UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Comportamiento Asintótico de las Soluciones de una Ecuación Integrodiferencial”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Glennimar Heneidy Carreño Suárez

como requisito final
para obtener el título de Licenciada
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Ecuaciones Diferenciales.
Tutor: MSc. Liliana Pérez

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2012

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN INTEGRODIFERENCIAL"

Presentado por la ciudadana GLENNIMAR HENEIDY CARREÑO SUÁREZ titular de la Cédula de Identidad Nº 18.262.221. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

---

[1] Aprobado ó Reprobado

*A **Dios** por darme la sabiduría para terminar este trabajo y a **mis Padres** por todo su apoyo incondicional.*

Agradecimientos

Ante todo, primero quiero agradecerle a **Dios**, por haberme dado sabiduría y la fortaleza en todo este trayecto, al no dejarme desmayar para así cumplir esta meta y enseñarme que la mejor herramienta para alcanzar el éxito es mucha constancia y dedicación.

A mis padres **Ramón** y **Pastora** por ser mi mayor pilar y darme todo su amor, su apoyo incondicional y sus buenos consejos durante todo este tiempo y así poder concretar esta meta y de este modo darme la mayor herencia que pudiesen darme.

A mis hermanos **Yosneidy** y **Gleiber** por su amor y su presencia ya que está me ha motivado a seguir adelante cada día.

A mi Abuela y a mis Tíos y Tías y por todo su apoyo durante todo este tiempo.

A mis Amigos incondicionales **Marcos**, **Joan**, **Datsy**, **Yenny**, **Wilyorlectt**, **Daniel** y **Dannymar**, ya que han estado junto a mí en todos los momentos difíciles que se me presentaron durante todo este camino y me dieron siempre una palabra de aliento, cuando me sentí desmayar siendo así participes de la culminación de esta meta tan importante para mí.

A mis Amigos y Compañeros de la universidad: Thomas, Francisco, Kissy, Emelyn, Hector, Javier, José, Ana, Jeferson, Aura, Elvis, Juan Carlos, Joelviz, Eleiny, Elismar entre otros. Ya que todos ellos compartieron junto a mi todo este trayecto, me brindaron su ayuda y confianza cada vez que los necesite.

A todos mis compañeros de Promoción por su ayuda y compañia en este ultimo semestre que compartimos.

A la profesora **Liliana Pérez** por darme la oportunidad de ser su tesista, haberme orientado y sido tan comprensiva conmigo durante todo este tiempo de tesis.

A todos los profesores que me impartieron clases, ya que de una u otra manera contribuyeron a mi formación académica.

Y a todas aquellas personas que forman parte de mi vida.

Muchas Gracias a Todos ahora más que nunca, les acredito mi cariño, agradecimiento y respeto...

"Comportamiento Asintótico de las Soluciones de una Ecuación Integrodiferencial"

Resumen

En este trabajo consideraremos la ecuación integro-diferencial

$$N'(t) = N(t)\left[a(t) - b(t)\int_0^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right] \text{si} \quad t > 0 \tag{1}$$

junto con las condiciones iniciales siguiente

$$N(t) = \phi(t) \quad \text{si} \quad t \leqslant 0 \tag{2}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones positivas, continuas, y acotadas superior e inferiormente, y además $\phi \in FC$, y los núcleos $K : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ son funciones continuas que satisfacen

$$\int_0^{+\infty} k(s)ds = 1, \qquad \sigma \equiv \int_0^{+\infty} sk(s)ds < +\infty \qquad \text{y} \qquad \xi \equiv \int_0^{+\infty} s^2k(s)ds < +\infty.$$

El objetivo de este trabajo, es demostrar que si se satisfacen la hipótesis $\int_0^{+\infty} s^2k(s)ds < +\infty$ y $b_0 > \widehat{M}(b^0)\sigma$ donde $\widehat{M} = \dfrac{a^0}{b_0\int_0^{\infty} k(s)e^{-a^0s}ds}$ entonces existe una única solución $N^*(t)$ de (1) tal que $N(t) - N^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ para cualquier solución $N(t)$ de (1).

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

La matemática cada vez está jugando un papel muy importante en las ciencias, provocando así el desvanecimiento de las fronteras en las disciplinas científicas y el resurgimiento del interés en las técnicas tanto modernas como clásicas de las matemáticas aplicadas. En el área de Ecología, que es la ciencia que estudia las relaciones entre el hombre y en general con los organismos vivos con el medio ambiente, es frecuente que una especie sea presa de otra, de manera que ambas poblaciones están relacionadas en una estructura. Durante los años 20, el matemático Italiano Vito Volterra (1860-1940) y el biólogo americano Alfred J. Lotka (1880-1949) desarrollarón el modelo matemático de la competencia de dos especies con recursos limitados en un medio cerrado, y que se conoce como modelo de Lotka-Volterra.

Es bien conocido que los ambientes de mayor población cambian con el tiempo y esto en cambio introduce un crecimiento en las caracteristicas de la población. En primera instancia las condiciones de ambientes favorables estimulan un incremento del tamaño de la reproducción mientras que en los ambientes no favorables pueden conducir a que decline el crecimiento de la natalidad y halla un incremento de la mortalidad.

Las variaciones temporales de un ambiente de población, son usualmente incorporadas en el modelo de sistemas, por la introducción de un parámetro de tiempo dependiente en ecuaciones controladas, tales ecuaciones controladas son no autónomas y el estudio de las ecuaciones no autónomas no alcanzan el nivel satisfactorio de madurez, comparado con las ecuaciones autónomas. En trabajos más recientes, Golpalsamy ha realizado un extenso análisis de multiespacios dinámicos en un ambiente temporalmente uniforme, controlado por ecuaciones diferenciales autónomas con distribuciones de retardo discretas y continuas. Además en el artículo de Golpalsamy [3] se derivan un conjunto de condiciones algebraicas suficientes para la existencia de un atractor global con solución positiva casi periódica de la ecuación logística integro-diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)\left[a(t) - b(t)\int_0^{+\infty} K_\alpha(s)N(t-s)ds\right] \quad t \geqslant 0, \quad \alpha \in (0, +\infty) \qquad (3)$$

en la cuál $a(t)$, $b(t)$ son funciones positivas, casi periódicas definidas en $[0, +\infty)$ y $K_\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es continua a trozos e integrable en $[0, +\infty)$ para cada $\alpha \in [0, +\infty)$. Para una discusión general de una ecuación integrodiferencial casi periódica con y sin retardo nos referimos a los trabajos de Fink [1], Yoshizawa [5] y [6], y Corduneanu [7]. Además en el artículo de Golpalsamy [3] se hace una generalización de los resultados de Zhang y Golpalsamy en [8], [9] y de Golpalsamy en [10], donde se estudiaron las ecuaciones de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t)\left[1 - \frac{x(t-n)\tau}{K(t)}\right] \qquad (4)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = r(t)v(t)\left[1 - \frac{v(t-\tau(t))}{K}\right] \qquad (5)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)\left[a(t) - b(t)\int_0^{+\infty} K(s)N(t-s)ds\right] \qquad (6)$$

cuyos coeficientes son funciones periódicas positivas con un periodo en común. Es de hacer notar que aunque las ecuaciones integro diferenciales (1.1) y (1.4) son semejantes, en la ecuación (1.1) los coeficientes a y b son funciones casi periódicas, mientras que en la ecuación integro diferencial (1.4), los coeficientes a y b son periodicos con un periódo común. Las distintas componentes de la biología y de algunos entornos físicos de un sistema de población pueden ser periódicos, con un periodo racionalmente independiente, y por tanto no es razonable considerar los distintos parámetros de los sistemas modelos, ya que estos están cambiando casi periódicamente en lugar de periódicamente con periodo común.

Existe una bibliografía extensa sobre ecuaciones diferenciales con coeficientes periodicos y sus aplicaciones por ejemplo nos referimos a los artículos de Arino et al

[11], Burton [12], Cushing [13], Golpalsamy [14] y [15], Halanay [16], Hamaya [17], Nisbet y Gurney [18], Qichang [19] y Zhang y Golpalsamy [20]. Sobre sistemas integrodiferenciales casi periódicos que modelan poblaciones dinámicas, podemos citar a Seifer [21] y [22], Murakamy [23], Hamaya y Yoshizawa [24]. Los análisis y los resultados de estos autores dependen crucialmente de la suposición de que existen mecanismos que establecen una retroalimentación negativa en actos dinámicos sin retrazo, aunque los métodos de análisis de estos autores no son directamente aplicables a las ecuaciones de la forma (1.1).

El siguiente trabajo se conformo en base a dos capítulos, los cuáles son: Preliminares donde se colocaron los conceptos necesarios, para la realización de este trabajo y el capítulo de Estabilidad de las soluciones que es donde se desarrolla todo el trabajo, además el objetivo de este capítulo es demostrar que, si se satisfacen la hipótesis $\int_0^{+\infty} s^2 k(s)ds < +\infty$ y $b_0 > \widehat{M}(b^0)\sigma$ donde $\widehat{M} = \dfrac{a^0}{b_0 \int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds}$ entonces existe una única solución $N^*(t)$ de (2.1) tal que $N(t) - N^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ para cualquier solución $N(t)$ de (1).

