UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Medidas de Inclusión entre Conjuntos Difusos: Fundamentos y Ejemplos de Aplicaciones "

Trabajo Especial de Grado presentado por

Joan Pérez

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Lógica Difusa.
Tutor: Lic. Belkys López

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2012

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"MEDIDAS DE INCLUSIÓN ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS:
FUNDAMENTOS Y EJEMPLOS DE APLICACIONES "

Presentado por el ciudadano JOAN PÉREZ titular de la Cédula de Identidad Nº 18.690.684. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

______________________________	______________________________
TUTOR	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios Todopoderoso que nos da el aliento de vida y las fuerzas para alcanzar cada uno de nuestros sueños y metas propuestas.

Agradecimientos

A **Dios** primeramente, por los Dones dado para alcanzar esta meta.

A **mi Madre y mis Tías**, que fueron las que me apoyaron incondicionalmente en este largo caminar y en especial a mi Tía Otilia Rodríguez que de una forma u otra es parte de esta meta alcanzada.

A **mis Hermanas y Hermanos**, Por todo el apoyo brindado y en especial a Martha que siempre ha estado allí apoyándome en los momentos difíciles y celebrando en cada uno de mis triunfos.

A los **Sacerdotes**, Carlos y Eduardo por orientarme y guiarme por el camino del bien.

A mi **Novia y Amiga** Glennimar que siempre a estado allí apoyándome en todo.

A **mis grandes Amigos y Compañeros de Estudio**, Joelviz, Elvis, Alba, Aura, Datsy, Marcos, Jeferson, Glennimar , Andrei, Elismar ,Rosa ,Yenny, Fernando, Francisco, Kissy, Javier, Alexander, Emily y a todos aquellos que de una forma u otra ayudaron ha alcanzar está primera meta establecida.

A mi tutora, **Belkys López**, y al profesor **Carlos Lameda** por su asesoría y dirección en el cumplimiento de este proyecto, gracias por su tiempo y su paciencia, por su disposición incondicional y permanente para aclarar mis dudas, además por su confianza, sinceridad y palabras de aliento y por todo ese tiempo que me dedicaron.

A cada uno de los **profesores** que formaron parte de mi formación intelectual; Además por sus grandes consejos que hoy en día hace de mi una mejor persona tanto Intelectual como Moral.

A los muchachos que integran el grupo de **AsoEM** y **Unidad** que me brindaron todo su apoyo.

A cada una de las personas que han formado parte de este logro expreso mi gratitud.

"Medidas de Inclusión entre Conjuntos Difusos: Fundamentos y Ejemplos de Aplicaciones "

Resumen

A través del presente trabajo se presentarán los fundamentos requeridos para el desarrollo de las medidas de inclusión entre conjuntos difusos, entre ellos un análisis sobre relaciones de inclusión (contención), algunas de sus propiedades y se mostrará la utilidad del desarrollo teórico por medio de sus aplicaciones. Se estudiarán las medidas de inclusión entre conjuntos difusos. Así mismo, se mostrará la utilidad del desarrollo teórico a través de su aplicación en problemas prácticos.

Palabras clave: conjuntos difusos, medidas de inclusión, lógica difusa.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN.

La comparación y descripciones de objetos es una operación habitual en muchos dominios: psicología, analogía, ciencias físicas, procesador de imágenes, clustering, razonamiento deductivo, razonamientos basados en casos entres otros campos. Estas comparaciones frecuentemente se basan en medidas que intentan determinar qué puntos tienen en común ambos objetos y en cuales difieren.
La medida de comparación tiene varias formas dependiendo del propósito de su utilización. Se considera varios tipos de medida de comparación.

- Medidas de satisfacción: La satisfacción se corresponde a una situación en la cual consideramos un objeto de referencia y una clase para decidir si el nuevo objeto es compatible o satisface la referencia.

- Medidas de inclusión: También se ocupa de situación en donde en donde tenemos los objetos de referencias, en este caso, medimos si los puntos en común entre A y B son importante a A.

- Medidas de semejanzas: Se utiliza para realizar una comparación entre las descripciones de dos objetos del mismo nivel de generalidad para decidir si tiene muchas características comunes.

- Medidas de desemejanza: La desemejanza entre objetos evalúa hasta qué punto son diferentes.

Se propone estudiar la aplicación de operaciones de inclusión, intersección y diferencia para las medidas que permitan comparar conjuntos difusos tales como las presentadas por Bouchon-Meunier, Rifqi y otros [2], [14], [15]. Así mismo, se mostrará la utilidad del desarrollo teórico a través de su aplicación en problemas prácticos

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES.

La matemática de los conjuntos difusos trabaja con conjuntos que no tienen límites perfectamente definidos, es decir, la transición entre la pertenencia y no pertenencia de una variable a un conjunto es gradual. Estos conjuntos se caracterizan por las funciones de pertenencia, que dan flexibilidad a la moderación utilizando expresiones lingüísticas, tales como mucho, poco, leve, severo, escaso, suficiente, caliente, frío, joven, viejo, etc. Surgió de la necesidad de solucionar problemas complejos con información imprecisa, para los cuales la matemática y lógica tradicionales no son suficientes. La lógica difusa es un lenguaje que permite trasladar sentencias sofisticadas del lenguaje natural a un formalismo matemático.
La lógica difusa fue inventada en 1965 por Lofti Zadeh, guiado por el principio de que las matemáticas pueden ser usadas para encadenar el lenguaje con la inteligencia humana. Algunos conceptos pueden ser mejor definidos con palabras, los conjuntos difusos ayudan a construir mejores modelos de la realidad.

§1.1. Conjuntos Difusos

Sea X una colección de objetos denotados genéricamente por x.

Definición 1.1. *Conjunto difuso.*
Es el que expresa el grado de pertenencia al conjunto que tiene cada uno de los elementos. El conjunto difuso A en X puede definirse como el conjunto de los pares

ordenados:

$$A = \{(x, \mu_A(x))/x \in X\}$$

donde μ_x es llamada la función de pertenecia para el conjunto difuso A.

Ejemplo 1.1.

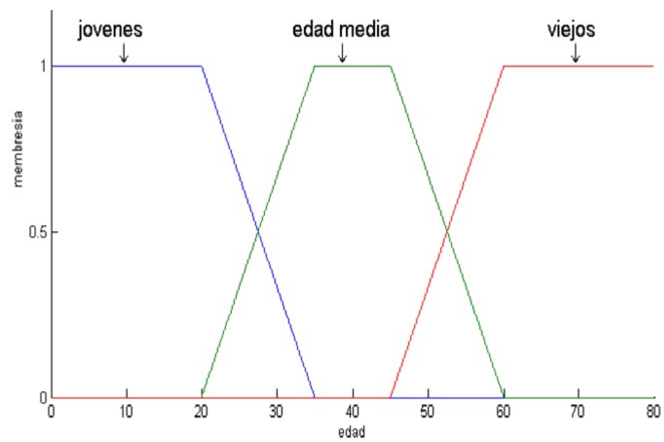


FIGURA 1.1: FUNCIÓN DE PERTENECIA

DEFINICIÓN 1.2. *Funciones de pertenencia dan para cada elemento de X un grado de pertenecía al conjunto A. El valor de esta función está en el intervalo entre 0 y 1, siendo 1 el valor para máxima pertenencia. Si el valor de esta función se restringiera solamente a 0 y 1, se tendría un conjunto clásico, o no-difuso. Esta función no es única. En general, es preferible usar funciones simples, debido a que simplifican muchos cálculos y no pierden exactitud, debido a que precisamente se está definiendo un concepto difuso.*

§1.1.1. Tipos de Funciones de Pertenencia

Las funciones utilizadas más frecuentemente son:

- Triangular: Definido por sus límites inferior a y superior b, y el valor modal m, tal que a<m<b.

$$A(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leqslant a; \\ (x-a)/(m-a), & si\ x \in (a, m]; \\ (b-a)/(b-m), & si\ x \in (m, b); \\ 0, & si\ x \geqslant b. \end{cases}$$

También puede representarse así:

$$A(x; a, m, b) = \text{máx}\{\text{mín}\{(x-a)/(m-a), (b-x)/(b-m)\}, 0\}$$

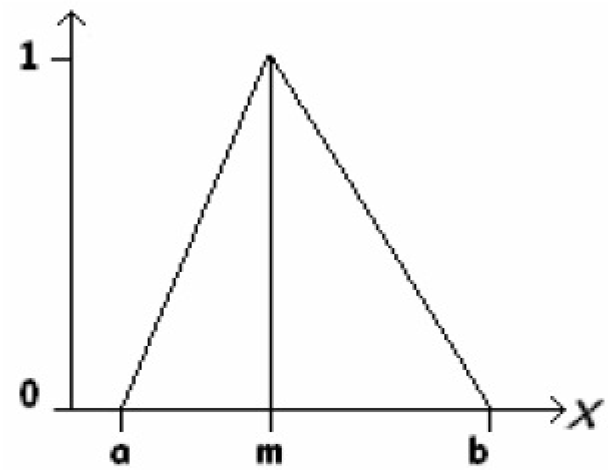


FIGURA 1.2: FUNCIÓN DE PERTENECIA TRIANGULAR

- Función Gaussiana: Definida por su valor medio m y el valor $k > 0$.

$$A(x) = e^{k(x-m)^2}$$

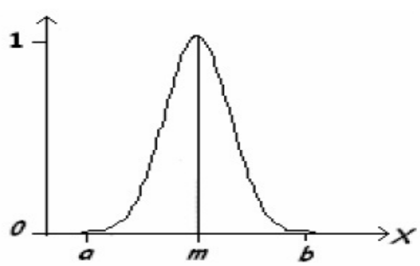


FIGURA 1.3: FUNCIÓN DE PERTENECÍA GAUSSIANA

- Función S: Definida por sus límites inferior a y superior b, y el valor m, o punto de inflexión tal que $a < m < b$.

