UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Transformaciones Inducidas Uniformemente Expansoras para una Clase de Transformaciones de Markov del Intervalo"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Thomas Pérez

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Teoría Ergódica y Sistemas Dinámicos.
Tutor: Dr. Sergio Muñoz

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2012

a Yasmín y Julio César.

AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia por el apoyo brindado durante mi carrera.

Al Dr. Sergio Muñoz por su paciencia y dedicación al orientarme en la realización de este trabajo.

Al Lic. Manuel Carreras por su colaboración con este proyecto.

A todos los profesores que he tenido en mi formación.

Finalmente, a todos los compañeros y amigos que encontré en este camino.

“Transformaciones Inducidas Uniformemente Expansoras para una Clase de Transformaciones de Markov del Intervalo”

Resumen

Se hará una revisión detallada del artículo $[B]$ donde se exhibe una clase amplia de transformaciones de Markov no uniformemente expansoras del intervalo, digamos $I = [a, b]$, las cuales admiten subconjuntos de I y transformaciones inducidas a tales subconjuntos que resultan ser uniformemente expansoras. En [B] se trata el tema de la existencia de medidas invariantes, sin embargo, debido a la densidad y complejidad del problema, solo nos ocuparemos, en este trabajo, de la expansión uniforme asociada de los sistemas antes señalados.

Índice

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados que servirán de soporte para las demostraciones realizadas en el desarrollo del trabajo. Se enunciarán algunos teoremas básicos del análisis en la recta, posteriormente se presenta un cuadro de definiciones básicas de teoría de la medida que, finalmente, servirán para definir el concepto de transformación de Markov.

Para fijar algunas notaciones, sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, A abierto, una función diferenciable. Denotaremos la derivada de f en x, donde $x \in A$, por $f'(x)$, la segunda derivada por $f''(x)$, y las derivadas de orden superior mediante $f^{(r)}(x)$, $r \geqslant 1$. Escribiremos $f^n(x) = \underbrace{f \circ ... \circ f(x)}_{n\ veces}$, siempre que $f^i(x) \in A$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

§1.1. Teoremas de Análisis en la Recta.

En esta sección se presentan algunas de las nociones elementales análisis matemático que serán usadas posteriormente [L].

Teorema 1.1 (Regla de la cadena). *Sean $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, $a \in X \bigcap X'$, $b = f(a) \in Y \bigcap Y'$, donde X', Y' son los conjuntos de puntos de acumulación de X e Y respectivamente. Si existen $f'(a)$ y $g'(b)$, entonces $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a y*

$$(f \circ g)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, si $f : A \subset \mathbb{R} \to R$ es diferenciable, A abierto y $f^n(x) \in A$ para todo n, entonces

$$(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)).$$

TEOREMA 1.2 (Teorema del Valor Medio). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f es derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

TEOREMA 1.3 (Teorema del Valor Intermedio). *Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua. Supongamos que $f(a) = u$ y $f(b) = v$. Entonces para cualquier z entre u y v, existe c, $a \leqslant c \leqslant b$, tal que $f(c) = z$.*

TEOREMA 1.4 (Teorema de Taylor). *Supongamos que f es una función real definida en el intervalo $[a, b]$, n es un entero positivo, $f^{(n-1)}$ es continua en $[a, b]$ y que $f^{(n)}$ existe para todo $t \in (a, b)$. Sean α, $\beta \in [a, b]$, con $\alpha < \beta$. Entonces existe un punto $x \in (\alpha, \beta)$ tal que*

$$f(\beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n.$$

TEOREMA 1.5 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Supongamos que f es Riemann integrable en $[a, b]$ y existe una función diferenciable F en $[a, b]$ tal que $F' = f$. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

§1.2. Teoría de la medida.

En esta sección se presentan los conceptos de espacio medible, medida, medida de probabilidad y medida cero.

DEFINICIÓN 1.1. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de X si se cumplen las siguientes propiedades:*
1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \bigcup B \in \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 1.2. *Un álgebra $\mathcal{A}$ se dice que es una σ-álgebra si es cerrada por uniones numerables.*

Definición 1.3. *Un espacio medible es una dupla $(X, \mathcal{A})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados conjuntos medibles.*

Definición 1.4. *Una medida en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisface las siguientes propiedades:*
1) $\mu(\emptyset) = 0$.
2) Para cualquier sucesión B_n disjunta dos a dos de conjuntos en $\mathcal{A}$ se cumple que $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$.

