b])$, esto significa que para todo $f^* \in E^*$ se tiene que $f^*(f)$ es una función de p variación acotada, así el teorema 2.11 nos garantiza que $f^*(f)$ tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades, esto es, f tiene una cantidad a lo más numerable de discontinuidades débiles. ■

Proposición 3.7. *Sea la función $F : [a, b] \to E^*$ y consideremos la función real $t \mapsto F(t)(x)$ con $x \in E$ fijo. Si $F \in V_p^{E^*}[a, b]$ entonces $F(\cdot)(x) \in V_p[a, b]$. De ello se deduce que: Para $f^{**} \in E^{**}$ la función $t \mapsto f^{**}F(t)$ es de p-variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Comencemos verificando que si $F \in V_p^{E^*}[a, b]$ entonces $F(\cdot)(x) \in V[a, b]$ para cada $x \in E$ fijo. En efecto, sea $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ una partición de $[a, b]$, entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |F(t_i)(x) - F(t_{i-1}(x))|^p &= \sum_{i=1}^{n} |(F(t_i) - F(t_{i-1}))(x)|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|F(t_i) - F(t_{i-1})\|^p \|x\|_E^p \\
&= \|x\|_E^p \sum_{i=1}^{n} \|F(t_i) - F(t_{i-1})\| \\
&\leq \|x\|_E^p (V_p^{E^*}(F))^p. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Dado que la desigualdad se cumple para toda partición ξ de $[a, b]$ se sigue que $F(\cdot)(x) \in V_p[a, b]$ y $VF(\cdot)(x) \leq \|x\|_E V_p^{E^*}(F)$ para cada $x \in E$.
Consideremos ahora $f^{**} \in E^{**}$ y $\xi = \{t_i\}_{i=0}^n$ una partición de $[a, b]$, en virtud de las propiedades de los funcionales lineales f^{**}, $F(\cdot)$, propiedades del supremo y (3.7) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f^{**}(F(t_i)) - f^{**}(F(t_{i-1}))|^p &= \sum_{i=1}^{n} |f^{**}(F(t_i) - F(t_{i-1}))|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|f^{**}\|^p \|F(t_i) - F(t_{i-1})\|^p \\
&= \|f^{**}\|^p \sum_{i=1}^{n} \|F(t_i) - F(t_{i-1})\|^p \\
&\leq \|f^{**}\|^p \sum_{i=1}^{n} \sup_{\|x\| \leq |} |[F(t_i) - F(t_{i-1})](x)|^p \\
&= \|f^{**}\|^p \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{i=1}^{n} |[F(t_i) - F(t_{i-1})](x)|^p \\
&\leq \|f^{**}\|^p \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|_E^p (V_p^{E^*}(F))^p \\
&= \|f^{**}\|^p (V_p^{E^*}(F))^p.
\end{aligned}
$$

Así, $V_p(f^{**}F) \leq \|f^{**}\| V_p^{E^*}(F)$, quedando demostrado que $t \mapsto f^{**}F(t)$ es de p-variación acotada.

■

Los siguientes teoremas tratan sobre la representación general de operadores lineales y continuos que aplican a un espacio normado E en el espacio $V_p[a, b]$ de las funciones de p-variación acotada en $[a, b]$.

Teorema 3.8. *Sean E un espacio normado y $F : [a, b] \to E^*$ tal que $F \in V_p^{E^*}[a, b]$. Entonces la aplicación $U : x \mapsto F(t)(x)$ es un operador lineal continuo que aplica al espacio E en el espacio $V_p[a, b]$.*

Demostración. Sea $x \in E$, dado que $F : [a, b] \to E^*$ el teorema 3.7 nos garantiza que la función $t \longmapsto F(t)(x)$ es de p-variación acotada para cada $x \in E$, esto es, U aplica al espacio E en $V_p[a, b]$. La linealidad de U se sigue de la linealidad de cada $F(t) \in E^*$. La continuidad de sigue nuevamente del teorema 3.7.