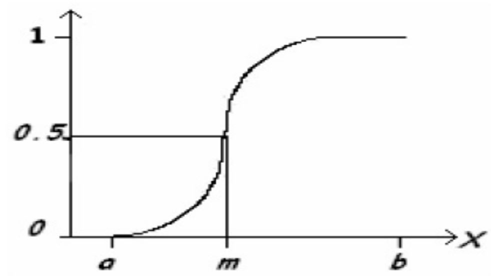


FIGURA 1.4: FUNCIÓN DE PERTENECIA S

- Función Trapezoidal: Definida por sus límites inferior a y superior d, y los límites de su soporte, b y c, inferior y superior respectivamente.

$$A(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leqslant a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & si\ x \in (a,b]; \\ 1, & si\ x \in (b,c]; \\ \frac{d-x}{b-c}, & si\ x \in (c,d]; \\ 0, & si\ x > d. \end{cases}$$

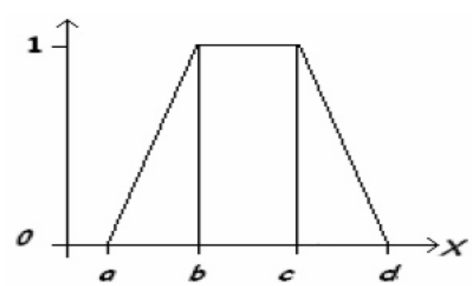


FIGURA 1.5: FUNCIÓN DE PERTENECÍA TRAPEZOIDAL

- Función Pseudo-Exponencial: Definida por su valor medio m y el valor $k > 1$.

$$A(x) = \frac{1}{1 + k(x-m)^2}$$

DEFINICIÓN 1.3. *Un conjunto cantoriano se describe de modo intuitivo como una colección de objetos, los cuales poseen un criterio de pertenecía que nos permiten*

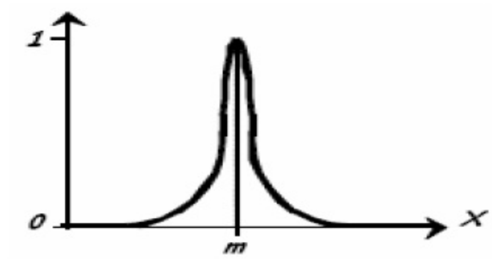


FIGURA 1.6: FUNCIÓN DE PERTENECÍA PSEUDO-EXPONENCIAL

decidir si un objeto pertenece o no al conjunto.
El universo de discurso lo designaremos por $X = \{x\}$ *y* A,B *los subconjuntos de* X.

§1.2. Operaciones con Conjutos Difusos.

DEFINICIÓN 1.4. *Consideremos los conjuntos difusos* A *y* B . *La intersección de estos dos conjuntos es un conjunto difuso* C *denotado por*
$C = A \cap B$. *La función de pertenecía de este nuevo conjunto difuso* C *está dada por:*

$$\mu_C(x) = \text{mín}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \text{ para } x \in X.$$

DEFINICIÓN 1.5. *Consideremos los conjuntos difusos* A *y* B . *La unión de estos dos conjuntos es un conjunto difuso* C *denotado por* $C = A \cup B$. *La función de pertenecía de este nuevo conjunto difuso* C *está dada por:*

$$\mu_C(x) = \text{máx}((\mu_A(x), \mu_B(x))) \text{ para } x \in X.$$

DEFINICIÓN 1.6. *Consideremos el conjunto difuso* A, *su complemento, denotado por* A^c *es también un conjunto difuso, caracterizado por la función de pertenecía:*

$$\mu_A^c(x) = 1 - \mu_A(x) \text{ para } x \in X.$$

DEFINICIÓN 1.7. *Consideremos los conjuntos difusos* A *y* B. *la diferencia de* A *respecto a* B *es también un conjunto difuso dado por:*

$$A - B = A \cap B^c$$

Usando la función de pertenecía se tiene:

$$\mu_{A-B}(x) = \text{mín}(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$$

para $x \in X$.

DEFINICIÓN 1.8 (Suma disyuntiva)**.** *Consideremos los conjuntos difusos A y B, la suma disyuntiva de estos conjuntos es también un conjunto difuso dado por :*

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Ejemplo 1.2 (Aplicación sencilla)**.** *Supongamos que una persona cualquiera desea ir a tomar una cerveza a un local tradicional, que la cerveza sea barata y que el local quede cerca de su casa. Él dispone de 4 lugares conocidos y además tiene sed.*
Aquí podemos distinguir tres conjuntos difusos:

1. *Cerveza barata.*
2. *Local tradicional.*
3. *Cercanía a su hogar.*

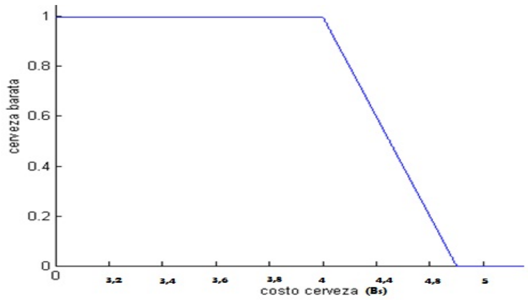
Para él:

1. *Una cerveza barata es una que cueste alrededor de 4 Bs o menos.*
2. *Un local tradicional es un local que al menos tenga 5 años funcionando.*
3. *Que quede cerca de su casa es que no quede a más de 10 manzanas.*

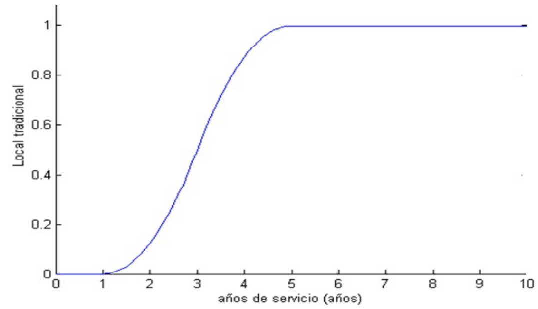
Según las preferencias del individuo se pueden construir los siguientes conjuntos difusos:

	Precio Cerveza (Bs)	Años de servicios	Cuadras
Local 1	4,4	3	3
Local 2	3,8	7	12
Local 3	4	4	9
Local 4	4,25	5	10

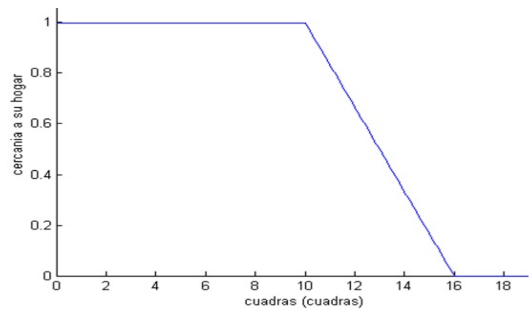
Como se deben intersectar los conjuntos, según la solución clásica el local debe estar a lo mas a 10 manzanas, tener a lo menos 5 años de servicio y que la cerveza cueste a lo más 4 Bs.



(a) Conjunto de Cerveza barata



(b) Conjunto de local tradicional



(c) conjunto de cercanía

Veamos primero cual seria la solución clásica.

	Precio Cerveza (Bs)	*Años de servicios*	*Cuadras*	*Solución clásica*
Local 1	*0*	*0*	*1*	*0*
Local 2	*1*	*1*	*0*	*0*
Local 3	*1*	*0*	*1*	*0*
Local 4	*0*	*1*	*1*	*0*

Mediante la solución clásica el individuo se hubiera quedado en su hogar, lo cual no es "consistente" con la hipótesis "Tiene Sed".
Ahora Observemos la solución Difusa.

	Precio Cerveza (Bs)	*Años de servicios*	*Cuadras*	*Solución Difusa*
Local 1	*0,2*	*0,5*	*1*	*0,2*
Local 2	*1*	*1*	*0,6667*	*0,6667*
Local 3	*1*	*0,8*	*1*	*0,8*
Local 4	*0,5*	*1*	*1*	*0,5*

Mediante la solución difusa deducimos que el individuo posiblemente hubiera ido al Local 3 a disfrutar su cerveza.

DEFINICIÓN 1.9. *T-norma*
Un operador T-norma es una función de dos puntos $T(.,.)$ satisfaciendo:

- $T(0,0) = 0,\ T(a,1) = T(1,a) = a$ *(acotamiento)*
- $T(a,b) \leqslant T(c,d)$ *si* $a \leqslant c$ *y* $b \leqslant d$ *(monotona)*
- $T(a,b) = T(b,a)$ *(commutatividad)*
- $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$ *(asociatividad)*

Ejemplo 1.3. *Los operadores T-norma más usados son:*

- $T_{\text{mín}}(a,b) = \text{mín}(a,b) = a \wedge b$
- *Producto Algebraico:* $T(a,b) = ab$.
- *Producto acotado:* $T(a,b) = \text{máx}(0, a+b-1) = 0 \vee (a+b-1)$.
- *Producto drástico:* $T(a,b) = \begin{cases} a, & si\ b = 1; \\ b, & si\ a = 1; \\ 0, & si\ a, b \leqslant 1. \end{cases}$

DEFINICIÓN 1.10. *T-conorma (S-norma)*
Un operador T-conorma (S-norma) es una función de dos puntos $S(.,.)$ satisfaciendo:

- $S(1,1) = 1,\ S(a,0) = T(0,a) = a$ *(acotamiento)*
- $S(a,b) \leqslant S(c,d)$ *si* $a \leqslant c$ *y* $b \leqslant d$ *(monotona)*
- $S(a,b) = S(b,a)$ *(commutatividad)*
- $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$ *(asociatividad)*

Ejemplo 1.4. *Los operadores T-conorma más usados son:*

- $S(a,b) = \text{máx}(a,b) = a \vee b$

- *Suma Algebraica:* $S(a,b) = a + b - ab$.
- *Suma acotada :* $S(a,b) = \text{mín}(1, a+b) = \ 1 \ \wedge \ (a+b)$.
- *Producto drástico:*$T(a,b) = \begin{cases} a, & si \ b = 0; \\ b, & si \ a = 0; \\ 1, & si \ a, b > 0. \end{cases}$

§1.3. Características de un Conjunto Difuso

DEFINICIÓN 1.11. *La altura de un Conjunto Difuso "height"*
El valor más grande de su función de pertenecía:

$$\sup_{x \ X} \mu(x)$$

DEFINICIÓN 1.12. *Conjunto Difuso Normalizado "normal"*
Si existe algún elemento $x \in X$, tal que pertenece al conjunto difuso totalmente, es decir, con grado 1. O también, que:

$$Altura(A) = 1$$

.