La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamada un espacio de medida, cuando $\mu(X) = 1$ diremos que μ es una medida de probabilidad y en este caso $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamado un espacio de probabilidad.
Los conjuntos $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$ son llamados conjuntos de medida cero.

Como ejemplo ver [R] la medida de Lebesgue en el conjunto de números reales.

§1.3. Teoría Ergódica y Transformaciones de Markov del Intervalo.

Definición 1.5 (Transformación de Markov). *Una función $f : I \to I$, de un intervalo $I = [a, b]$ es de Markov si existe una colección numerable $\{I_{\mathrm{k}}\}_{\mathrm{k}\in\mathrm{L}}$ de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos, tales que:*
a) f está definida en $\bigcup\limits_{k\in L} I_{\mathrm{k}}$ y $I \setminus \bigcup\limits_{k\in L} I_{\mathrm{k}}$ tiene medida cero.
b) f restricta a I_{k} es estrictamente monótona y se extiende a una función de clase C^2 en $\overline{I_{\mathrm{k}}}$, para todo $k \in L$.
c) Si existen $k, j \in L$ tal que $f(I_{\mathrm{k}}) \bigcap I_{\mathrm{j}} \neq \emptyset$ entonces$f(I_{\mathrm{k}}) \supset I_{\mathrm{j}}$.
d) Existe R tal que $\bigcup\limits_{n=1}^{R} f^n(I_k) \supset I_{\mathrm{j}}$ para todo $k, j \in L$.

La familia $\{I_{\mathrm{k}}\}_{\mathrm{k}\in\mathrm{L}}$ es llamada una partición de Markov asociada a f.

Ejemplo 1.1.

Sea $I = [0,1]$, $f_1 : I \to I/\ f_1(x) = 4x(1-x)$. Veamos que la función f es una transformación de Markov. Sea $P = \{I_1, I_2\}$, donde $I_1 = (0, 1/2)$ e $I_2 = (1/2, 1)$.
f_1 por ser una función polinómica está definida en $I_1 \bigcup I_2$, además $I - \{I_1, I_2\} = \{0, 1/2, 1\}$ es un conjunto de medida cero.

Ahora,

$$f_1'(x) = 4 - 8x.$$

Por tanto,

$$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow 4 - 8x > 0 \Leftrightarrow 1/2 > x.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &> 0 \; para\ todo\ x \in (0, 1/2) \\ y \\ f_1'(x) &< 0 \; para\ todo\ x \in (1/2, 1). \end{aligned}$$

Luego, f_1 restricta a todo intervalo del conjunto P es estrictamente monótona.

Nuevamente, f_1, por ser una función polinómica, es de clase C^2 en $\overline{I_1}$ e $\overline{I_2}$, luego, I_1 e I_2 en la restricción de f_1 a dichos intervalos puede ser extendida a una función de clase C^2 en las clausuras respectivas.

Puesto que $f_1(0) = 0$, $f_1(1/2) = 1$, $f_1(1) = 0$ y f/I_k, $k \in \{1, 2\}$ es continua entonces,

$$f_1(I_1) = [0, 1] \supset I_2$$

y

$$f_1(I_2) = [0, 1] \supset I_1.$$

Así, f satisface la condición c) de la definición de transformacion de Markov.

Además, haciendo $R = 1$ en dicha definición tenemos que

$$f_1(I_k) \supset I_j \; para\ todo\ k, j \in \{1, 2\}.$$

Por lo tanto, f_1 es una transformación de Markov.

DEFINICIÓN 1.6. *Sea $f : I \to I$ una función. Decimos que f es uniformemente expansora si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que* $\inf\limits_{x \in I} |(f^n)'(x)| > 1$.

Ejemplo 1.2.

f_1 es una transformación no uniformemente expansora. En efecto,

$$f_1'(x) = 4 - 8x.$$

Haciendo $x = 1/2$ se obtiene que:

$$f_1'(1/2) = 4 - 8(1/2) = 0.$$

Por lo tanto,

$$(f_1^n)'(1/2) = f_1'(f_1^{n-1}(1/2))...f_1'(1/2) = 0, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Sea $f : I \to I$ una transformación medible del espacio de probabilidad $(I, \mathbb{B}, \mu)$, donde $I = [a, b]$, $a < b$, $\mathbb{B}$ es la σ-álgebra de Borel de I e μ es una probabilidad en (I,$\mathbb{B}$)[R].

