UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Una Generalización del Teorema Hille-Yosida

Autor: Br. Yesika Valera
Tutor: Dr. Alexander Carrasco

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
como requisito final para optar al grado de
Licenciada en Ciencias Matemáticas

BARQUISIMETO, VENEZUELA
ENERO, 2012

CONTENIDO

Agradecimientos

El presente Trabajo Especial de Grado es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

Agradezco primeramente a Dios por permitirme estar aquí, durante estos 23 años de vida, y darme cada día la fuerza necesaria para salir adelante, y ayudarme a levantarme en tantas caídas. A mis padres y hermanos quienes siempre me han apoyado en mis decisiones y me han acompañado en esta larga lucha y quienes de forma incondicional, entendieron mis ausencias y mis malos momentos, y aún a pesar de la distancia siempre estuvierón atentos en este trayecto.

Agradezco también a un ser que lamentablemente hoy no está conmigo celebrando este triunfo, a ti abuela gracias por estar allí y recibirme en tu casa cuando llegue a esta ciudad. Gracias también a mis queridos compañeros, que me apoyaron y me permitieron entrar en su vida durante estos años de convivir dentro y fuera del salón de clase. Agradezco al Profesor Hildemar Seiba por nunca dudar de mí y apoyarme incondicionalmente, ser más que un profesor para mí, y darme animo en todas mis caídas, al profesor Mario Rodríguez por tantas veces escucharme y estar pendiente de mí y ayudarme en tantos momentos de angustia y tristeza, a mi tutor Alexander Carrasco por toda su paciencia y comprensión.

Por último agradezco a la universidad Centroccidental Lisandro Alvarado primero por recibirme y darme la oportunidad de ser alguien en la vida, y segundo por permitirme conocer al hombre de mi vida y quien ha cambiado mi vida en estos 2 ultimo años Alvaro Gómez quien aparte de ser mi hombro me ha regalado lo más bello del mundo mi hija Anabel Gómez a quien a pesar de su edad también agradezco pues ha venido a darme alegría y cambiar mi vida Gracias a todos.

Dedicatoria

Este trabajo lo dedico a:

A mi Dios, quien me dio la fe, la fortaleza, la salud y la esperanza para terminar este trabajo.

A mis padres, Antonio y Mirian, por su comprensión y ayuda en momentos malos y menos malos. Me han enseñado a encarar las adversidades sin perder nunca la dignidad ni desfallecer en el intento. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia y mi empeño, y todo ello con una gran dosis de amor y sin pedir nunca nada a cambio.

A mi esposo, Alvaro Gómez, quien en estos últimos años de mi carrera ha estado constantemente conmigo, apoyandome, creyendo en mí, dandome fuerza y valor para seguir, brindandome su amor, paciencia y compañia, !Gracias¡

A mi hija, ANABEL GOMEZ, quien cambio mi vida desde el primer momento que la senti en mi vientre y quien en ese mismo momento cambio mi rumbo, cambio cada lagrima por alegria, cada dolor por satisfacción, cada desconsuelo por amor, y a quien á pesar que aún no dice mamá me llena de felicidad y por quien podria detener mi vida, tan solo por estar alli con ella y verla feliz, a ti mi princesa dedico cada linea de este trabajo, y por ti seguire luchando cada segundo de mi vida por que tu lo eres todo para mí.

Resumen

En este trabajo la idea fundamental es demostrar una generalización del Teorema de Hille-Yosida para C-semigrupo, ver [2], que expresa:
Un operador cerrado A es el generador de un C-semigrupo exponencialmente acotado si, y sólo si, A es maximal con respecto a algunas de las condiciones:
(B1) $\mathrm{Dom}(A)$ es denso sobre un espacio de Banach B;
(B2) $\lambda - A$ es inyectivo si $\lambda > a$:
(B3) $\mathrm{Dom}((\lambda - A)^{-n}) \supseteq \mathrm{Rango}(C) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, \lambda > a)$;
(B4) $\| (\lambda - A)^{-n} C \| \leqslant M(\lambda - a)^{-n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, \lambda > a)$;
(B5) $(\lambda - A)^{-1} Cf = C(\lambda - A)^{-1} f \;\; (f \in \mathrm{Rango}(\lambda - A), \lambda > a)$.
Este trabajo esta estructurado en 2 capítulos. El capítulo 1, es de preliminares donde se presentan algunos resultados fundamentales sobre la teoría de semigrupos fuertemente continuos y sobre la teoría básica del calculo diferencial en espacios normados.
El capítulo 2 representa la parte principal de este trabajo, se estudian en detalles algunos resultados de la teoría de semigrupos generalizados o C-semigrupos fuertemente continuo, así como una generalización del teorema de Hille-Yosida.

Introducción.

La teoría de semigrupos de operadores lineales sobre un espacio de Banach comenzó en la primera mitad del siglo XX, adquirió su esencia en 1948 cuando surge el Teorema de Hille-Yosida, ver [4], y alcanzó su cúspide con la primera edición de: Semigroups and Functional Analysis, en 1957 de E. Hille and R. S. Phillips. En los años 70 y 80 gracias a los esfuerzos de diferentes escuelas, la teoría alcanza un cierto grado de perfección. Hoy en día, la teoría encuentra aplicaciones en áreas como ecuaciones diferenciales parciales y en general en sistemas de dimensión infinita. En espacios de Banach, la teoría de semigrupos fuertemente continuos, es llamada Teoría de Hille-Yosida.
Existe una clase de semigrupos de operadores no acotados que incluyen a los semigrupos fuertemente continuos y que pueden ser aplicados directamente a diversas ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales, modelandolas como un problema de Cauchy abstracto sobre un espacio de Banach.
Esta clase de operadores se denominan semigrupos generalizados o como aparece recientemente en la literatura C-semigrupos.
Sea B un espacio de Banach y sea $L(B)$ el conjunto de todos los operadores acotados de B en si mismo. Sea $C \in L(B)$ inyectivo. Una familia $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ en $L(B)$ es llamada C-semigrupo, si:
(1) $S(t+s)C = S(t)S(s), \;\; t, s \geqslant 0$ y $S(0) = C$,
(2) $S(\cdot)x : [0, +\infty) \longrightarrow B$ es continuo para todo $x \in B$.
Si un C-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ satisface la condición:
(3) Existe, $M \geqslant 0$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\parallel S(t) \parallel \leqslant Me^{at}, \text{ para } t \geqslant 0,$$

entonces es llamado un C-semigrupo exponencialmente acotado.
En este trabajo se desarrollará en detalle una generalización del Teorema Hille-Yosida para caracterizar los generadores de ciertas clases de semigrupos de operadores no acotados sobre un espacio de Banach, realizado por E. B. Davies y M. M. Pang, en [2] .

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Introducción

Sea $b_0 \in B$ el estado inicial, es decir para $t = 0$ de un sistema dinámico definido en un espacio de Banach B y el estado en un tiempo $t > 0$ es $b(t)$. Supongamos que la dinámica que gobierna la evolución es lineal y autónoma, entonces para cada t se puede definir un operador lineal $T(t)$ como sigue:

$$T(t) : B \longrightarrow B : T(0) = I,$$

$$T(t)b_0 := b(t).$$

Supongamos también que el estado de nuestro sistema dinámico satisface la condición de Hadamard, esto es:
a.- Es único.
b.- Varia continuamente con respecto al estado inicial z_0, es decir;

$$b(t+s) = T(t+s)b_0 = T(t)b(s) = T(t)T(s)b_0,$$

$$T(t+s) = T(t)T(s).$$

De donde $T(t)$ es una aplicación acotada en B. Finalmente imponiendo alguna suavidad en la trayectoria $b(t)$ y suponiendo que $b(t) \longrightarrow b_0$ cuando $t \longrightarrow 0^+$ para todo $b_0 \in B$, se tiene que:

$$\| T(t)b_0 - b_0 \| \longrightarrow 0 \qquad \textit{cuando } t \ \longrightarrow \ 0^+.$$

Esto motiva la definición y estudio de los semigrupos fuertemente continuos, ver [2].

1.2. Semigrupo Fuertemente Continuo

Definición 1.2.1 *Un semigrupo fuertemente continuo es una aplicación $T : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(B)$, que satisface:*
i.- $T(t+s) = T(t) \cdot T(s)$ para $t, s \geqslant 0$.

ii.- $T(0) = I$. *(I es el operador identidad en* B*).*
iii.- $\| T(t)b_0 - b_0 \| \longrightarrow 0$ *cuando* $t \longrightarrow 0^+$*, para todo* $b_0 \in B$.

Ejemplo:
Sean $A \in L(B)$ y $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(At)^n}{n!} \right)$. Antes de verificar que esta familia satisface las propiedades de semigrupos fuertemente continuo, comenzaremos por mostrar que dicha familia está bien definida; es decir, mostraremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$ converge en B.
En efecto,
Sea la suma parcial $T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(A)^k}{k!} \right) t^k$ tenemos para $m, n \in \mathbb{N}$, con $n > m$ que:

$$\begin{aligned} \| T_n(t) - T_m(t) \| &= \| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(A)^k}{k!} \right) t^k - \sum_{k=0}^{m} (\frac{(A)^k}{k!}) t^k \| \\ &= \| \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{(A)^k}{k!} \right) t^k \| \\ &\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{\| A \|^k}{k!} \right) | t |^k \longrightarrow 0, \qquad \textit{cuando } m, n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Así, $T_n(t)$ es una sucesión de Cauchy en $L(B)$ y en consecuencia $T_n(t)$ converge a un operador en $L(B)$, el cual lo denotaremos por e^{At}.
Verifiquemos que $T(t) = e^{At}$ satisface las condiciones de la definición 1.1.
i.- Sean $t, s \geqslant 0$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} T(t+s) &= e^{A(t+s)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^n}{n!} \right) (t+s)^n \end{aligned}$$

En consecuencia usando el producto de Cauchy

$$\begin{aligned}
T(t+s) &= \lim_{j\longrightarrow\infty}\sum_{n=0}^{j}\frac{A^n}{n!}(t+s)^n \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\sum_{n=0}^{j}\frac{A^n}{n!}(\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}t^k s^{n-k}) \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\sum_{n=0}^{j}\frac{A^n}{n!}(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!t^k s^{n-k}}{k!(n-k)!}) \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\sum_{n=0}^{j}(\sum_{k=0}^{n}\frac{A^n t^k s^{n-k}}{k!(n-k)!}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k t^k}{k!}\frac{A^{n-k}s^{n-k}}{(n-k)!}) \\
&= (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n s^n}{n!}) \\
&= e^{At}e^{As} \\
&= T(t)T(s).
\end{aligned}$$

ii.- T(0)=I, ya que:

$$\begin{aligned}
T(0) &= e^{A\cdot 0} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A^k}{k!}\right)0^k \\
&= I+(\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{A^k}{k!})0^k) \\
&= I.
\end{aligned}$$

iii.- Dado $b_0 \in B$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\| T(t)b_0 - b_0 \| &= \| e^{At}b_0 - b_0 \| \\
&= \| \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}b_0 \| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\| A \|^n t^n}{n!} \| b_0 \| \\
&= (e^{\|A\|t}-1) \| b_0 \| .
\end{aligned}$$

La continuidad de $e^{\|A\|t}$ implica que:

$$\| T(t)b_0 - b_0 \| \longrightarrow 0, \qquad \textit{cuando } t \ \longrightarrow\ 0^+.$$

Por lo tanto, $T(t) = e^{At}$ es un semigrupo fuertemente continuo.
La demostración del siguiente teorema se puede ver en [2].

Teorema 1.2.1 *Un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$ en un espacio de Banach B tienen las siguientes propiedades:*
a.- $\| T(t) \|$ es acotado en todo subintervalo acotado de $[0, \infty)$.
b.-$T(t)$ es fuertemente continuo para todo $t \in [0, \infty)$.
c.- Para todo $b \in B$, tenemos que $\frac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)bds \longrightarrow b \quad$ cuando $\quad t \longrightarrow 0^+$.
d.- Si $w_0 = \inf\limits_{t>0}\left(\dfrac{1}{t}\log \| T(t) \|\right)$ entonces $w_0 = \lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{1}{t}\log \| T(t) \|\right) < \infty$.
e.- Para todo $w > w_0$ existe una constante M_w tal que $\| T(t) \| \leqslant M_w e^{wt}, t \geqslant 0$.

Definición 1.2.2 *El generador infinitesimal A de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$ en un espàcio de Banach B se define como:*

$$Az = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{1}{t}\left(T(t) - I\right)b,$$

siempre que el límite exista. El dominio de A, $D(A)$, es el conjunto de elementos en B para el cual el límite existe.

Teorema 1.2.2 *Sea $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach B y A su generador infinitesimal con dominio $D(A)$. Entonces:*
a.- Si $b_0 \in D(A)$ entonces $T(t)b_0 \in D(A), \forall t \geqslant 0$.
b.- $\frac{d}{dt}\left(T(t)b_0\right) = AT(t)b_0 = T(t)b_0$, para $b_0 \in D(A), t \geqslant 0$.
c.- $\frac{d^n}{dt^n}\left(T(t)b_0\right) = A^nT(t)b_0 = T(t)A^nb_0$, para $b_0 \in D(A^n), t \geqslant 0$.
d.- $T(t)b_0 - b_0 = \displaystyle\int_0^t T(s)Ab_0ds, b_0 \in D(A)$.
e.- A es un operador lineal cerrado y $D(A)$ es denso en B.
f.- $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ es denso en B.

Demostración.-
a.-Sea $b_0 \in D(A)$, debemos probar que para $t > 0$ fijo pero arbitrario se cumple:

$$\lim_{s\longrightarrow 0^+} \frac{(T(s) - I)T(t)b_0}{s}$$

existe. En efecto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{T(s) - I}{s}\right)T(t)b_0 &= \frac{T(s)T(t)b_0 - T(t)b_0}{s}\\ &= \frac{T(s+t)b_0 - T(t)b_0}{s}\\ &= T(t)\left(\frac{T(s)b_0 - b_0}{s}\right)\end{aligned}$$

Como $b_0 \in D(A)$, tenemos que:

$$\lim_{a \longrightarrow 0^+} \frac{T(s)b_0 - b_0}{s}$$

existe. En consecuencia,

$$\lim_{s \longrightarrow 0^+} \left(\frac{T(s) - I}{s} \right) T(t)b_0 \quad = \quad \lim_{s \longrightarrow 0^+} \left[T(t) \left(\frac{T(s)b_0 - b_0}{s} \right) \right]$$

Luego,

$$\lim_{s \longrightarrow 0^+} \left(\frac{T(s) - I}{s} \right) T(t)b_0$$

existe y dado que t fue tomado fijo pero arbitrario tenemos que $T(t)b_0 \in D(A)$, para todo $t \geqslant 0$ y además $AT(t) = Ab_0$

b.-Sea $b_0 \in D(A)$ y $t > 0$, de (a) tenemos que $T(t)b_0 \in D(A)$ y $AT(t)b_0 = T(t)Ab_0$. Para probar que $\frac{d}{dt}(T(t)b_0 = AT(t)b_0$ es suficiente ver que las derivadas por la izquierda y por la derecha existen y son iguales. Sean $t > 0$ y $h > 0$, y definamos $f(t) = T(t)b_0, b_0 \in D(A)$. En primer lugar, se tiene que:

$$\begin{aligned} f'_+(t) &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(t+h)b_0 - T(t)b_0}{h} \\ &= T(t) \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(h)b_0 - b_0}{h} \\ &= T(t)Ab_0 = AT(t)b_0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $t - h > 0$ entonces

$$\begin{aligned} f'_-(t) &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(t-h) - f(t)}{-h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(t-h)b_0 - T(t)b_0}{-h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(t-h)b_0 - T(t-h+h)b_0}{-h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} (t-h) \left(\frac{T(h)b_0 - b_0}{h} \right) \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left[(t-h)Ab_0 + T(t-h) \left(\frac{T(h)b_0 - b_0}{-h} - Ab_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \| T(t-h) \left(\frac{T(h)b_0 - b_0}{h} - Ab_0 \right) \| &\leqslant \| T(t-h) \| \| \frac{T(h)b_0 - b_0}{h} - Ab_0 \| \\ &\leqslant Me^{wt} \| \frac{T(h)b_0 - b_0}{h} - Ab_0 \| \end{aligned}$$

Dado que $Me^{wt} \parallel \frac{T(h)b_0-b_0}{h} - Ab_0 \parallel \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow 0^+$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f'_-(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\left[T(t-h)Ab_0 + T(t-h)\left(\frac{T(h)b_0-b_0}{h} - Ab_0\right)\right] \\ &= T(t)Ab_0 \\ &= AT(t)b_0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}(T(t)b_0) = AT(t)b_0 = T(t)Ab_0.$$

c.- Procedamos por inducción matemática. Para n=1, por el resultado anterior sabemos que

$$\frac{d}{dt}(T(t)b_0) = AT(t)b_0 = T(t)Ab_0.$$

Para n=2, veamos que

$$\frac{d^2}{dt^2}(T(t)b_0) = A^2T(t)b_0 = T(t)A^2b_0, \quad b_0 \in D(A^2).$$

En efecto, sea $b_0 \in D(A^2)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(T(t)b_0) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(T(t)b_0)\right) \\ &= \frac{d}{dt}(AT(t)b_0) \\ &= \frac{d}{dt}(T(t)Ab_0) \\ &= AT(t)Ab_0 \\ &= AAT(t)b_0 \\ &= A^2T(t)b_0. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A^2T(t)b_0 &= A(AT(t)b_0) \\ &= A(T(t)Ab_0) \\ &= AT(t)(Ab_0) \\ &= T(t)A(Ab_0) \\ &= T(t)A^2b_0. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d^2}{dt^2}(T(t)b_0) = A^2T(t)b_0 = T(t)A^2b_0, \quad b_0 \in D(A^2).$$

Supongamos que la igualdad se cumple para $n = k-1$, esto es,

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(T(t)b_0) = A^{k-1}T(t)b_0 = T(t)A^{k-1}b_0, \quad b_0 \in D(A^{k-1}).$$

Veamos que se cumple para $n = k$. Es decir,

$$\frac{d^k}{dt^k}(T(t)b_0) = A^k T(t)b_0 = T(t)A^k b_0, \qquad z_0 \ \in \ D(A^k).$$