■

Teorema 3.9. *Para cada operador lineal continuo $U : E \to V_p[a, b]$ existe una función $f \in V_p^{E^*}[a, b]$, tal que puede ser representado en la forma $U : X \mapsto f(t)(X)$.*

Demostración. Sea $U : E \to V_p[a, b]$ un operador lineal y continuo, tal que $U : X \mapsto \phi$ y sea t fijo. Entonces la aplicación $F_t : X \mapsto U(t)(X)$ es un funcional lineal sobre E, el cual es continuo por ser composición de aplicaciones lineales continuas, es decir, $F_t \in E^*$ para cada $t \in [a, b]$ y $\phi : t \mapsto F_t$ para cada $X \in E$. Como $\phi \in V_p[a, b]$, si se define $f : t \mapsto F_t$, entonces f es una función de p-variación acotada débil en $[a, b]$ y, por la forma en que se construyo f resulta que el operador se puede escribir en la forma $U(X) = \phi(t) = f(t)(X)$. ■

Referencias

[1] Bachman G., NARICI L. *Functional Analysis.* Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[2] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag , New York, 1985.

[3] Ch. de la Vallée Poussin, *Réelle de la variable del dúne de los fonctions del DES de Lápproximation*, Gauthier-Villars, París, 1952 (reimpresión de la edición 1919).

[4] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, (1984), 261 págs.

[5] Dirichelt, P. L., *Sur la convergence des séries trigonemétriques que servent á représenter une function arbitraire entre des limites donnés*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4 (1826), 157-159.

[6] R. M. Dudley and R. Norvaiša. *To p-variation and Young integrals.* Notes for a course in Aarhus, January 1999.

[7] R. M. Dudley, *Fréchet differentiability, p-variation and uniform Donsker Classes.* The annals of Probability. 1992, Vol. 20, N° 4, 1968-1982.

[8] Fink H., Klüppelber C., *Fractional Lévy driven Ornstein-Uhlenbeck processes and stochastic differential equations*, Center for Mathematical Sciences, Technische Universität München, D-85747 Garching, Germany, April, 2010.

[9] J. Fourier, *The analytical of Heat*, Traslated by A. Freeman, Dover Publications, Inc., New York, (1955).

[10] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos, V. Zizler, V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*,Springer-Verlag , 2001.

[11] C. Jordan, *sur la série de fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2 (1881), 228-230.

[12] H. Lebesgue, *singulières de los intégrales de los les de Sur*, Anuncio. Fac. Sci. Univ. Toulouse, ser 3 vol. 1, 1909, 25-117, reproducido en: Henri Lebesgue, Scientifiques de Œuvres, Vol. 3. , pp. 259-351.

[13] E.R Love, L.C. Young, *Sur une Classe de fonctionelles lineaires Fundamenta Mathematica*, 28, Warszawa, 1937.

[14] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić and A.M. Fink, *Classical and New inequalities in Analysis.*Kluwer Academic Publischers. Londo. 1993.

[15] R. Milian Pérez, *El álgebra de las funciones de p-variación acotada*, Tesis presentada en opción al grado de Licenciado en Matemática, La Habana, 2008.

[16] I. P. Natanson, *Theory of Functions of Real variable*, Vol I, rev. ed, Ungar, New York. 1961.

[17] Y. Puig de Dios, *Espacios de Funciones Abstractas de p-Variación Acotada*. Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2007 14(2): 165–176.

[18] Roldán Inguanzo, R. (1989) Raüme von Folgen und Funktionen von beschr¨ankter p-Variation. Tesis de Doctorado, Friedrich Schiller Universit¨at de Jena, Alemania.

[19] H.L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan Pub., New York, 1988.

[20] K. G. Steffens, *La historia de la teoría de la aproximación*, Birkhäuser, Boston 2006.

[21] Michael Spivak. *Cálculo Infinitesimal* (Vol. 1 y 2). Editorial Reverté: Barcelona, 1970.

[22] G. Vitali, *Sulle Funzioni Integrali*, Atti Accad. Schi. Torino CI Sci. Fis. Mat. Natur. 40 (1904-05), 1021-2034.

[23] Wiener N., *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*, Massachusetts J. Math., 3 (1924), 72-94.

[24] Young, L. C., *Sur une généralisation de la notion de variation p-ième bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. París 207 (7), 1937, 470-472 (French).