DEFINICIÓN 1.13. *Soporte de un Conjunto Difuso "support"*
Elementos de X que pertenecen a A con grado mayor a 0:

$$Soporte(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}$$

.

DEFINICIÓN 1.14. *El núcleo de un conjunto difuso (core)*
El núcleo de un conjunto difuso A es el conjunto de todos los puntos x en X tales que $\mu_A(x) = 1$. Esto es,

$$Nucleo(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\}$$

.

DEFINICIÓN 1.15. *Puntos de cruce Çrossover"*
Son los puntos del conjunto difuso para los cuales $\mu_A(x) = 0{,}5$. Esto es,

$$Cruce(A) = \{\mu_A(x) = 0, 5\}$$

DEFINICIÓN 1.16. *Conjunto difuso simple "Singleton"*
Es el conjunto difuso para el cual el soporte es solamente un punto, en el cual el valor de la función de pertenecía es 1.

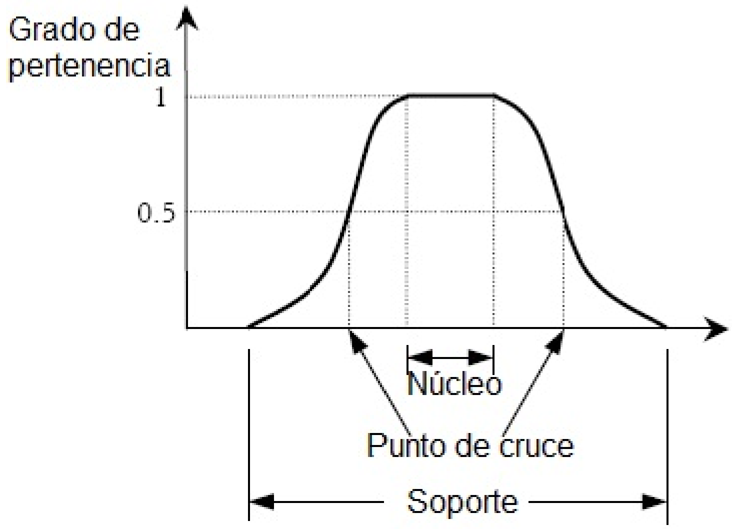


FIGURA 1.7: ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE UN CONJUNTO DIFUSO

§1.4. Relaciones Difusas

DEFINICIÓN 1.17. *Consideremos dos conjuntos en el universo de discurso, el producto cartesiano $A \times B$ y el conjunto L=[0,1]. Se llama relación difusa R de A en B al par (R, μ_R), donde R es un subconjunto de $A \times B$ y μ_R es una función de pertenecía definida sobre $A \times B$ a valores en L.*

NOTACIÓN 1.1. xRy

En esta notación x es un elemento de A, y un elemento de B, $\mu(x, y)$ representa la intesidad del grado de la relación.

§1.4.1. Operaciones con relaciones difusas

- La unión R y S denotada por $R \cup S$ es la relación difusa :

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \text{máx}[\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)] = \mu_R(x, y) \vee \mu_S(x, y)$$

- La intersección R y S denotada por $R \cap S$ es la relación difusa:

$$\mu_{R\cap S}(x,y) = \text{mín}[\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)] = \mu_R(x,y) \wedge \mu_S(x,y)$$

DEFINICIÓN 1.18.

- Es reflexiva si y solo si $R(x,x) = 1\ \forall x \in X$.
- Es simétrica si y solo si cuando $R(x,y) = R(y,x)\ \forall x, y \in X$.
- Transitiva si y solo si $T(R(x,y), R(x,z)) \leqslant R(x,z)$

§1.4.2. Composición de relaciones difusas

Consideremos A,B y C tres conjuntos $R \in A \times B$, $R_1 \in B \times C$. La composición de R y R_1 es también una relación difusa definida así:

$$\mu_{R_1 \circ R}(x,y) = \text{máx}[\text{mín}((\mu_R(x,y), \mu_{R_1}(y,z))]$$

DEFINICIÓN 1.19. *α - cortaduras*
Dado α en [0,1]. Una α - cortadura de un conjunto difuso A es un conjunto nítido A^α constituido por los puntos del conjunto de discurso X, que tienen un grado de pertenecía mayor o igual a α.

Tipos de α - cortaduras:

- α - cortaduras fuerte

$$A^{\geqslant\alpha} = \{x \in X/\mu_A(x) \geqslant \alpha\}$$

- Simplemente α - cortaduras

$$A^{>\alpha} = \{x \in X/\mu_A(x) > \alpha\}$$

TEOREMA 1.1 (Primer Teorema de Descomposición). *Para todo conjunto difuso A: $A \in P(x)$ (P(X) representa el conjunto de todos los posibles subconjuntos de X.) se tiene que:*
$A = \cup_{\alpha\in[0,1]} A_{\geqslant\alpha}$; donde $A_{\geqslant\alpha} = \alpha A^{\geqslant\alpha}$

TEOREMA 1.2 (Segundo Teorema de Descomposición). *Para todo conjunto difuso A: A $\varepsilon P(x)$ se tiene que:*
$A = \cup_{\alpha\varepsilon[0,1]} A_{>\alpha}$

DEFINICIÓN 1.20. *Convexidad*
Dado un subconjunto A en $\mathbb{R}^n$. A es un un conjunto convexo si y solo si para todo par (r,s) de A y todo $\alpha \in$ [0,1],

$$t = \alpha r + (1-\alpha)s \in A \tag{1.1}$$

también se dice que un conjunto A en $\mathbb{R}^n$ es convexo si para cada par de puntos r y s en A, todo punto localizado en el segmento de la recta cuyo extremos son r y s esta también en A.

DEFINICIÓN 1.21. *Un conjunto difuso A de $\mathbb{R}^n$ se dice convexo si y solo si cada una de las α - cortaduras es también un conjunto difuso convexo.*

Un conjunto difuso A de $\mathbb{R}$ se dice convexo si y solo si

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant min[A(x_1, A_2)] \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad y \quad \alpha \in [0,1] \tag{1.2}$$

DEFINICIÓN 1.22. *Cardinalidad*
Sea X un conjunto finito, la cardinalidad $|A|$ de un conjunto difuso A sobre X es definido como:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \tag{1.3}$$

DEFINICIÓN 1.23. *Distancia entre conjuntos*

$$d(A,B) == \sum_{x \in X} \mid \mu_A(x) - \mu_B(x) \mid \tag{1.4}$$

DEFINICIÓN 1.24. *Número Difuso*
Un número difuso A es una cantidad difusa $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

- *Convexo.*
- *Normalizado.*

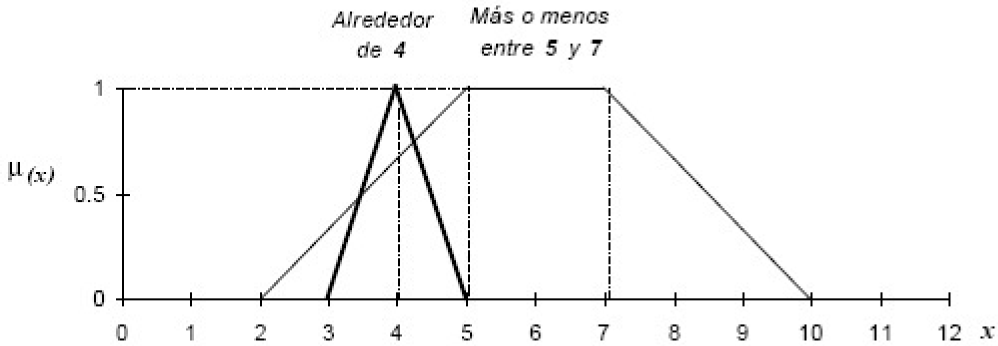


FIGURA 1.8: NÚMERO DIFUSO TRIANGULAR ALREDEDOR DE 4 Y EL NÚMERO DIFUSO TRAPEZOIDAL(INTERVALO DIFUSO) MÁS O MENOS 5 Y 7.

DEFINICIÓN 1.25. *Variables Lingüísticas.*
Si una variable puede tomar las palabras en un lenguaje natural como sus valores, ésta es llamada variable lingüística, donde las palabras son caracterizadas por conjuntos difusos definidos en el universo de discurso en el cual se define la variable.

DEFINICIÓN 1.26. *Una variable lingüística es caracterizada por (X,T,U,M), donde:*

- *X es el nombre de la variable lingüística.*
- *T es el conjunto de valores lingüísticos que X puede tomar.*
- *U es el dominio físico real en el cual la variable lingüística X toma sus valores cuantitativos (nítidos).*
- *M es una regla semántica que relaciona cada valor lingüístico en T con un conjunto difuso en U.*

CAPÍTULO 2

INCLUSIONES E IGUALDADES DE CONJUNTOS DIFUSOS.

Definición 2.1. *La inclusión en el sentido de Zadeh(1965)*
A se dice que es incluido en B (A⊆ B) si y sólo si

$$\forall x \in X, \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x) \tag{2.1}$$

Cuando la desigualdad es estricta, la inclusión se dice que es estricta y se denota A ⊂ B. ⊆ y ⊂ son transitivas. ⊆ Es una relación de orden en $\widetilde{\wp}(X)$; Sin embargo, no es un orden lineal.

Definición 2.2. *Igualdad (equality)*

Dos conjuntos difusos, definidos en el mismo Universo, son iguales si tienen la misma función de pertenencia:

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$$

§2.1. Otras inclusiones e igualdades

La definición Zadeh de inclusión e igualdad puede parecer muy estricta, sobre todo porque los valores precisos de miembros son, por esencia, fuera de su alcance.