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

El tema de las ecuaciones diferenciales constituye una rama amplia y muy importante de la matemática moderna. Desde los primeros tiempos del cálculo, tal tema ha sido un área de gran importancia teórica y aplicaciones prácticas, y aún continúa siéndolo en nuestros días. En este capítulo se presentan algunos resultados básicos de ecuaciones diferenciales y análisis que serán de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo.

§1.1. Teoría Básica

Definición 1.1. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua y acotada. Denotaremos por*

$$f_0 = \text{ínf}\{f(t) : t \in Dom(f)\}, \quad y \quad f^0 = \sup\{f(t) : t \in Dom(f)\}.$$

Definición 1.2. *Una función* $K : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continua, no negativa y con la propiedad* $\int_0^{+\infty} k(s)ds = 1$*, se denomina nucleo normalizado.*

Observación 1.1. *Denotaremos como* FC *al siguiente conjunto:*

$$\phi \in FC = \{\phi : (-\infty, 0] \to [0, \infty)/\phi(0) > 0, \quad continua \quad y \quad acotada\}.$$

Este conjunto, se conoce como conjunto de las funciones iniciales.

Definición 1.3. *Sea* $f : X \to Y$*. Se dice que* f *es una función continua si dado* $\varepsilon > 0$*, para cada* $x \in X$ *se puede encontrar un* $\delta > 0$ *tal que* $y \in X$*,* $|x - y| < \delta$ *implica* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$*.*

DEFINICIÓN 1.4. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$, diremos que f es acotada si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in X$.*

DEFINICIÓN 1.5. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que existen los números reales U y V que satisfacen las siguentes condiciones:*

i) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $n > N$ implica*

$$a_n < U + \varepsilon.$$

ii) *Dado $\varepsilon > 0$ y dado $m > 0$, existe un entero $n > m$ tal que*

$$a_n > U - \varepsilon.$$

U se llama el límite superior de $\{a_n\}$ y se escribe $U = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

iii) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $n > N$ implica*

$$a_n > V - \varepsilon.$$

iv) *Dado $\varepsilon > 0$ y dado $m > 0$, existe un entero $n > m$ tal que*

$$a_n < V + \varepsilon.$$

V se llama el límite inferior de $\{a_n\}$ y se escribe $V = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

TEOREMA 1.1. ***(Criterio de Weierstrass para convergencia uniforme de integrales impropias)*** *Supongamos que f es localmente integrable con respecto a x sobre $[a, b)$ y $|f(x, y)| \leqslant M(x)$ si $x_0 \leqslant x < b$ para cada $y \in S$, donde $\int_a^b M(x)dx < +\infty$. Entonces $\int_a^b f(x, y)dy$ converge uniformemente en S.*

Demostración. Ver la prueba en [25] lema 33.3 pag 268.

TEOREMA 1.2. *Sean $f(x, y)$ y $D_2f(x, y)$ funciones continuas en $[a, +\infty) \times (c, d]$ donde $D_2f(x, y)$ es la parcial de f con respecto a y. Supongamos que para $y \in [c, d]$, la integral $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ converge y la integral $G(y) = \int_a^{+\infty} D_2f(x, y)dx$ converge uniformemente en $[c, d]$. Entonces F es derivable en $[c, d]$ y $F'(y) = G(y)$.*

Demostración. Ver prueba en [30] teorema 11.24 pag 333.

Observación 1.2. *Si α y β son funciones reales, estas satisfacen la desigualdad $2\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \beta^2$. Esto se satisface dado que $(\alpha - \beta)^2 \geqslant 0$.*

TEOREMA 1.3. ***Teorema de valor medio*** *Sea f continua en un intervalo $[a, b]$ con $a < b$ y diferenciable en el intervalo $a < x < b$ entonces existe c tal que $a < c < b$ y $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{(b - a)}$.*

Demostración. Ver la prueba en [26] teorema 7 pag 117.

TEOREMA 1.4. ***Teorema fundamental del cálculo*** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo I. Las siguientes afirmaciones sobre la función $F : I \to \mathbb{R}$ son equivalentes:*

- *F es una integral indefinida de f, esto es, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$.*
- *F es primitiva de f, esto es, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Ver la prueba en [26] teorema 1 pag 160.

TEOREMA 1.5. ***(Teorema de comparación entre dos ecuaciones diferenciales escalares)*** *Sea D un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $f(t, y)$ y $g(t, y)$ funciones continuas $f, g : D \to \mathbb{R}$, $y' = f(t, y)$ e $y' = g(t, y)$ las correspondientes ecuaciones diferenciales. Supongamos que una de las dos funciones f y g es localmente lipschitziana en D con respecto de la variable y. Sean $y, z : [a, b] \to \mathbb{R}$ soluciones respectivas de $y' = f(t, y)$ e $y' = g(t, y)$. Supongamos que se verifica*

$$g(t, y) \leqslant f(t, y) \quad \text{en} \quad D, \quad \text{y que} \quad z(a) \leqslant y(a).$$

Entonces

$$z(t) \leqslant y(t).$$

Demostración. Ver la prueba en [29] pag 161.

TEOREMA 1.6. ***(Fórmula de Leibniz's)*** *Supongamos que f y f_t, son continuas sobre D en $\mathbb{R}$ donde f_t es la parcial de f con respecto a t, y que α y β son funciones las cuáles son diferenciables en el intervalo $[c, d]$ y tiene valores en $[a, b]$. Si φ es definida en $[c, d]$ por $\varphi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx$ entonces φ tiene una derivada para cada t en $[c, d]$ la cuál viene dada por*
$\varphi'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x, t)dx$.

Demostración. Ver la prueba en [25] lema 31.8 pag 245-246.

LEMA 1.1. *Sea $g(t)$ una función diferenciable en $[0, +\infty)$. Si existe un número positivo M tal que $|g'(t)| \leqslant M$ para todo $t \geqslant 0$ y $\int_0^{+\infty} |g(t)|dt < +\infty$ entonces $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$.*

Demostración. En virtud de que $2|g'(t)||g(t)| \leqslant 2M|g(t)|$ para todo $t \geqslant 0$, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} 2|g'(t)||g(t)|dt \leqslant 2M \int_0^{+\infty} |g(t)|dt$$

$$< +\infty$$

En consecuencia $\int_0^{+\infty} 2|g'(t)||g(t)|dt$ converge absolutamente y por tanto $\int_0^{+\infty} 2g'(t)g(t)dt$ converge. Ahora bien

$$\int_0^{+\infty} 2g'(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(g^2(t)) = \lim_{t\to+\infty} [g^2(t) - g^2(0)]$$

Lo que implica que $\lim\limits_{t\to+\infty} g^2(t)$ existe. Probemos ahora que $\lim\limits_{t\to+\infty} g^2(t) = 0$. En efecto, supongamos que $\lim\limits_{t\to+\infty} g^2(t) = \varepsilon_0^2$ con $\varepsilon_0 > 0$, luego dado $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0^2}{2}$ existe $\bar{t} > 0$ tal que $|g^2(t) - \varepsilon_0^2| < \dfrac{\varepsilon_0^2}{2}$ para todo $t > \bar{t}$. De aqui tenemos que para todo $t > \bar{t}$
$g^2(t) - \varepsilon_0^2 > -\dfrac{\varepsilon_0^2}{2}$ ó $|g(t)| > \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$.
Por lo que, para todo $t > \bar{t}$

$$\int_0^t |g(s)|ds \geqslant \int_{\bar{t}}^t |g(s)|ds \geqslant \int_{\bar{t}}^t \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}ds = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}(t - \bar{t})$$

Haciendo tender t hacía más infinito, se tiene que $\int_0^t |g(s)|ds = +\infty$ lo cuál contradice la hipótesis
Por tanto $\lim\limits_{t\to+\infty} g^2(t) = 0$ y en consecuencia $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$. ∎

LEMA 1.2. *Sea $b(t)$, $Z(t)$ y $W(t)$ son funciones acotadas. Supongamos que $k(s)$ es un núcleo normalizado y $\int_0^{+\infty} sk(s)ds < +\infty$, entonces la función*

$$G(t) = \int_0^{+\infty} \int_{t-s}^{t} k(s)b(v+s)(e^{Z(v)} - e^{W(v)})dvds$$

está bien definida, es diferenciable y su derivada viene dada por

$$G'(t) = (e^{Z(t)} - e^{W(t)}) \int_0^{+\infty} k(s)b(t+s)ds - b(t) \int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z(t-s)} - e^{W(t-s)})ds.$$