DEFINICIÓN 1.7. *La medida μ es $f-$invariante si $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$, para todo $B \in \mathbb{B}$.*

DEFINICIÓN 1.8. *La función f es $\mu-$ergódica si $f^{-1}(B) = B$, $B \in \mathbb{B} \implies \mu(B) = 0$ ó $\mu(B^c) = 0$.*

DEFINICIÓN 1.9. *μ es absolutamente continua (con respecto a Lebesgue) si $\lambda(B) = 0$, $B \in \mathbb{B} \implies \mu(B) = 0$, donde λ es la medida de Lebesgue en $[a, b]$.*

TEOREMA 1.6. *(Ver [A]). Sea $f : I \to I$ una transformación de Markov, $M = \sup\limits_{I_k} \sup\limits_{y,z \in I_k} \left| \frac{f''(z)}{f'(y)^2} \right| < \infty$ y $\lambda_n = \inf\limits_{x} |(f^n)'(x)| > 1$ para algún n. Entonces f admite una medida de probabilidad μ que es $f-$invariante, ergódica y absolutamente continua (con respecto a Lebesgue).*

En este trabajo no abordaremos el tema de la existencia de medidas invariantes, ergódicas y absolutamente continuas, presentaremos un contexto en el cual ciertas transformaciones de Markov no uniformemente expansoras tienen asociadas transformaciones uniformemente expansoras.

En lo que sigue, a menos que se diga lo contrario, supondremos que $f : I \to I$, $I = [a, b]$, es una transformación de Markov e $\{I_{\mathrm{k}}\}_{\mathrm{k}=1}^{d}$ es una partición de Markov asociada a f. Coloquemos I_{k}=$(a_{\mathrm{k}}$,$b_{\mathrm{k}})$ de modo que $a_{\mathrm{k}+1} = b_{\mathrm{k}}$, $k \in \{1, 2, ..., d-1\}$, $a_1 = a$, $b_{\mathrm{d}} = b$; llamaremos al conjunto $S = \{a_1,b_1, \; ... \; ,a_{\mathrm{d}},b_{\mathrm{d}}\}$ conjunto singular (relativo a f). Para cada k$\in \{1, 2, ..., d\}$ llamaremos f_k a la función f restricta al intervalo I_k; cada f_{k} tiene una extensión de clase C^2 a $\overline{I_{\mathrm{k}}}$, de modo que, para k$\in$ $\{1, 2, ..., d-1\}$, $f(a_{k+1}^{+}) := \lim\limits_{x \to a_{\mathrm{k}+1}^{+}} f_{\mathrm{k}+1}(x)$ y $f(b_k^{-}) := \lim\limits_{x \to b_{\mathrm{k}}^{-}} f_{\mathrm{k}}(x)$ existen. Hagamos un esfuerzo de imaginación y pensemos que el conjunto singular $S = \{\; a_1$,b_1,a_2,b_2,..., a_{d} ,b_{d} $\}$ está formado por puntos diferentes, aunque claro está que $a_{\mathrm{k}+1} = b_{\mathrm{k}}$. Cuando buscamos $f(s), s \in S$, estamos pensando en ambos límites laterales $f_{\mathrm{k}+1}(a_{\mathrm{k}+1}^{+})$ y $f_{\mathrm{k}}(a_{\mathrm{k}}^{-})$. Por supuesto, para $k = 1$ y $k = d$, no hay ambiguedad; para $f(a) = f(a_1)$ pensamos en $f_1(a^+)$ y para $f(b) = f(b_{\mathrm{d}})$ estamos pensando en $f_{\mathrm{d}}(b^-)$, luego, tiene sentido $f : S \to S$.

DEFINICIÓN 1.10 (Punto Periódico)**.** *Un punto $p \in I$ es periódico (con respecto a f) si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(p) = p$.*

El menor entero con tal propiedad se llama **período** de p. Si el período de p es 1, entonces p es un **punto fijo**.