Definición 2.3. *Inclusión débil e Igualdad*
Una primera manera de suavizar inclusión de conjuntos difusos está dada por las

definiciones:
x α-pertenece a A si y sólo si $x \in A_\alpha$;
A es débilmente incluido en B, denotado $A \prec_\alpha B$, tan pronto como todos los elementos de X α-pertenecen a $\overline{A}$ o a B, matemáticamente,

$$A \prec_\alpha B \Leftrightarrow x \in (\overline{A} \cup B)_\alpha, \qquad \forall x \in X. \tag{2.2}$$

Lo que equivale a

$$\forall x \in X, \qquad \text{máx}(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)) \geqslant \alpha.$$

Prácticamente, $A \prec_\alpha B$ no es cierto, tan pronto como

$$\exists x \in X, \quad \mu_A > 1 - \alpha \ \wedge \ \mu_B(x) \leqslant \alpha.$$

Como por ejemplo $\prec_\alpha$ es transitiva sólo para $\alpha > \frac{1}{2}$. La transitividad para $\alpha = \frac{1}{2}$ se puede recuperar modificando ligeramente la condición anterior

$$A \prec_\alpha \frac{1}{2} B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X, \ \ \mu_A(x) \leqslant \frac{1}{2} \quad \vee \quad \mu_B(x) > \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Podemos querer imponer la condición de inclusión de Zadeh ($\subseteq$) es un caso particular de $\prec_\alpha$, es decir,

$$\textit{Si} \quad A \subseteq B \quad , \quad \textit{Entonces} \quad A \prec_\alpha B.$$

Esto es sólo para $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la solo transitiva $\prec_\alpha$ consistente con $\subseteq$ es $\prec \frac{1}{2}$ (abreviado $\prec$), siempre que se adopten las modificaciones menores introducidas anteriormente.
Nótese bien: Si $\alpha > \frac{1}{2}$, la inclusión de Zadeh no implica $\prec_\alpha$, porque los elementos $x \in X$ tales que $1 - \alpha < \mu_A(x) < \mu_B(x) \leqslant \alpha$ no pertenece a $(\overline{A} \cup B)_\alpha$ (ver 2.2).

El conjunto de igualdades $\leftrightsquigarrow$ asociados con $\prec$ se define como $A \leftrightsquigarrow B$ si y sólo si $A \prec B$ y $B \prec A$, es decir,

$$A \leftrightsquigarrow B \ \Leftrightarrow \ \forall x \in X, \ \text{mín}[\ \text{máx}(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)), \text{máx}(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) \ ] \ \geqslant \ \frac{1}{2}.$$

Lo que equivale a

$$\forall x \in X, \ \text{máx}[\ \text{mín}(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{mín}(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) \ ] \ \geqslant \frac{1}{2}.$$

La igualdad débil $\leftrightsquigarrow$, es interpretada como sigue. Ambos valores de pertenecia $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$ son mayores o iguales a $\frac{1}{2}$, o ambos menor o igual a $\frac{1}{2}$. Esta igualdad débil no es transitiva. La falta de transitividad no contradice nuestra intuición sobre la inclusión débil o igualdad. Sin embargo,para recuperar la transitividad de $\leftrightsquigarrow$, podemos usar 2.3 para definir la igualdad.
Por último, $\leftrightsquigarrow$ está relacionada con la diferencia simétrica $\triangle$ a través de

$$A \leftrightsquigarrow B \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X,\; \mu_{A\triangle B}(x) \;<\; \frac{1}{2}.$$

Del mismo modo, la otra diferencia simétrica, está relacionado con conjunto de igualdad de Zadeh (=):

$$A \;=\; B \quad\Leftrightarrow\quad A\nabla B \;= \emptyset$$

§2.2. ε-Inclusiones y ε-Igualdad

Otra manera de definir igualdades menos fuertes o inclusiones es el uso de algunas medidas escalares de S similitud o grados de inclusión I entre dos conjuntos difusos A y B.

$$A \subset_\varepsilon B \quad\Leftrightarrow\quad I(A,B) \;\geqslant\; \varepsilon$$
$$A =_\varepsilon\; B \quad\Leftrightarrow\quad S(A,B) \;\geqslant\; \varepsilon.$$

$\subset_\varepsilon$ y $=_\varepsilon$, respectivamente, denotan la ε-inclusión y ε-igualdad. De acuerdo con las definiciones de I y S, $\subset_1$ y $=_1$ puede coincidir con $\subseteq$ y $=$, respectivamente. Debemos al menos establecer las siguientes condiciones. Si A $\subseteq$ B ,entonces A $\subset_1$ B; si A $=$ B, entonces A $=_l$ B. Por otra parte, S debe ser simétrica.

Existen diferente grados de inclusión y medidas de similitud en la la literatura.

DEFINICIÓN 2.4. *Grados de inclusión*
Basado en la intersección y cardinalidad

$$I(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A|} \tag{2.4}$$

También se puede definir grado de inclusión de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 2.5. *Grados de inclusión*
Para medir el grado en el que un conjunto difuso está incluido en otro (Kosko, 1992):

$$S(A,B) = \frac{1}{Card(A)}\{Card(A) - \sum_{x\in X} \text{máx}\{0, A(x) - B(x)\}\} \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.1.

- $A = 0{,}2/1 + 0{,}3/2 + 0{,}8/3 + 1/4 + 0{,}8/5 \Rightarrow Card(A) = 3{,}1$;
- $B = 0{,}2/2 + 0{,}3/3 + 0{,}8/4 + 1/5 + 0{,}1/6 \Rightarrow Card(B) = 2{,}4$;
- $S(A,B) = \frac{1}{3{,}1}\{3{,}1 - \{0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}2 + 0 + 0\}\} = \frac{2{,}1}{3{,}1} = 0{,}68$;
- $S(B,A) = \frac{1}{2{,}4}\{2{,}4 - \{0 + 0 + 0 + 0 + 0{,}2 + 0{,}1\}\} = \frac{2{,}1}{2{,}4} = 0{,}88$;

Existe otras maneras de calcular el grado de inclusión entre dos conjunto difusos; como lo es usando implicaciones difusas [8] tales como: implicación de Dienes, implicación Gödel, implicación de Lukasiewicz entres otras implicaciones.

Ejemplo 2.2.

Calcular el grado de inclusión del ejemplo anterior usando implicación de Dienes[8].

DEFINICIÓN 2.6. *Implicación de Dienes*

$$d(A \subseteq B) = \min_{x\in X} \text{máx}(1 - \mu_B, \mu_A)$$

- $A = 0{,}2/1 + 0{,}3/2 + 0{,}8/3 + 1/4 + 0{,}8/5$;
- $B = 0{,}2/2 + 0{,}3/3 + 0{,}8/4 + 1/5 + 0{,}1/6$

$$\begin{aligned} d(A \subseteq B) = \min_{x\in X}(0{,}8, 0{,}8, 1, 0{,}8, 0{,}9) &= 0{,}8 \\ \therefore\ d(A \subseteq B) &= 0{,}8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(B \subseteq A) = \min_{x\in X}(0{,}8, 0{,}7, 0{,}3, 0{,}8, 1) &= 0{,}3 \\ \therefore d(B \subseteq A) &= 0{,}3 \end{aligned}$$

NOTACIÓN 2.1.

Para cualquier conjunto Ω de elementos, sea $F(\Omega)$ el conjunto de subconjuntos difusos de Ω ,f_A la función de pertenencia de cualquier descripción A en $F(\Omega)$ y $sup(A) = \{x \in \Omega / f_A \neq 0\}$ su soporte. La comparación de dos conjuntos difusos A y B definidos sobre un universo dado toma en cuenta los elementos del universo que pertenecen, al menos en parte, a cada uno de ellos. Dependiendo de la situación, se prefiere considerar los elementos que pertenecen a A y no a B, a B y no a A, o a ambos. Se toma también en consideración el grado de pertenencia de estos elementos para A y B y, finalmente, el peso de la parte del universo común para A y B o relevante a sólo uno de ellos. Usamos la definición clásica de intersección:$f_{A\cap B} = min\{f_A, f_B\}$para describir los elementos que pertenecen A y B. Se supone que se han dado medios para evaluar el peso de los elementos del universo caracterizado por un conjunto difuso a través de una medida difusa.

DEFINICIÓN 2.7. *Una medida difusa M es una aplicación que lleva elementos de* $F(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ *tal que, para cada A y B en* $F(\Omega)$*:*

$$AM1 \;:\; M(\emptyset) = 0 \tag{2.6}$$

$$AM2 \;:\; Si \;\; B \subseteq A, \; entonces \; M(B) \leqslant M(A). \tag{2.7}$$

Si los valores de M son restringidos entre [0,1], M es una medida difusa introducida por M. Sugeno [6].

Los ejemplos siguientes de medidas difusa serán usados en las medidas de comparación:

$$M_1(A) = \int_\Omega f_A(x)dx \tag{2.8}$$

$$M_2(A) = sup_{x\in\Omega} f_A(x) \tag{2.9}$$

$$M_3(A) = \sum_{count}(A) = \sum_{x\in\Omega} f_A(x) \;\; si \; es \; finito \tag{2.10}$$

$$M_4(A) = |sup(A)| \;\; si \; |.| \;\; denota \; una \; mtrica \; sobre \; \Omega \tag{2.11}$$

$$M_5(A) = \sum_{\Omega} f_A(x)^r \; si \; es \; finito \; y \; r \; entero \tag{2.12}$$

Una medida difusa nos permite evaluar el peso de la parte del universo común de A y B si consideramos $M(A \cap B)$ *, por ejemplo. La identificación de los elementos del* *universo que pertenecen en A y no en B, o a la inversa, es alcanzada mediante una operación llamada diferencia:*

DEFINICIÓN 2.8. *Una operación en $F(\Omega)$ es llamada una diferencia y denotada por $-$, si satisface para cada A y B en $F(\Omega)$:*

$$D1 \;:\; Si\ A \subseteq B,\ entonces\ A - B = \emptyset$$

$$D2 \;:\; A - B \subseteq A - (A \cap B)$$

$$D3 \;:\; B - A\ \ es\ monótona\ con\ respecto\ a\ B : B \subseteq B^{'}\ implica\ B - A \subseteq B^{'} - A$$

Ejemplo 2.3.

$$f_{A-_1 B}(x) = max(0, f_A(x) - f_B(x)) \tag{2.13}$$

$$f_{A-_2 B}(x) = \begin{cases} f_A(x), & si\ f_B(x) = 0; \\ 0, & si\ f_B(x) > 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

CAPÍTULO 3

MEDIDA DE COMPARACIÓN ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS.