Demostración. Por ser $b(t)$, $Z(t)$ y $W(t)$ acotadas se tiene que $e^{Z(t)}$ y $e^{W(t)}$ tambien lo són, digamos que $|b(t)| < M_1$, $|e^{Z(t)}| < M_2$ y $|e^{W(t)}| < M_3$.
Estudiemos la buena definición de $G(t)$

$$\begin{aligned}
|G(t)| =& \left| \int_0^{+\infty} \int_{t-s}^{t} k(s)b(v+s)(e^{Z(v)} - e^{W(v)})dvds \right| \\
\leqslant& \int_0^{+\infty} |k(s)| \int_{t-s}^{t} |b(v+s)||(e^{Z(v)} - e^{W(v)})|dvds \\
\leqslant& \int_0^{+\infty} k(s) \int_{t-s}^{t} |b(v-s)||(e^{Z(v)} - e^{W(v)})|dvds \\
\leqslant& \int_0^{+\infty} k(s) \int_{t-s}^{t} M_1(M_2 + M_3)dvds \\
=& \int_0^{+\infty} k(s)Rsds \quad \text{donde} \quad R = M_1(M_2 + M_3) \\
=& R \int_0^{+\infty} k(s)sds \\
<& +\infty,
\end{aligned}$$

así la integral es finita ya que por hipótesis sabemos que $\int_0^{+\infty} k(s)sds < +\infty$, así $G(t)$ está bien definida.
Ahora probemos que $G(t)$ es diferenciable, para ello debemos probar que $\int_0^{+\infty} D_t f(s,t)ds$ converge uniformemente en $[0, +\infty)$ donde $f(s,t) = \int_{t-s}^{t} k(s)b(v+s)(e^{Z(v)} - e^{W(v)}dv)$.
En efecto, como consecuencia del teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\begin{aligned}
D_t f(s,t) =& \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-s}^{t} k(s)b(v+s)(e^{Z(v)} - e^{W(v)})dv \\
=& \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{t-s}^{0} k(s)b(v+s)(e^{Z(v)} - e^{W(v)})dv \right. \\
& \left. + \int_0^{t} k(s)b(v+s)(e^{Z(v)} - e^{W(v)})dv \right] \\
=& \left[k(s)b(t+s)(e^{Z(t)} - e^{W(t)}) - k(s)b(t)(e^{Z(t-s)} - e^{W(t-s)}) \right].
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
|D_t f(s,t)| \leqslant& |k(s)||b(t+s)||e^{Z(t)} - e^{W(t)}| \\
& + |k(s)||b(t)||e^{Z(t-s)} - e^{W(t-s)}|,
\end{aligned}$$

tomando $L = \max \sup_{t\in\mathbb{R}} |e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)}|$, de acá tenemos que $|D_t f(s,t)| \leqslant 2k(s)M_1 L$ como $M_1 \int 2Lk(s)ds < +\infty$. Por el criterio de weierstrass para la convergencia uniforme de integrales impropias, se tiene que $\int_0^{+\infty} D_t f(s,t)ds$ converge uniformemente para $t \in [0,+\infty)$. Además

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+s)(e^{Z(v)} - e^{W(v)})dvds \\ &= \int_0^{+\infty} f(s,t)ds \\ &< +\infty \quad \text{la} \quad \text{cual} \quad \text{converge.} \end{aligned}$$

Luego por teorema (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} G'(t) &= \int_0^{+\infty} D_t f(s,t)ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[k(s)b(t+s)(e^{Z(t)} - e^{W(t)}) - k(s)b(t)(e^{Z(t-s)} - e^{W(t-s)})ds\right] \\ &= (e^{Z(t)} - e^{W(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+s)ds - b(t)\int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z(t-s)} - e^{W(t-s)})ds. \end{aligned}$$

Por tanto $G(t)$ es diferenciable. ■

Lema 1.3. *Sea $b(t)$, $Z(t)$ y $W(t)$ son funciones acotadas. Supongamos que $k(s)$ es un núcleo normarlizado $\int_0^{+\infty} s^2k(s)ds < +\infty$, $\sigma = \int_0^{+\infty} sk(s)ds < +\infty$, entonces la función*

$$F(t) = (b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}\int_u^t \left(e^{Z(v)} - e^{W(v)}\right)^2 dvduds$$

está bien definida, es diferenciable y su derivada viene dada por

$$F'(t) = (b^0)^2\sigma(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 - (b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}(e^{Z(u)} - e^{W(u)})^2duds.$$

Demostración.

Por ser $b(t)$, $Z(t)$ y $W(t)$ acotadas se tiene que $e^{Z(t)}$ y $e^{W(t)}$ tambien lo són, digamos que $|b(t)| < L_1$, $|e^{Z(t)}| < L_2$ y $|e^{W(t)}| < L_3$, así se tiene que
$|\left(e^{Z(v)} - e^{W(v)}\right)^2| = |(e^{Z(v)})^2 - 2e^{Z(v)}e^{W(v)} + (e^{W(v)})^2| \leqslant (L_2)^2 + 2L_2L_3 + (L_3)^2 = L$ donde $L = (L_2)^2 + 2L_2L_3 + (L_3)^2$.

Estudiemos que $F(t)$ está bien definida,

$$\begin{aligned}|F(t)|=&\left|(b^0)^2\int_0^{+\infty}k(s)\int_{t-s}^{t}\int_u^t\left(e^{Z(v)}-e^{W(v)}\right)^2dvduds\right|\\ \leqslant&|(b^0)^2|\int_0^{+\infty}|k(s)|\int_{t-s}^{t}\int_u^t|\left(e^{Z(v)}-e^{W(v)}\right)^2|dvduds\\ =&(b^0)^2\int_0^{+\infty}k(s)\int_{t-s}^{t}\int_u^tLdvduds\\ =&(b^0)^2\int_0^{+\infty}k(s)\int_{t-s}^{t}L(t-u)duds\\ =&L(b^0)^2\int_0^{+\infty}k(s)(t^2-t^2+ts-\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}-ts+\frac{s^2}{2})ds\\ =&(b^0)^2\frac{L}{2}\int_0^{+\infty}k(s)s^2ds\\ <&+\infty,\end{aligned}$$

así $F(t)$ está bien definida, ya que por hipótesis $\int_0^{+\infty}k(s)s^2ds<+\infty$.
Calculemos ahora la derivada de $F(t)$. Probemos previamente que está es una función derivable. En efecto $F(t)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}F(t)&=(b^0)^2\int_0^{+\infty}k(s)\int_{t-s}^{t}\int_u^t(e^{Z(v)}-e^{W(v)})^2dvduds\\ &=(b^0)^2H(t)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}H(t)&=\int_0^{+\infty}k(s)\int_{t-s}^{t}\int_u^t(e^{Z(v)}-e^{W(v)})^2dvduds\\ &=\int_0^{+\infty}G(s,t)ds\end{aligned}$$

con $G(s,t)=k(s)\int_{t-s}^{t}\int_u^t(e^{Z(v)}-e^{W(v)})^2dvdu$. Probemos que $H(t)$ es diferenciable, para ello debemos probar que $\int_0^{+\infty}D_tG(s,t)ds$ converge uniformemente en $[0,+\infty)$. Calculemos $D_tG(s,t)$, para ello utilicemos la Fórmula de Leibniz's. Observemos que $G(s,t)$ se puede expresar como

$$G(s,t)=k(s)\int_{t-s}^{t}g(u,t)du,$$

donde $g(u,t)=\int_u^t(e^{Z(v)}-e^{W(v)})^2dv$, además se tiene que $g(u,t)$ es una función continua y $g_t(u,t) = (e^{Z(t)} - e^{Z(t)})^2$ tambien es continua en $[0,+\infty)$. Por tanto

$$\begin{aligned} D_tG(s,t) &= k(s)[g(t,t) - g(t-s,t) + \int_{t-s}^{t} (e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 du] \\ &= k(s)[-g(t-s,t) + \int_{t-s}^{t} (e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 du] \\ &= k(s)[s(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 - \int_{t-s}^{t} (e^{Z(v)} - e^{W(v)})^2 dv]. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} |D_tG(s,t)| &= |k(s)[s(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 - \int_{t-s}^{t} (e^{Z(v)} - e^{W(v)})^2 dv]| \\ &\leqslant |k(s)| \left[|s||(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2| - \int_{t-s}^{t} |(e^{Z(v)} - e^{W(v)})^2| dv \right] \end{aligned}$$

tomando $L = \text{máx}\{\sup_{t\in\mathbb{R}} |(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2|\}$ se tiene que

$$|D_tG(s,t)| \leqslant 2sk(s)L$$

como $2\int_0^{+\infty} sk(s)Lds < +\infty$. Nuevamente por el criterio de weierstrass para convergencia uniforme de integrales impropias, se tiene que $\int_0^{+\infty} D_tG_{s,t}ds$ converge uniformemente para $t \in [0,+\infty)$ como