DEFINICIÓN 1.11 (Punto Preperiódico)**.** *Un punto $p \in I$ es preperiódico (con respecto a f) si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(p)$ es periódico.*

Observe que en el contexto de Transformaciones de Markov, todo punto del conjunto singular S es preperiódico. El peso de un punto singular $p \in S$, denotado por $H(p)$, se define como el menor entero $n \geqslant 0$ tal que $f^n(p)$ es periódico.

DEFINICIÓN 1.12 (Fuente Regular)**.** *Sea $f : [x_0, x_1] \to [x_0, x_2]$. Decimos que un punto x_0 es una fuente regular para la función f, si $f'(x_0) \geqslant 1$ y x_0 es un punto fijo. En el caso $f'(x_0) = 1$ pedimos que $f'(x)$ decrece estrictamente a 1 cuando $x \to x_0$.*

DEFINICIÓN 1.13. *Decimos que $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ no es plana en x_0 si existe $r \geqslant 1$ tal que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$ y $f \in C^{r+1}$.*

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea p una fuente regular para f. Entonces existe un intervalo abierto $V = (p, p + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, tal que, si $x \in V$, $x \neq p$, entonces existe $k = k(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \notin V$.*

Demostración. Puesto que p es una fuente regular, vamos a considerar dos casos.

Caso 1: Supongamos que $f'(p) > 1$.
Como f es C^1, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| > A > 1$ para todo $x \in V = (p, p+\varepsilon)$. Por el teorema del valor medio se tiene lo siguiente:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \geqslant A|x-p|.$$

De acá obtenemos:

$$|f^2(x) - p| = |f(f(x)) - f^2(p)| \geqslant A|f(x) - p| \geqslant A^2|x-p|.$$

Por este procedimiento se obtiene que:

$$|f^n(x) - p| \geqslant A^n|x-p|.$$

Puesto que $A > 1$, la sucesión $\{A^n\}$ no es acotada, luego existe $k > 0$ tal que $A^k > \dfrac{\varepsilon}{|x-p|}$, así

$$|f^k(x) - p| \geqslant A^k|x-p| > \frac{\varepsilon}{|x-p|}|x-p| = \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\text{existe } k > 0 \text{ tal que } f^k(x) \notin V.$$

Caso 2: Supongamos que $f'(p) = 1$.

Entonces, f' decrece estrictamente a 1 cuando $x \to x_0^+$.
Sea $\varepsilon > 0$ tal que $f'(x) > 1 > 0$ para todo $x \in U = (p, p+2\varepsilon)$. Entonces f es estrictamente creciente en U.

En particular, f es estrictamente creciente en $V = (p, p+\varepsilon)$. Sea $x \in V$ tal que $x \neq p$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (p, x)$ tal que:

$$f(x) - p = f(x) - p = f'(c)(x-p) > x - p \Rightarrow p < x < f(x).$$

Si $f(x) \notin V$, tomamos k=1.

Si $f(x) \in V$, entonces, como f es estrictamente creciente en V, tenemos que:

$$x_0 < x < f(x) \Rightarrow p < x < f(x) < f(f(x)) = f^2(x).$$

Por este procedimiento podemos obtener que:

$$p < x < f(x) < ... < f^n(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ si } f^j(x) \in V \text{ para todo } 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

Por lo tanto,

$$\text{Existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^k(x) \notin V.$$

De lo contrario, las sucesión $\{f^n(x)\}$ es monótona y acotada en V, luego converge a un punto $z \in \overline{V}$, $z > p$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z.$$

Ahora, como la sucesión $\{f^n(x)\}$ converge a $z \in V$ entonces la subucesión $\{f^{n+1}(x)\}$ también converge a $z \in \overline{V} \subset U$. Luego, puesto que la funcion f es continua tenemos que:

$$z = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = f(z).$$

Entonces z es un punto fijo, esto es una contradicción ya que $z \in U$ y f es estrictamente creciente en U. ■

La proposición anterior servirá para dar consistencia a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.14. *Sea x_0 una fuente regular para f y $U = (x_0, x_0 + \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$. Dado $x \in U$ denotemos por $m = m_U(x)$ el menor entero positivo tal que $f^m(x) \notin U$.*

DEFINICIÓN 1.15 (Transformacion Inducida)**.** *Sea $f : I \to I$ una transformación medible del espacio de probabilidad $(I, \mathbb{B}, \mu)$, donde I es un intervalo, $\mathbb{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel en I e μ es una probabilidad en $(\mu, \mathbb{B})$. Sea $K \subset I$ tal que para $\mu -$ casi todo $x \in K$ existe un entero positivo $\widetilde{n(x)}$ tal que $f^{\widetilde{n(x)}} \in K$ y tomemos $n(x) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant 1,\ f^n(x) \in K\}$ ($n(x)$ es el primer tiempo de retorno de x a K). A la transformación $f_K : K \to K$ definida por $f_K(x) = f^{n_K(x)}$ se le llama transformación inducida por f.*

Capítulo 2

Enunciado del Teorema Central.