§3.1. Comparación entre conjuntos difusos

La comparación de objetos con descripciones imperfectas, afectadas con imprecisiones e inexactitudes puede ser tratada utilizando conjuntos difusos para representar tales descripciones. Conjuntos nítido o cantoriano que representan las descripciones exactas y ciertas de objetos serán considerados como los casos particulares de conjuntos difusos.

§3.1.1. Medidas de comparación

La forma más simple de medida de comparación entre A y B toma en cuenta A ∩ B , B - A y A - B.

Definición 3.1. *Una medida de comparación sobre Ω es una aplicación que llevan elementos de $S : F(\Omega) \times F(\Omega) \to [0, 1]$ tal que*

$$S(A, B) = G_S(A \cap B, B - A, A - B)$$

para dar una función $G_S : F(\Omega) \times F(\Omega) \times F(\Omega) \;\to\; [0, 1]$

Según las propiedades de G_S , obtenemos varias medidas de la proximidad de dos conjuntos difusos. Dado que el orden sobre $F(\Omega)$ inducido por la inclusión de conjuntos difusos no es total, una medida de similitud es insuficiente para comparar cualquier par de conjuntos difusos A y B. Además, puede ser útil comparar dos conjuntos difusos A y B más globalmente que solamente mediante este orden. Por ello, se introduce una medida menos restrictiva de similitud.

DEFINICIÓN 3.2. *Una M-medida de comparación sobre Ω es una aplicación que lleva elementos de $S : F(\Omega) \times F(\Omega) \rightarrow [0,1]$ tal que*

$$S(A,B) = F_S(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B))$$

para dar una aplicación $F_S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0,1]$ y una M medida difusa sobre Ω.

Se puede ver la diferencia entre una medida de comparación y una M- medida de comparación por el ejemplo dado en la figura 3.1 , donde se tiene que:

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \cap C \\ A -_1 B &= A -_1 C \\ M_1(A \cap D) &= M_1(A \cap B) = M_1(A \cap C) \\ M_1(A -_1 D) &= M_1(A -_1 B) \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} A \cap D &\neq A \cap B \\ A -_1 D &\neq A -_1 B \end{aligned}$$

Cualquier medida de comparación es una M medida de comparación. Por ejemplo, podemos considerar solamente el subconjunto nítido de Ω y M_1, M_3, M_4 o M_5 son equivalentes.

§3.2. Similitudes de conjuntos difusos

Para dos subconjuntos difusos A y B de Ω, puede que se quiera ver la semejanza entre ellos o sus diferencias. Ante todo, se enfocará el primer caso.

DEFINICIÓN 3.3. *Una M- medida de similitud en Ω es una M- medida de comparación en S que satisface:*

AF1 : $F_S(u, v, w)$ es no decreciente en u, no creciente en v y en w.

Donde $u = M(A \cap B)$, $v = M(B - A)$ y $w = M(A - B)$

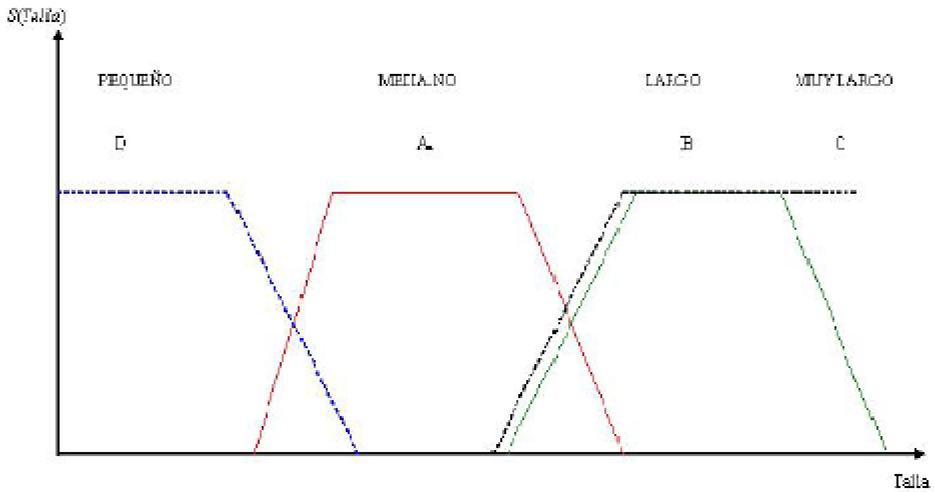


Figura 3.1: Diferencia entre medida de comparación y M-medida de comparación

Esta definición es justificada por la proposición siguiente que corresponde a exigencias naturales para una cantidad que evalúa hasta qué punto A y B son similares.

Proposición 3.1. *Una M- medida de similitud S satisface las siguientes propiedades:*

***P1**: M-Monotonicidad: Si $M(A \cap B) \geqslant M(A \cap B^{'})$ y $M(B - A) \leqslant M(B^{'} - A)$ y $M(A - B) \leqslant M(A - B^{'})$, entonces $S(A, B) \geqslant S(A, B^{'})$.*

***P2**: Monotonicidad: Si $A \cap B \supseteq A \cap B^{'}$ y $B - A \subseteq B^{'} - A$ y $A - B \subseteq A - B^{'}$, entonces $S(A, B) \geqslant S(A, B^{'})$.*

Demostración.

[**P1**]

$$S(A, B) = F_S(u, v, w) \;\; \text{Por la definición (3.3)}$$

Luego, por hipótesis tenemos que:

$$\begin{aligned} M(A \cap B) &\geqslant M(A \cap B^{'}) \\ M(B - A) &\leqslant M(B^{'} - A) \\ M(A - B) &\leqslant M(A - B^{'}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrl} \Rightarrow & S(A,B) \geqslant & F_S(M(A\cap B^{'}), M(B^{'}-A), M(A-B^{'})) = \quad S(A,B^{'}) \\ \Rightarrow & & S(A,B) \geqslant S(A,B^{'}) \qquad \blacksquare \end{array}$$

[P2]

$$S(A,B) \geqslant F_S(u,v,w) \qquad por\ la\ definicin\ (3{,}3)$$

Luego, por hipótesis tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} A\cap B & \supseteq & A\cap B^{'} \\ B-A & \subseteq & B^{'}-A \\ A-B & \subseteq & A-B^{'} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \Rightarrow & S(A,B) \geqslant & F_S(A\cap B^{'}, B^{'}-A, A-B^{'}) = \quad S(A,B^{'}) \\ \Rightarrow & & S(A,B) \geqslant S(A,B^{'}) \qquad \blacksquare \end{array}$$

Las propiedades siguientes son también las consecuencias directas de axioma AF1, los mencionamos porque ellos expresan la influencia de los tres elementos $M(A\cap B), M(A-B)$ y $M(B-A)$ de un modo más claro que el que puede visualizarse por ejemplo en la figura 3.1.

PROPOSICIÓN 3.2. *Una M-medida de similitud S satisface las siguientes propiedades adicionales:*

P3 *Información M-elemental izquierda interna: Si* $M(A\cap B) = M(A\cap B^{'})$ *y* $M(A-B) = M(A-B^{'})$*, entonces* $M(B-A) \leqslant M(B^{'}-A)$ *implica que* $S(A,B) \geqslant S(A,B^{'})$*.*

P4 *Información M- elemental derecha interna: Si* $M(A\cap B) = M(A\cap B^{'})$ *y* $M(B-A) = M(B^{'}-A)$*, entonces* $M(A-B) \leqslant M(A-B^{'})$ *implica que* $S(A,B) \geqslant S(A,B^{'})$*.*

P5 *Información M- elemental derecha externa: Si* $M(A-B) = M(A-B^{'})$ *y* $M(B-A) = M(B^{'}-A)$*, entonces* $M(A\cap B) \geqslant M(A\cap B^{'})$ *implica que* $S(A,B) \geqslant S(A,B^{'})$*.*

Estas tres propiedades pueden ser interpretadas de la siguiente forma:

- Para una cantidad dada de información común a las descripciones A y B y una cantidad dada de información contenida a A y no a B, mientras menor sea la información contenida en B y no a A, más se parecerán A y B.
- Para una cantidad dada de información contenida en A y no en B y una cantidad dada de información contenida en B y no en A, mientras mayor sea la información común a las descripciones A y B, más se parecerán A y B.

Las medidas de similitud son todavía muy generales y se pueden identificar tres clases importantes de tales medidas. En las dos primeras, A es considerado como una referencia y B es comparado con A. Así, estas medidas no son simétricas. En la tercera, A y B tienen la misma clase de estatus y ninguno de ellos es una referencia. Así, esta medida es simétrica.

§3.2.1. Medidas de satisfacción

Las primeras familia medidas de similitud a considerar evalúa la satisfacción de una descripción de referencia A de $F(\Omega)$ según una nueva descripción B definida como un subconjunto difuso de Ω [16].

DEFINICIÓN 3.4. *Una M- medida de satisfacción en Ω es una M- medida de similitud S tal que:*

AF2 $F_S(0, v, w) = 0$ para cualquier valor de v y w

AF3 $F_S(u, v, w)$ es independiente de w

AF4 $F_S(u, 0, .) = 1$ para cualquier valor de u $\neq 0$

Las propiedades dadas en la proposición 3.1 son todavía válidas para una M-medida satisfacción que también satisfacen las propiedades adicionales que tienen en cuenta su especificidad. La mayor parte de ellos son las versiones ampliadas de las propiedades requeridas por A. Tversky de su noción de semejanza.

PROPOSICIÓN 3.3. *Basado el orden de las descripciones deducidas de la inclusión de conjuntos difusos, las siguientes propiedades se mantienen para una M- medida de satisfacción:*

P6 Exclusividad: Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $S(A,B) = S(B,A) = 0$.

P7 Contención: Si $B \subseteq A, B \neq \emptyset$, entonces $S(A,B) = 1$.

P8 Independencia: Si $A \cap B = C \cap D, A' \cap B' = C' \cap D', B - A = B' - A'$ y $D - C = D' - C'$, entonces $S(A,B) \geqslant S(A',B')$ si y solo si $S(C,D) \geqslant S(C',D')$

P9 Independencia relativa: Si $A \cap B = A \cap D, A \cap B' = A \cap D', B - A = B' - A$ y $D - A = D' - A$, entonces $S(A,B) \geqslant S(A,B')$ si y solo si $S(A,D) \geqslant S(A,D')$.

Demostración.