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^{+\infty} k(s) \int_{t-s}^{t} (e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 dvduds \\ &= \int_0^{+\infty} D_tG(s,t)ds \\ &< +\infty, \quad \text{converge.} \end{aligned}$$

Por el teorema (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int_0^{+\infty} k(s) \left[s(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 - \int_{t-s}^{t} (e^{Z(v)} - e^{W(v)})^2 dv \right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} k(s)s(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 ds - \int_0^{+\infty} k(s) \int_{t-s}^{t} (e^{Z(v)} - e^{W(v)})^2 dv]ds \\ &= (e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 \int_0^{+\infty} sk(s)ds - \int_0^{+\infty} k(s) \int_{t-s}^{t} (e^{Z(v)} - e^{W(v)})^2 dv]ds \\ &= \sigma(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 - \int_0^{+\infty} k(s) \int_{t-s}^{t} (e^{Z(v)} - e^{W(v)})^2 dv]ds, \end{aligned}$$

donde $\sigma = \int_0^{+\infty} sk(s)ds$. Así tenemos que

$$F'(t) = (b^0)^2\sigma(e^{Z(t)} - e^{W(t)})^2 - (b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}(e^{Z(u)} - e^{W(u)})^2 duds.$$

Por tanto $F(t)$ está bien definida y además es diferenciable. ■

Lema 1.4. *Sean $U(t)$ y $V(t)$ funciones continuas. Si $0 < \theta(t) < 1$, entonces $U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t)$, se encuentra entre $U(t)$ y $V(t)$*

Demostración. Supongamos los siguientes casos

Caso 1

$$U(t) < V(t)$$

dado que $0 < \theta(t) < 1$ se tiene que $1 - \theta(t) > 0$, así

$$U(t)(1-\theta(t)) < V(t)(1-\theta(t)) = V(t) - V(t)\theta(t)$$

despejando $V(t)$ se tiene $U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t) < V(t)$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t) &= U(t) - U(t)\theta - V(t)\theta(t) \\ &= U(t) + \theta(t)(V(t) - U(t)) \\ &> U(t) \end{aligned}$$

de este modo $U(t) < U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t) < V(t)$

Caso 2

$$V(t) < U(t)$$

sabemos que $0 < \theta(t) < 1$ se tiene que $1 - \theta(t) > 0$ así

$$U(t)(1-\theta(t)) > V(t)(1-\theta(t)) = V(t) - V(t)\theta(t)$$

despejando $V(t)$ tenemos $U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t) > V(t)$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t) &= U(t) - U(t)\theta - V(t)\theta(t) \\ &= U(t) + \theta(t)(V(t) - U(t)) \end{aligned}$$

de acá tenemos que

$$U(t) > U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t)$$

por tanto

$$U(t) > U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t) > V(t)$$

De este modo se puede concluir que $U(t)(1-\theta(t)) + V(t)\theta(t)$ entre $U(t)$ y $V(t)$. ■

Lema 1.5. *Para todo $x, y \in (-\infty, \beta]$ se cumple que*

$$(x-y)(e^x - e^{-y}) \geqslant e^{-\beta}(e^x - e^y)^2.$$

Demostración. Sean $x, y \in (-\infty, \beta]$. Aplicando el Teorema de Valor Medio a la función $f(t) = e^t$, se tiene que existe θ con $0 < \theta < 1$ tal que $e^x - e^y = e^{[(1-\theta)x+\theta y]}(x-y)$ ó $(x-y) = (e^x - e^y)e^{-[(1-\theta)x+\theta y]}$. Multiplicando en ambos lados de la igualdad anterior por $e^x - e^y$, se tiene

$$(x-y)(e^x - e^y) = (e^x - e^y)^2 e^{-[(1-\theta)x+\theta y]}. \tag{1.1}$$

Por otro lado, se tiene por hipótesis que $x \leqslant \beta$ y $y \leqslant \beta$, por tanto se cumple que

$$(1-\theta)x + \theta y \leqslant (1-\theta)\beta + \theta\beta = \beta;$$

de acá se tiene que $e^{-\beta} \leqslant e^{-[(1-\theta)x+\theta y]}$, sustituyendo está desigualdad en (1.1), se tiene que

$$(x-y)(e^x - e^y) \geqslant e^{-\beta}(e^x - e^y)^2.$$

Por lo que queda demostrado el lema. ■

CAPÍTULO 2

ESTUDIO PARA LA ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES.

En este capítulo consideraremos la ecuación integro-diferencial

$$N'(t) = N(t)\left[a(t) - b(t)\int_0^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right] \text{si} \quad t > 0 \tag{2.1}$$

junto con las condiciones iniciales siguiente

$$N(t) = \phi(t) \quad \text{si} \quad t \leqslant 0 \tag{2.2}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones positivas, continuas, y acotadas superior e inferiormente, y además $\phi \in FC$, y los núcleos $K : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ son funciones continuas que satisfacen

$$\int_0^{+\infty} k(s)ds = 1, \quad \sigma \equiv \int_0^{+\infty} sk(s)ds < +\infty \quad \text{y} \quad \xi \equiv \int_0^{+\infty} s^2k(s)ds < +\infty.$$

Está ecuación ha sido estudiada profundamente por algunos autores, en los cuáles podemos citar a Golpalsamy y He en [3] y a Seifer en [2], donde ellos consideran los coeficientes de esta ecuación casi periódicos y acotados superiormente e inferiormente y sus trabajos estan enfatizados en demostrar la estabilidad de las soluciones de la ecuación (2.1).

El objetivo de este capitulo es demostrar que si se satisfacen la hipótesis $\int_0^{+\infty} s^2k(s)ds < +\infty$ y $b_0 > \widehat{M}(b^0)\sigma$ donde $\widehat{M} = \dfrac{a^0}{b_0\int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0s}ds}$ entonces existe una única solución $N^*(t)$ de (2.1) tal que $N(t) - N^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ para cualquier solución $N(t)$ de (2.1).

§2.1. Positividad y Acotamiento de la solución de la ecuación (2.1)

En está sección estudiaremos el comportamiento de las soluciones de la ecuación integro-diferencial (2.1) especificamente la positividad y el acotamiento de dichas soluciones.

Lema 2.1. *Si $N(t,\phi)$ es cualquier solución de la ecuación* (2.1)*, con la condición inicial* (2.2)*, entonces $N(t,\phi) > 0$ para $t \geqslant 0$*

Demostración. Sea $N(t)$ cualquier solución de la ecuación (2.1). Por tanto se satisface que para todo $t \geqslant 0$

$$N'(t) = N(t)\left(a(t) - b(t)\int_0^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right)$$

de acá se tiene que

$$N'(t) = N(t)P(t) \quad \text{donde} \quad P(t) = a(t) - b(t)\int_0^{+\infty} k(s)N(t-s)ds$$

es decir, equivalentemente

$$N'(t) - N(t)P(t) = 0. \tag{2.3}$$

Usando el factor integrante como método de la resolución de la ecuación diferencial (2.3). Se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left(N(t)e^{\int_0^t P(s)ds}\right) = 0.$$

Integrando (2.3) desde 0 hasta t y utilizando el teorema fundamental del cálculo

$$N(t)e^{\int_0^t P(s)ds} - N(0) = 0$$

esto implica que

$$N(t) = N(0)e^{-\int_0^t P(s)ds}.$$

Como $N(0) > 0$ y $e^{-\int_0^t P(s)ds}$ es no-negativa para todo $t \geqslant 0$, se tiene que $N(t) > 0$ $\forall t \geqslant 0$ ■

Lema 2.2. *Si $N(t)$ es cualquier solución de la ecuación integro-diferencial* (2.1) *entonces* $\limsup_{t\to+\infty} N(t) \leqslant \dfrac{a^0}{b_0\int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds} \equiv \widehat{M}$.