Para formular el teorema central, vamos a necesitar un par de lemas que darán consistencia al enunciado (Ver [B]).

§2.1. Dos resultados previos.

Lema 2.1. *Supongamos que $f : [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ no es plana en x_0. Entonces para $U = (x_0, x_0 + \varepsilon)$, con ε suficientemente pequeño, se tiene que:*

$$A(U) = \text{ínf}_{x \in U} \left| \frac{f'(x)(x - x_0)}{f(x) - f(x_0)} \right| > 0.$$

Demostración.

Sea $r \geqslant 1$ el mínimo tal que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$ y f es C^{r+1}. Sea $x \in U$, donde $U = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ y $\varepsilon > 0$ pequeño. Buscaremos un ε para que el resultado sea válido.

Por la fórmula de Taylor existe $\xi_1 = \xi_1(x) \in (x_0, x)$ tal que:

$$\begin{aligned}
f(x) - \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k &= \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!}(x - x_0)^{r+1} \\
\Rightarrow f(x) - \left[f(x_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x - x_0)^r \right] &= \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!}(x - x_0)^{r+1} \\
\Rightarrow f(x) - \left[f(x_0) + 0 + \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x - x_0)^r \right] &= \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!}(x - x_0)^{r+1} \\
\Rightarrow f(x) - f(x_0) - \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x - x_0)^r &= \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!}(x - x_0)^r
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x - x_0)^r + \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!}(x - x_0)^{r+1}. \tag{2.1}$$

Por hipótesis, la función f es C^{r+1}, entonces f' es C^r. Por la fórmula de Taylor, existe $\xi_2 = \xi_2(x) \in (x_0, x)$ tal que:

$$f'(x) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(f')^{(r)}(\xi_2)}{r!}(x-x_0)^r$$

$$\Rightarrow f'(x) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(f)^{(r+1)}(\xi_2)}{r!}(x-x_0)^r$$

$$\Rightarrow f'(x) - \sum_{k=0}^{r-2} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{f^{(r)}(x_0)}{(r-1)!}(x-x_0)^{r-1} = \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)}{r!}(x-x_0)^r$$

$$\Rightarrow f'(x) - 0 - \frac{f^{(r)}(x_0)}{(r-1)!}(x-x_0)^{r-1} = \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)}{r!}(x-x_0)^r$$

$$\Rightarrow f'(x) - \frac{f^{(r)}(x_0)}{(r-1)!}(x-x_0)^{r-1} = \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)}{r!}(x-x_0)^r$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f^{(r)}(x_0)}{(r-1)!}(x-x_0)^{r-1} + \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)}{r!}(x-x_0)^r$$

$$\Rightarrow f'(x) = r\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^{r-1} + \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)}{r!}(x-x_0)^r.$$

Puesto que la función f es C^{r+1} y está definida en el compacto $[x_0, x_1]$, podemos hacer

$$C_{r+1} = \sup_{\xi \in U} \left| \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{r+1} \right|.$$

En virtud de (2.1), se cumple la siguiente igualdad :

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r + \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!}(x-x_0)^{r+1} \right|$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \left| \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r \right| + \left| \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!}(x-x_0)^{r+1} \right|$$

$$\leqslant |x-x_0|^r \left(\left| \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} \right| + \left| \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!} \right| |x-x_0| \right)$$

$$\leqslant |x-x_0|^r \left(\left| \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} \right| + \left| \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)!} \right| \varepsilon \right)$$

$$\leqslant |x-x_0|^r \left(\left| \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} \right| + \left| \frac{f^{(r+1)}(\xi_1)}{(r+1)} \frac{1}{r!} \right| \varepsilon \right)$$

$$\leqslant |x-x_0|^r \left(\left| \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} \right| + \left| C_{r+1} \frac{1}{r!} \right| \varepsilon \right)$$

$$= \frac{|x-x_0|^r}{r!} \left(|f^r(x_0)| + |C_{r+1}| \, \varepsilon \right)$$

Por tanto,

$$\frac{r!}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}} \leqslant \frac{|x-x_0|^r}{|(f(x) - f(x_0)|} \tag{2.2}$$