P6 Sea $A \cap B = \emptyset$. Queremos probar que $S(A,B) = S(B,A) = 0$

En efecto,por definición 3.2.1 [AF2] tenemos que:

$$F_S(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B)) = F_S(0, M(B - A), M(A - B)) \qquad \text{Por hipótesis}$$

Además, como $B - A$ y $A - B$ son independientes, entonces tenemos que:

$$F_S(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B)) == 0$$

Luego por definición 3.1 tenemos que:

$$F_S(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B)) = S(A,B) = 0$$

Por otro lado tenemos que

$$F_S(M(B \cap A), M(A - B), M(B - A)) = F_S(0, M(A - B), M(B - A))$$

Además , como $M(A - B)$, $M(B - A)$ son independientes, entonces tenemos que:

$$F_S(M(B \cap A), M(A - B), M(B - A)) = 0$$

Aplicando la definición 3.1 tenemos que:

$$F_S(u, v, w) = S(B,A) = 0$$

Por tanto

$$S(A,B) = S(B,A) = 0. \qquad \blacksquare$$

[P7] Sea $B \subseteq A, B \neq \emptyset$, queremos probar que $S(A,B) = 1$.

En efecto; por definición 3.2.1 en la parte [AF4], tenemos que:

$$F_S(M(A \cap B), 0, M(A - B)) = 1$$

Aplicando la definición 3.1 tenemos que:

$$F_S(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B)) = S(A,B) = 1$$

Por tanto

$$S(A,B) = 1 \qquad \blacksquare$$

P8 Queremos Probar que $S(A,B) \geqslant S(A^{'},B^{'}) \Leftrightarrow S(C,D) \geqslant S(C^{'},D^{'})$

$$\begin{aligned} S(A,B) \geqslant S(A^{'},B^{'}) &\Leftrightarrow F_S(M(A \cap B), M(B - A)) \geqslant F_S(M(A^{'} \cap B^{'}), M(B^{'} - A^{'})) \\ &\Leftrightarrow F_S(M(C \cap D), M(B^{'} - A^{'})) \geqslant F_S(M(C^{'} \cap D^{'}), M(B^{'} - A^{'})) \\ &\Leftrightarrow M(C \cap D) \geqslant M(C^{'} \cap D^{'}) \end{aligned}$$

Por tanto: $M(D - C) = M(D^{'} - C^{'})$

De ahí, debido a [AF1], obtenemos que:

$$S(C,D) \geqslant S(C^{'},D^{'}) \qquad \blacksquare$$

P9 Queremos probar que $S(A,B) \geqslant S(A,B^{'}) \Leftrightarrow S(A,D) \geqslant S(A,D^{'})$

$$\begin{aligned} S(A,B) \geqslant S(A,B^{'}) &\Leftrightarrow F_S(M(A \cap B), M(B - A)) \geqslant F_S(M(A \cap B^{'}), M(B^{'} -)) \\ &\Leftrightarrow F_S(M(A \cap D), M(B^{'} - A)) \geqslant F_S(M(B \cap D^{'}), M(B^{'} - A)) \\ &\Leftrightarrow M(A \cap D) \geqslant M(B \cap D^{'}) \qquad \text{por hipótesis} \end{aligned}$$

Como $M(D - A) = M(D^{'} - A)$

de ahí, debido a [AF1], obtenemos que:

$$S(A,D) \geqslant S(A,D^{'}) \qquad \blacksquare$$

.

La propiedad de independencia puede ser interpretada así: es equivalente comparar la semejanza de un primer par (A,B) a la semejanza de un segundo par $(A^{'},B^{'})$ con la misma diferencia, o comparar la semejanza de cualquier otro primer par (C, D) a la semejanza de cualquier otro segundo (C', D'), también con la misma diferencia, en cuanto la información común al primer par es conservada, la información común al segundo par es conservada.

La independencia relativa es un caso particular de la independencia, en el caso donde C, A', C' son reemplazados por A. Esto quiere decir que, para un objeto dado de referencia A, es equivalente comparar la semejanza de cualquier objeto B con éste a la semejanza de cualquier objeto B' que tiene la misma diferencia con A, para una información dada común A y B, A y B'.
Notamos que el modelo dado por A. Tversky como

$$S(A, B) = f(A \cap B, B - A, A - B)$$

puede ser considerado como un M-medida de satisfacción S, con tal de que la $f(u, v, w)$ sea independiente de w y, otra vez, creciente en u y decreciente en v. Las propiedades de independencia e independencia relativa de S son compatibles con la independencia definida por A. Tversky.

PROPOSICIÓN 3.4. *Una M- medida de satisfacción S tiene las siguientes propiedades:*

P10 *Ejemplaridad: Si* $M(B - A) \geqslant M(A - B)$, *entonces* $S(A, B) \leqslant S(B, A)$.

P11 *Información M- elemental interna: Si* $M(A \cap B) = M(A \cap B')$, *entonces* $M(B - A) \leqslant M(B' - A)$ *implica que* $S(A, B) \geqslant S(A, B')$.

P12 *Información M- elemental externa: Si* $M(B - A) = M(B' - A)$, *entonces* $M(A \cap B) \geqslant M(A \cap B')$ *implica que* $S(A, B) \geqslant S(A, B')$.

P13 *Solubilidad: Para algún A, B,* B' *tal que* $M(A \cap B) > M(A \cap B')$ *y* $M(B - A) < M(B' - A)$, *existe un par* (P, Q) *tales que* $M(P \cap Q) = M(A \cap B)$, $M(Q - P) = M(B' - A)$ *y* $S(A, B) > S(P, Q) > S(A, B')$ *si* $F_S(u, v, .)$ *es estrictamente creciente en u y estrictamente decreciente en v.*

Demostración.

P10 Supongamos que $M(B - A) \geqslant M(A - B)$ entonces.

$$\begin{aligned} S(A,B) &= F_S(M(A\cap B), M(B-A)) \\ &\leqslant F_S(M(A\cap B), M(A-B)) \\ &= S(B,A) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S(A,B) \;\leqslant\; S(B,A) \qquad \blacksquare$$

P13 Supongamos que $M(A\cap B) > M(A\cap B')$ y $M(B-A) < M(B'-A)$.
Si existe P y Q tal que:

- $M(P\cap Q) = M(A\cap B)$
- $M(Q-P) < M(B'-A)$.

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} S(P,Q) &= F_S(M(P\cap Q), M(Q-P)) \\ &= F_S(M(A\cap B), M(B'-A)). \end{aligned}$$

Además

$$S(P,Q) < F_S(M(A\cap B), M(B-P)) = S(A,B)$$

$$S(P,Q) > F_S(M(A\cap B'), M(B'-A)) = S(A,B').$$

Se demostrará ahora que allí existe un par (P,Q). En efecto; Podemos considerar $P=A$ y Q con una función de pertenencia $f_Q(x) = f_B(x)$ para todo x tal que $f_B(x) \leqslant f_A(x)$ y $f_Q(x') \geqslant f_B(x')$ para todo x' tal que $f_B(x') \geqslant f_A(x')$.
Encontramos que:
$M(Q\cap P) = M(A\cap B)$ y escogemos un Q tal que

$$M(Q-P) = M(Q-A) = M(B'-A) \; por \; [D3]$$

.

La propiedad de solubilidad quiere decir que, si B se parece más a A que a B', existen dos objetos P y Q, con la misma información común que A y B, con la misma diferencia que B' y A, que proporcionan una medida de semejanza en el intervalo $]S(A,B'), S(A,B)[$.

Esta última propiedad es, otra vez, una propiedad que puede ser vinculada a la noción de solubilidad introducida por A. Tversky.

Por lo general, las M- medidas de satisfacción no son simétricas, lo cual quiere decir que, para la mayor parte de los subconjuntos difusos A y B, $S(A, B) \neq S(B, A)$ porque A es tomado como una referencia y, además, S depende de B - A y no de A - B.

Ejemplo 3.1.

M- medidas de satisfacción son las siguientes:

- $S(A, B) = 1 - sup_{f_A(x)=0} f_B(x) = 1 - M_2(B -_2 A)$ [2] por conjuntos difusos normalizado, con M_2 y la diferencia definida por -2.
- $S(A, B) = inf_x min(1 - f_B(x) + f_A(x), 1) = 1 - M_2(B -_1 A)$ para conjuntos difusos normalizados, con M_2 y la diferencia definida por $-_1$.
- $S(A, B) = M(A \cap B)/M(B) = M(A \cap B)/(M(A \cap B) + M(B - A))$ con la medida de información M_1 o M_3 y la diferencia definida por $-_1$.

§3.2.2. Medidas de inclusión

La segunda familia de medidas de similitud a considerar toma en cuenta la noción de inclusión. Muchas aplicaciones necesitan el empleo de medidas de inclusión, que consideran un objeto de referencia A y mira a las características de B que son comunes a A.

DEFINICIÓN 3.5. *Una M- medida de inclusión S sobre Ω es un M- medida de similitud tal que:*

AF2 $F_S(0, v, w) = 0$ *para cualquier valor de v y w.*

AF5 *S es reflexiva.*

AF6 $F_S(u, v, w)$ *es independiente de v.*

PROPOSICIÓN 3.5. *Una M- medida de inclusión satisface las siguientes propiedades:*

P6 *Exclusividad.*

P14 *Inclusión de conjunto: Si M es tal que: $M(A) = M(A \cap B) + M(A - B)$ para algún A y B, entonces alguna M- medidas de inclusión es monótona con respecto a $M(A \cap B)$ y, como una consecuencia, es monótona con respecto a B para un A fijo:*

- *Si $M(A \cap B) \leqslant M(A \cap B')$ entonces $S(A, B) \leqslant S(A, B')$*
- *Si $B \subseteq B'$ entonces $S(A, B) \leqslant S(A, B')$.*

Demostración.

P6 Queremos probar que:

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } S(A, B) = S(B, A) = 0$$

En efecto,
supóngase que $A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned} S(A, B) &= F(M(A \cap B), M(B - A), M(A - B)) \\ &= F(M(\emptyset), M(B - A), M(A - B)) \\ &= F(0, M(B - A), M(A - B)) \\ &= 0 \\ &\therefore\ S(A, B) = 0 \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que $S(A, B) = 0$.
Así obtenemos lo deseado:

$$S(A, B) = S(B, A) = 0$$

Probaremos la [**P14**].