Demostración. Sea $N(t)$ cualquier solución de la ecuación (2.1). Por la positividad de $N(t)$ y por ser $a(t)$ y $b(t)$ funciones acotadas superior e inferiormente, se cumple que

$$N'(t) \leqslant N(t)\left[a^0 - b_0 \int_0^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right]. \tag{2.4}$$

Por tanto se cumple que

$$N'(t) \leqslant a^0 N(t) \quad \text{para} \quad t \geqslant 0.$$

Integrando la desigualdad anterior desde $t-s$ hasta t, con $t-s \geqslant 0$, se obtiene que

$$\int_{t-s}^{t} \frac{dN(\sigma)}{N(\sigma)} d\sigma \leqslant \int_{t-s}^{t} a^0 d\sigma$$

esto implica que

$$\ln(N(t)) - \ln(N(t-s)) \leqslant a^0 s$$

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N(t-s)}\right) \leqslant a^0 s$$

aplicando la función exponencial a ambos lados de la desigualdad, se obtiene

$$\frac{N(t)}{N(t-s)} \leqslant e^{a^0 s}$$

por tanto

$$N(t-s) \geqslant N(t)e^{-a^0 s} \quad \text{para} \quad t \geqslant s \geqslant 0 \tag{2.5}$$

sustituyendo, esta desigualdad en (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned}
N'(t) &\leqslant N(t)\left[a^0 - b_0\left[\int_0^t k(s)N(t-s)ds + \int_t^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right]\right] \\
&\leqslant N(t)\left[a^0 - b_0 \int_0^t k(s)N(t-s)ds\right] \\
&= N(t)\left[a^0 - \left(b_0 \int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds\right)N(t)\right]
\end{aligned}$$

digamos que

$$N'(t) \leqslant N(t)[a^0 - b_0 f(t)N(t)] \quad donde \quad f(t) = \int_0^t k(s)e^{-a^0 s}ds > 0$$

sabemos que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t k(s)e^{-a^0 s}ds = \int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds < +\infty$$

ya que $k(s)e^{-a^0 s} \leqslant k(s)$, esto implica que $\int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds \leqslant \int_0^{+\infty} k(s)ds = 1$, por tanto $\int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds$ converge digamos a f^*, es decir $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f^*$.
Por otro lado como $N'(t) \leqslant N(t)[a^0 - b_0 f(t)N(t)]$ se tiene por el teorema de comparación que $N(t) \leqslant Y(t)$, donde $Y(t)$ es solución de la ecuación

$$Y'(t) = Y(t)[a^0 - b_0 f(t)Y(t)] \quad \text{con} \quad Y(0) = N(0) = \phi(0). \tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) se puede escribir como

$$Y'(t) - a^0 Y(t) = -b_0 f(t)Y^2(t).$$

La cuál es una ecuación de Bernoulli. Haciendo el cambio de variable $u(t) = Y^{-1}(t)$, se obtiene que

$$u'(t) + a^0 u(t) = b_0 f(t) \tag{2.7}$$

la cual es una ecuación lineal de primer orden. Resolvamos por el método de factor integrante. Sea $P(t) = a^0$ y $Q(t) = b_0 f(t)$ y el factor integrante $e^{\int P(t)dt} = e^{a^0 t}$ multiplicando a ambos lados de la ecuación (2.7) se obtiene

$$e^{a^0 t}u'(t) + a^0 u(t)e^{a^0 t} = b_0 f(t)e^{a^0 t}$$

ahora integrando desde 0 hasta t se tiene que

$$u(t)e^{a^0 t} - u(0) = \int_0^t b_0 f(s)e^{a^0 s}ds$$

por tanto

$$u(t) = u(0)e^{-a^0 t} + b_0 e^{-a^0 t}\int_0^t f(s)e^{a^0 s}ds \tag{2.8}$$

como $u(t) = \dfrac{1}{Y(t)}$, sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{1}{Y(t)} = \frac{1}{Y(0)}e^{-a^0 t} + \frac{b_0 \int_0^t f(s)e^{a^0 s}ds}{e^{a^0 t}}. \tag{2.9}$$

Estudiemos ahora el siguiente $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\int_0^t f(s)e^{a^0 s}ds}{e^{a^0 t}}$.

Primeramente veamos que $\int_0^{+\infty} f(s)e^{a^0 s}ds$ diverge, en efecto sabemos que $\int_0^{+\infty} f(s)e^{a^0 s}ds = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t f(s)e^{a^0 s}ds$ resolvamos $\int_0^t f(s)e^{a^0 s}ds$ por el método de integración por partes. Consideremos $a = f(s)$ y $dv = e^{a^0 s}ds$ por tanto $da = f'(s)ds$ y $v = \dfrac{1}{a^0}e^{a^0 s}$ observemos que si $f(s) = \int_0^s k(\theta)e^{-a^0\theta}d\theta$, se cumple por el teorema fundamental del cálculo que $f'(s) = k(s)e^{-a^0 s}$.
En consecuencia

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(s)e^{a^0 s}ds &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{f(s)e^{a^0 s}}{a^0}\Big|_0^t - \frac{1}{a^0}\int_0^t k(s)e^{-a^0 s}e^{a^0 s}ds\right] \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{f(s)e^{a^0 s}}{a^0}\Big|_0^t - \frac{1}{a^0}\int_0^t k(s)ds\right] \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{f(t)e^{a^0 t}}{a^0} - \frac{1}{a^0}\int_0^t k(s)ds\right] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

ya que, cuando $t \to +\infty$, $f(t) \to f^* = \int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds < +\infty$ y $e^{a^0 t} \to +\infty$ y además $\int_0^{+\infty} k(s)ds = 1$.
Por tanto $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\int_0^t f(s)e^{a^0 s}ds}{e^{a^0 t}}$ tiene una forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$. Apliquemos la regla de l'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t f(s)e^{a^0 s}ds}{e^{a^0 t}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)e^{a^0 t}}{a^0 e^{a^0 t}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{a^0} \\
&= \frac{f^*}{a^0}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando limite cuando t tiende a $+\infty$ y utilizando el hecho anterior a la ecuación (2.9) se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{Y(t)} &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{y(0)}e^{-a^0 t} + \frac{b_0\int_0^t f(s)e^{a^0 t}ds}{e^{a^0 t}}\right) \\
&= \frac{b_0 f^*}{a^0}.
\end{aligned}$$

Es decir $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \dfrac{a^0}{b_0 f^*}$.
En virtud de que $N(t) \leqslant Y(t)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to+\infty} N(t) \leqslant \limsup_{t\to+\infty} Y(t) = \lim_{t\to+\infty} Y(t) &= \frac{a^0}{b_0 f^*} \\ &= \frac{a^0}{b_0 \int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds} \\ &= \widehat{M}\end{aligned}$$

Por tanto $\limsup_{t\to+\infty} N(t) \leqslant \widehat{M} = \dfrac{a^0}{b_0 \int_0^{+\infty} k(s)e^{-a^0 s}ds}$ ■

LEMA 2.3. *Si existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que* $\int_0^{+\infty} k(s)e^{-(a_0 - b^0\widehat{M}-\varepsilon_0)s} < +\infty$ *donde* $\widehat{M}$ *es como en el lema (3.2) entonces para cualquier solución* $N(t)$ *de la ecuación integro-diferencial* (2.1)*, se satisface que*

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t) \geqslant \frac{a_0}{b^0 \int_0^{+\infty} k(s)e^{-(a^0 - b^0\widehat{M})s}ds} \equiv \widehat{m} > 0.$$

Demostración. Sea $N(t)$ cualquier solución positiva de (2.1). En virtud del lema 3.2 se tiene que $\limsup_{t\to+\infty} N(t) \leqslant \widehat{M}$, dado $\varepsilon > 0$ existe un t_1 tal que $t > t_1$ implica que $N(t) < \limsup_{t\to+\infty} N(t) + \varepsilon$, en consecuencia

$$N(t) < \widehat{M} + \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad t \geqslant t_1. \tag{2.10}$$

Por otro lado, de la ecuación (2.1) y por la positividad de las soluciones, se tiene que

$$\begin{aligned} N'(t) &\geqslant N(t)\left[a_0 - b^0 \int_0^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right] \\ &= N(t)\left[\left(a_0 - b^0 \int_{t-t_1}^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right) - b^0 \int_0^{t-t_1} k(s)(\widehat{M}+\varepsilon)ds\right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

observemos que si $0 < s < t - t_1$ esto implica que $t - s > t_1$, por lo que sustituyendo (2.10), en la desigualdad anterior, se obtiene que

$$N'(t) \geqslant N(t)\left[a_0 - b^0 \int_0^{t-t_1} k(s)(\widehat{M}+\varepsilon)ds - b^0 \int_{t-t_1}^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right].$$

Definamos $c(t)$ para todo $t \geqslant t_1$, como
$c(t) = a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon)\int_0^{t-t_1} k(s)ds - b^0 \int_{t-t_1}^{+\infty} k(s)N(t-s)ds \ t > t_1$

estudiemos el $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t)$, esto es

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} c(t) &= \lim_{t\to+\infty}\left[a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon)\int_0^{t-t_1} k(s)ds - b^0\int_{t-t_1}^{+\infty} k(s)N(t-s)ds\right] \quad t>t_1\\ &= a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon)\end{aligned}$$

ya que $\int_0^{+\infty} k(s)ds = 1$ y $\int_{\infty}^{\infty} k(s)N(t-s)ds = 0$ por tanto

$$\lim_{t\to+\infty} c(t) = a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon) \tag{2.12}$$

observemos que

$$\lim_{t\to+\infty} b^0\int_{t-t_1}^{+\infty} k(s)N(t-s)ds = 0 \tag{2.13}$$

de (2.12) y (2.13), se puede garantizar que dado ε_1, con $0<\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$, existe $T>t_1$ tal que

$$|c(t) - a_0 + b^0(M_0+\varepsilon)| < \varepsilon_1 \quad \text{y} \quad |b^0\int_{t-t_1}^{+\infty} k(s)N(t-s)ds| < \varepsilon_1$$

por tanto, se cumple, aplicando propiedades de valor absoluto y despejando $c(t)$ se tiene,

$$a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon) - \varepsilon_1 < c(t) < a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon) + \varepsilon_1 \quad \forall t > T \tag{2.14}$$

además por la positividad de las soluciones y por ser $k(s)$ un núcleo normalizado , se obtiene

$$b^0\int_{t-t_1}^{+\infty} k(s)N(t-s)ds < \varepsilon_1. \tag{2.15}$$

Por otro lado de la desigualdad (2.11) se tiene que

$$N'(t) \geqslant c(t)N(t) \quad \forall t \leqslant t_1$$

lo cuál es equivalente a la desigualdad

$$\frac{dN(t)}{N(t)} \geqslant c(t)dt$$

integrando está ultima desigualdad desde $t-s$ hasta t, con $t-s\geqslant 0$, obtenemos