Por otro lado,

$$|f'(x)| = \left| r \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} (x-x_0)^{r-1} + \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)(x-x_0)^r}{r!} \right|$$

$$\geqslant \left| r \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} (x-x_0)^{r-1} \right| - \left| \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)(x-x_0)^r}{r!} \right|$$

$$= |x-x_0|^{r-1} \left(\left| r \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} \right| - \left| \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)(x-x_0)}{r!} \right| \right)$$

$$= |x-x_0|^{r-1} \left(\frac{r}{r!} \left| f^{(r)}(x_0) \right| - \frac{r+1}{r!} \left| \frac{f^{(r+1)}(\xi_2)}{r+1} \right| |x-x_0| \right)$$

$$\geqslant |x-x_0|^{r-1} \left(\frac{r}{r!} \left| f^{(r)}(x_0) \right| - \frac{r+1}{r!} \varepsilon C_{r+1} \right)$$

$$|f'(x)| \geqslant \frac{|x-x_0|^{r-1}}{r!} \left(r|f^{(r)}(x_0)| - (r+1)\varepsilon C_{r+1} \right).$$

Luego,

$$\frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{r-1}} \geqslant \frac{r|f^{(r)}(x_0)| - (r+1)\varepsilon C_{r+1}}{r!}. \tag{2.3}$$

De (2.2) y (2.3) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{|f'(x)|}{|x-x_0|^{r-1}} \frac{|x-x_0|^r}{|f(x)-f(x_0)|} \geqslant \left(\frac{r|f^{(r)}(x_0)| - (r+1)C_{r+1}\varepsilon}{r!} \right) \frac{r!}{|f^r(x_0)| + C_{r+1}\varepsilon}$$

$$= \frac{r|f^{(r)}| - (r+1)C_{r+1}\varepsilon}{|f^r(x_0)| + C_{r+1}\varepsilon}.$$

Así,

$$\frac{|f'(x)||x-x_0|}{|f(x)-f(x_0)|} \geqslant \frac{r|f^{(r)}(x_0)| - (r+1)C_{r+1}\varepsilon}{|f^{(r)}(x_0)| + C_{r+1}\varepsilon}$$

$$= \frac{r|f^{(r)}(x_0)| + r\varepsilon C_{r+1} - r\varepsilon C_{r+1} - (r+1)C_{r+1}\varepsilon}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}$$

$$= r\left(\frac{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1} - \varepsilon C_{r+1} - \dfrac{(r+1)}{r}C_{r+1}\varepsilon}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}\right)$$

$$= r\left(\frac{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}} - \frac{\varepsilon C_{r+1} + \dfrac{(r+1)}{r}C_{r+1}\varepsilon}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}\right)$$

$$= r\left(1 - \frac{\varepsilon C_{r+1} + \dfrac{(r+1)}{r}C_{r+1}\varepsilon}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}\right)$$

$$= r\left(1 - \frac{\varepsilon C_{r+1} + \varepsilon C_{r+1} + \dfrac{1}{r}C_{r+1}\varepsilon}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}\right)$$

$$= r\left(1 - \frac{(2+\frac{1}{r})\varepsilon C_{r+1}}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}\right)$$

$$\geqslant r\left(1 - \frac{3\varepsilon C_{r+1}}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}\right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{|f'(x)||x-x_0|}{|f(x)-f(x_0)|} \geqslant r\left(1 - \frac{3\varepsilon C_{r+1}}{|f^{(r)}(x_0)| + \varepsilon C_{r+1}}\right) \geqslant r\left(1 - \frac{3\varepsilon C_{r+1}}{|f^{(r)}(x_0)|}\right).$$