En efecto, sea $b_0 \in D(A^k)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dt^k}(T(t)b_0) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(T(t)b_0)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(A^{k-1}T(t)b_0\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(T(t)A^{k-1}b_0\right) \\
&= AT(t)A^{k-1}b_0 \\
&= AA^{k-1}T(t)b_0 \\
&= A^k T(t)b_0.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
A^k T(t)b_0 &= A^{k-1}(AT(t)b_0) \\
&= A^{k-1}(T(t)Ab_0) \\
&= A^{k-1}T(t)(Ab_0) \\
&= T(t)A^{k-1}(Ab_0) \\
&= T(t)A^k b_0.
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d^n}{dt^n}(T(t)b_0) = A^n T(t)b_0 = T(t)A^n b_0, \qquad b_0 \ \in \ D(A^n).$$

d.- Sea B^* el dual de B y tomando $b^* \in B$ tenemos que:

$$\langle b^*, T(t)b_0 - b_0\rangle = \int_0^t \frac{d}{du}\langle b^*, T(u)b_0\rangle\, du.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\langle b^*, T(t)b_0 - b_0\rangle &= \int_0^t \left\langle b^*, \frac{d}{du}T(u)b_0 \right\rangle du \\
&= \int_0^t \langle b^*, T(u)Ab_0\rangle\, du \\
&= \left\langle b^*, \int_0^t T(u)Ab_0 du \right\rangle,
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$T(t)b_0 - b_0 = \int_0^t T(u)Ab_0 du.$$

e.- Veamos que $D(A)$ es denso en B. Sea $b \in B$, probemos que $\displaystyle\int_0^t T(u)zdu \in D(A)$.
En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{T(s)-I}{s}\int_0^t T(u)bdu &= \frac{1}{s}\int_0^t T(s)T(u)bdu - \frac{1}{s}\int_0^t T(u)bdu \\
&= \frac{1}{s}\int_0^t T(u+s)bdu - \frac{1}{s}\int_0^t T(u)bdu.
\end{aligned}$$

Haciendo $\rho = s+u$ en la primera integral del lado derecho tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\int_0^t T(u)bdu &= \frac{1}{s}\int_0^{t+s} T(\rho)bd\rho - \frac{1}{s}\int_0^t T(u)bdu \\
&= \frac{1}{s}\left(\int_t^{t+s} T(\rho)bd\rho + \int_s^t T(\rho)bd\rho - \int_s^t T(u)bdu - \int_0^s T(u)bdu\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(\int_0^s (T(t+u) - T(u))bdu\right) \\
&= \frac{1}{s}\int_0^s T(u)(T(t)-I)bdu.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $s \longrightarrow 0^+$ en ambos lados de la igualdad y por teorema 1.1(c) tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\longrightarrow 0^+}\left(\frac{T(s)-I}{s}\int_0^t T(u)bdu\right) &= \lim_{s\longrightarrow 0^+}\frac{1}{s}\int_0^s T(u)(T(t)-I)bdu \\
&= (T(t)-I)b.
\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{s\longrightarrow 0^+}\left(\frac{T(s)-I}{s}\int_0^t T(u)bdu\right)$$

existe. Por tanto, $\displaystyle\int_0^t T(u)bdu \in D(A)$ y además $\frac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(u)bdu \longrightarrow b$, cuando $t \longrightarrow 0^+$. Así, para cualquier $b \in B$, existe una sucesión en $D(A)$que tiende a b, por lo que $D(A)$ es denso en B. Ahora probemos que A es un operador lineal cerrado. En primer lugar, veamos la linealidad.
En efecto, sea $b_1, b_2 \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{1}{t}(T(t)-I)(b_1+b_2) &= \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{1}{t}(T(t)(b_1+b_2) - (b_1+b_2)) \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{1}{t}(T(t)b_1 + T(t)b_2 - (b_1+b_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow 0^+}(T(t)-I)(b_1+b_2) &= \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{1}{t}(T(t)b_1 - b_1) + \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{1}{t}(T(t)b_2 - b_2) \\
&= A(b_1) + A(b_2).
\end{aligned}$$

Así que,

$$A(b_1+b_2) = A(b_1) + A(b_2)$$

Para probar que A es un operador cerrado en su dominio consideremos una sucesión b_n en $D(A)$ convergiendo a b tal que Ab_n converge a y y probemos que $b \in D(A)$, tenemos por la parte (d) que:

$$T(t)b_n - b_n = \int_0^t T(s)Ab_n ds.$$

Ahora bien, definamos $f_n(t) = T(t)Ab_n$ una sucesión de funciones integrables que convergen a $T(t)y$.
Como $Ab_n \longrightarrow y$ se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Longrightarrow \| Ab_n - y \| \leqslant \varepsilon.$$

Lo que implica que $\| Ab_n \| \leqslant \varepsilon + \| y \|$. Luego, dado que $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}$ se tiene que:

$$\| f_n(t) \| = \| T(t)Ab_n \| \leqslant \| T(t) \| \| Ab_n \| \leqslant Me^{wt}(\varepsilon + \| y \|) = g(t), \quad \forall\, n.$$

De donde, se obtiene que existe una función integrable $g(t) = Me^{wt}(\varepsilon + \| y \|)$ tal que $\| f_n(t) \| \leqslant g(t)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.. Así pues, estamos en condiciones de aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y obtener que $T(t)b - b = \displaystyle\int_0^t T(s)yds$. Dividiendo entre t, tomando límite cuando $t \longrightarrow 0^+$ y usando teorema 1.2(c) tenemos:

$$Ab = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)b - b}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)yds = y.$$

Así, hemos demostrado que $b \in D(A)$ y $Ab = y$, lo cual prueba que A es un operador lineal cerrado.
f.- Sea $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ la clase de todas las funciones a valores en $\mathbb{R}^+$ teniendo derivadas continuas de todo orden y con soporte compacto. Si $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, entonces la derivada r-ésima, Φ^r también lo estará y $\Phi(u)T(u)b$ es una función continua a valores reales de $\mathbb{R}^+$ a B. Sea B_0 el conjunto de todos los elementos de la forma

$$g = \int_0^\infty \Phi(u)T(u)bdu, \qquad b \in B,\ \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+).$$

Este operador esta bien definido, ver [2].
Probemos ahora que $B_0 \subset D(A^r)$ para $r \geqslant 1$ y que B_0 es denso en B.
En efecto, para s suficientemente pequeño

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(s) - I}{s}\right) g &= \frac{1}{s}(T(s)g - g) \\
&= \frac{1}{s}\left(T(s)\int_0^\infty \Phi(u)T(u)bdu - \int_0^\infty \Phi(u)T(u)zdu\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(\int_0^\infty \Phi(u)T(u+s)bdu - \int_0^\infty \Phi(u)T(u)bdu\right).
\end{aligned}$$

Haciendo $w = u + s$ en la primera integral tenemos

$$\int_0^\infty \Phi(u)T(u+s)bdu = \int_0^\infty \Phi(w-s)T(w)bdw$$

y
$$\int_0^\infty \Phi(u)T(u)bdu = \int_0^s \Phi(u)T(u)bdu + \int_s^\infty \Phi(u)T(u)bdu.$$
Así,
$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(s)-I}{s}\right)g &= \frac{1}{s}\left(\int_s^\infty \Phi(w-s)T(w)bdw - \int_0^s \Phi(u)T(u)bdu + \int_s^\infty \Phi(u)T(u)bdu\right)\\
&= \frac{1}{s}\left(\int_s^\infty \Phi(u-s)T(u)bdu - \int_0^s \Phi(u)T(u)bdu + \int_s^\infty \Phi(u)T(u)bdu\right)\\
&= \frac{1}{s}\left(\int_s^\infty (\Phi(u-s)-\Phi(u))T(u)zdu - \int_0^s \Phi(u)T(u)bdu\right).
\end{aligned}$$
Pero si hacemos $w=-s$ tenemos que:
$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(u-s)-\Phi(u)}{s} &= \frac{\Phi(u+w)-\Phi(u)}{-w}\\
&= -\left(\frac{\Phi(u+w)-\Phi(u)}{w}\right).
\end{aligned}$$
Luego,
$$\begin{aligned}
\lim_{s\longrightarrow 0^+}\left(\frac{\Phi(u-s)-\Phi(u)}{s}\right) &= -\lim_{w\longrightarrow 0^-}\left(\frac{\Phi(u+w)-\Phi(u)}{w}\right)\\
&= -\Phi'(u).
\end{aligned}$$
y $\frac{1}{s}\left(\int_0^s \Phi(u)T(u)bdu\right)$ es cero para s suficientemente pequeño. Así, $g \in D(A)$ y $Ag = -\int_0^\infty \Phi'(u)T(u)bdu.$
Repitiendo este argumento, vemos que $g \in D(A^r)$, para todo $r > 0$ y
$$A^r g = (-1)^r \int_0^\infty \Phi^r(u)T(u)bdu,$$
lo cual muestra que $B_0 \subset \bigcap_r D(A^r)$.
Ahora veamos que $\overline{B_0} = B$, razonemos por reducción al absurdo.
Supongamos que la clausura de B_0 no es B, entonces debe existir $b_0 \in B$ tal que:
$$\langle b_0, g\rangle = 0, \qquad \forall\ g\ \in\ B_0\ y\ \parallel b_0 \parallel = 1$$
es decir, $\left\langle b_0, \int_0^\infty \Phi(u)T(u)b_0du\right\rangle = \int_0^\infty \Phi(u) < b_0, T(u)b_0 > du = 0,$ para todo $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ y $b \in B$
Definamos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por:
$$f(u) = \langle b_0, T(u)b_0\rangle$$
la cual claramente es continua, además $f(0) = \langle b_0, T(0)b_0\rangle = \langle b_0, b_0\rangle = \parallel b_0 \parallel^2 = 1$ y por ser f continua existe un entorno de 0 donde f no se anula. Luego, para $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ tenemos
$$\int_0^\infty \Phi(u)\left\langle b_0, T(u)b_0\right\rangle du \neq 0$$

lo cual es una contradicción pues $\int_0^\infty \Phi(u) \langle b_0, T(u)b_0 \rangle \, du = 0$. Por lo tanto, $\overline{B_0} = B$ y así B_0 es denso en B.
De manera que $B_0 \subset \bigcap_r D(A^r)$ y B_0 es denso en B, por lo que $\bigcap_r D(A^r)$ es denso en B.
por lo antes expuesto, tenemos que los semigrupos juegan un papel importante en determinar la solución de una ecuación abstracta de evolución

$$\begin{aligned} \{b'(t) &= Ab(t), \quad t > 0 \\ b(0) &= b_0. \end{aligned}$$

En particular, sabemos que $b(t) = T(t)b_0$ es la solución, si A es el generador de un semigrupo fuertemente continuo y $b_0 \in D(A)$. También es importante obtener una caracterizaciòn de aquellos operadores que generan semigrupos fuertemente continuos. El operador resolvente, $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, del generador infinitesimal A de un semigrupo fuertemente continuo juega un papel muy importante en las aplicaciones.

Lema 1.2.1 *Sea T(t) un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A y con cota superior w_0. Si $Re(\lambda) > w > w_0$, entonces $\lambda \in \rho(A)$ (conjunto resolvente de A), y para todo $b \in B$ se tiene los siguiente resultados:*
a.- $R(\lambda, A)b = (\lambda I - A)^{-1}b = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)bdt$ y $\| R(\lambda, A) \| \leqslant \frac{M}{\sigma - w}\sigma = Re(\lambda)$.
b.- $\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} \alpha(\alpha I - A)^{-1}b = b$ para todo $b \in B$, donde α es un número real.

Demostración
a.- Sea

$$R_\lambda b = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)bdt \qquad b \in B, \; Re(\lambda) > w.$$

Este operador esta bien definido, ver [2], por teorema 1.2(e) tenemos que:

$$\| e^{-\lambda t}T(t)bdt \| \leqslant Me^{(w-\sigma)t} \| b \|, \qquad \sigma = Re(\lambda).$$

Así,

$$\begin{aligned} \| R_\lambda b \| &= \| \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)bdt \| \\ &\leqslant M \| b \| \int_0^\infty e^{-(\sigma - w)t}dt. \end{aligned}$$

De donde;

$$\| R_\lambda \| \leqslant \frac{M}{\sigma - w}.$$

Luego, R_λ es acotado.
Mostremos ahora que $R_\lambda b \in D(A)$ y $(\lambda I - A)R_\lambda b = b$, $\forall b \in B$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{T(s)-I}{s}R_\lambda b &= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(s+t)-T(t)]zdt \\
&= \frac{1}{s}\left[\int_s^\infty e^{-\lambda(u-s)}T(u)bdu - \int_0^\infty e^{-\lambda u}T(u)bdt\right] \\
&= \frac{1}{s}\left[e^{\lambda s}\int_0^\infty e^{-\lambda u}T(u)bdu - e^{\lambda s}\int_0^s e^{-\lambda u}T(u)bdu - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)]bdt\right] \\
&= \frac{e^{\lambda s-1}}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)bdt - \frac{e^{\lambda s}}{s}\int_0^s e^{-\lambda t}T(t)bdt.
\end{aligned}$$

Así,

$$AR_\lambda b = \lim_{s\longrightarrow 0^+}\frac{T(s)-I}{s}R_\lambda b = \lambda R_\lambda b - b, \qquad \forall\, b\,\in\, B.$$

Además,

$$R_\lambda Ab = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Abdt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)bdt = AR_\lambda b, \qquad b\,\in\, D(A).$$

De manera que:

$$R_\lambda(\lambda I - A)b = b, \qquad b\,\in\, D(A)$$

y

$$(\lambda I - A)R_\lambda b = b, \qquad b\,\in\, B.$$

Por lo tanto $R(\lambda, A) = R_\lambda$. Así, concluimos que $R(\lambda, A)b = (\lambda I - A)^{-1}b = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)bdt$ y $\parallel R(\lambda, A)\parallel \leqslant \frac{M}{\sigma - w}$, $\sigma = Re(\lambda)$, además $\lambda \in \rho(A)$.

b.- Dado que el dominio de A es denso en Z, siempre podemos encontrar un $x \in D(A)$ tal que $\parallel x - b \parallel \leqslant \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ y $b \in B$. Tomando $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tenemos por la parte anterior que:

$$\parallel (\alpha I - A)^{-1} \parallel \leqslant \frac{M}{\alpha - w} \leqslant \frac{\varepsilon}{\parallel Ax \parallel} \quad y \quad \mid \frac{\alpha}{\alpha - w} \mid \leqslant 2, \ \ \forall\, \alpha > \alpha_0.$$

Ahora bien, dado $\alpha > \alpha_0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\parallel \alpha(\alpha I - A)^{-1}b - b \parallel &= \parallel \alpha(\alpha I - A)^{-1}b - \alpha(\alpha I - A)^{-1}x + \alpha(\alpha I - A)^{-1}x - x + x - b \parallel \\
&\leqslant \parallel \alpha(\alpha I - A)^{-1}(b - x) \parallel + \parallel \alpha(\alpha I - A)^{-1}x - x \parallel + \parallel x - b \parallel \\
&\leqslant \mid \frac{\alpha M}{\alpha - w} \mid\parallel b - x \parallel + \parallel (\alpha I - A)^{-1}Ax \parallel + \parallel x - b \parallel \\
&\leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\
&= (2M + 2)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto se cumple para todo $\varepsilon > 0$. Así $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow\infty} \alpha(\alpha I - A)^{-1}b = b$, donde α es un número real.
En lo que sigue denotaremos por C_0-semigrpo a los Semigrupos Fuertemente Continuos.

Teorema 1.2.3 *(Hille-Yosida) Un operador, lineal $A : D(A) \subseteq B \longrightarrow B$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrpo de contracciones si, y solo si:*
(i) A es cerrado y definido densamente, esto es,$\overline{D(A)} = B$.
(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contien a $\mathbb{R}_+$ y para todo λ >0 se tiene que:

$$\| R(\lambda, A) \| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Demostración
Comenzamos con la condición necesaia. Sea $A : D(A) \subseteq B \longrightarrow B$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrpo de contracciones $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ Entonces el teorema 1.3 de este capítulo nos garantiza que A es cerrado y $D(\bar{A}) = B$.
Por tanto (i) se cumple.
Para demostrar (ii), sea $\lambda > 0$, $x \in B$, postulamos como candidato a ser la inversa de $\lambda I - A$ al operador definido por:

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt.$$

Ahora si estudiamos su norma tenemos:

$$\begin{aligned}
\| R(\lambda)x \| &= \| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt \| \\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| x \| dt \\
&= \| x \| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{\| x \|}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Con el fin de demostrar que la integral en el lado derecho de la igualdad es convergente recordemos que $t \longrightarrow T(t)x$ es continuo y uniformemente acotado, la integral impropia existe en el sentido de Riemann y define un operador lineal acotado, así obtenemos que $R(\lambda)$ esta bien definido, claramente es lineal y acotado.

$$\| R(\lambda) \| = Sup_{\|x\|\leqslant 1} \frac{\| R(\lambda) \| x}{\| x \|}.$$

Obteniendo así que:

$$\| R(\lambda)x \| \leqslant \frac{\| x \|}{\lambda}$$

Despejando ahora de esta ecuación se tiene

$$\frac{\| R(\lambda)x \|}{\| x \|} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Con lo que bastaria demostrar que $R(\lambda)$ es efectivamente la inversa de $\lambda I - A$, para ello primero veamos que

$$R(\lambda)x \in D(A).$$

En efecto dado $h > 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(h)T(t)x - T(t)x]dt\\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(h+t)x - T(t)x]dt\\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt + e^{\lambda h}\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt - e^{\lambda h}\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - e^{\lambda h}\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right]\\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt.
\end{aligned}
$$

Tomando limite cuando $h \longrightarrow 0$ nos queda:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \lim_{h\longrightarrow 0}\left[\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt\right]\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como estamos trabajando con un C_0-semigrupo y $e^{-\lambda t}$ es continuo entonces el producto define un operador fuertemente continuo así podemos aplicar el teorema 2.1 de Semigrupo Uniformemente Continuo y obtendremos que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt &= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - x\\
&= \lambda R(\lambda)x - x.
\end{aligned}
$$

Esto significa que para cada $x \in B$ y cada $\lambda > 0, R(\lambda)x \in D(A)$ y

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Ahora despejando x de esta igualdad nos queda:

$$\lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = x$$

Obteniendo así,

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x.$$

De donde obtenemos que:

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)R(\lambda) &= \lambda I R(\lambda) - AR(\lambda)\\ &= \lambda R(\lambda) - (\lambda R(\lambda) - I) = I.\end{aligned}$$

Ahora para cada $x \in D(A)$ y usando el teorema 1.3 de esta sección nos garantiza que A es un operador cerrado, así

$$\begin{aligned}R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt\\ &= A(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= AR(\lambda)x.\end{aligned}$$

Hemos obtenido entonces que $R(\lambda)$ y A conmutan sobre $D(A)$, en consecuencia para cada $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}R(\lambda)(\lambda I - A)x &= \lambda R(\lambda)Ix - R(\lambda)Ax\\ &= \lambda R(\lambda)Ix - AR(\lambda)x\\ &= \lambda R(\lambda)x - (\lambda R(\lambda)x - x)\\ &= x.\end{aligned}$$

Así $(\lambda I - A)$ es invertible para todo $\lambda > 0$, con inversa $R(\lambda)$, de donde tenemos que $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Antes de demostrar la suficiencia de las condiciones (i) y (ii) necesitamos algunos resultados preliminares

Lema 1.2.2 *Sea A un operador que satisface (i) y (ii) del teorema de Hille-Yosida. Si $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ entonces*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x.$$

para cada $x \in B$.