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N(t-s)}\right) \geqslant \int_{t-s}^{t} c(r)dr$$

aplicando la función exponencial a ambos lados de la desigualdad, se obtiene

$$N(t) \geqslant N(t-s)e^{\int_{t-s}^{t} c(r)dr} \quad \text{para} \quad t-s > t_1$$

equivalentemente tenemos

$$N(t-s) \leqslant N(t) e^{-\int_{t-s}^{t} c(r)dr} \quad \text{para} \quad t-s > t_1. \tag{2.16}$$

sustituyendo (2.15) y (2.16) en (2.11) se obtiene que

$$N'(t) \geqslant N(t) \left[a_0 - \varepsilon_1 - b^0 \left(\int_0^{t-s} k(s) e^{\int_0^t c(r)dr} ds \right) N(t) \right]. \tag{2.17}$$

De (2.14) se tiene que

$$\int_{t-s}^{t} (a_0 - b^0(\widehat{M} + \varepsilon) - \varepsilon_1) dr < \int_{t-s}^{t} c(r) dr < \int_{t-s}^{t} (a_0 - b^0(\widehat{M} + \varepsilon) + \varepsilon_1) dr$$

lo cuál es equivalente

$$(a_0 - b^0(\widehat{M} + \varepsilon) - \varepsilon_1)s < \int_{t-s}^{t} c(r) dr < (a_0 - b^0(\widehat{M} + \varepsilon) + \varepsilon_1)s$$

por lo que

$$-\int_{t-s}^{t} c(r) dr < -(a_0 - b^0(\widehat{M} + \varepsilon) - \varepsilon_1)s$$

así

$$\begin{aligned} b^0 \int_0^{t-t_1} k(s) e^{-\int_{t-s}^{t} c(r)dr} ds &< b^0 \int_0^{t-t_1} k(s) e^{-(a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon) - \varepsilon_1)s} ds \\ &\leqslant b^0 \int_0^{+\infty} k(s) e^{-(a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon))s} e^{\varepsilon_1 s} ds \quad \forall t \geqslant t_1 \end{aligned}$$

sustituyendo la desigualdad anterior en (2.17) nos queda

$$N'(t) \geqslant N(t) \left[(a_0 - \varepsilon_1) - (b^0 \int_0^{+\infty} k(s) e^{-(a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon))s} e^{\varepsilon_1 s} ds) N(t) \right].$$

Consideremos $a = a_0 - \varepsilon_1$ y $b = (b^0 \int_0^{+\infty} k(s) e^{-(a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon))s} e^{\varepsilon_1 s} ds) N(t)$. Por teorema de comparación, se tiene que

$$N(t) \geqslant W(t) \quad \forall t \geqslant T,$$

donde $W(t)$ es solución de la ecuación diferencial logística $y'(t) = y(t)\left[a - by(t)\right]$. Aplicando limite inferior cuando t tiende a más infinito

$$\liminf_{t \to +\infty} N(t) \geqslant \liminf_{t \to +\infty} W(t) = \lim_{t \to +\infty} W(t) = \frac{a}{b}$$

en consecuencia

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t) \geqslant \frac{a_0 - \varepsilon_1}{b^0 \int_0^{+\infty} k(s) e^{-(a_0 - b^0(\widehat{M}+\varepsilon))s} e^{\varepsilon_1 s} ds}$$

haciendo $\varepsilon, \varepsilon_1$ tender a cero, se tiene que

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t) \geqslant \frac{a_0}{b^0 \int_0^{+\infty} k(s) e^{-(a_0 - b^0(\widehat{M}))s} ds} \equiv \widehat{m}$$

■

Observación 2.1. *A partir de los lemas (3.2) y (3.3), usando la definición de límite superior e inferior podemos afirmar que $N(t)$ está acotada tanto inferiormente como superiormente.*

En efecto, del lema (3.3), se tiene que

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t) > \widehat{m}$$

para cada $\varepsilon_1 > 0$, existe $T_1 > 0$ tal que para todo $t > T_1$ implica que

$$N(t) > \liminf_{t\to+\infty} N(t) - \varepsilon_1$$

esto implica que

$$N(t) > \widehat{m} - \varepsilon_1. \tag{2.18}$$

Por otro lado

$$\limsup_{t\to+\infty} N(t) < \widehat{M}$$

para cada $\varepsilon_2 > 0$ existe $T_2 > 0$ tal que para todo $n > N_2$, implica que

$$N(t) < \limsup_{t\to+\infty} N(t) + \varepsilon_2$$

esto implica que

$$N(t) < \widehat{M} + \varepsilon_2 \tag{2.19}$$

tomando $T = \text{mín}\{T_1, T_2\}$ y haciendo tender a ε_1 y ε_2 a cero cuando t tiende a más infinito, se sigue de (2.18) y (2.19) que $\widehat{m} < N(t) < \widehat{M}$. ■

§2.2. Estabilidad de las soluciones

En está sección estudiaremos la estabilidad de las soluciones de la ecuación integro-diferencial (2.1).

Teorema 2.1. *Si* $b_0 > \widehat{M}(b^0)^2\sigma$ *y* $\int_0^{+\infty} s^2k(s)ds < +\infty$, *entonces existe una única solución* $N^*(t)$ *de la ecuación integro-diferencial* (2.1) *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $0 < N^*(t) < \widehat{M}$ *para* $t \in \mathbb{R}$, *además para cualquier solución* $N(t)$ *de* (2.1) *se cumple que*

$$N(t) - N^*(t) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Demostración. Sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$ dos soluciones de la ecuación integro-diferencial (2.1). Consideremos $Z_1(t) = \log N_1(t)$, $Z_2(t) = \log N_2(t)$ y fijemos $t_0 \in \mathbb{R}$ de manera que $Z_{01}(t) = Z_1(t + t_0)$ y $Z_{02}(t) = Z_2(t + t_0)$. Por la observación anterior, se tiene que, $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son funciones acotadas superior e inferiormente, por lo que $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$ tambien son acotadas.

Observemos que cada $N_i(t + t_0)$ con $i = 1, 2$ es solución de la ecuación (2.1) reemplazando $a(t)$, $b(t)$ por $a(t + t_0)$, $b(t + t_0)$ respectivamente , es decir se cumple que

$$N_i'(t+t_0) = N_i(t+t_0)\left(a(t+t_0) - b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)N_i(t+t_0-s)ds\right)$$

por tanto

$$\frac{N_i'(t+t_0)}{N_i(t+t_0)} = a(t+t_0) - b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)e^{Z_{0i}(t-s)}ds. \tag{2.20}$$

Como $Z_i(t) = \log N_i(t)$ con $i = 1, 2$, se cumple

$$N_i(t) = e^{Z_i(t)}.$$

Por lo que, de la ecuación (2.20), se obtiene que

$$Z_i'(t) = a(t+t_0) - b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)e^{Z_i(t-s)}ds. \tag{2.21}$$

Definamos

$$V(t) = \left[Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right]^2$$
$$+ (b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}\int_u^t (e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})^2 dvduds.$$

Veamos que $V(t)$ está bien definida y además es diferenciable.