En este caso escogemos $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ tal que $\dfrac{|f^{(r)}(x_0)|}{3C_{r+1}} > \varepsilon_0$ para obtener el siguiente resultado:

$$1 - \frac{3C_{r+1}\varepsilon_0}{|f^{(r)}(x_0)|} > 0.$$

De esta forma podemos asegurar que para todo $x \in U = (x_0, x_0 + \varepsilon_0)$ se cumple que:

$$\frac{|f'(x)||x-x_0|}{|f(x)-f(x_0)|} \geqslant r\left(1 - \frac{3C_{r+1}\varepsilon_0}{|f^{(r)}(x_0)|}\right) > 0.$$

Por lo tanto,

$$\inf_{x\in U}\left|\frac{f'(x)(x-x_0)}{f(x)-f(x_0)}\right| > 0.$$

Notemos que la desigualdad anterior es uniforme en $x \in U$.

$\blacksquare$

LEMA 2.2. *Sea x_0 una fuente regular para f y $U = (x_0, x_0+\varepsilon)$, con ε suficientemente pequeño. Existe una constante $B(U) > 0$ tal que $(f^{m_U(x)})'(x) > \frac{B(U)}{|x-x_0|}$ para todo $x \in U$, donde $m_U(x)$ es como en la Definición 1.14 (Ver capítulo 1).*

Demostración. Puesto que x_0 es una fuente regular para la función f, tenemos dos casos que considerar.

Primero supongamos que $f'(x_0) = 1$. Escogemos $\varepsilon > 0$ tal que $f'(x)$ decrece conforme $x \to x_0^+$, $x \in U = (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Entonces,

$$f'(x_0) < f'(x), \text{ para todo } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

Sea $x \in U$. Entonces, como f' decrece conforme $x \to x_0^+$, para $x_0 \leqslant t \leqslant x$ se cumple que:

$$f'(x_0) \leqslant f'(t) \leqslant f'(x).$$

Sea $m = m_U(x)$. Como f es creciente en $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ y $m_U(x)$ es el primer tiempo de salida de x el intervalo $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, tenemos que:

$$x_0 \leqslant t \leqslant x < x_0 + \varepsilon \Rightarrow x_0 = f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x) < x_0 + \varepsilon \Rightarrow x_0 = f^2(x_0) = f(f(x_0)) \leqslant f^2(t) = f(f(t)) \leqslant f(f(x_0)) = f^2(x_0) < x_0 + \varepsilon \Rightarrow ... \Rightarrow x_0 \leqslant f^{m-1}(t) \leqslant f^{m-1}(x) < x_0 + \varepsilon.$$

De estas desigualdades y la regla de la cadena (ver Capítulo 1), obtenemos que:

$$(f^m)'(t) = f'(t)f'(f(t)) \dots f'(f^{m-1}(t)) \leqslant f'(x)f'(f'(x)) \dots f'(f^{m-1}(x)).$$

Por tanto,

$$(f^m)'(t) \leqslant (f^m)'(x).$$

Puesto que tenemos continuidad para la función f, podemos aplicar la propiedad de monotonía de la integral de Riemann y el teorema fundamental del cálculo para obtener lo siguiente:

$$(f^m)'(x)(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} (f^m)'(x)dt \geqslant \int_{x_0}^{x} (f^m)'(t)dt = f^m(x) - f^m(x_0) \geqslant \varepsilon.$$

Notemos que la última desigualdad que escribimos es consecuencia de que $f^m(x_0) = x_0$, f es creciente a la derecha de x_0 y $f^m(x_0) \notin U$.

Así obtenemos que,

$$(f^m)'(x)|x - x_0| \geqslant \varepsilon.$$

Luego, basta tomar $B(U) = \varepsilon$ para obtener que:

$$(f^{m_U(x)})'(x)|x - x_0| \geqslant B(U).$$

Por lo tanto,

$$(f^{m_U(x)})'(x) \geqslant \tfrac{B(U)}{|x-x_0|} \text{ para todo } x \in U.$$

Ahora supongamos que $f'(x_0) > 1$.