Demostración
Sean $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$, entonces

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x = x.$$

De acá usando el hecho de que $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ obtenemos

$$R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x.$$

Ahora si despejamos a $R(\lambda, A)Ax$ obtenemos que:

$$\lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax.$$

Aplicando norma a ambas igualdades nos queda

$$\begin{aligned} \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| &= \| R(\lambda,A)Ax \| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} \| Ax \| . \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\| \lambda R(\lambda,A)x - x \| \leqslant \frac{1}{\lambda} \| Ax \| .$$

El lado derecho de esta igualdad tiende a cero cuando $\lambda \longrightarrow \infty$, así

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda R(\lambda,A)x = x.$$

Cumpliendose así la tesis para cada $x \in D(A)$.
Consideremos ahora $x \in \mathbb{B}$ entonces haciendo uso de (i) que garantiza que A esta densamente definido, podemos elegir una sucesión $\{x_n\} \subseteq D(A)$ con $x_n \longrightarrow x$.

$$\begin{aligned} \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| &= \| \lambda R(\lambda,A)(x - x_n + x_n) - x_n + x_n - x \| \\ &= \| \lambda R(\lambda,A)(x - x_n) + \lambda R(\lambda,A)x_n - x_n + x_n - x \| \\ &\leqslant \| \lambda R(\lambda,A)(x - x_n \| + \| \lambda R(\lambda,A)x_n - x_n \| + \| x_n - x \| \\ &\leqslant \lambda \| R(\lambda,A) \| \| (x - x_n) \| + \| \lambda R(\lambda,A)x_n - x_n \| + \| x_n - x \| \\ &\leqslant \lambda \frac{1}{\lambda} \| (x - x_n) \| + \| \lambda R(\lambda,A)x_n - x_n \| + \| x_n - x \| \\ &= 2 \| (x - x_n) \| + \| \lambda R(\lambda,A)x_n - x_n \| . \end{aligned}$$

Luego como cada $x_n \in D(A)$ utilizamos la parte anterior obteniendo:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Sup \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| &\leqslant 2 \| (x - x_n) \| + \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Sup \| \lambda R(\lambda,A)x_n - x_n \| \\ &= 2 \| (x - x_n) \| . \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Sup \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} 2 \| (x - x_n) \| .$$

Por lo que obtenemos que:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Sup \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| \leqslant 0.$$

Ahora si recordamos que:

$$0 \leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Inf \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| \leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Sup \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| \leqslant 0.$$

Obtenemos que:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Sup \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| = \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Inf \| \lambda R(\lambda,A)x - x \| = 0.$$

O equivalentemente:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x.$$

Ahora definamos para cada $\lambda > 0$, la aproximación o regulada de Yosida de A por:

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

A_λ es una aproximación de A en el siguiente sentido.

Lema 1.2.3 *Sea A un operador que satisface (i) y(ii) del teorema de Hille-Yosida.Si A_λ es la aproximaciónde la regulada de yosida de A entonces*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} A_\lambda x = Ax.$$

Para cada $x \in D(A)$

Demostración
Por el lema anterior

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x.$$

En particular si $x \in D(A) \subset B$ entonces

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax \Longrightarrow \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} A_\lambda x = Ax.$$

Ahora si demostraremos la suficiencia del teorema de Hille-yosida para ello tenemos que:

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

Así que tomemos

$$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I, \quad \lambda > w.$$

De acá tenemos que $A_\lambda \in L(B)$, esto dado que $R(\lambda, A)$ es un operador lineal y acotado y $\lambda^2 R(\lambda, A)$ también es lineal y acotado, y ya sabemos que I es lineal y acotado.
Ahora construyamos el C_0-semigrupo dado por:

$$T^\lambda(t) = e^{A\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} (\lambda I - A)^{-n}.$$

Y mostremos que el limite cuando $\lambda \longrightarrow \infty$ de $T^\lambda(t)$ existe y es el semigrupo deseado $T(t)$.
Por el lema 4.2 demostramos ya que:

$$\| A_\lambda x - Ax \| \longrightarrow 0.$$

Cuando $\lambda \longrightarrow \infty$ para cada $x \in D(A)$.
Además ya demostramos que:

$$\lambda(\lambda I - A)^{-1} x \longrightarrow x.$$

Cuando $\lambda \longrightarrow \infty$ para todo $x \in \mathbb{B}$.
Por otro lado

$$\begin{aligned}
A_\lambda x &= \lambda A R(\lambda, A)x \\
&= \lambda R(\lambda, A)Ax \\
&= \lambda(\lambda I - A)^{-1}Ax.
\end{aligned}$$

Así $A_\lambda x \longrightarrow Ax$ cuando $\lambda \longrightarrow \infty$ para $x \in D(A)$.
Ahora notemos que:

$$\begin{aligned}
\parallel T^\lambda(t) \parallel &= \parallel e^{A\lambda t} \parallel \\
&= \parallel e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!}(\lambda I - A)^{-n} \parallel \\
&\leqslant e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \parallel (\lambda I - A)^{-n} \parallel \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \parallel R(\lambda, A)^n \parallel \\
&\leqslant e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \frac{M}{(\lambda - w)^n} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{(\lambda - w)^n} \frac{M}{n!} \\
&= M e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2)^n}{(\lambda - w)^n} \frac{t^n}{n!} \\
&= M e^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda - w}} \\
&= M e^{\frac{\lambda w t}{\lambda - w}} \\
&= M e^{\frac{(\lambda w)t}{\lambda - w}} \qquad (1).
\end{aligned}$$

Así $T^\lambda(t)$ es uniformemente acotada sobre un intervalo acotado con λ suficientemente grande.
Ahora:

$$(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} = (\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}.$$

Y por tanto

$$A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda \ y \ \ A_\lambda T^\mu(t) = T^\mu(t) A_\lambda.$$

Así para $x \in D(A)$ se sigue que:

$$\begin{aligned}
T^{\lambda}(t)x - T^{\mu}(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(T^{\mu}(t-s)T^{\lambda}(s)x)ds \\
&= \int_0^t (-A_{\mu}T^{\mu}(t-s)T^{\lambda}(s)x + T^{\mu}(t-s)A_{\lambda}T^{\lambda}(s)x)ds \\
&= \int_0^t T^{\mu}(t-s)(A_{\lambda} - A_{\mu})T^{\lambda}(s)xds \\
&= \int_0^t T^{\mu}(t-s)T^{\lambda}(s)(A_{\lambda} - A_{\mu})xds.
\end{aligned}$$

Luego, como λ es suficientemente grande del hecho que

$$\begin{aligned}
\| T^{\lambda}(t) \| &\leqslant Me^{\frac{(\lambda w)t}{\lambda - w}} \\
&\leqslant Me^{2|w|t}.
\end{aligned}$$

tomando $\frac{\lambda w}{\lambda - w} = 2 \mid w \mid$

Así si tomamos λ y μ suficientemente grande se tiene que

$$\begin{aligned}
\| T^{\lambda}(t)x - T^{\mu}(t)x \| &= \| \int_0^t T^{\mu}(t-s)T^{\lambda}(s)(A_{\lambda} - A_{\mu})xds \| \\
&\leqslant \int_0^t \| T^{\mu}(t-s) \| \| T^{\lambda}(s) \| \| (A_{\lambda} - A_{\mu})x \| ds \\
&\leqslant \int_0^t Me^{2|w|(t-s)}Me^{2|w|s} \| (A_{\lambda} - A_{\mu})x \| ds \\
&= \int_0^t M^2e^{2|w|t} \| (A_{\lambda} - A_{\mu})x \| ds \\
&= M^2e^{2|w|t} \| (A_{\lambda} - A_{\mu})x \| t.
\end{aligned}$$

Recordando que:

$$A_{\lambda}x \longrightarrow Ax,$$

cuando $\lambda \longrightarrow \infty$ entonces tenemos

$$\| (A_{\lambda} - A_{\mu})x \| \longrightarrow 0,$$

cuando λ,$\mu \longrightarrow \infty$

Por tanto $T^{\lambda}(t)x$ es una sucesión de Cauchy y converge a $T(t)x$, es decir, usando la acotación uniforme de $T^{\lambda}(t)x$ y el hecho que $D(A)$ es denso en B uno puede extender esta convergencia para cada $x \in B$.

Por lo que podemos concluir que $T^{\lambda}(t)x \longrightarrow T(t)x$ uniformemente sobre un intervalo compacto.

Usando el hecho de (1) y el lema A.3.36, del libro Curtain y zwart concluimos que

$$\begin{aligned}
\| T(t)x \| &\leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Inf \| T^{\lambda}(t)x \| \\
&\leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} InfMe^{\frac{(\lambda w)t}{\lambda - w}} \| x \| \\
&= Me^{wt} \| x \| .
\end{aligned}$$

El resto es mostrar que $T(t)$ es un C_0-semigrupo con generador infinitesimal A. Para todo $x \in B$.

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} T^{\lambda}(t+s)x \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} T^{\lambda}(t)T^{\lambda}(s)x \\ &= T(t)T(s)x. \end{aligned}$$

Por otro lado $T(0) = I$, y la continuidad fuerte es una consecuencia de la convergencia uniforme sobre intervalos compactos, ahora

$$\begin{aligned} \| T^{\lambda}(t)A_{\lambda}x - T(t)Ax \| &= \| T^{\lambda}(t)A_{\lambda}x - T^{\lambda}(t)Ax + T^{\lambda}(t)Ax - T(t)Ax \| \\ &= \| T^{\lambda}(t)(A_{\lambda}x - Ax) + T^{\lambda}(t)Ax - T(t)Ax \| . \end{aligned}$$

Y como $T^{\lambda}(t)x \longrightarrow T(t)x$ converge fuertemente cuando $\lambda \longrightarrow \infty$, uniformemente sobre intervalos compactos para $x \in D(A)$ aplicando así el teorema de convergencia Dominante de Lebesgue A.5.21 tenemos

$$T^{\lambda}(t)x - x = \int_0^t T^{\lambda}(s)A_{\lambda}xds.$$

Obteniendo así

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds.$$

Para $x \in D(A)$.
Así el generador infinitesimal $\tilde{A}$ de $T(t)$ es una extensión de A y por tanto

$$\tilde{A}x = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax.$$

Ahora si $\lambda > w$, entonces

$$(\lambda I - A)D(A) = x.$$

Y así tenemos que

$$(\lambda I - \tilde{A})D(\tilde{A}) = x.$$

Pero $AD(A) = \tilde{A}D(A)$ y por tanto

$$(\lambda I - \tilde{A})D(A) = (\lambda I - \tilde{A})D(\tilde{A}).$$

Por tanto $D(A) = D(\tilde{A})$.

1.3. Teoría Básica del Cálculo Diferencial en Espacio Normados

Teorema 1.3.1 *Sean $f : A \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ y $x_0 \in B \subset A$, donde A y B son abiertos, y H y K, son espacios normados. Designemos por $f_1 : B \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ a la restricción de f en B; es decir,*

$f_1(x) = f(x)$, para todo $x \in B$.
Luego, f_1 es diferenciable por la derecha en x_0 si y sólo si lo es f, en cuyo caso $D^+ f_1(x_{0)} = D^+ f(x_0)$.

Teorema 1.3.2 *Sea $f, g : A \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$, donde A es abierto y $x_0 \in A$, funciones diferenciables por la derecha en x_0. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la función $\alpha f + \beta g$ es diferenciable por la derecha en x_0 y se tiene: $D^+(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha D^+ f(x_0) + \beta D^+ g(x_0)$.*

Proposición 1.3.1 *Todo espacio normado $\mathbb{K}$ es congruente con $L(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ bajo la transformación $\psi : \mathbb{K} \longrightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, tal que $\psi(z)(t) = tz$, para $z \in \mathbb{K}$, $t \in \mathbb{R}$.*

Corolarío 1.3.1 *Sea $f : A \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$, donde A es abierto y $x_0 \in A$. Si f es diferenciable por la derecha en x_0 y $D^+ f(x_0)$ es continua, entonces f es continua en x_0.*

Teorema 1.3.3 *Sean $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un espacio normado, y $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables por la derecha en (a, b). Si para todo $t \in (a, b)$ se tiene*

$$\| D^+ f(t) \| \leqslant D^+ g(t),$$

entonces se verifica

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant g(b) - g(a).$$

Demostración
Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera pero fijo,definamos la función $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $t \in [a, b] h(t) = \| f(t) - f(a) \| - [g(t) - g(a)] - \varepsilon(t - a)$. Como por hipótesis tenemos que f y g son continuas en $[a, b]$ y además la norma es continua en $\mathbb{R}$, resulta que h es continua en $[a, b]$.
Consideremos el conjunto

$$A = \{t \in [a, b] : h(t) \leqslant \varepsilon\}.$$

De acá tenemos que $A \neq \emptyset$, pues $a \in [a, b]$ y $h(a) = 0 < \varepsilon$
Por otro lado A es cerrado ya que $A = h^{-1}(-\infty, \varepsilon]$, h es continua en el conjunto cerrado $[a, b]$ y $(-\infty, \varepsilon]$ es cerrado en $\mathbb{R}$.
Ahora bien, A es acotado superiormente por b, así sea $\xi = \sup A$, se tiene que $\xi \leqslant b$. Como A es cerrado se infiere que $\xi \in A$.
Por otra parte, de la continuidad de h en a y que $h(a) = 0$ se deduce que existe un $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$ con $t - a =| t - a |< \delta$, $h(t) \leqslant \| h(t) \| < \varepsilon$, es decir, $[a, a + \delta] \subset A$, lo que indica que existen puntos $t \in A$ con $t > a$. Esto implica que a$< xi$. En consecuencia $a < \xi \leqslant b$, y $x \in A$.
Supongamos ahora que $xi < b$ entonces $xi \in (a, b)$ y f y g son derivables por la derecha en ξ, cumpliendose así

$$\| D^+ f(\xi) \| \leqslant D^+ g(\xi). \tag{1.1}$$

De acá podemos hallar un $r > 0$, al cual corresponde un entorno $N(\xi, r)$ de ξ tal que para todo $t \in N(\xi, r) \cap (a, b)$.

$$\begin{aligned} \| f(t) - f(\xi) - (t-\xi)D^+ f(\xi) \| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \| t - \xi \| \\ | g(t) - g(\xi) - (t-\xi)D^+ g(\xi) | &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} | t - \xi | \,. \end{aligned}$$

Luego si $\xi < \eta < \text{mín}\{\xi + r, b\}$ entonces $\eta \in N(\xi, r) \cap (a, b)$ y en consecuencia

$$\begin{cases} \| f(\eta) - f(\xi) - (\eta - \xi)D^+ f(\xi) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \| \eta - \xi \| \\ | g(\eta) - g(\xi) - (\eta - \xi)D^+ g(\xi) | \leqslant \frac{\varepsilon}{2} | \eta - \xi | \,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Pero como $\xi \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned} \| f(\eta) - f(a) \| &= \| f(\eta) - f(\xi) + f(\xi) - f(a) \| \\ &\leqslant \| f(\eta) - f(\xi) \| + \| f(\xi) - f(a) \| \\ &\leqslant \| f(\eta) - f(\xi) \| + [g(\xi)] - g(a) + \varepsilon(\xi - a) + \xi. \end{aligned}$$

Aplicando ahora (1.3) y (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \| f(\eta) - f(\xi) \| + [g(\xi) - g(a)] &= \| f(\eta) - f(\xi) - (\eta - \xi)D^+ f(\xi) + (\eta - \xi)D^+ f(\xi) \| + [g(\xi) - g(\eta) \\ &+ g(\eta) - g(a)] \\ &\leqslant \| f(\eta) - f(\xi) - (\eta - \xi)D^+ f(\xi) \| + \| (\eta - \xi)D^+ f(\xi) \| \\ &+ [g(\xi) - g(\eta) + g(\eta) - g(a)] \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}(\eta - \xi) + (\eta - \xi)D^+ g(\xi) + [g(\xi) - g(\eta) + g(\eta) - g(a)] \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}(\eta - \xi) + \frac{\varepsilon}{2}(\eta - \xi) + [g(\eta) - g(a)] \\ &= \varepsilon(\eta - \xi) + [g(\eta) - g(a)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| f(\eta) - f(a) \| &\leqslant \| f(\eta) - f(\xi) \| + [g(\xi)] - g(a) + \varepsilon(\xi - a) + \xi \\ &\leqslant \varepsilon(\eta - \xi) + [g(\eta) - g(a)] + \varepsilon(\xi - a) + \varepsilon \\ &= \varepsilon\eta - \varepsilon\xi + [g(\eta) - g(a)] + \varepsilon\xi - \varepsilon a + \varepsilon \\ &= \varepsilon(\eta - a) + [g(\eta) - g(a)] + \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir $\eta \in A$ y por construcción $\eta > \xi$ lo que contradice el hecho de que $\xi = \sup A$, o sea no podemos suponer que $\xi < b$. Debe ocurrir que $\xi = b$ lo que implica que $b \in A$ y entonces $h(b) \leqslant \varepsilon$, de donde

$$f(b) - f(a) \leqslant [g(b) - g(a)] + \varepsilon(b - a) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtendremos la desigualdad que queremos.

Corolarío 1.3.2 *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ continua en $[a,b]$ y derivable por la derecha de (a,b). Si existe $M > 0$ tal que, $\parallel D^+f(t) \parallel \leqslant M$, para todo $t \in (a,b)$, entonces se verifica*

$$\parallel f(b) - f(a) \parallel \leqslant M(b-a).$$

Demostración

La función $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para $t \in [a,b]$, $g(t) = Mt$, es la restricción a $[a,b]$ de la transformación lineal $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $T(t) = Mt$. Así se tiene que g es continua en $[a,b]$ y diferenciable por la derecha en (a,b), por el teorema 1.0.1, con $D^+g(t) = T$, para todo $t \in (a,b)$ y la derivada por la derecha es $g'(t) = T(1) = M$.
Tenemos entonces que las funciones f y g satisfacen las hipotesis del teorema anterior y $g(b)-g(a) = M(b-a)$.