Consideremos

$$V_1(t) = \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds \quad \text{y}$$
$$V_2(t) = (b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}\int_u^t (e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})^2 dvduds$$

de manera que $V(t) = [Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - V_1(t)]^2 + V_2(t)$. Para ello primero estudiaremos la buena definición de $Z_{01}(t)$ y $Z_{02}(t)$, en efecto, ya que $N_i(t)$ con $i = 1, 2$ es acotada superior e inferiormente se tiene que

$$|Z_{0i}(t)| = |\log N_i(t+t_0)| < +\infty$$

de este modo $Z_{0i}(t)$ con $i = 1, 2$ está bien definida.
Por los lemas (2.2) y (2.3) tenemos que $V_1(t)$ y $V_2(t)$ están bien definidas y además son diferenciables y sus derivadas vienen dadas por

$$V_1'(t) = (e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds - b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z_{01}(t-s)} - e^{Z_{02}(t-s)})ds$$
$$V_2'(t) = (b^0)^2\sigma(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})^2 - (b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}(e^{Z_{01}(u)} - e^{Z_{02}(u)})^2 duds.$$

De acá tenemos que $V(t) = [Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - V_1(t)]^2 + V_2 < +\infty$, de este modo tenemos que $V(t)$ esta bien definida.
Ahora veamos que $V(t)$ es diferenciable. Sabemos que

$$V(t) = [Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - V_1(t)]^2 + V_2(t).$$

Denotemos $\overline{V}(t) = [Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - V_1(t)]^2$. Por tanto $V(t) = \overline{V}(t) + V_2$.
Veamos que $\overline{V}(t)$ es diferenciable, en efecto sabemos que $V_1(t)$ es diferenciable y su derivada viene dada por

$$V_1'(t) = (e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds - b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z_{01}(t-s)} - e^{Z_{02}(t-s)})ds,$$

y además como

$$\begin{aligned} Z_{0i}'(t) &= Z_i'(t+t_0) \\ &= \frac{N_i'(t+t_0)}{N_i(t+t_0)} \quad \text{con} \quad i = 1, 2; \end{aligned}$$

sustituyendo está expresión y $V_1'(t)$ en $\overline{V'}(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\overline{V'}(t) =& 2\left[Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right] \times \\
&\left[Z_{01}'(t) - Z_{02}'(t) - (e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds\right. \\
&\left. -b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z_{01}(t-s)} - e^{Z_{02}(t-s)})ds\right] \\
=& 2\left[Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right] \times \\
&\left[\frac{N_1'(t+t_0)}{N_1(t+t_0)} - \frac{N_2'(t+t_0)}{N_2(t+t_0)} - (e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds\right. \\
&\left. +b(t+t_0)\int_0^{+\infty} (e^{Z_{01}(t-s)} - e^{Z_{02}(t-s)}ds)\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuacion anterior $\dfrac{N_1'(t+t_0)}{N_1(t+t_0)}$ y $\dfrac{N_2'(t+t_0)}{N_2(t+t_0)}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{V'}(t) =& 2\left[Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right] \times \\
&\left[a(t+t_0) - b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)N_1(t+t_0-s)ds - a(t+t_0)\right. \\
&+b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)N_2(t+t_0-s)ds - (e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds \\
&\left. +b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z_{01}(t-s)} - e^{Z_{02}(t-s)})ds\right] \\
=& 2\left[Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right] \times \\
&\left[b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)(N_2(t+t_0-s) - N_1(t+t_0-s))ds\right. \\
&\left. -(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\right]\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds + b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z_{01}(t-s)} - e^{Z_{02}(t-s)})ds] \\
=& 2\left[Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right] \times \\
&\left[-b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z_{01}(t-s)} - e^{Z_{02}(t-s)})ds - (e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0-s)ds\right. \\
&\left. +b(t+t_0)\int_0^{+\infty} k(s)(e^{Z_{01}(t-s)} - e^{Z_{02}(t-s)})ds\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{V'}(t) =& -2\left[Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right]\times \\
& (e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0-s)ds.
\end{aligned}
$$

de acá que $\overline{V}(t)$ es diferenciable.

Por tanto $V(t)$ es diferenciable y su derivada está dada por

$$
\begin{aligned}
V'(t) =& -2\left[Z_{01}(t) - Z_{02}(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right]\times \\
& \left[(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0-s)ds\right] + (b^0)^2\sigma(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})^2 \\
& -(b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}(e^{Z_{01}(u)} - e^{Z_{02}(u)})^2duds.
\end{aligned}
$$

Sean

$$
\begin{aligned}
I_1(t) =& -2(Z_{01}(t) - Z_{02}(t))(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds \\
I_2(t) =& 2\left(\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t} b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})dvds\right)\times \\
& \int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)}) \\
I_3(t) =& (b^0)^2\sigma(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})^2 \\
I_4(t) =& -(b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}(e^{Z_{01}(v)} - e^{Z_{02}(v)})^2dvds.
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
V'(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t).
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= -2(Z_{01}(t) - Z_{02}(t))(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds \\
&\leqslant -2(Z_{01}(t) - Z_{02}(t))(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b_0ds \\
&= -2(Z_{01}(t) - Z_{02}(t))(e^{Z_{01}(t)} - e^{Z_{02}(t)})b_0
\end{aligned}
$$

esto ocurre, ya que $0 < b_0 \leqslant b(t+t_0+s) \leqslant b^0$ y $\int_0^{+\infty} k(s)ds = 1$.

Tambien que

$$\begin{aligned}
I_2(t) =& 2\int_0^{+\infty} k(s)\left(\int_{t-s}^{t} b(v+t_0+s)(e^{Z_{01}(v)}-e^{Z_{02}(v)})dv\right) ds\times \\
& (e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds \\
=& \int_0^{+\infty} k(s)\left(\int_{t-s}^{t} b(v+t_0+s)2(e^{Z_{01}(v)}-e^{Z_{02}(v)}). \right.\\
& \left.(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})dv\right) ds.\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds
\end{aligned}$$

aplicando la observación (2.2) se tiene

$$\begin{aligned}
I_2(t) =& \int_0^{+\infty} k(s)\left[\int_{t-s}^{t} b(v+t_0+s)\left((e^{Z_{01}(v)}-e^{Z_{02}(v)})^2\right.\right.\\
& \left.\left.+(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2\right) dvds\right]\int_0^{+\infty} k(s)b(t+t_0+s)ds \\
\leqslant& \int_0^{+\infty} k(s)(b^0)^2\int_{t-s}^{t}\left[(e^{Z_{01}(v)}-Z_{02}(v))^2dv+(b^0)^2(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2\right] dvds \\
=& (b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}(e^{Z_{01}(v)}-e^{Z_{02}(v)})^2dvds+(b^0)^2(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2 \\
& \int_0^{+\infty} k(s)sds \\
=& (b^0)^2\int_0^{+\infty} k(s)\int_{t-s}^{t}(e^{Z_{01}(v)}-e^{Z_{02}(v)})^2dvds+(b^0)^2\sigma(\exp(Z_{01}(t))-e^{Z_{02}(t)})^2 \\
=& -I_4+(b^0)^2\sigma(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2
\end{aligned}$$

esto ocurre por ser $0<b_0\leqslant b(t+t_0+s)\leqslant b^0$,$\int_0^{+\infty} k(s)ds=1$ y $\int_0^{+\infty} k(s)sds\equiv\sigma$. Sustituyendo $I_1(t), I_2(t), I_3(t), I_4(t)$ en $V'(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
V'(t)\leqslant& -2(Z_{01}(t)-Z_{02}(t))(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})b_0-I_4+(b^0)^2\sigma(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2 \\
& +(b^0)^2\sigma(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2+I_4 \\
=& -2[(Z_{01}(t)-Z_{02}(t))(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})b_0+(b^0)^2\sigma(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2] \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Ahora usando el Teorema de valor medio y el hecho de que $N_i(t+t_0)\leqslant\widehat{M}$, para $i=1,2$ y $t\in\mathbb{R}$ a la función $f(x)=e^x$, evaluado en $Z_{01}(t)$ y $Z_{02}(t)$. Se tiene por el lema (2.4) tomando $0<\theta(t)<1$ que

$$Z_{02}(t)<Z_{01}(t)(1-\theta(t))+Z_{02}(t)\theta(t)<Z_{01}(t).$$

Se puede concluir que $Z_{01}(t)(1-\theta(t))+Z_{02}(t)\theta(t)$ está entre $Z_{01}(t)$ y $Z_{02}(t)$, ahora aplicando el teorema de valor medio obtenemos

$$e^{Z_{01}(t)(1-\theta(t))+Z_{02}(t)\theta(t)}=\frac{e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)}}{Z_{01}(t)-Z_{02}(t)}$$

equivalentemente tenemos que

$$(Z_{01}(t)-Z_{02}(t))=(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})e^{-[(Z_{01}(t)(1-\theta(t))+Z_{02}(t)\theta(t))]}.$$

Multiplicando en ambos lados de la igualdad por $(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})$, se obtiene que

$$(Z_{01}(t)-Z_{02}(t))(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})=(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2e^{(Z_{01}(t)(1-\theta(t))+Z_{02}(t)\theta(t))^{-1}}.$$

Por ser $N_i(t+t_0)$ acotada, se cumple que existe $\widehat{M}>0$ tal que $N_i(t+t_0)\leqslant\widehat{M}$, para $i=1,2$, $t\in\mathbb{R}$, por lo que consideremos $X=Z_{01}(t)$, $Y=Z_{02}(t)$ y $\beta=\ln(\widehat{M})$ en el lema (2.5) se tiene

$$(Z_{01}(t)-Z_{02}(t))(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})\geqslant\frac{(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2}{\widehat{M}} \tag{2.23}$$

Ahora usando (2.23) en (2.22) tenemos que

$$V'(t)\leqslant-2\left(\frac{b_0}{\widehat{M}}-\sigma(b^0)^2\right)(e^{Z_{01}(t)}-e^{Z_{02}(t)})^2$$