- Supongamos que:
  $M(A) = M(A \cap B) + M(A - B) = M(A \cap B') + M(A - B')$ para cada B', así, si $M(A \cap B) \leqslant M(A \cap B')$, tenemos que, $M(A - B) \geqslant M(A - B')$.
  Entonces, aplicando la definición [AF1] obtenemos que: $S(A, B) \leqslant S(A, B')$.

- Si $B \subseteq B'$ tenemos que, $M(A \cap B) \leqslant M(A \cap B')$ y $M(A - B) \geqslant M(A - B')$.
  Luego aplicando la definición [AF1] obtenemos que: $S(A, B) \leqslant S(A, B')$.

Las propiedades de la información M- elemental interior y exterior análogo para P11 y P12 están satisfechos por M- medida de inclusión.

Ejemplo 3.2.

Ejemplo de M-medidas de inclusión son los siguientes:

- $S(A,B) = |A \cap B|/|A| = M_3(A \cap B)/(M_3(A \cap B) + M_3(A - B))$, con la medida difusa M_3 y la diferencia $-_1$.
- $S(A,B) = inf_x min(1 - f_A(x) + f_B(x), 1) = 1 - M_2(A -_1 B)$ por conjuntos difuso normalizado.

El grado clásico de inclusión (inclusión de Zadeh):

$$S(A,B) = \frac{1}{|\Omega|}\sum_x min(1, 1 - f_A(x) + f_B(x)) = 1 - \frac{1}{\Omega}M_3(A -_1 B) \tag{3.1}$$

Es una M- medida de comparación que satisface todos los requerimientos de una M- medida de inclusión, excepto el hecho de que: $S(A,B) \neq 0$ para A y B tal que $A \cap B = \emptyset$.

§3.2.3. Medidas de semejanza

La última familia de medidas de similitud a considerar toma en cuenta dos objetos y mira las características que ellos tienen en común, sin tomar en cuenta a uno de ellos como una referencia.

DEFINICIÓN 3.6. *Una M-medida de semejanza sobre es una M- medida de similitud S que satisface las propiedades:*

AF Reflexividad: $S(A,A) = 1$.

AF7 Simetría: $S(A,B) = S(B,A)$.

M- Medidas de semejanza S que satisfacen una propiedad adicional de T- transitividad, para una t-norma $T, S(A;B) \geqslant T(S(A,C), S(C,B)), \forall A,B,C \in F(\Omega)$ son conocidas como relaciones de indistinguibilidad.

La propiedad de simetría de M- medidas de semejanza implica que $F(u, v, w)$ es simétrica en v y w: $F(u, v, w) = F(u, w, v)$. En el caso particular donde todas las descripciones son tales que: $M(A - B) = M(B - A)$, cualquier M- medida de satisfacción S es una medida de semejanza ya que es reflexiva. Además, S se hace simétrica debido a esta condición especial. Este es por ejemplo el caso si consideramos descripciones definidas como clases de una partición difusa comúnmente usada en el control difuso con las formas de funciones de pertenencia simétricas, idénticas para todas las clases localizadas a intervalos regulares como se indica en la figura 3.2.

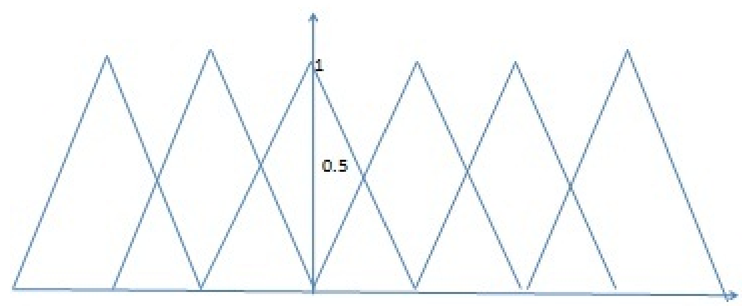


Figura 3.2: Partición difusa en un control difuso.

Ejemplo 3.3. *Una M- medidas de semejanza son los siguientes:*

- $S(A, B) = exp(-\beta|d_r(A, B)|)$ donde $\beta > 0$ y $d_r(A, B) = (\sum |f_A - f_B|^r)^{\frac{1}{r}}$, para r$\geqslant$0, la distancia generalizada geométricamente para conjuntos difusos. Esta cantidad es una relación transitiva de producto de indistinguibilidad; de ahí esto es una M - medida de semejanza, con la medida de M5 de la información y la diferencia definida por $-_1$.

- $S(A, B) = \frac{M(A \cap B)}{M(A \cup B)}$ para M tal que:
  $M(A \cup B) = M(A \cap B) + M(A - B) + M(B - A)$, por ejemplo M_1 o M_3 y con la diferencia definida por -1.

- $S(A, B) = 1 - \frac{1}{|\Omega|} \sum_x |f_A(x) - f_B(x)| = 1 - \frac{1}{|\Omega|}(M_3(A - B) + M_3(B - A))$ con la medida difusa M_3 y la diferencia $-_1$.

§3.3. Medidas de desemejanza

Muchas medidas de comparación de conjuntos difusos en la literatura están basadas en una clase de distancia entre sus funciones de pertenencia. A continuación se dan los requerimientos necesarios para su introducción en el marco de trabajo general.

Definición 3.7. *Una M-medida de desemejanza S sobre Ω es una M- medida de comparación que satisface los siguientes requerimientos:*

AF8 Minimalidad: $S(A, A) = 0$.

AF9 $F_S(u, v, w)$ es independiente de u y creciente en v y w.

Claramente, una distancia es una medida de desemejanza que es simétrica y satisface la desigualdad triangular.

Ejemplo 3.4. *M- medidas de desemejanza son los siguientes:*

- $S(A, B) = |A \square B| = \frac{1}{|\Omega|}(\sum_x f_{A-B}(x) + \sum_x f_{A-B}(x))$ donde A $\square$ B define el subconjunto difuso de elementos que aproximadamente pertenecen a A y no B o a la inversa, es una M-medida de desemejanza con la medida de información M_3 y la diferencia $-_1$.
- La distancia geométrica generalizada normalizada:$S(A, B) = (\frac{1}{|\Omega|} \sum |f_A - f_B|^r)^{\frac{1}{r}}$ para $r \geqslant 1$, con la medida difusa M_5 y la diferencia -1.
- $S(A, B) = d_\infty(A, B) = sup|f_A(x) - f_B(x)|$ con la medida difusa M_5 y la diferencia $-_1$.

CAPÍTULO 4

EJEMPLOS DE APLICACIONES.

Las medidas de inclusión pueden ser utilizadas de diversas maneras. A continuación presentaremos dos ejemplos.

Ejemplo 4.1.

Existen aplicaciones relacionadas con el manejo de bases de datos difusas; tal es el caso presentado en[17], donde se presentan nuevas características de un lenguaje (FSQL) que permite manejar información difusa en bases de datos difusas o nítidas. Entre estas nuevas características están comparadores difusos.
Además de los comparadores típicos $(=, >, \geqslant, \dots)$, FSQL incluye otros comparadores, entre ellos INCL y FINCL, El comparador INCL examina si un valor difuso está incluido en otro, y retorna un valor nítido de la siguiente lógica tri-valuada:

$$A\ INCL\ B = \begin{cases} NULL, & \text{si A o B son NULL;} \\ TRUE, & \text{si A(x)} \leqslant \text{B(x), para todo x;} \\ FALSE, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.1}$$

FINCL define un grado de inclusión. Este grado es calculado así:

$$CDEG\ (A\ \ FINCL\ B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} \tag{4.2}$$

Donde $Card$ es la cardinalidad de la función de pertenencia. La intersección de A y B puede usar la t-norma *minimum*. Por lo tanto, si CDEG $(A\ FINCL\ B) = 1$, esto significa que A está totalmente incluido en B. En el otro extremo, si CDEG $(A\ FINCL\ B) = 0$, esto significa que A no está en absoluto incluido en B.

Ejemplo 4.2.

Supongamos que se quiere establecer una comparación entre casas para alquilar con los siguientes atributos difusos:

- **Precio** (P): bajo (pA), medio (pB), alto (pC).
- **Tamaño** (T): pequeño (tA), medio (tB), grande (tC).
- **Antigüedad** (A): nuevo (aA), seminuevo (aB), viejo (aC).
- **Estado general de mantenimiento** (M): malo (mA), regular (mB), bueno (mC).

Supongamos que las funciones de pertenencia tengan las formas indicadas en la Figura 4.1 y los valores específicos indicados en la tabla 4.

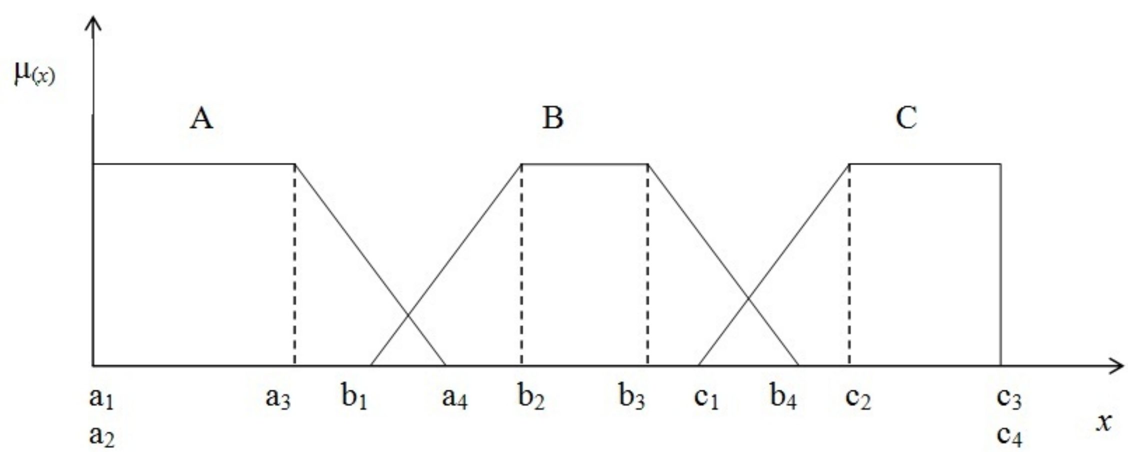


FIGURA 4.1: FUNCIONES DE PERTENENCIA RELACIONADAS CON EL EJEMPLO 4.2

Variable / etiqueta	Universo de discurso	A(a_1, a_2, a_3, a_4)	B(b_1, b_2, b_3, b_4)	C(c_1, c_2, c_3, c_4)
Precio (P) en miles de Bs	$[1, 10]$	$[1, 1, 2, 3]$	$[2, 3, 6, 7]$	$[6, 7, 10, 10]$
Tamaño (T) en decenas de m^2	$[30, 300]$	$[30, 30, 60, 70]$	$[90, 100, 300, 300]$	$[90, 100, 300, 300]$
Antigüedad (A) en años	$[0, 50]$	$[0, 0, 2, 3]$	$[2, 3, 9, 10]$	$[9, 10, 50, 50]$
Mantenimiento (M) en escala de 0 (mínimo) a 10	$[0, 10]$	$[0, 0, 3, 4]$	$[3, 4, 6, 7]$	$[6, 7, 10, 10]$

TABLA 4.1: VALORES ESPECÍFICOS DE LA FIGURA 4.1, PARA EL EJEMPLO 4.2

Supongamos que se tenga un grupo de casas en alquiler de precio bajo, tamaño medio, nuevo, y mantenimiento bueno, según la tabla anterior; llamaremos a este grupo Gej1a.