Corolarío 1.3.3 *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ continua en $[a,b]$ y derivable por la derecha de (a,b). Entonces para todo $v \in \mathbb{K}$, se tiene,*

$$\parallel f(b) - f(a) - (b-a)v \parallel \leqslant (b-a) \lim sup_{t\in(a,b)} \parallel D^+f(t) - v \parallel .$$

Demostración

Supondremos que la funciòn derivada por la derecha $D^+f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{K}$ esta acotada en (a,b), lo que equivale a que el conjunto $\parallel D^+f(t) - v \parallel$ está acotado superiormente, cualquiera que sea $v \in \mathbb{K}$. De lo contrario, la desigualdad del enunciado es trivialmente cierta. Tomemos un $v \in \mathbb{K}$ genérico, fijo y consideremos la funciòn $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que $g = f - \varphi(v)$, donde $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, es la transformación de la proposición 1.0.1, cual expresa que para $t \in \mathbb{R}$ $\varphi(v)(t) = tv$. Es claro que g es continua en $[a,b]$ y diferenciable por la derecha en (a,b), obteniendo así que:

$$D^+g(t) = D^+f(t) - v.$$

Ahora si le aplicamos el colorario anterior a g obtenemos

$$\parallel g(b) - g(a) \parallel \leqslant (b-a) sup_{t\in(a,b)} \parallel D^+f(t) - v \parallel,$$

pero por otro lado tenemos;

$$\parallel f(b) - f(a) - v(b-a) \parallel = \parallel f(b) - vb - f(a) + va \parallel = \parallel g(b) - g(a) \parallel \leqslant (b-a) sup_{t\in(a,b)} \parallel D^+f(t) - v \parallel .$$

Teorema 1.3.4 *Sea $f : A \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$, donde A es abierto, continuo y diferenciable por la derecha en A. Si $[a,b] \subset A$, entonces se tiene*

$$\parallel f(b) - f(a) \parallel \leqslant \parallel b - a \parallel Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^+f(x) \parallel .$$

Demostración

En primer lugar si suponemos $Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^+f(x) \parallel = +\infty$, esto es, si $D^+f(x)$ no esta acotada en

$[a, b]$, entonces no hay nada que probar. Supongamos así que $D^+f(x)$ esta acotada en $[a, b]$, por tanto, $Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^+f(x) \parallel$ es un número real o cero.
Sea $g : [0, 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}$, tal que $g(t) = a + t(b - a)$, para $t \in [0, 1]$. Veamos que si evaluamos en los extremos de este intervalo tenemos que $g(0) = a$ y $g(1) = b$, obteniendo así que el rango de g es el segmento $[a, b]$, además g es la suma de una función constante con una transformación lineal $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}$, dada por $T(t) = t(b - a)$, ambas restringuidas a $[0, 1]$, de acá g es continua en este intervalo, por teorema 1.0.1, además g es diferenciable por la derecha en $(0, 1)$, por teorema 1.0.2. Por otro lado se tiene que:

$$D^+g(t) = D^+T(t) = T \qquad \forall\, t \,\in\, (0, 1).$$

Por otra parte la función $h = f \circ g : [0, 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua en $[0, 1]$ y diferenciable por la derecha, por teorema 1.0.1, y por tanto derivable por la derecha en $(0, 1)$.
Luego;

$$D^+h(t) = D^+(fog)(t) = D^+f[g(t)].D^+g(t) = D^+f[g(t)].t \qquad \forall\, t \,\in\, (0, 1),$$

de donde

$$D^+h(t) = D^+h(t)(1) = D^+f[g(t)](b - a).$$

Aplicando norma a esta última igualdad tenemos

$$\parallel D^+h(t) \parallel \leqslant \parallel b - a \parallel \parallel D^+f[g(t)] \parallel .$$

Pero, $g(t) \in (0, 1)$ así que

$$\parallel D^+f[g(t)] \parallel \leqslant Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^+f(x) \parallel \qquad \forall\, t \,\in\, (0, 1).$$

Por corolario 1.0.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \parallel h(1) - h(0) \parallel &\leqslant Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^+f(x) \parallel (1 - 0) \\ &= \parallel b - a \parallel Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^+f(x) \parallel . \end{aligned}$$

Ahora

$$\parallel h(1) - h(0) \parallel = \parallel fog(1) - fog(0) \parallel = \parallel f[g(1)] - f[g(0)] \parallel = \parallel f(b) - f(a) \parallel .$$

Por tanto, $\parallel f(b) - f(a) \parallel \leqslant \parallel b - a \parallel Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^+f(x) \parallel$.

Corolarío 1.3.4 *Sea $f : A \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$, donde A es abierto y convexo, continuo y diferenciable por la derecha en A. Si existe un $k > 0$, tal que para todo $x \in A$. $\parallel D^+f(x) \parallel \leqslant k$, entonces se tiene*

$$\parallel f(y) - f(x) \parallel \leqslant k \parallel x - y \parallel,$$

para todo $x, y \in A$

Demostración
Como A es convexo, entonces se tiene que $[x,y] \subset A$ para todo $x, y \in A$, aplicando el teorema anterior junto con que

$$Sup_{z\in[x,y]} \parallel D^{+}f(z) \parallel \leqslant k.$$

Obtenemos que $\parallel f(y) - f(x) \parallel \leqslant k \parallel x - y \parallel$

Corolarío 1.3.5 *Sea $f : A \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ continua y diferenciable por la derecha en un conjunto abierto A. Si $[a,b] \subset A$, entonces se tiene para todo $T \in L(\mathbb{H},\mathbb{K})$*

$$\parallel f(b) - f(a) - T(b-a) \parallel \leqslant \parallel b - a \parallel Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^{+}f(x) - T \parallel .$$

Demostración
Tomemos un $T \in L(\mathbb{H},\mathbb{K})$ fijo, pero genérico, y consideremos la función $g = f - T : A \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$, donde esta es la restricción de A, la cual sigue siendo continua y además diferenciable en A, por teorema 1.0.1, y si aplicamos el teorema anterior nuevamente obtenemos

$$\parallel g(b) - g(a) \parallel \leqslant \parallel b - a \parallel Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^{+}g(x) \parallel .$$

Pero tenemos que para todo $x \in A$ $D^{+}g(x) = D^{+}f(x) - T$ y

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= [f(b) - T(b)] - [f(a) - T(a)] \\ &= f(b) - f(a) - T(b-a). \end{aligned}$$

Obteniendo así

$$\parallel f(b) - f(a) - T(b-a) \parallel \leqslant \parallel b - a \parallel Sup_{x\in[a,b]} \parallel D^{+}f(x) - T \parallel .$$

Teorema 1.3.5 *Sea $f : A \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ diferenciable por la derecha en el conjunto abierto y conexo A. Si para todo $x \in A$, $D^{+}f(x) = \Theta$, entonces f es constante en $A(f(x) = f(y)$, para todo $x, y \in A)$*

Demostración
Dado que la transformación nula es continua y además diferenciable por la derecha, entonces tenemos que f es continua en A. Tomemos un $x_0 \in A$ y consideremos el conjunto $B = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\}$. Donde este conjunto posee las siguientes propiedades:
1) $B \neq \emptyset$, puesto que $x_0 \in A$ y $f(x_0) = f(x_0)$.
2) B es cerrado en A, ya que f es continua en A , pues $B = f^{-1}\{f(x_0)\}$ y $f(x_0)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{K}$.
3) B es abierto en A. En efecto, tomemos un $y \in B$ cualquiera como $y \in A$ y A es abierto $N(y,r) \subset A$ para algún $r > 0$, pero $N(y,r)$ es abierto, además es convexo, para verificar esto, se debe cumplir que $\parallel y - (a + t(b-a)) \parallel \leqslant r$. Así

$$\begin{aligned} \parallel y - (a + t(b-a)) \parallel &\leqslant \parallel y - a \parallel + \parallel t(b-a) \parallel \\ &< \frac{r}{2} + t \parallel (b-a) \parallel \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Por tanto, $N(y,r)$ es convexo.
f es continua y diferenciable por la derecha en $N(y,r)$ y además $\| D^{+}f(x) \| = 0$ para todo $x \in N(y,r)$ por hipotesis, luego aplicando el corolario 1.0.2 tenemos que

$$\| f(x) - f(y) \| = 0.$$

De acá f(x)=f(y)=$f(x_0)$, obteniendo así que f es constante en $N(y,r)$, pero como $y \in B$ entonces $N(y,r) \subset B$, esto es B es abierto, y como $B \subset A$, obtenemos B es abierto en A. Finalmente dado que A es conexo, las propiedades (1), (2) y (3) implican que $A = B$; es decir $f(x) = f(x_0)$, para todo $x \in A$ y f es constante en A.

CAPÍTULO 2

Generalizacion del Teorema de Hille- Yosida

2.1. C-semigrupo acotado exponencialmente

Definición 2.1.1 *Sea B un espacio de Banach y sea $L(B)$ el conjunto de todos los operadores lineales acotados de B en B. Sea C un operador inyectivo en $L(B)$. La familia $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ en $L(B)$ es llamado un C- semigrupo si:*
(A.1) $S(t+s)C = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geqslant 0$ y $S(0) = C$.
(A.2) $S(\cdot)x : [0,\infty) \longrightarrow B$ es contínuo, para todo $x \in B$.
Si el C- semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ satisface la condición:
(A.3) si existe $M \geqslant 0$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que $\| S(t) \| \leqslant Me^{at}$ para todo $t \geqslant 0$, entonces este es llamado un C- semigrupo acotado exponencialmente.

Observaciones:
1) Como el operador C es inyectivo entonces tenemos que C es sobreyectivo sobre el subespacio imagen. Por tanto admite inverso con esta restricción.
2) Dado que C es un operador lineal, acotado e inyectivo se tiene que su inverso es acotado si, y sólo si, el $Rang(C)$ es cerrado sobre el espacio de llegada.
3) si $C = I$, el operador identidad en B, entonces $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo, ver [1].
4) En la teoría de C_0-semigrupos existen semigrupos de operadores que cumplen (A.1) y (A.2) pero no (A.3).
5) Si tomamos en (A.1) $t \longrightarrow 0$ obtenemos:
(A.4) $S(s)C = CS(s)$ $(s \geqslant 0)$.

Afirmación:
Para cada $t \geqslant 0$, sea $T(t)$ un operador definido por:

$$T(t)f = C^{-1}S(t)f, \tag{2.1}$$

con C un operador inyectivo en $L(B)$, y

$$Dom(T(t)) = \{f \in B : S(t)f \in Rang(C)\}.$$

Entonces $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo de operadores sobre el rango de C^2, denotado por $Rang(C^2)$. En efecto, si consideramos en (2.1) $t=0$, nos queda:

$$T(0)f = C^{-1}S(0)f = C^{-1}Cf = f.$$

Además,

$$T(t+s)f = C^{-1}S(t+s)f = C^{-1}S(t)(S(s)C^{-1}f) = T(t)S(s)C^{-1}f = T(t)T(s)f.$$

Pero no es necesariamente acotado,ver observación (2).
En lo sucesivo consideremos que la familia $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es un C-semigrupo acotado exponencialmente.

Definición 2.1.2 *Para todo $\lambda > a$, definamos el operador acotado L_λ sobre B por:*

$$L_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f dt.$$

El operador L_λ, es llamado el C-resolvente de el C-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Proposición 2.1.1 *Para todo $\lambda, \mu > a$ se cumple que:*

$$(\lambda - \mu) L_\lambda L_\mu = L_\mu C - L_\lambda C. \tag{2.2}$$

Demostración
Para $f \in B$ y λ,$\mu > a$ se tiene que:

$$\begin{aligned} L_\lambda L_\mu f &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s) L_\mu f dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s) \left(\int_0^\infty e^{-\mu t} S(t) f dt \right) ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s - \mu t} S(s) S(t) f dt ds. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $y = s + t$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-\lambda s-\mu(y-s)} S(y)Cf dyds \\
&\qquad = \int_0^\infty \int_0^y e^{-\lambda s-\mu y+\mu s} S(y)Cf dsdy \\
&\qquad = \int_0^\infty e^{-\mu y}\left(\int_0^y e^{-(\lambda-\mu)s} ds\right) S(y)Cf dy \\
&\qquad = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu y}}{\mu-\lambda}\left(e^{-(t-\mu)y}-1\right) S(y)Cf dy \\
&\qquad = \frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^\infty \left(e^{-ty}-e^{-\mu y}\right) S(y)Cf dy \\
&\qquad = \frac{1}{\mu-\lambda}\left[\int_0^\infty e^{-ty} S(y)Cf dy - e^{-\mu y} S(y)Cf dy\right] \\
&\qquad = \frac{1}{\lambda-\mu}\{L_y Cf - L_\mu Cf\}.
\end{aligned}$$

Proposición 2.1.2 *La C-resolvente L_λ es inyectiva para todo $\lambda > a$.*

Demostración

Por (2.2) se tiene que si λ,$\mu > a$ y $f \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
L_\lambda f = 0 &\implies (\lambda-\mu)L_\lambda L_\mu f = CL_\mu f \\
&\implies (\lambda-\mu)L_\mu L_\lambda f = CL_\mu f \\
&\implies 0 = CL_\mu f.
\end{aligned}$$

Por tanto $CL_\mu f = 0$.

Pero, como C es inyectivo, tenemos que $L_\mu f = 0$. Por lo que, se obtiene que $Ker(L_\lambda) = Ker(L_\mu)$ para todo λ, $\mu > a$.

Por otro lado, tenemos que:

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \lambda L_\lambda f = Cf.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \| \lambda L_\lambda f - Cf \| &= \lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \| \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} Cf dt \| \\
&= \lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| (S(t)-C) \| \| f dt \| \\
&= \lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| S(t)-C \| \| f \| dt.
\end{aligned}$$

Pero,

$$\| S(t)-C \| \leqslant \| S(t) \| + \| C \| \leqslant Me^{at} + \| C \| \leqslant Ke^{at}.$$

Además, se tiene que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Ke^{-(\lambda-a)t} = 0$$

de donde podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \parallel S(t) - C \parallel \parallel f \parallel dt &\leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \int_0^{\infty} Ke^{-(\lambda-a)t} \parallel f \parallel dt \\ &= \int_0^{\infty} \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Ke^{-(\lambda-a)t} \parallel f \parallel dt = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda > N$ entonces
$\parallel \lambda L_\lambda f - Cf \parallel < \varepsilon$.
De lo anterior, se concluye que $Ker(\lambda L_\lambda) \subseteq Ker(C) = \{0\}$.

Observación:
De la proposición 2.1.1 tenemos que:

$$L_\mu(\lambda L_\lambda - C) = L_\lambda(\mu L_\mu - C),$$

para $(\lambda, \mu > a)$. Así, para $f, g \in Dom(C) \subset B$ y $(\lambda L_\lambda - C)f = L_\lambda g$, se obtiene:

$$L_\lambda L_\mu g = L_\lambda(\mu L_\mu - C)f$$

y

$$L_\mu g = (\mu L_\mu - C)f.$$

En consecuencia, podemos definir un operador cerrado, denotado por A, dado por

$$Af = L_\lambda^{-1}(\lambda L_\lambda - C)f = (\lambda - L_\lambda^{-1}C)f, \tag{2.3}$$

con $Dom(A) = \{f \in Dom(C) \subset B : Cf \in Rang(L_\lambda)\}$. Este operador esta bien definido, dado que es independiente de $\lambda > a$, es decir, si consideramos λ,$\mu > a$ se tiene que:

$$Af = L_\lambda^{-1}(\lambda L_\lambda - C)f = L_\lambda^{-1} L_\lambda g = g$$

y

$$Af = L_\mu^{-1}(\mu L_\mu - C)f = L_\mu^{-1} L_\mu g = g.$$

Definición 2.1.3 *El operador A dado por (2.3) se define como el generador infinitesimal del C-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$.*
De igual forma se define al generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, denotado por Λ_T y definido por

$$\Lambda_T f = \lim_{t \longrightarrow 0} t^{-1}\{T(t)f - f\},$$

con $Dom(\Lambda_T) = \{f \in Rang(C) : \lim_{t \longrightarrow 0} t^{-1}(T(t)f - f) \quad existe\},$.

Proposición 2.1.3 *Para todo $\lambda > a$, $\lambda - A$ es inyectivo y*

$$(\lambda - A)^{-1} = C^{-1}L_\lambda, \qquad (\lambda > a); \tag{2.4}$$

con $Dom((\lambda - A)^{-1}) = \{f \in B : L_\lambda f \in Rang(C)\}$.

Demostración
De (2.3) para $f \in Dom(A)$:

$$Af = L_\lambda^{-1}(\lambda L_\lambda - C)f = (\lambda - L_\lambda^{-1}C)f.$$

Considerando la última igualdad y distribuyendo se tiene que:

$$Af = \lambda f - L_\lambda^{-1}Cf.$$

Así,

$$\begin{aligned} Af - \lambda f = -L_\lambda^{-1}Cf &\implies (A - \lambda)f = -L_\lambda^{-1}Cf \\ &\implies (\lambda - A)f = L_\lambda^{-1}Cf. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (\lambda - A)f = 0 &\implies L_\lambda^{-1}Cf = 0 \\ &\implies Cf = 0 \\ &\implies f = 0. \end{aligned}$$

Así que $\lambda - A$ es inyectivo. Ahora veamos que $C^{-1}L_\lambda$ es la inversa de $(\lambda - A)$;
En efecto; sea $f \in Dom(C) \subset B$ con $L_\lambda f \in Rang(C)$:

$$(\lambda - A)C^{-1}L_\lambda f = L_\lambda^{-1}C(C^{-1}L_\lambda f) = f.$$

Por otro lado,

$$C^{-1}L_\lambda(\lambda - A)f = C^{-1}L_\lambda L_\lambda^{-1}Cf = f.$$

Por tanto $(\lambda - A)$ es invertible y su inversa es $(\lambda - A)^{-1} = C^{-1}L_\lambda$. Cuyo dominio es $Dom((\lambda - A)^{-1}) = \{f \in Dom(C) \subset B : L_\lambda f \in Rang(C)\}$.