Si tomamos $r_0=\dfrac{b_0}{\widehat{M}}-\sigma(b^0)^2$, $r_0>0$ y usando (2.23) integrando desde 0 hasta t

$$\int_0^t V'(p)dp\leqslant-2r_0\int_0^t((e^{Z_{01}(p)}-e^{Z_{02}(p)})^2)dp$$

así

$$V(t)-V(0)\leqslant-2r_0\int_0^t(e^{Z_{01}(p)}-e^{Z_{02}(p)})^2dp$$

luego

$$2r_0\int_0^t(e^{Z_{01}(p)}-e^{Z_{02}(p)})^2dp\leqslant V(0)-V(t)$$

equivalentemente

$$\int_0^t(e^{Z_{01}(p)}-e^{Z_{02}(p)})^2dp\leqslant\frac{V(0)-V(t)}{2r_0} \tag{2.24}$$

está ecuación es finita dado que $V(t)$ es un operador acotado, así de (2.24) tenemos

$$\int_0^{+\infty}(N_1(s+t_0)-N_2(s+t_0))^2ds<+\infty.$$

Además

$$\begin{aligned}
|N_1'(s+t_0)-N_2'(s+t_0)| &\leqslant |N_1'(s+t_0)|+||N_2'(s+t_0)| \\
&= |N_1(s+t_0)(a(s+t_0)-b(s+t_0)\int_0^{+\infty}k(s)N_1(s+t_0-s)ds)| \\
&|N_2(s+t_0)(a(s+t_0)-b(s+t_0)\int_0^{+\infty}k(s)N_2(s+t_0-s)ds)| \\
&\leqslant |N_1(s+t_0)|[|(a(s+t_0)|+|b(s+t_0)|\int_0^{+\infty}|k(s)||N_1(t_0)|ds)] \\
&|N_2(s+t_0)|[|(a(s+t_0)|+|b(s+t_0)|\int_0^{+\infty}|k(s)||N_2(t_0)|ds)] \\
&\leqslant |N_1(s+t_0)|[a^0+b_0\int_0^{+\infty}|k(s)||N_1(t_0)|ds)] \\
&|N_2(s+t_0)|[a^0+b_0\int_0^{+\infty}|k(s)||N_2(t_0)|ds)] \\
&= W_1[a^0+b_0\int_0^{+\infty}k(s)W_1]+W_2[a^0+b_0\int_0^{+\infty}k(s)W_2ds] \\
&= W_1[a^0+b_0M_1]+W_2[a^0+b_0M_2] \\
&= W
\end{aligned}$$

donde $W=W_1[a^0+b_0W_1]+W_2[a^0+b_0W_2]$, de este modo $|N_1'(s+t_0)-N_2'(s+t_0)|\leqslant W$ así

$$|(N_1'(s+t_0)-N_2'(s+t_0))^2|\leqslant W^2.$$

En consecuencia, por el lema (2.1), se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty}(N_1(t+t_0)-N_2(t+t_0))^2=0 \quad \text{para} \quad t_0\in\mathbb{R} \quad \text{arbitrario},$$

usando la definición de limite al infinito se tiene que para todo $\varepsilon>0$ existe $T>0$ tal que $0\leqslant(N_1(t+t_0)-N_2(t+t_0))^2<\varepsilon$ haciendo ε tender a cero, se tiene que

$$N_1(t+t_0)=N_2(t+t_0)$$

y por ser t_0 arbitrario se obtiene

$$N_1(t) = N_2(t).$$

Digamos que $N^*(t) = N_1(t) = N_2(t)$.

Por un lado sea $N^*(t)$ solución de la ecuación (2.1), sabemos por el lema (3.2) que el $\limsup_{t\to+\infty} N^*(t) \leqslant \widehat{M}$, así por definición de limite superior si $\widehat{M} \geqslant \limsup_{t\to+\infty} N^*(t)$ entonces dado $\varepsilon = \dfrac{\widehat{M}}{2} > 0$ existe $t_1 > 0$ para todo $t > t_1$ tal que $N^*(t) < \dfrac{\widehat{M}}{2} < \widehat{M}$ así tenemos que $N^*(t)$ está acotada superiormente.

Por otro lado sea $N(t)$ cualquier solución de la ecuación (2.1) y definamos ahora $Z(t)$ y $U(t)$ como $Z(t) = \log(N(t))$ y $U(t) = \log(N^*(t))$ y definamos el operador como se hizo anteriormente, es decir

$$\begin{aligned} V(t) =& [Z(t) - U(t) - \int_0^{+\infty}\int_{t-s}^{t} k(s)b(v+t_0+s)(e^{Z(v)} - e^{U(v)})dvds]^2 \\ &+ (b^0)^2 \int_0^{+\infty} k(s) \int_{t-s}^{t}\int_{u}^{t} (e^{Z(v)} - e^{U(v)})^2 dvduds \end{aligned}$$

usando el mismo argumento que en la parte anterior, se obtiene

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) - N^*(t) = 0.$$

■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1] A.M. Fink, Almost periodic differential equations, lecture notes in math. 377, springer-verlag.

[2] G.Seifert, Almost periodic solutions for delay logistic equations with almost periodic time dependence. Department of mathematics, Iowa State University Ames Ia 50011.

[3] K.Golpalsamy y Xue-Zhong He, Dynamics of an almost periodic logistic integrodifferential equation , metodos y aplicaciones de análisis 2 (1) 1995, pp. 38-66.

[4] Global asymptotic stability in a class of volterra-stieltjes integrodifferential systems, int. J. Systems SCI.,1987, vol.18, no.9,1733-1737.

[5] T. Yoshizawa, stability theory by liapunov´s second method, the mathematical society of japan, tokyo, 1996.

[6] Stability theory and the existence of periodic solutions and almost-periodic solutions, appl.math.sci.vol. 14 springer verlag, 1975.

[7] Almost periodic functions, interscience publishers, new york, 1968

[8] Global attractivity and oscillations in a periodic delay logistic equation, J. math anal. appl. 150 (1990), 272-283.

[9] Global attracivity in the delay logistic equation whith variable parameters, math. proc. camb. phil.soc. 107 (1990), 579-590.

[10] Global attractivity and level-crossings in a periodic logistic integrodifferential equation, math. nachr.156(1992), 25-44.

[11] O. Arino, T. A. Burton, and J. Haddock, Periodic solutions of funtional differential equations, Roy. Soc. Edinburgh, Proc. A, 101 (1985), 253-271.

[12] T. A. Burton, Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations, Academic Press, New York, 1985.

[13] J. M. Cushing Integrodifferential equations and delay models in population dynamics, Lect. Notes in Biomath. 20 (1977), Springer- Verlag, Berlin.

[14] Exchange of equilibria in two species Lotka-Volterra competition models, J. Austral. Math. Soc. (series B) 24 (1982), 160-170.

[15] Global asymptotic stability in a periodic integrodifferential system, Tohoku Math. J. 37 (1985), 323-332.

[16] A. Halanay, Differential equations stability oscillations and time lags, academic press, New York, 1996.

[17] Y. Hamaya,Periodic solutions of nonlinear integrodifferential equations, Tohoku Math. J. 41 (1989), 105-116.

[18] R. M. Nisbet and W. S. C. Gurney, Modelling fluctuating populations, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[19] H. Qichang, Existence of periodic solutions to functional differential equations with infinite delay, Scientia Sinica (series A) 28 (1985), 242-251.

[20] B. G. Zhang and K. Golpalsamy, Oscillation and nonoscillation in a nonautonomous delay logistic equation, Quart. Appl. Math. XLVI (1988), 267-273.

[21] G. Seifer, Almost periodic solutions for delay differential equations with infinite delay, J.Diff. Eqns. 41 (1981), 416-425.

[22] Almost periodic solutions for single species population equations with infinitte delay , in differential equations and applications in ecology, Epidemics and populations dynamics (Eds. S. N. Busenberg and K. L. Cooke), Academic press, New York (1981),203-214.

[23] S. Murakami, Almost periodic solutions of a sytem of integrodifferential equations, Tohoku Math J. 39 (1987), 71-79.

[24] Y. Hamaya and T. Yoshizawa, Almost periodic solutions in an integrodifferential equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 114A (1990), 151-159.

[25] Robert G. Bartle "the elements of real analysis second edition"1927

[26] Elong Lages Lima, .Änálisis Real volumen Iïnstituto de matemática y ciencias afines, UNI,(1997)

[27] Tom M. Apostol, análisis matemático segunda edición, california institute of technology,(1979)

[28] Trench, W. F (1978), Advance Calculus Harper and Row, publisher new york.

[29] Novo S. Obaya, R y Rojo, J. (1995) ecuaciones y sistemas diferenciales. Mcgraw-Hill/Interamericana de España,S.A. España

[30] Robert, S. Borden R (1997) A Course in Advance Calculus. Dover