Además supóngase que hay otro grupo de casas, llamemóslo Gej1b, en el que se definen sus atributos de precio, tamaño, antigüedad y mantenimiento con funciones de pertenencia trapezoidales de:

Precio $= [1.5,\ 1.5,\ 2,\ 2.5]$; Tamaño $= [50, 55, 60, 67]$; Antigüedad $= [1,\ 1,\ 1.5,\ 2]$; Mantenimiento $= [5, 7, 9, 10]$.

Veamos el grado de inclusión del grupo Gej1b en Gej1a.

El precio de Gej1b, está completamente incluido en Gej1a.
El tamaño de Gej1b está completamente incluido en Gej1a.
La antigüedad de Gej1b está completamente incluida en Gej1a.
El mantenimiento de Gej1b no está completamente incluido en Gej1a.

Esto puede observarse en la figura 4.2.

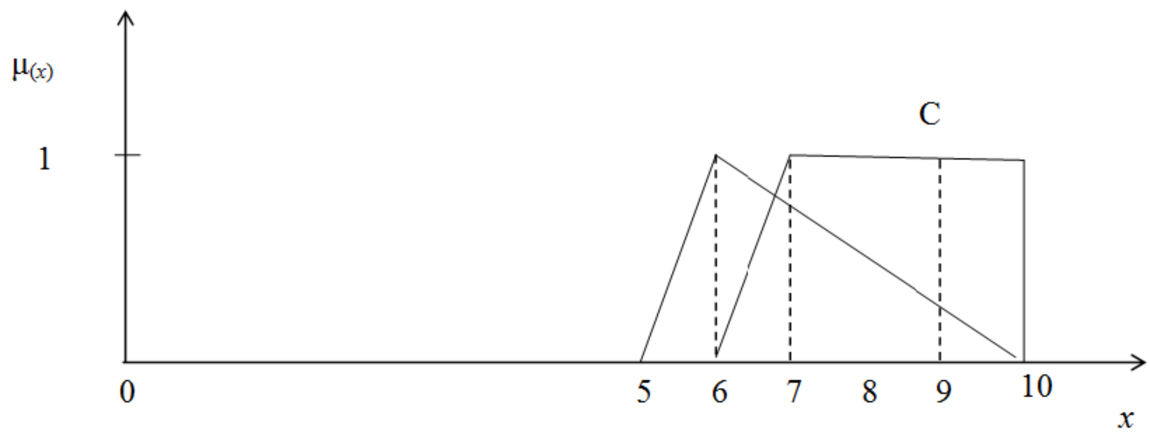


FIGURA 4.2: GRADO DE INCLUSIÓN

Si aplicamos

$$CDEG\ (A\ \ FINCL\ B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}$$

En primer lugar calculemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Card(A \cap B) &= \frac{0{,}8\ x\ 4}{2} \\ &= 1{,}6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Card(A) &= \frac{5x1}{2} \\ &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 4.2 obtenemos lo siguiente:

$$CDEG(A\ FINCL\ B) = \frac{1{,}6}{2{,}5} = 0{,}64 \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.3.

Grado de inclusión en objetos con varios atributos difusos.

En el contexto de bases de datos difusas, hay diversas formas para desarrollar modelos que soporten borrosidad e imprecisión. Uno de estos modelos es el denominado "Fuzzy Semantic Model"(FSM) el cual puede permitir a una entidad pertenecer a varias clases de acuerdo a diferentes grados de pertenencia que reflejan hasta qué punto la entidad posee atributos de esas clases.
El Modelo Semántico Difuso es un modelo de datos que utiliza conceptos de modelado difuso y soporta el manejo de borrosidad, incertidumbre e imprecisión a niveles de atributo, entidad y clase [18].
En es Modelo, el espacio de entidades E es el conjunto de todas las entidades del dominio de interés. Una entidad difusa en E es una entidad natural o artificial tal que una o varias propiedades son difusas. En otras palabras, una entidad difusa verifica sólo parcialmente algunas propiedades de su clase. Una clase difusa K en E es una colección de entidades difusas K $= \{(e, \mu_k(e)) : e \in E \wedge \mu_k(e) > 0\}$. μ_k es la función de pertenencia y $\mu_k(e)$ es el grado de pertenencia de la entidad difusa e en la clase difusa K.
Una clase difusa es una colección de entidades difusas que tienen propiedades comunes. La borrosidad es por tanto inducida cuando una entidad verifica sólo parcialmente algunas de estas propiedades. Se denotará $X_k = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}(con\ n \geqslant 1)$. X_k es denominado el conjunto extendido de la clase difusa K y p$_i \in X_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es una propiedad extendida asociada con K.
Una entidad puede verificar completamente o parcialmente las propiedades de una clase difusa.

Si Denominamos GIi es el grado de inclusión correspondiente al atributo i establecemos un factor de ponderación w_i $(0 \leqslant w_i \leqslant 1)$, para permitir asignar un grado de relevancia a cada atributo i, Se puede utilizar una suma ponderada de los grados de inclusión de los atributos:

$$\text{Grado de inclusión global} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i.GIi}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{4.4}$$

Así, en el caso particular presentado en el ejemplo 4.2, hay cuatro atributos ($n = 4$); si el factor de ponderación para cada atributos (digamos que $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$), y tomando en cuenta que GI1=GI2=GI3=1; GI4=0.64, entonces:

$$\text{Grado de inclusión global} = \frac{3\ +\ 0{,}64}{4} = 0{,}9$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1] L.A.Zadeh.(1965) *Fuzzy Sets.* Information and Control, pp. 338-353.

[2] D. Dubois & H. Prade. (1980)*Fuzzy Sets and Systems.*,Theory and Applications. Academic Press.New York.

[3] Klir, G. & Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets Theory.* Theory and Applications. Prentice Hall.

[4] Bouchon-Meunier B., Rifqi, M. & Bothorel, S. (1996) . *Towards general measures of comparison of objects.* Fuzzy Sets and Systems, Vol 84, pp. 143-153.

[5] Zimmermann, H-J. (2001) *Fuzzy Set Theory and its Applications.* Fourth Edition. Kluwer Academic Publishers.

[6] Sugeno, M. (1974) *Theory of Fuzzy Integral and its Application.* PhD Thesis, Tokyo Institute of technology,Japan

[7] Zhang, H.; Dong, M.; Zhang, W. Song, X. (2007). *Inclusion Measure and similarity Measure of intiutionistic and interval valued Fuzzy Sets.&* International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering, ISKE 2007 Proceedings.

[8] Bordogna, G.; Bosc, P. y Pasi, G. (1996). *Fuzzy Inclusion in Database and Information Retrieval Query Interpretation.* Proceedings of the 1996 ACM symposium on Applied Computing, pp. 547, 551.

[9] MARÍN, N.; MEDINA, J.; PONS, O.; SÁNCHEZ, D. Y VILA, M. (2003). *Complex object comparison in a fuzzy context.* Information and Software Technology, Vol. 45, pp. 431-444. .

[10] GALINDO, J. (2005). *"New Characteristics in FSQL, a Fuzzy SQL for Fuzzy Databases".* WSEAS Transactions on Information Science and Applications 2, Vol. 2, pp. 161-169.

[11] SMITHSON, M. Y VERKUILEN, J. (2006). *Fuzzy Set Theory.* Applications in the Social Sciences. Sage Publications, Inc.

[12] CHIRINO, R. (2010). *Estudio comparativo de métodos para medir semejanzas entre números difusos.* Trabajo Especial de Grado, Licenciatura en Ciencias Matemáticas, UCLA.

[13] SEQUERA, D. (2010). *Estudio sobre la aplicación de operaciones de intersección y diferencia en medidas de comparación entre conjuntos difusos.* Trabajo Especial de Grado, Licenciatura en Ciencias Matemáticas, UCLA.

[14] D. DUBOIS & H. PRADE. (1983). *Fuzzy Sets-theoretic differences and inclusions and their use in fuzzy arithmetics and analysis.* In 5^{th} International Seminar on Fuzzy Set Theory, Linz, Austria.

[15] A. DE LUCA AND S. TERMINI.(1972). *A definition of a non-probability entropy in the setting of fuzzy sets theory.* Information and control,20:301-312.

[16] BOUCHON-MEUNIER B., RIFQI, M. (1995). *Resemblanse in database utilization.* In procedings of 6_{th} IFSA World Congress, Sao Paulo.

[17] J. Galindo J. (2005). New Characteristics in FSQL, a Fuzzy SQL for Fuzzy Databases. WSEAS Transactions on Information Science and Applications, Vol 2,No. 2, pp. 161-169.

[18] Bouaziz, R.; Chaknar, S.; Mousseau, V., Rham, S. and Telmoudi, A. (2007). Data base design and querying within the fuzzy semantic model. Information Sciences 177 (2007) 4598-4620.