Lema 2.1.1 *El $Dom(\Lambda_T)$ es denso en B*

Demostración
En primer lugar, demostremos que $Rang(C^2)$ es denso. En efecto; denotemos por $C(B) = Rang(C)$. Es claro que dado una aplicación continua se tiene que:

$$C(\overline{B}) \subset \overline{C(B)}.$$

pero a su vez tenemos,

$$C(B) = C(\overline{C(B)}) \subset \overline{C(C(B))} \subset B.$$

de donde obtenemos que,

$$C(B) \subset \overline{C(C(B))} \subset B.$$

por lo que,

$$B = \overline{C(B)} \subset \overline{C(C(B))} \subset B.$$

Por tanto, $Rang(C^2)$ es denso en B.
Ahora es suficiente probar que para todo $f \in Rang(C^2)$ y $\varepsilon > 0$, existe $\widehat{f} \in Dom(\Lambda_T)$ con $\| \widehat{f} - f \| \leqslant \varepsilon$. Sea $f \in Rang(C^2)$, y consideremos $f = C^2 g$ fijo, con $g \in Dom(C^2)$ y definamos $K(t) = \displaystyle\int_0^t T(x) f dx$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} K(t) = \int_0^t T(x) f dx &= \int_0^t C^{-1} S(x) f dx \\ &= \int_0^t C^{-1} S(x) C^2 g dx \\ &= \int_0^t C S(x) g dx \\ &= C \int_0^t S(x) g dx. \end{aligned}$$

Así, $k(t) \in Rang(C)$ y

$$\begin{aligned} T(h)K(t) &= T(h) C \int_0^t S(x) g dx \\ &= S(h) \int_0^t S(x) g dx \\ &= \int_0^t S(h+x) C g dx. \end{aligned}$$

Luego, obtenemos que:

$$h^{-1}\{T(h)K(t) - K(t)\} = h^{-1} \int_0^t S(h+x) C g dx - h^{-1} \int_0^t S(x) C g dx.$$

Haciendo $u = h + x$, en la primera integral se tiene que

$$\begin{aligned}
h^{-1}\{T(h)K(t) - K(t)\} &= h^{-1}\int_h^{t+h} S(x)Cgdx - h^{-1}\int_0^t S(x)Cgdx \\
&= h^{-1}\int_h^{t} S(x)Cgdx + h^{-1}\int_t^{t+h} S(x)Cgdx - h^{-1}\int_0^h S(x)Cgdx \\
&\quad -h^{-1}\int_h^{t} S(x)Cgdx \\
&= h^{-1}\int_t^{t+h} S(x)Cgdx - h^{-1}\int_0^h S(x)Cgdx.
\end{aligned}$$

Tomando ahora el límite cuando $h \longrightarrow 0^+$ en ambos miembros:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0^+} h^{-1}\{T(h)K(t) - K(t)\} &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} h^{-1}\int_t^{t+h} S(x)Cgdx - h^{-1}\int_0^h S(x)Cgdx \\
&= S(t)Cg - C^2 g \\
&= T(t)C^2 g - C^2 g \\
&= T(t)f - f.
\end{aligned}$$

Por tanto;

$$K(t) \in Dom(\Lambda_T). \ \ y \ \ \Lambda_T K(t) = T(t)f - f.$$

Más aún, $\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{1}{t}k(t) = C^2 g = f$.

Lema 2.1.2 *Para todo* $f \in B$ *y* $\lambda > a$ $CL_\lambda f \in Dom(\Lambda_T)$ *y* $\Lambda_T CL_\lambda f = -C^2 f + \lambda CL_\lambda f$.

Demostración
Tenemos que:

$$h^{-1}\{T(h)CL_\lambda f - CL_\lambda f\} = h^{-1}(S(h)L_\lambda f - CL_\lambda f).$$

Haciendo uso de que $L_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) C f dt$ y que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es un C-semigrupo se tiene,

$$
\begin{aligned}
h^{-1}\{T(h)CL_\lambda f - CL_\lambda f\} &= h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t+h) C f dt - h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) C f dt \\
&= h^{-1}e^{-\lambda h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) C f dt - \int_0^h e^{-\lambda t} S(t) C f dt\right) \\
&\quad -h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) C f dt \\
&= h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) C f dt (e^{\lambda h}-1) - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) C f dt \\
&= h^{-1}(e^{\lambda h}-1)C\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) C f dt - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) C f dt \\
&= h^{-1}(e^{\lambda h}-1)CL_\lambda f - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) C f dt \\
&= h^{-1}(e^{\lambda h}-1)CL_\lambda f - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) C f dt.
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando $h \longrightarrow 0^+$ en ambos miembros:

$$
\lim_{h\longrightarrow 0^+} h^{-1}\{T(h)CL_\lambda f - CL_\lambda f\} = \lim_{h\longrightarrow 0^+}\left(h^{-1}(e^{\lambda h}-1)CL_\lambda f - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) C f dt\right). \quad (2,5)
$$

Estudiaremos estos límites por separado, para ello recordemos que:

$$
e^{at} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}.
$$

Así:

$$
\frac{e^{at}-1}{t} = a + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)^n (t)^{n-1}}{n!}.
$$

De acá, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0}(h^{-1}\left(e^{\lambda h}-1)CL_\lambda f\right) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^{\lambda h}-1}{h}CL_\lambda f \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\left(\lambda + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda)^n (t)^{n-1}}{n!})C\lim_{h\longrightarrow 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) C f dt\right) \\
&= \lambda C L_\lambda f. \quad (I)
\end{aligned}
$$

Por otro lado:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0}(h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) C f dt)) &= \lim_{h\longrightarrow 0} e^{\lambda h}\lim_{h\longrightarrow 0}\left(h^{-1}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) C f dt\right) \\
&= C^2 f. \quad (II)
\end{aligned}
$$

Luego sustituyendo (I) y(II) en (2.5) se concluye que:

$$\begin{aligned}\lim_{h\longrightarrow 0} h^{-1}\{T(h)CL_\lambda f - CL_\lambda f\} &= \lim_{h\longrightarrow 0}(h^{-1}(e^{\lambda h}-1)CL_\lambda f - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)Cfdt)\\ &= \lambda CL_\lambda f - C^2 f.\end{aligned}$$

Esto es, CL$_\lambda f \in Dom(\Lambda_T)$ y $\Lambda_T CL_\lambda f = \lambda CL_\lambda f - C^2 f$.

Proposición 2.1.4 *Sea Λ_T el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ y A el generador infinitesimal del C-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Entonces $D(\Lambda_T) \subseteq D(A)$, más aún $\overline{D(A)} = B$.*

Demostración
En primer lugar, recordemos que si $f \in Dom(\Lambda_T)$

$$S(t)f = CT(t)f.$$

Además, por observación (A.4)

$$CS(t) = S(t)C.$$

Así,

$$C(CT(t)f) = C(CC^{-1}S(t)f) = C(S(t)f) = S(t)Cf = CT(t)Cf.$$

Aplicando el inverso de C en ambos lados :

$$CT(t)f = T(t)Cf.$$

En consecuencia, se tiene:

$$C\Lambda_T = \Lambda_T C.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}CL_\lambda \Lambda_T f = C\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\Lambda_T f dt &= C\int_0^\infty e^{-\lambda t}CT(t)\Lambda_T f dt\\ &= \Lambda_T(C\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)fdt)\\ &= \Lambda_T(CL_\lambda)f.\end{aligned}$$

Por tanto, CL_λ y Λ_T conmutan.
Luego;

$$\begin{aligned}CL_\lambda(\lambda - \Lambda_T)f &= \lambda CL_\lambda f - CL_\lambda \Lambda_T f\\ &= \lambda CL_\lambda f - \Lambda_T(CL_\lambda)f\\ &= \Lambda_T CL_\lambda f + C^2 f - \Lambda_T(CL_\lambda)f\\ &= C^2 f.\end{aligned}$$

Por otro lado, sean $f, g \in D(\Lambda_T)$, y supongamos que $(\lambda - \Lambda_T)f = (\lambda - \Lambda_T)g$.
Entonces:

$$CL_\lambda(\lambda - \Lambda_T)f = CL_\lambda(\lambda - \Lambda_T)g.$$

Esto implica que $C^2 f = C^2 g$. En consecuencia $f = g$.
Por tanto, $(\lambda - \Lambda_T)$ es inyectivo si $\lambda > a$, y como $CL_\lambda(\lambda - \Lambda_T)f = C^2 f$ se cumple que

$$C^{-1}(CL_\lambda(\lambda - \Lambda_T)f) = C^{-1}C^2 f.$$

De acá, se obtiene entonces que: $L_\lambda(\lambda - \Lambda_T)f = Cf$.
En consecuencia, $C^{-1}(L_\lambda(\lambda - \Lambda_T)f) = C^{-1}Cf = f$. Esto es, $(\lambda - \Lambda_T)^{-1}f = C^{-1}L_\lambda f$, si $f \in Rang(\lambda - \Lambda_T)$ con $L_\Lambda f \in Rang(C)$
Por último sabemos que: Si $f \in Rang(\lambda - \Lambda_T)$ con $L_\Lambda f \in Rang(C)$, entonces existe $g \in D(\Lambda_T)$ tal que:

$$(\lambda - \Lambda_T)^{-1}f = g.$$

Pero,

$$(\lambda - \Lambda_T)^{-1}f = (\lambda - A)^{-1}f.$$

Por lo que, obtenemos:

$$g = (\lambda - A)^{-1}f \in D(A).$$

En consecuencia, $D(\Lambda_T) \subset D(A)$. Finalmente como $\overline{D(\Lambda_T)} = B$, entonces

$$\overline{D(A)} = B.$$

Lema 2.1.3 *Si $f \in D(A)$, entonces $S(t)f - Cf = \int_0^t S(x)Afdx$ $(t \geqslant 0)$.
Más aún, $T(t)Cf - Cf = \int_0^t T(x)ACfdx$ $(t \geqslant 0)$.*

Demostración
Primero consideremos, $f \in D(\Lambda_T)$ y $\phi \in B^*$. Definamos la aplicación $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$F(t) = \left\langle T(t)Cf - Cf - \int_0^t S(x)\Lambda_T f dx, \phi \right\rangle.$$

En primer lugar, se tiene qur F es una aplicación continua dado que es una composición de aplicaciones continuas.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
D^+F(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\left\langle T(t+h)Cf - Cf - \displaystyle\int_0^{t+h} S(x)\Lambda_T f dx, \phi\right\rangle - \left\langle T(t)Cf - Cf - \displaystyle\int_0^{t} S(x)\Lambda_T f dx, \phi\right\rangle}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\left\langle T(t+h)Cf - Cf - \displaystyle\int_0^{t+h} S(x)\Lambda_T f dx - T(t)Cf + Cf + \displaystyle\int_0^{t} S(x)\Lambda_T f dx, \phi\right\rangle}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\left\langle T(t+h)Cf - \int_0^t S(x)\Lambda_T f dx - \displaystyle\int_t^{t+h} S(x)\Lambda_T f dx - T(t)Cf + \displaystyle\int_0^{t} S(x)\Lambda_T f dx, \phi\right\rangle}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\left\langle T(t+h)Cf - \displaystyle\int_t^{t+h} S(x)\Lambda_T f dx - T(t)Cf, \phi\right\rangle}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\langle T(t+h)Cf - T(t)Cf, \phi\rangle}{h} - \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\left\langle \displaystyle\int_t^{t+h} S(x)\Lambda_T f dx, \phi\right\rangle}{h}\\
&= \langle \Lambda_T T(t)Cf, \phi\rangle - \langle S(t)\Lambda_T f, \phi\rangle\\
&= \left\langle \Lambda_T C^{-1} S(t)Cf, \phi\right\rangle - \langle S(t)\Lambda_T f, \phi\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, del teorema 1.3.5 se tiene que F es constante, en particular

$$\begin{aligned}
F(0) &= \left\langle T(0)Cf - Cf - \int_0^{0} S(x)\Lambda_T f dx, \phi\right\rangle\\
&= \langle 0, \phi\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $F(t)=0$. Asì, $\left\langle T(t)Cf - Cf - \displaystyle\int_0^{t} S(x)\Lambda_T f dx, \phi\right\rangle$=0.
Y como ϕ es fijo pero arbitrario tenemos que:

$$T(t)Cf - Cf - \int_0^t S(x)\Lambda_T f dx = 0.$$

De donde obtenemos que:

$$T(t)Cf - Cf = \int_0^t S(x)\Lambda_T f dx, \qquad f \in D(\Lambda_T), \quad t \geqslant 0.$$

Así,

$$S(t)f - Cf = \int_0^t S(t)\Lambda_T f dx.$$

Dado que, $Af = \Lambda_T f$, si $f \in D(\Lambda_T)$, se tiene que:

$$S(t)f - Cf = \int_0^t S(x)Afdx \qquad f \ \in \ D(\Lambda_T), \quad t \ \geqslant 0.$$

Ahora bien, si $f \in D(A)$, por densidad de $D(\Lambda_T)$ en $D(A)$, existe una sucesión $\{f_n\}$ en el $D(\Lambda_T)$ tal que: $f_n \longrightarrow f$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} S(t)f - Cf &= \lim_{n \longrightarrow \infty} (S(t)f_n - Cf_n) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^t S(x)Af_n dx \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} A \int_0^t S(x)fdx \\ &= A \int_0^t S(x)fdx \\ &= \int_0^t S(x)Afdx. \end{aligned}$$

Teorema 2.1.1 *El Problema de Cauchy Abstracto*

$$z'(t) = Az(t), \qquad z(0) = f. \qquad (2,6)$$

admite una única solución $z(t)$ para todo $f \in C(D(A))$, donde $C(D(A)) = \{f \in B : f = Cg$ con $g \in Dom(A)\}$ y la solución depende continuamente del valor inicial en el siguiente sentido. Sea $f_n \in C(D(A))$ y sea $f_n \longrightarrow f$ en la norma del gráfico de C^{-1}. Denotemos por u_n la solución de (2.6) con valor inicial f_n. Entonces $u_n(t)$ converge a $z(t)$ uniformemente sobre intervalos acotados. (El simbolo "′" indica la derivada por la derecha).

Demostración

Sea $f \in C(D(A))$, entonces existe $g \in D(A)$ tal que $f = Cg$. Definamos

$$z(t) = T(t)f, \qquad t \geqslant 0.$$

Tenemos que,

$$z(0) = T(0)f = f.$$

Además, $z(t) = S(t)g \in D(A)$. Ahora probemos que $z'(t) = Az(t)$. En efecto,

$$T(t)f - f = C^{-1}S(t)f - f = S(t)g - Cg.$$

Pero por lema 2.1.3 se tiene,

$$S(t)g - Cg = \int_0^t S(x)Agdx, \qquad t \geqslant 0.$$

Por tanto, nos queda que:

$$T(t)f - f = \int_0^t S(x)Agdx.$$

Por otra parte, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{z(t+h)-z(t)}{h} &= \frac{T(t+h)f - T(t)f}{h} \\
&= \frac{1}{h}(T(t+h)f - f + f - T(t)f) \\
&= \frac{1}{h}[(T(t+h)f - f) - (T(t)f - f)] \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} S(x)Agdx - \int_0^t S(x)Agdx\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(x)Agdx.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \longrightarrow 0^+$ en ambos miembros:

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{z(t+h)-z(t)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(x)Agdx.$$

Pero, tenemos por un lado que:

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{z(t+h)-z(t)}{h} = z'(t). \qquad (2{,}7)$$

si el límite existe, y por otro lado:

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(x)Agdx = S(t)Ag = AS(t)g = Az(t). \qquad (2{,}8)$$

Así, de (2.7) y (2.8) se tiene que:

$$z'(t) = Az(t).$$

Ahora probemos la unicidad, para ello supongamos que:

$$w(t) \in D(A), \;\; w'(t) = Aw(t), \;\; w(0) = f \;\in\; C(D(A)),$$

y definamos la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(t) = \langle S(t)w(a-t), \phi\rangle\,, \qquad t \;\in\; [0,a],$$

para $\phi \in B^*$ fijo, pero arbitrario. Entonces F es continua sobre el intervalo $[0,a]$, pues se tiene que $S(t)$ es continua y además como $w'(t) = Aw(t)$ entonces $w(t)$ es también continuo, además;

$$\begin{aligned}
D^+F(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(\langle S(t+h)w(a-t-h),\phi\rangle - \langle S(t)w(a-t),\phi\rangle\right) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(\langle S(t+h)w(a-t-h) - S(t)w(a-t),\phi\rangle\right) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(\langle S(t+h)w(a-t-h) - S(t+h)w(a-t) + S(t+h)w(a-t) - S(t)w(a-t),\phi\rangle\right) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left\{\langle S(t+h)(w(a-t-h) - w(a-t),\phi\rangle) + \langle (S(t+h) - S(t))w(a-t),\phi\rangle)\right\} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(\langle S(t+h)(w(a-t-h) - w(a-t),\phi\rangle) + \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\langle (S(t+h) - S(t))w(a-t),\phi\rangle\right) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \left\langle S(t+h)(\frac{w(a-t-h)-w(a-t)}{h}),\phi\right\rangle + \lim_{h\longrightarrow 0^+} \left\langle \frac{(S(t+h)-S(t))w(a-t)}{h},\phi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora estudiemos estos limites por separado; por un lado demostremos que:

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} S(t+h)(\frac{w(a-t-h)-w(a-t)}{h}) = -S(t)Aw(a-t).$$

En efecto, Hagamos un cambio de variable $k = -h$,y $p = a-t$ así,

$$\begin{aligned}
\| S(-k+t)(\frac{w(p+k)-w(p)}{-k}) + S(t+k-k)Aw(p) \| &= \| CT(-k+t)(\frac{w(p+k)-w(p)}{-k}) \\
&\quad + CT(t+k-k)Aw(p) \| \\
&= \| CT(-k)T(t)(\frac{w(p+k)-w(p)}{-k}) \\
&\quad + CT(-k)T(t+k)Aw(p) \| \\
&= \| CT(-k)(-T(t)(\frac{w(p+k)-w(p)}{k}) \\
&\quad + T(t+k)Aw(p)) \| \\
&\leqslant \| CT(-k) \| \| -T(t)(\frac{w(p+k)-w(p)}{k}) \\
&\quad + T(t+k)Aw(p) \| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\| S(-k+t)(\frac{w(p+k)-w(p)}{-k}) + S(t+k-k)Aw(p) \| &\leqslant \| CT(-k) \| \| -T(t)(\frac{w(p+k)-w(p)}{k}) \\
&\quad + T(t+k)Aw(p) \|
\end{aligned}$$

De la segunda igualdad, tenemos que $\| CT(-k) \|$ es acotado en $[0,a]$, y además como w es derivable tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\longrightarrow 0^-} \| -T(t)(\frac{w(p+k)-w(p)}{k}) + T(t+k)Aw(p) \| &= \| -T(t) \lim_{k\longrightarrow 0^-}(\frac{w(p+k)-w(p)}{k}) \\
&\quad + \lim_{k\longrightarrow 0^-} T(t+k)Aw(p) \| \\
&= \| -T(t)w'(p) + T(t)Aw(p) \| \\
&= \| -T(t)Aw(p) + T(t)Aw(p) \| \\
&= \| -C^{-1}S(t)Aw(p) + C^{-1}S(t)Aw(p) \| = 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\| k \| < \delta$ entonces

$$\| S(-k+t)(\frac{w(a-t+k)-w(a-t)}{-k}) + S(t+k-k)Aw(a-t) \| \leqslant \varepsilon.$$

Con lo que podemos concluir que:

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \left\langle S(t+h)(\frac{w(a-t-h)-w(a-t)}{h}), \phi \right\rangle = -\langle S(t)Aw(a-t), \phi \rangle .$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0^+} \left\langle \frac{(S(t+h)-S(t))w(a-t)}{h}, \phi \right\rangle &= \left\langle \lim_{h\longrightarrow 0^+}(\frac{(S(t+h)-S(t))w(a-t)}{h}), \phi \right\rangle \\
&= \langle S(t)Aw(a-t), \phi \rangle .
\end{aligned}$$

Haciendo uso ahora de estos resultados podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
D^+F(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \left\langle S(t+h)(\frac{w(a-t-h)-w(a-t)}{h}), \phi \right\rangle + \lim_{h\longrightarrow 0^+} \left\langle \frac{(S(t+h)-S(t))w(a-t)}{h}, \phi \right\rangle \\
&= -\langle S(t)Aw(a-t), \phi \rangle + \langle S(t)Aw(a-t), \phi \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto,usando nuevamente el teorema 1.3.5 se tiene que F es constante, en particular

$$F(0) = F(a),$$

por lo que:

$$\langle S(0)w(a), \phi \rangle = \langle S(a)w(0), \phi \rangle , \qquad \phi \in B^*.$$

Por tanto,

$$S(0)w(a) = S(a)w(0).$$

En consecuencia, $Cw(a) = CT(a)w(0)$.
Luego aplicando el inverso de C en ambas igualdades y considerando que $w(0) = f$ nos queda

que $w(a) = T(a)f$, podemos reescribir esta ecuación como $z(a) = w(a) = T(a)f$ lo que prueba la unicidad. Finalmente, supongamos f_n,$f \in C(D(A))$ y $f_n \longrightarrow f$ en la norma del gráfico,

$$\| g \|_{C^{-1}} = \| g \| + \| C^{-1} g \|, \quad g \in Rang(C).$$

Así,

$$T(t)f_n = C^{-1}S(t)f_n.$$

Ahora, demostremos que:

$$T(t)f_n \longrightarrow T(t)f \qquad (2{,}9)$$

y

$$C^{-1}S(t)f_n \longrightarrow C^{-1}S(t)f.(2{,}10)$$

En efecto, del hecho de que $f_n \longrightarrow f$ se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ entonces $\| f_n - f \|_{C^{-1}} < \varepsilon$, esto es, $\| f_n - f \| + \| C^{-1}(f_n - f) \| < \varepsilon$.
Luego,

$$\begin{aligned} \| T(t)f_n - T(t)f \|_{C^{-1}} &= \| T(t)f_n - T(t)f \| + \| C^{-1}(T(t)f_n - T(t)f) \| \\ &= \| T(t)(f_n - f) \| + \| T(t)(C^{-1}f_n - C^{-1}f) \| \\ &\leqslant \| T(t) \| \| (f_n - f) \| + \| T(t) \| \| (C^{-1}f_n - C^{-1}f) \| \\ &= \| T(t) \| (\| (f_n - f) \| + \| (C^{-1}f_n - C^{-1}f) \|). \end{aligned}$$

Sabemos que $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ es acotado, en intervalos acotados así $\| T(t)f_n - T(t)f \|_{C^{-1}} < \varepsilon$.
Por tanto, $T(t)f_n \longrightarrow T(t)f$.
Por otro lado:

$$\| C^{-1}S(t)f_n - C^{-1}S(t)f \|_{C^{-1}} = \| T(t)f_n - T(t)f \|_{C^{-1}} < \varepsilon$$

Obteniendo así,de (2.9) y (2.10) que $T(t)f = C^{-1}S(t)f$, donde la convergencia es uniforme para t en intervalos acotados.

Teorema 2.1.2 *El operador cerrado A dado por (2.3) satisface:*
(B1) $D(A)$ es denso en B.
(B2) $\lambda - A$ es inyectivo si $\lambda > a$.
(B3) $D((\lambda - A)^{-n})) \supseteq Rang(C)$, (n=0,1,2,...j, $\lambda >a$.
(B4) $\| (\lambda - A)^{-n})C \| \leqslant M(\lambda - a)^{-n}$), (n=0,1,2,...j, $\lambda > a$).
(B5)$(\lambda - A)^{-1}Cf = C(\lambda - A)^{-1}$) f, ($f \in Rang(\lambda - A)$, $\lambda > a$)

Demostración
(B1) y (B2) se sigue de las proposiciones (2.1.4) y (2.1.5) respectivamente

Para demostrar (B3) y (B4) procederemos de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\| (\lambda - A)^{-n})Cf \| &= \| (C^{-1}L_\lambda)....(C^{-1}L_\lambda)Cf \| \\
&= \| C^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t_1} S(t_1)...C^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t_n} S(t_n)Cfdt_1...dt_n \| \\
&= \| C^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t_1} CT(t_1)...C^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t_n} CT(t_n)Cfdt_1...dt_n \| \\
&= \| \int_0^\infty e^{-\lambda t_1} T(t_1)... \int_0^\infty e^{-\lambda t_n} T(t_n)Cfdt_1...dt_n \| \\
&= \| \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-\lambda(t_1+...+t_n)} T(t_1 + ... + t_n)Cfdt_1...dt_n \| \\
&= \| \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-\lambda(t_1+...+t_n)} C^{-1}S(t_1 + ... + t_n)Cfdt_1...dt_n \| \\
&= \| \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-\lambda(t_1+...+t_n)} S(t_1 + ... + t_n)fdt_1...dt_n \| \\
&\leqslant \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-\lambda(t_1+...+t_n)} \| S(t_1 + ... + t_n) \|\| f \| dt_1...dt_n \\
&\leqslant \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-\lambda(t_1+...+t_n)} Me^{a(t_1+...+t_n)} \| f \| dt_1...dt_n \\
&= \int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{(a-\lambda)(t_1+...+t_n)} \| f \| dt_1...dt_n \\
&= \int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+...+t_n)} \| f \| dt_1...dt_n.
\end{aligned}
$$

Probemos que:

$$
\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+...+t_n)} \| f \| dt_1...dt_n = \frac{M \| f \|}{(\lambda - a)^n}.
$$

Procedamos por induccion sobre n; para n=1,

$$
\int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)t_1} \| f \| dt_1 = M \| f \| \int_0^\infty e^{-(\lambda-a)t_1} dt_1
$$

Haciendo un cambio de variable $u = (\lambda - a)t_1$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)t_1} \| f \| dt_1 &= \frac{M \| f \|}{(\lambda - a)} \int_0^\infty e^{-u} du \\
&= \frac{M \| f \|}{(\lambda - a)} (-e^{-u}|_0^\infty) \\
&= \frac{M \| f \|}{(\lambda - a)}.
\end{aligned}
$$

Para $n = 2$

$$
\int_0^\infty \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+t_2)} \| f \| dt_1 dt_2 = M \| f \| \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda-a)t_1} e^{-(\lambda-a)t_2} dt_1 dt_2
$$

Haciendo un cambio de variable $u = (\lambda - a)t_2$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+t_2)} \parallel f \parallel dt_1 dt_2 &= M \parallel f \parallel \int_0^\infty e^{-(\lambda-a)t_1} dt_1 \int_0^\infty e^{-u} du \\
&= M \parallel f \parallel \int_0^\infty e^{-(\lambda-a)t_1} dt_1 (-e^{-u}|_0^\infty) \\
&= M \parallel f \parallel \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda-a)t_1} dt_1}{(\lambda - a)} \\
&= \frac{M \parallel f \parallel}{(\lambda-a)^2}.
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n-1$, esto es,

$$\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+...+t_{n-1})} \parallel f \parallel dt_1...dt_{n-1} = \frac{M \parallel f \parallel}{(\lambda-a)^{n-1}}. \qquad (2,11)$$

Ahora probemos que se cumple para n, hagamos $N(t) = \displaystyle\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+...+t_{n-1})} \parallel f \parallel$ $dt_1...dt_{n-1}$

$$\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+...+t_n)} \parallel f \parallel dt_1...dt_n = N(t) \int_0^\infty e^{-(\lambda-a)t_n} dt_n.$$

Haciendo un cambio de variable $u = (\lambda - a)t_n$ tenemos que:

$$\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+...+t_n)} \parallel f \parallel dt_1...dt_n = \int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+...+t_{n-1})} \parallel f \parallel dt_1...dt_{n-1} \int_0^\infty e^{-u} du.$$

Haciendo uso de 2.11 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(\lambda-a)(t_1+...+t_n)} \parallel f \parallel dt_1...dt_n &= \frac{M \parallel f \parallel}{(\lambda-a)^{n-1}} \int_0^\infty e^{-u} du \\
&= \frac{M \parallel f \parallel}{(\lambda-a)^{n-1}} (-e^{-u}|_0^\infty) \\
&= \frac{M \parallel f \parallel}{(\lambda-a)^n}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\parallel (\lambda - A)^{-n})Cf \parallel \leqslant \frac{M \parallel f \parallel}{(\lambda-a)^n}.$$

Ahora demostremos (B5).

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^{-1}Cf = C^{-1}L_\lambda Cf &= C^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Cf dt \\
&= C^{-1}C \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f dt \\
&= CC^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f dt \\
&= CC^{-1} L_\lambda f \\
&= C(\lambda - A)^{-1} f.
\end{aligned}$$

Por tanto, $(\lambda - A)^{-1}Cf = C(\lambda - A)^{-1}f$.

2.2. Teorema de Hille-Yosida Generalizado

En lo que sigue A denotara un operador cerrado que satisface (B1)-(B5).

Teorema 2.2.1 *Existe un C-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ acotado exponencialmente tal que:*
(i) $\| S(t) \| \leqslant Me^{at}, \quad t\geqslant 0.$
(ii) $(\lambda - A)^{-1}Cf = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S(t)f dt. \quad (\lambda > 2a,\ f \in B).$

Demostración
Definamos el operador $P_\lambda : Rang(\lambda - A) \longrightarrow B$, con $\lambda > a$, por

$$P_\lambda f = \lambda A(\lambda - A)^{-1}f.$$

Como A es un operador cerrado de (2.3), podemos reescribir la expresión de la derecha de esta igualdad como

$$\begin{aligned}
\lambda A(\lambda - A)^{-1}f &= \lambda(\lambda - L_\lambda^{-1}C)(\lambda - A)^{-1}f \\
&= \lambda^2(\lambda - A)^{-1}f - \lambda L_\lambda^{-1}C(\lambda - A)^{-1}f \\
&= \lambda^2_(\lambda - A)^{-1} - \lambda L_\lambda^{-1}CC^{-1}L_\lambda f \\
&= \lambda^2(\lambda - A)^{-1}f - \lambda f.
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$P_\lambda f = \lambda A(\lambda - A)^{-1}f = \lambda^2(\lambda - A)^{-1}f - \lambda f. \quad (f \ \in \ Rang(\lambda - A)).$$

Definamos $Q_\lambda : B \longrightarrow B$, con $(\lambda > a)$ por:

$$Q_\lambda f = \lambda A(\lambda - A)^{-1}Cf.$$

Usando nuevamente el hecho de que A satisface (B.2) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lambda A(\lambda - A)^{-1}Cf &= \lambda(\lambda - L_\lambda^{-1})(\lambda - A)^{-1}Cf \\
&= \lambda^2(\lambda - A)^{-1}Cf - \lambda L_\lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1}Cf \\
&= \lambda^2(\lambda - A)^{-1}Cf - \lambda L_\lambda^{-1}C^{-1}L_\lambda Cf \\
&= \lambda^2(\lambda - A)^{-1}Cf - \lambda Cf \\
&= P_\lambda Cf.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$Q_\lambda f = \lambda A(\lambda - A)^{-1}Cf = P_\lambda Cf.$$

Ahora probemos que para todo $f \in B$,

$$\| A(\lambda - A)^{-1}Cf \| \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando } \lambda \longrightarrow \infty.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\| A(\lambda - A)^{-1}C \| &= \| (\lambda - L_{\lambda}^{-1}C)(\lambda - A)^{-1}C \| \\
&= \| (\lambda(\lambda - A)^{-1}C - L_{\lambda}^{-1}C(\lambda - A)^{-1}C \| \\
&= \| (\lambda(\lambda - A)^{-1}C - L_{\lambda}^{-1}CC^{-1}L_{\lambda}C \| \\
&= \| (\lambda(\lambda - A)^{-1}C - C \| \\
&\leqslant \lambda \| ((\lambda - A)^{-1}C \| + \| C \| \\
&\leqslant \lambda \frac{M}{(\lambda - a)} + \| C \| .
\end{aligned}$$

Ahora tomando limite cuando $\lambda \longrightarrow \infty$ en ambos miembros nos queda:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \| A(\lambda - A)^{-1}C \| \leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda \frac{M}{(\lambda - a)} + \| C \| .$$

Por la continuidad se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} (\lambda \frac{M}{(\lambda - a)} + \| C \|) &= \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} M \frac{\lambda}{(\lambda - a)} + \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \| C \| \\
&= M + \| C \| .
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \| A(\lambda - A)^{-1}C \| \leqslant M + \| C \| .$$

De donde concluimos que, $\| A(\lambda - A)^{-1}C \|$ es acotada cuando $\lambda \longrightarrow \infty$, así es suficiente probar que $A(\lambda - A)^{-1}Cf \longrightarrow 0$ cuando $\lambda \longrightarrow \infty$ para un subconjunto denso. Sea $g \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
\| A(\lambda - A)^{-1}Cg \| &= \| AC(\lambda - A)^{-1}g \| \\
&= \| ACC^{-1}L_{\lambda}g \| \\
&= \| AL_{\lambda}g \| \\
&= \| A \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S(t)gdt \| \\
&= \| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S(t)Agdt \| \\
&= \| C^{-1}C \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S(t)Agdt \| \\
&= \| C^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S(t)CAgdt \| \\
&= \| C^{-1}L_{\lambda}CAg \| \\
&= \| (\lambda - A)^{-1}CAg \| \\
&\leqslant \frac{M}{\lambda - a} \| Ag \| .
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow \infty} \| A(\lambda - A)^{-1}Cg \| = 0$ Consideremos ahora $f \in B$, y usando el hecho de que $D(A)$ es denso en B, entonces existe una sucesión $\{f_n\} \in D(A)$ tal que $f_n \longrightarrow f$.
Así, obtenemos que:

$$\| A(\lambda - A)^{-1}Cf_n \| \leqslant \frac{M}{\lambda - a} \| Af_n \| .$$

Luego tomando limite cuando n $\longrightarrow \infty$ en ambos miembros nos queda:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \| A(\lambda - A)^{-1}Cf_n \| \quad \leqslant \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{M}{\lambda - a} \| Af_n \| .$$

Obteniendo que:

$$\| A(\lambda - A)^{-1}Cf \| \leqslant \frac{M}{\lambda - a} \| Af \| .$$

El cual si tomamos el limite cuando λ tiende a infinito, entonces la segunda igualdad converge a cero.
En segundo lugar, demostremos que:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P_\lambda Cf = ACf. \qquad (f \ \in \ D(A)).$$

Sea $b > a$, $f \in D(A)$, y $f = (b - A)^{-1}g$ para algún $g \in Rang(b - A)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\| Q_\lambda f - ACf \| &= \| \lambda A(\lambda - A)^{-1}Cf - ACf \| \\
&= \| \lambda A(\lambda - A)^{-1}C(b - A)^{-1}g - AC(b - A)^{-1}g \| \\
&= \| \lambda A(\lambda - A)^{-1}(b - A)^{-1}Cg - A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&= \| \lambda AC^{-1}L_\lambda C^{-1}L_bCg - A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&= \| \lambda AC^{-1}L_\lambda L_b g - A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&= \| \lambda AC^{-1}\left\{\frac{L_bCg - L_\lambda Cg}{(\lambda - b)}\right\} - A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&= \| \frac{\lambda A}{\lambda - b}C^{-1}\{L_bCg - L_\lambda Cg\} - A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&= \| \frac{\lambda A}{\lambda - b}\{C^{-1}L_bCg - C^{-1}L_\lambda Cg\} - A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&= \| \frac{\lambda A}{\lambda - b}\{(b - A)^{-1}Cg - (\lambda - A)^{-1}Cg\} - A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&= \| \frac{\lambda A}{b - \lambda}\{(\lambda - A)^{-1}Cg - (b - A)^{-1}Cg\} - A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&= \| \frac{\lambda}{b - \lambda}A(\lambda - A)^{-1}Cg + (-\frac{\lambda}{b - \lambda} - 1)A(b - A)^{-1}Cg \| \\
&\leqslant (\frac{\lambda}{\lambda - b}) \| A(\lambda - A)^{-1}Cg \| + (\frac{b}{\lambda - b}) \| A(b - A)^{-1}Cg \| .
\end{aligned}$$

Por tanto, de (a) $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow \infty} \| Q_\lambda f - ACf \| = 0$. Finalmente si $\lambda > a$, $t \geqslant 0$, definamos $S^\lambda(t) : B \longrightarrow B$ por:

$$S^\lambda(t)f = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda - A)^{-n}Cf. \qquad (f \ \in \ B).$$

Entonces $\{S^{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}$ es un C- semigrupo acotado exponencialmente.
En efecto;
De la definición de $S^{\lambda}(t)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} S^{\lambda}(t)f &= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cf \\ &= e^{-\lambda t}\frac{t^0\lambda^0}{0!}(\lambda-A)^0Cf+e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cf \\ &= e^{-\lambda t}Cf+e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cf. \end{aligned}$$

Si hacemos $t=0$ se tiene que:

$$S^{\lambda}(0)f=Cf.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \| S^{\lambda}(t)f \| &= \| e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cf \| \\ &\leqslant e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}\| (\lambda-A)^{-n}Cf \| \\ &\leqslant e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}\frac{M}{(\lambda-a)^n} \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t\lambda^2}{\lambda-a})^n\frac{M}{n!} \\ &= Me^{-\lambda t}e^{\frac{t\lambda^2}{\lambda-a}} \\ &= Me^{\frac{\lambda ta}{\lambda-a}} \\ &\leqslant Me^{2at}. \quad (si\ \lambda\ >\ 2a). \end{aligned}$$

Por tanto, el operador es acotado. Además, dado $f\in B$

$$\begin{aligned} S^{\lambda}(t)S^{\lambda}(s)f &= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}CS^{\lambda}(s)f \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Ce^{-\lambda s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m\lambda^{2m}}{m!}(\lambda-A)^{-m}Cf \\ &= e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}C\frac{s^m\lambda^{2m}}{m!}(\lambda-A)^{-m}Cf. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $m = n - k$, se tiene que $0 \leqslant m < \infty$, así $0 \leqslant n - k < \infty$, de donde se obtiene que $0 \leqslant k < n$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
S^\lambda(t)S^\lambda(s)f &= e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}C\frac{s^m\lambda^{2m}}{m!}(\lambda-A)^{-m}Cf \\
&= e^{-\lambda(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k\lambda^{2k}(\lambda-A)^{-k}Cs^{(n-k)}\lambda^{2(n-k)}(\lambda-A)^{-(n-k)}Cf}{k!(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}t^k\lambda^{2n}(\lambda-A)^{-n}Cs^{(n-k)}Cf \\
&= e^{-\lambda(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\tbinom{n}{i}t^i\lambda^{2n}(\lambda-A)^{-n}s^{(n-i)}C^2f \\
&= e^{-\lambda(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(t+s)^n\lambda^{2n}(\lambda-A)^{-n}C^2f \\
&= e^{-\lambda(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(t+s)^n\lambda^{2n}(\lambda-A)^{-n}C(Cf) \\
&= S^\lambda(t+s)Cf.
\end{aligned}$$

Finalmente, $\{S^\lambda(t)\}_{t\geqslant 0}$, es fuertemente continuo.

$$\begin{aligned}
\| S^\lambda(t)f - S^\lambda(t+h)f \| &\leqslant \| S^\lambda(t) - S^\lambda(t+h) \|\| f \| \\
&= \| S^\lambda(t) - S^\lambda(t)S^\lambda(h) \|\| f \| \\
&= \| e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}C \\
&- e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Ce^{-\lambda h}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m\lambda^{2m}}{m!}(\lambda-A)^{-m}C \|\| f \| \\
&= \| e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}C \\
&- e^{-\lambda(t+h)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(t+h)^n\lambda^{2n}(\lambda-A)^{-n}C(C) \|\| f \| \\
&= \| e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}([t^n - e^{-\lambda h}(t+h)^nC]\lambda^{2n})(\lambda-A)^{-n}C \|\| f \| \\
&\leqslant e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \mid [t^n - e^{-\lambda h}(t+h)^nC]\lambda^{2n} \mid\| (\lambda-A)^{-n}C \|\| f \| \\
&\leqslant e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \mid [t^n - e^{-\lambda h}(t+h)^nC]\lambda^{2n} \mid \frac{M}{(\lambda-a)^n} \| f \| \\
&\leqslant e^{-\lambda t}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{t^n\lambda^{2n}M}{(\lambda-a)^n} - e^{-\lambda h}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(t+h)^n\lambda^{2n}M}{(\lambda-a)^n})) \| f \| < \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, si tomamos limite cuando $h \longrightarrow 0$ en ambos miembros nos queda que:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \parallel S^{\lambda}(t)f - S^{\lambda}(t+h)f \parallel \quad \leqslant \quad \lim_{h\longrightarrow 0}(Me\frac{\lambda ta}{(\lambda-a)} - Me\frac{\lambda(t+h)a}{(\lambda-a)}) \parallel f \parallel$$

Pero,

$$\begin{aligned}\lim_{h\longrightarrow 0}(Me\frac{\lambda ta}{(\lambda-a)} - Me\frac{\lambda(t+h)a}{(\lambda-a)}) \parallel f \parallel &= (Me\frac{\lambda ta}{(\lambda-a)} - M\lim_{h\longrightarrow 0} e\frac{\lambda(t+h)a}{(\lambda-a)}) \parallel f \parallel \\ &= (Me\frac{\lambda ta}{(\lambda-a)} - Me\frac{\lambda ta}{(\lambda-a)}) \parallel f \parallel \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\lim_{h\longrightarrow\infty} \parallel S^{\lambda}(t)f - S^{\lambda}(t+h)f \parallel \longrightarrow 0.$$

En consecuencia, $\{S^{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}$ es fuertemente continuo.
Para $\lambda > a$, sea $\{T^{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}$ el semigrupo asociado a los operadores no acotados de $\{S^{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}$, esto es, $T^{\lambda}(t) = C^{-1}S^{\lambda}(t)$, y sea G_{λ} el operador correspondiente a $\{T^{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}$, definido como antes. Entonces probemos que para $\lambda > a$:

$$G_{\lambda}f = \lambda A(\lambda - A)^{-1}f. \quad (f \in CD(A)).$$

Sea f $\in$ C(D(A)), entonces existe $g \in D(A)$ tal que $f = Cg$.
Ahora lo primero que debemos verificar es que $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} t^{-1}\{T^{\lambda}(t)f - f\}$ exista.
En efecto;

$$\begin{aligned}t^{-1}(T^{\lambda}(t)f - f) &= t^{-1}(C^{-1}S^{\lambda}(t)Cg - Cg) \\ &= t^{-1}(S^{\lambda}(t)g - Cg) \\ &= t^{-1}(e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cg - Cg) \\ &= t^{-1}(e^{-\lambda t}(\frac{t^0\lambda^0}{0!}(\lambda-A)^0Cg + \frac{t^1\lambda^2}{1!}(\lambda-A)^{-1}Cg + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cg) - Cg) \\ &= t^{-1}(e^{-\lambda t}(Cg + \frac{t^1\lambda^2}{1!}(\lambda-A)^{-1}Cg + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cg) - Cg) \\ &= t^{-1}(e^{-\lambda t} - 1)Cg + e^{-\lambda t}\lambda^2(\lambda-A)^{-1}Cg + e^{-\lambda t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cg.\end{aligned}$$

Si tomamos ahora el limite cuando $t \longrightarrow 0$ nos queda:

$$\lim_{t\longrightarrow 0} t^{-1}\{T^{\lambda}(t)f - f\} \quad = \quad \lim_{t\longrightarrow 0}(t^{-1}(e^{-\lambda t} - 1)Cg + e^{-\lambda t}\lambda^2(\lambda-A)^{-1}Cg + e^{-\lambda t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cg).$$

Estudiando los limites por separado tenemos que:
Por un lado:

$$\begin{aligned} \lim_{t\longrightarrow 0}(t^{-1}(e^{-\lambda t}-1)Cg &= \lim_{t\longrightarrow 0}(\frac{e^{-\lambda t}-1}{t})Cg \\ &= Cg\lim_{t\longrightarrow 0}(-\lambda+\frac{\lambda^2 t}{2}-\frac{\lambda^3 t^2}{3!}+...) \\ &= -\lambda Cg \qquad (2,12). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\lim_{t\longrightarrow 0}(e^{-\lambda t}\lambda^2(\lambda-A)^{-1}Cg)=\lambda^2(\lambda-A)^{-1}Cg. \qquad (2,13).$$

Por último estudiemos la norma de el tercer término así

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}\lambda^{2n}}{n!}(\lambda-A)^{-n}Cg \| &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}\lambda^{2n}}{n!}\| (\lambda-A)^{-n}C \|\| g \| \\ &= t\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}\lambda^{2n}}{n!}\| (\lambda-A)^{-n}C \|\| g \| \\ &\leqslant t\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}\lambda^{2n}}{n!}\frac{M}{(\lambda-a)^n}\| g \| . \end{aligned}$$

Ahora haciendo un cambio de variable $k=n-2$, se tiene que $n=k+2$, obteniendo :

$$\begin{aligned} t\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}\lambda^{2n}}{n!}\frac{M}{(\lambda-a)^n}\| g \| &= t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda^{2(k+2)}}{(k+2)!}\frac{M}{(\lambda-a)^{k+2}}\| g \| \\ &= t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda^{2k}\lambda^4}{(k+2)!}\frac{M}{(\lambda-a)^k}\frac{1}{(\lambda-a)^2}\| g \| \\ &\leqslant t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda^{2k}\lambda^4}{(k)!}\frac{M}{(\lambda-a)^k}\frac{1}{(\lambda-a)^2}\| g \| \\ &= t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{t\lambda^2}{(\lambda-a)})^k\lambda^4\frac{M}{(\lambda-a)^2}\| g \| \\ &= \frac{tMe^{\frac{t\lambda^2}{\lambda-a}}\lambda^4}{(\lambda-a)^2}\| g \| . \end{aligned}$$

En consecuencia $\lim_{t\longrightarrow 0} t\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}\lambda^{2n}}{n!}\frac{M}{(\lambda-a)^n}\| g \|=0$. Luego de (2,8),(2,9) y (2,10) tenemos que:

$$\lim_{t\longrightarrow 0}t^{-1}\{T^{\lambda}(t)f-f\}=-\lambda Cg+\lambda^2(\lambda-A)^{-1}Cg.$$

Por tanto, $f\in D(G_\lambda)$ y

$$\begin{aligned} G_\lambda f &= -\lambda Cg+\lambda^2(\lambda-A)^{-1}Cg \\ &= -\lambda f+\lambda^2(\lambda-A)^{-1}f \\ &= \lambda A(\lambda-A)^{-1}f. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema 4.1.1 a $\{T^{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T^{\lambda}(t)f) &= G_{\lambda}T^{\lambda}(t)f\\ &= \lambda A(\lambda-A)^{-1}T^{\lambda}(t)f. \quad (f \in C^2(D(A)))\end{aligned}$$

Así, que

$$\frac{d}{dt}(S^{\lambda}(t)f) = \frac{d}{dt}(CT^{\lambda}(t)f).$$

Ahora dado que C es un operador continuo, y recordando que la derivada se define a través de un límite podemos decir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(CT^{\lambda}(t)f) &= C\frac{d}{dt}(T^{\lambda}(t)f)\\ &= CG_{\lambda}T^{\lambda}(t)f = G_{\lambda}CC^{-1}S^{\lambda}(t)f\\ &= \lambda A(\lambda-A)^{-1}S^{\lambda}(t)f. \quad (f \in CD(A)).\end{aligned}$$

Por tanto, si $f \in C(D(A))$, entonces existe $g \in D(A)$ tal que $f = Cg$, entonces

$$\begin{aligned}\| \frac{d}{ds}(S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s)Cf) \| &= \| \frac{d}{ds}S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s)Cf + S^{\lambda}(t-s)\frac{d}{ds}S^{\mu}(s)Cf \|\\ &= \| -\lambda A(\lambda-A)^{-1}S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s)Cf + S^{\lambda}(t-s)\mu A(\mu-A)^{-1}S^{\mu}(s)Cf \|\\ &= \| S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s)\mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s)\lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g \|\\ &= \| S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s)(\mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - \lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g) \|\\ &\leqslant \| S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s) \|\| \mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - \lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g \|\\ &\leqslant \| S^{\lambda}(t-s) \|\| S^{\mu}(s) \|\| \mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - \lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g \|\\ &\leqslant Me^{2a(t-s)}Me^{2as} \| \mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - \lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g \|\\ &= M^2e^{2at} \| \mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - \lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g \|. \quad (si\ \lambda,\ \mu > 2a).\end{aligned}$$

Así, que:

$$\begin{aligned}\| S^{\lambda}(t)C^2f - S^{\mu}(t)C^2f \| &= \| \int_0^t \frac{d}{ds}(S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s)Cf)ds \|\\ &\leqslant \int_0^t \| \frac{d}{ds}(S^{\lambda}(t-s)S^{\mu}(s)Cf)ds \| ds\\ &\leqslant \int_0^t M^2e^{2at} \| \mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - \lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g \| ds\\ &= M^2e^{2at} \| \mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - \lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g \| \int_0^t ds\\ &= M^2e^{2at}t \| \mu A(\mu-A)^{-1}C^2g - \lambda A(\lambda-A)^{-1}C^2g \|)\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{\lambda,\mu\longrightarrow\infty} \| S^{\lambda}(t)C^2f - S^{\mu}(t)C^2f \| = 0$ En consecuencia, el $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow\infty} S^{\lambda}(t)f$ existe para todo $f \in C^3(D(A))$ y para $f \in B$ $C^3(D(A))$ es denso y $\| S^{\lambda}(t) \| \leqslant Me^{2at}$, para todo $\lambda > 2a$.

Para t$\geqslant$0, definamos $S(t) : B \longrightarrow B$ por

$$S(t)f = \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(t)f. \quad (f \in B).$$

Podemos verificar que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es un C-semigrupo acotado exponencialmente.
En efecto;

$$\begin{aligned} S(0)f &= \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(0)f \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Cf \\ &= Cf. \qquad (2,14) \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} S(t+s)C &= \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(t+s)C \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(t)S^{\lambda}(s) \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(t) \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(s) \\ &= S(t)S(s). \qquad (2,15) \end{aligned}$$

Por lo que, $S(t+s)Cf = S(t)S(s)f$.
Veamos ahora que el operador $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es fuertemente continuo, tenemos que:

$$\begin{aligned} \| S(t+s)f - S(t)f \| &= \| \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(t+s)f - \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(t)f \| \\ &= \| \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} (S^{\lambda}(t+s)f - S^{\lambda}(t)f) \| \\ &\leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \| S^{\lambda}(t+s)f - S^{\lambda}(t)f \| . \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $| s | < \delta$ lo que implica que $\| S^{\lambda}(t+s)f - S^{\lambda}(t)f \| < \varepsilon$.
Así,

$$\| S(t+s)f - S(t)f \| < \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \varepsilon = \varepsilon.$$

Por tanto, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es continuo.
Ahora veamos que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es acotado. Sea $f \in B$

$$\begin{aligned} \| S(t)f \| &= \| \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} S^{\lambda}(t)f \| \\ &\leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \| S^{\lambda}(t)f \| \\ &\leqslant \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} Me^{2at} \\ &= Me^{2at}, \qquad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es acotado
Para probar (ii) notemos que si λ,$\mu > 2a$, se tiene que:

$$C^2 f = (\lambda - A_{\mu})^{-1}(\lambda - A_{\mu})C^2 f. \quad (f \in D(A))$$

Donde A_μ es el generador de $\{S^\mu(t)\}_{t\geqslant 0}$. Por tanto de la definición anterior distribuyendo tenemos que

$$C^2 f \;=\; \lambda(\lambda - A_\mu)^{-1}C^2 f - (\lambda - A_\mu)^{-1}A_\mu C^2 f$$

Despejando ahora de esta ecuación a $(\lambda - A_\mu)^{-1}C^2 f$ nos queda:

$$(\lambda - A_\mu)^{-1}C^2 f = \frac{C^2 f}{\lambda} + (\lambda - A_\mu)^{-1}\lambda^{-1}A_\mu C^2 f \quad (f \in D(A)).$$

Y como se tiene que, $Cf \in D(G_\mu)$, además tenemos que G_μ es el generador infinitesimal de $\{T_t^\mu\}_{t\geqslant 0}$ y A_μ es el generador infinitesimal de $\{S_t^\mu\}_{t\geqslant 0}$, así, por la proposición 2.1.4 se tiene que; $G_\mu \subset A_\mu$ despejando tenemos que:

$$\frac{C^2 f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S^\mu(t)G_\mu Cf dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S^\mu(t)Cf dt \quad (f \in D(A)).$$

Ahora si tomamos $\mu \longrightarrow \infty$, y usando el hecho de como se define el operador $S(t)$ tenemos:

$$\frac{C^2 f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)ACf dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Cf dt. \quad (f \in D(A)).$$

Por tanto,

$$\frac{C^2 f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}L_\lambda ACf \;=\; L_\lambda Cf \quad (f \in D(A))C^2 f = (\lambda - A)L_\lambda Cf \quad (f \in D(A)).$$

Despejando de acá $C^2 f$ tenemos que:

$$C^2 f = (\lambda - A)L_\lambda Cf \quad (f \in D(A).$$

Ahora si multiplicamos por $(\lambda - A)^{-1}C^{-1}$ obtenemos que:

$$(\lambda - A)^{-1}Cf = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)f dt \quad (f \in D(A))$$

Pero como $C(D(A))$ es denso en B y ambos operadores son acotados, entonces (ii) es probado.

Lema 2.2.1 *Sea Λ_T el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ y sea A el generador infinitesimal del C-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, entonces $C^4(D(A)) \subseteq D(\Lambda_T)$, además $\Lambda_T f = Af$ $(f \in C^4(D(A)))$.*

Demostración
Sea $f \in C^4(D(A))$, entonces existe $g \in D(A)$ tal que $f = C^4 g$.
En primer lugar probemos que $C^4(D(A)) \subseteq D(\Lambda_T)$, para ello debemos verificar que f$\in Rang(C)$: $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} t^{-1}\{T(t)f - f\}$ existe.

Así, basta probar que $t^{-1}\{T(t)f - f\}$ es de Cauchy cuando $t \longrightarrow 0$. En efecto,

$$\begin{array}{lcl}
\| t^{-1}\{T(t)f - f\} - s^{-1}\{T(s)f - f\} \| & = & \| t^{-1}\{C^{-1}S(t)C^4g - C^4g\} - s^{-1}\{C^{-1}S(s)C^4g - C^4g\} \| \\
& = & \| t^{-1}\{S(t)C^3g - C^4g\} - s^{-1}\{S(s)C^3g - C^4g\} \| \\
& = & \| t^{-1}\{S(t)C^3g - S^\lambda(t)C^3g + S^\lambda(t)C^3g - C^4g\} \\
& & -s^{-1}\{S(s)C^3g - S^\lambda(s)C^3g + S^\lambda(s)C^3g - C^4g\} \| \\
& = & \| t^{-1}\{S(t)C^3g - S^\lambda(t)C^3g\} + t^{-1}\{S^\lambda(t)C^3g - C^4g\} \\
& & -s^{-1}\{S(s)C^3g - S^\lambda(s)C^3g\} - s^{-1}\{S^\lambda(s)C^3g - C^4g\} \| \\
& \leqslant & \| t^{-1}\{S(t)C^3g - S^\lambda(t)C^3g\} \| + \| s^{-1}\{S(s)C^3g - S^\lambda(s)C^3g\} \| \\
& & + \| t^{-1}\{S^\lambda(t)C^3g - C^4g\} - s^{-1}\{S^\lambda(s)C^3g - C^4g\} \| .
\end{array}$$

Ahora bien por (2,11) sabemos que si $\lambda > 2a$

$$t^{-1} \| S(t)C^3g - S^\lambda(t)C^3g \| \leqslant M^2e^{2at} \| AC^2g - \lambda A(\lambda - A)^{-1}C^2g \| .$$

Así para todo $\varepsilon > 0$, para todo t en un intervalo acotado y todo λ suficientemente grande tenemos que:

$$t^{-1} \| S(t)C^3g - S^\lambda(t)C^3g \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por tanto,

$$\begin{array}{lcl}
\| t^{-1}\{T(t)f - f\} - s^{-1}\{T(s)f - f\} \| & \leqslant & \frac{\varepsilon}{2} + \| t^{-1}\{S^\lambda(t)C^3g - C^4g\} - \\
& & s^{-1}\{S^\lambda(s)C^3g - C^4g\} \| \\
& = & \frac{\varepsilon}{2} + \| t^{-1}\{T^\lambda(t)C^4g - C^4g\} - \\
& & s^{-1}\{T^\lambda(s)C^4g - C^4g\} \| .
\end{array}$$

Ahora tenemos que $C(D(A))$ es denso en B, y además $C^3(D(A))$ es denso en B, por tanto

$$t^{-1}\{T^\lambda(t)C^4g - C^4g\} = t^{-1}\{T^\lambda(t)C(C^3g) - C(C^3g)\}.$$

De acá tenemos que, $C^3g \in B$, y sea $f_n \in C(D(A))$ tal que $f_n \longrightarrow C^3g$, así se tiene que:

$$\begin{array}{lcl}
t^{-1}\{T^\lambda(t)C^4g - C^4g\} & = & t^{-1}\{T^\lambda(t)C(C^3g) - C(C^3g)\} \\
& = & t^{-1}\{T^\lambda(t)C(\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n) - C(\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n)\} \\
& = & \lim_{n\longrightarrow\infty} t^{-1}\{T^\lambda(t)Cf_n - Cf_n\}. \quad (Cf_n \in D(G_\lambda))
\end{array}$$

Luego;

$$\begin{array}{lcl}
\lim_{t\longrightarrow 0} t^{-1}\{T^\lambda(t)C^4g - C^4g\} & = & \lim_{t\longrightarrow 0} \lim_{n\longrightarrow\infty} t^{-1}\{T^\lambda(t)Cf_n - Cf_n\} \\
& = & \lim_{t\longrightarrow 0} t^{-1}\{T^\lambda(t)C(\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n) - C(\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n)\} \\
& = & \lim_{t\longrightarrow 0} t^{-1}\{T^\lambda(t)C^4g - C^4g\} \\
& = & \lambda A(\lambda - A)^{-1}C^4g.
\end{array}$$

En consecuencia,

$$\| t^{-1}\{T(t)f - f\} - s^{-1}\{T(s)f - f\} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En consecuencia $t^{-1}\{T(t)f - f\}$ es de Cauchy cuando $t \longrightarrow 0$.
Por tanto, $C^4(D(A)) \subseteq D(\Lambda_T)$.
Finalmente, probemos que $\Lambda_T f = Af$.

$$\begin{aligned}
\| t^{-1}\{T(t)f - f\} - Af \| &= \| t^{-1}\{C^{-1}S(t)C^4g - C^4g\} - AC^4g \| \\
&= \| t^{-1}\{S(t)C^3g - C^4g\} - AC^4g \| \\
&= \| t^{-1}\{S(t)C^3g - S^{\lambda}(t)C^3g + S^{\lambda}(t)C^3g - C^4g\} \\
&\quad -G_{\lambda}C^4g + G_{\lambda}C^4g - AC^4g \| \\
&= \| t^{-1}\{S(t)C^3g - S^{\lambda}(t)C^3g\} + t^{-1}\{S^{\lambda}(t)C^3g - C^4g\} \\
&\quad -G_{\lambda}C^4g + \lambda A(\lambda - A)^{-1}C^4g - AC^4g \| \\
&\leqslant \| t^{-1}\{S(t)C^3g - S^{\lambda}(t)C^3g\} \| + \| t^{-1}\{T^{\lambda}(t)C^4g \\
&\quad -C^4g\} - G_{\lambda}C^4g \| + \| \lambda A(\lambda - A)^{-1}C^4g - AC^4g \| .
\end{aligned}$$

Dado que $C^4D(A) \subseteq D(\Lambda_T)$, se obtiene que
$C^4g \in D(\Lambda_T)$, y por la proposición 2.1.4 se tiene que $\Lambda_T \subseteq A$,
y por tanto, Λ_Tf=Af, $f \in D(\Lambda_T)$, por lo que, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\| \lambda A(\lambda - A)^{-1}C^4g - AC^4g \| &= \| G_{\lambda}C^4g - AC^4g \| \\
&= \| AC^4g - AC^4g \| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así,

$$\| t^{-1}\{T(t)f - f\} - Af \| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \| t^{-1}\{T^{\lambda}(t)C^4g - C^4g\} - G_{\lambda}C^4g \| + \frac{\varepsilon}{3},$$

si λ es suficientemente grande.
Luego,

$$\| t^{-1}\{T(t)f - f\} - Af \| \leqslant \varepsilon.$$

Para todo $t > 0$ suficientemente pequeño.
Por tanto, $\Lambda_T f = Af$.

Teorema 2.2.2 *Sea $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C-semigrupo exponencialmente acotado con generador A. Entonces A es máximal con respecto a las propiedades (B1)-(B5).*

Demostración
Como A dado por (2.3) satisface (B1)-(B5), por teorema 2.1.2, podemos construir un C-semigrupo $\{\bar{S}(t)\}_{t\geqslant 0}$ como en la prueba del teorema 2.2.1, con generador $\bar{A}$. Demostremos que $S(t) = \bar{S}(t)$

para todo t $\geqslant$0.
Sea $\bar{\Lambda_T}$ el operador correspondiente a $\{\bar{T}(t)\}_{t\geqslant 0}$ como el definido al comienzo de esta sección .
Por lema 2.1.4 se tiene que: $C^4(D(A)) \subseteq D(\bar{\Lambda_T})$ y además $Ag = \Lambda_T g$ $(g \in C^4(D(A)))$.
Sea $f = Cg \in C^5(D(A))$. Entonces podemos definir $k(t) = T(t)f = \bar{T}(t)f$ $(t \geqslant 0)$, la cual es la única solución del problema de Cauchy abstracto, y de acá se tienen las siguientes conclusiones:
Por un lado si tomamos $k(t) = T(t)f$, se obtiene;

$$k(t) = S(t)g.$$

Por otro lado si tomamos k(t)=$\bar{T}$(t)f, se obtiene;

$$k(t) = \bar{S}(t)g.$$

Dando esto como resultado:

$$k'(t) = Ak(t) = \Lambda_T k(t) \quad y \quad k'(t) = \bar{A}k(t).$$

Lo que implica:

$$k'(t) = Ak(t) = \Lambda_T k(t) = \bar{A}k(t), \quad \textit{con valor inicial } f.$$

En conclusión se obtiene:

$$S(t)g = CT(t)g = C\bar{T}(t)g = \bar{S}(t)g. \quad (g \in C^4(D(A))).$$

Por otro lado usando el hecho de que $C^4(D(A))$ es denso en B, obtenemos que para cualquier $g \in B$, existe $g_n \in \{C^4(D(A))\}$ tal que $g_n \longrightarrow g$.
Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} S(t)g_n &= \lim_{n\longrightarrow\infty} CT(t)g_n \\ &= CT(t) \lim_{n\longrightarrow\infty} g_n \\ &= CT(t)g \\ &= S(t)g \\ &= \bar{S}(t)g. \end{aligned}$$

Por tanto, $S(t) = \bar{S}(t)$, y en consecuencia $A = \bar{A}$.
Supongamos ahora que A' es un operador que satisface las propiedades (B1)-(B5) y $A \subseteq A'$, entonces de la prueba del teorema 2.2.1 podemos construir un C- semigrupo $\{S'(t)\}_{t\geqslant 0}$, de forma tal que para cualquier $f \in B$, por (B3) existe $f_n \in D\{(\lambda - A)^{-n}C\}$ tal que $f_n \longrightarrow f$, así

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} C(\lambda - A)^{-n} f_n &= C(\lambda - A)^{-n} f \\ &= (\lambda - A)^{-n} Cf. \quad (2,15) \end{aligned}$$

Pero como A$\subseteq A'$ se tiene;

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} C(\lambda - A)^{-n} f_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} C(\lambda - A')^{-n} f_n.$$

Pero,

$$\begin{aligned} f_n \in D((\lambda - A)^{-n}) &\Longrightarrow f_n \in Rang(\lambda - A) \subset Rang(\lambda - A') \\ &\Longrightarrow f_n \in Rang(\lambda - A') \\ &\Longrightarrow f_n \in D((\lambda - A')^{-n}). \end{aligned}$$

Así, tenemos que;

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} C(\lambda - A')^{-n} f_n &= C(\lambda - A')^{-n} f \\ &= (\lambda - A')^{-n} Cf. \quad (2,16) \end{aligned}$$

Luego, por la unicidad de límite obtenemos;

$$(\lambda - A')^{-n} C = (\lambda - A)^{-n} C. \quad (\lambda > 2a, \quad n = 0, 1, 2, ...)$$

De donde podemos ver que $S'(t) = S(t) = \bar{S}(t)$ para todo $t \geqslant 0$.
Además por la parte (ii) el teorema 2.1.3, para todo $f \in B$ y $\lambda > 2a$ se obtiene que

$$(\lambda - A')^{-1} Cf = L_\lambda f = (\lambda - A)^{-1} Cf.$$

De acá, si tomamos la primera igualdad obtenemos:

$$(\lambda - A')^{-1} Cf = L_\lambda f Cf = (\lambda - A') L_\lambda f. \quad (2,17)$$

Multiplicando en ambos lados por $(\lambda - A')$, tenemos:

$$Cf = (\lambda - A') L_\lambda f. \quad (2,18)$$

Procediendo de igual forma en la segunda igualdad nos queda:

$$Cf = (\lambda - A) L_\lambda f. \tag{2.5}$$

Por tanto, de (2,16) y(2.17) se obtiene

$$(\lambda - A') L_\lambda f = (\lambda - A) L_\lambda f.$$

Así, $A' L_\lambda f = A L_\lambda f$.
Por último, si $f \in D(A')$, entonces

$$\begin{aligned} A' L_\lambda f &= A' \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f dt \\ &= A' \int_0^\infty e^{-\lambda t} S'(t) f dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S'(t) A' f dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) A' f dt \\ &= L_\lambda A' f. \end{aligned}$$

Por tanto, $AL_\lambda f = A'L_\lambda f = L_\lambda A'f$.
Luego;

$$L_\lambda A'f = A'L_\lambda f = (\lambda - L_\lambda^{-1}C)L_\lambda f.$$

De donde obtenemos que:

$$L_\lambda A'f = (\lambda - L_\lambda^{-1}C)L_\lambda f.$$

Despejando de acá $A'f$ obtenemos

$$A'f = L_\lambda^{-1}(\lambda - L_\lambda^{-1}C)L_\lambda f.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A'f &= L_\lambda^{-1}(\lambda - L_\lambda^{-1}C)L_\lambda f \\ &= L_\lambda^{-1}(\lambda L_\lambda - L_\lambda^{-1}CL_\lambda)f \\ &= L_\lambda^{-1}(\lambda L_\lambda - C)f \\ &= (\lambda - L_\lambda^{-1}C)f \\ &= Af. \end{aligned}$$

En consecuencia $A' \subseteq A$ y por tanto $A = A'$.
Con lo que probamos la maximilidad de A respecto a las propiedades (B1)-(B5).

Observación:
Dado un operador cerrado A que satisface (B1)-(B5), podemos construir un C-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ con generador $\bar{A}$, como en la prueba del teorema 2.2.1. El argumento usado en la prueba del teorema 2.2.2, implica que $A \subseteq \bar{A}$.

Corolarío 2.2.1 *Supongamos A es un operador cerrado que satisface (B1)-(B5). Entonces el problema de Cauchy abstracto,*

$$k'(t) = Ak(t), \qquad k(0) = f;$$

tiene una única solución para todo $f \in C(D(A))$. Más aún, la solución depende continuamente de el valor inicial $k(0)$ bajo la norma del C^{-1}-grafico sobre $C(D(A))$.

Demostración
Como A es un operador cerrado que satisface las propiedades (B1)-(B5), por teorema 2.1.2, podemos contruir un C-semigrupo exponencialmente acotado, como en la prueba del teorema 2.2.1 con generador $\bar{A}$, y por teorema 2.2.2 tenemos que este operador $A = \bar{A}$, es decir A es el generador del C-semigrupo exponencialmente acotado.
Por otro lado tenemos que para cada $f \in C(D(A))$, por la teoria de Semigrupos Fuertemente Continuos tenemos que $k(t) = T(t)f$, denota la solución del problema de Cauchy abstracto.

Para ello, veamos que en $k(0) = f$ y además que $k'(t) = Ak(t)$.
En efecto,

$$k(0) = T(0)f = If = f.$$

Y

$$k'(t) = \frac{d}{dt}(T(t)f) = AT(t)f = Ak(t).$$

Corolarío 2.2.2 *Un operador cerrado A es el generador de un C-semigrupo exponencialmente acotado, si y sólo si, es máximal con respecto de (B1)-(B5).*

Demostración
Supongamos que A es un operador cerrado, el cual es el generador de un C-semigrupo exponencialmente acotado, entonces por el teorema 2.2.2 tenemos que A es maximal con respecto de las propiedades (B1)-(B5). Con lo cual queda probado la parte directa del corolario.
Por otra parte supongamos que A es un operador cerrado que satisface las propiedades (B1)-(B5), por teorema 2.1.2, podemos contruir un C-semigrupo exponencialmente acotado, como en la prueba del teorema 2.2.1 con generador $\bar{A}$, y por teorema 2.2.2 tenemos que este operador $A = \bar{A}$, es decir A es el generador del C-semigrupo exponencialmente acotado.

Teorema 2.2.3 *Sea P un operador cerrado definido densamente sobre B, el cual conmuta con C. Supongase las siguientes condiciones son satisfechas:*
a) el problema de Cauchy abstracto.

$$k'(t) = Ak(t). \quad k(0) = f,$$

tiene una única solución para todo $f \in C(D(P))$;
b) si $f \in C(D(P))$, entonces la solución $k(t)$ del problema de Cauchy abstracto satisface la siguiente desigualdad.

$$\| k(t) \| \leqslant Me^{at} \| C^{-1}f \|, \quad t \geqslant 0.$$

c) $C(D(P))$ es un núcleo de P, esto es $\overline{D(P)} = C(D(P))$.
Entonces P esta contenido en el generador A de un C-semigrupo exponencialmente acotado. Más aún si P es máximal con respecto a la condición (a), entonces P es el generador de un C-semigrupo exponencial acotado.

Demostración
Para cada $f \in C(D(P))$, por la teoría de C_0-semigrupo tenemos que $k(t) = T(t)f$, denota la solución del problema de Cauchy abstracto definido en la condición (a), cuyo generador es $A = \Lambda_T$, entonces

$$CT(t)f = T(t)Cf. \quad (f \in C(D(P))).$$

Así (b) implica que;

$$\begin{aligned}
\| T(t)Cf \| &= \| CT(t)f \| \\
&= \| Ck(t) \| \\
&\leqslant \| C \| \| k(t) \| \\
&\leqslant \| C \| Me^{at} \| C^{-1}f \| \\
&\leqslant \| C \| Me^{at} \| C^{-1} \| \| f \| \\
&= \| C \| Me^{at} \| C \|^{-1} \| f \| \\
&= Me^{at} \| f \| . \quad (f \in CD(P)).
\end{aligned}$$

De acá obtenemos que :

$$\| S(t)f \| = \| T(t)Cf \| \leqslant Me^{at} \| f \| .$$

Definamos el operador acotado $S(t)$ por;

$$S(t)f = CT(t)f. \qquad (f \in C(D(P))).$$

Verifiquemos que, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es un C-semigrupo exponencialmente acotado.
En efecto;
En primer lugar verifiquemos que $S(0)f = Cf$,

$$S(0)f = CT(0)f = CIf = Cf.$$

Ahora debemos ver que $S(t+s)Cf = S(t)S(s)f$,

$$\begin{aligned}
S(t+s)Cf &= CT(t+s)Cf \\
&= CT(t)T(s)Cf \\
&= S(t)CT(s)f \\
&= S(t)S(s)f.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ es fuertemente continuo, para ello estudiemos

$$\begin{aligned}
\| S(t+s)f - S(t)f \| &= \| CT(t+s)f - CT(t)f \| \\
&= \| CT(t)T(s)f - T(t)f \| \\
&\leqslant \| CT(t)(T(s) - I) \| \| f \| \\
&\leqslant \| CT(t) \| \| (T(s) - I) \| \| f \| .
\end{aligned}$$

Tomando el limite cuando $s \longrightarrow 0$, nos queda que:

$$\lim_{s\longrightarrow 0} \| S(t+s)f - S(t)f \| \leqslant \lim_{s\longrightarrow 0} \| CT(t) \| \| (T(s) - I) \| \| f \| .$$

De acá obtenemos que $\parallel (T(s) - I) \parallel \longrightarrow 0$, cuando $s \longrightarrow 0$.
Además $\parallel CT(t) \parallel \leqslant Me^{at}$, con t fijo.
Por tanto,

$$\lim_{s \longrightarrow 0} \parallel S(t+s)f - S(t)f \parallel = 0.$$

Así, $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ es fuertemente continuo.
Por último por la parte (a), tenemos que $C(D(P)) \subseteq D(\Lambda_T)$, con Λ_T definido como al inicio de este capítulo , pero por (c) tenemos que $C(D(P)) = \overline{D(P)}$, por lo que $D(P) \subset \overline{D(P)} \subset D(\Lambda_T)$. Por otro lado, como $\Lambda_T \subseteq A$. En consecuencia, $D(P) \subset D(A)$ y como P es cerrado se obtiene que para $x \in D(P)$ se tiene $Px = Ax$.
Por tanto $P \subseteq A$.
Por otra parte, si P es máximal con respecto a la condición (a), entonces dado cualquier operador Q que satisface las mismas condiciones debe satisfacer que $Q \subseteq P$.
Ahora bien dado que A es el generador de un C-semigrupo, por teorema 2.1.4, A es máximal con respecto a (B1)-(B5). en consecuencia por corolario 2.2.2 el problema de Cauchy abstracto $k(t) = Af$, tiene una única solución, pero como P es máximal $A \subseteq P$, y por la primera parte del teorama tenemos que $P \subseteq A$.
Con lo que concluimos que $A = P$
Por tanto, P es el generador del C-semigrupo.

Bibliografía

[1] Curtain, R.F. and H.J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Davies, E.B. and M.M. Pang, *The Cauchy Problem and a Generalization of the Hille-Yosida Theorem*, Proc. London Math. Soc. 55 (1987), 181-208.

[3] Delaubenfels, R., *C-Semigroups and Strongly Continuous Semigroups*, J. Funct. Anal. 111 (1993), 44-61.

[4] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operator and Aplications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[5] Iribarren Borgues Ignacio. Cálculo diferencial en espacios normados.
Editorial Equinoccio, Caracas- Venezuela, 1980.