Tenemos que f' es continua ya que f, por ser transformación de Markov, es de clase C^2, luego, podemos escoger $\varepsilon > 0$ de manera que $\lambda = \inf\limits_{s\in U} f'(s) > 1$. Notemos que $f'(x) > 1 > 0$ y tenemos que fés continua en U. Así, podemos definir $g(x) = \log f'(x)$, para todo $x \in U$. Por lo tanto,

$$g'(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)} \text{ donde } s \in (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Así, puesto que la función g es continua, tenemos que para todo $x, y \in U$, $x \leqslant y$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= \left|\int_x^y g'(t)dt\right| \\
&\leqslant \int_x^y |g'(t)|\, dt \\
&\leqslant \int_x^y \frac{|f''(t)|}{|f'(t)|}dt \\
&\leqslant \int_x^y \frac{\sup\limits_{s\in U} |f''(s)|}{\inf\limits_{s\in U} |f'(s)|}dt \\
&\leqslant \int_x^y \frac{c}{\lambda}dt \\
&= \frac{c}{\lambda}|x - y|, \quad \text{donde } c = \sup_{s\in U} |f''(s)|. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nuevamente consideremos $x \in U$. Para cualquier $t \in [x_0, x]$ tenemos que:

$$[f^k(t), f^k(x)] \subset U, \text{ para todo } 0 \leqslant k < m = m_U(x). \quad (2)$$

Esto nos lleva a afirmar lo siguiente :

$$|f^k(x) - f^k(t)| \leqslant \varepsilon\lambda^{-m+k+1}, \text{ para todo } k \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}. \quad (3)$$

Hagamos la prueba de la afirmación anterior por inducción, equivalentemente, probemos que:

$$|f^{m-(h-1)}(x) - f^{m-(h-1)}(t)| \leqslant \varepsilon\lambda^{-m+(m+(h-1))+1}, \text{ para todo } h \in \{2, 3..., m+1\}.$$

Supongamos que $h = 2$.

Por (2) aseguramos que

$$[f^{m-1}(t), f^{m-1}(x)] \subset U.$$

Esto implica que:

$$|f^{m-1}(x) - f^{m-1}(y)| < \varepsilon = \varepsilon\lambda^0 = \varepsilon\lambda^{-m+(m-(2-1))+1}.$$

Por tanto,

$$|f^{m-1}(x) - f^{m-1}(y)| \leqslant \lambda^{-m+(m-(2-1))+1}\varepsilon.$$

Ahora supongamos que la afirmación es válida para $h = n$, para algún $2 \leqslant n < m+1$. Esto es,

$$|f^{m-(n-1)}(x) - f^{m-(n-1)}(t)| \leqslant \varepsilon\lambda^{-m+(m+(n-1))+1}. \quad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

Probemos la afirmación para $h = n+1$ ($2 \leqslant n < m+1 \Rightarrow 2 < n+1 \leqslant m+1$).

Tenemos que:

$$|f^{m-n}(x) - f^{m-n}(t)| = |f^{-1}(f^{m-(n-1)}(x)) - f^{-1}(f^{m-(n-1)}(t))|.$$

Entonces, aplicando el teorema del valor medio a f^{-1}, tenemos que existe $c \in (t, x)$, tal que:

$$|f^{m-n}(x) - f^{m-n}(t)| = |(f^{-1})'(c)||f^{m-(n-1)}(x) - f^{m-(n-1)}(t)|.$$

Puesto que f es sobreyectiva, existe $z \in U$ tal que $f(z) = c$. Sustituyendo c en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
|f^{m-n}(x) - f^{m-n}(t)| &= |(f^{-1})'(f(z))||f^{m-(n-1)}(x) - f^{m-(n-1)}(t)| \\
&= \left|\frac{1}{f'(z)}\right| |f^{m-(n-1)}(x) - f^{m-(n-1)}(t)| \quad \text{(Teorema de la función inversa)} \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}|f^{m-(n-1)}(x) - f^{m-(n-1)}(t)| \\
&< \frac{1}{\lambda}\varepsilon\lambda^{-m+(m-(n-1))+1} \qquad \text{(Hipótesis Inductiva)} \\
&= \lambda^{-1}\varepsilon\lambda^{-m+m-n+1+1} \\
&= \varepsilon\lambda^{-m+(m-n)+1}.
\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción concluimos que:

$$|f^k(x) - f^k(t)| \leqslant \varepsilon\lambda^{-m+k+1}, \text{ para todo } k \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}.$$

Ahora veamos que se cumple la siguiente desigualdad:

$$|\log(f^m)'(x) - \log(f^m)'(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} |g(f^k(x)) - g(f^k(t))|.$$

En efecto,

$$\log(f^m)'(x) = \log \prod_{k=1}^{m} f'(f^{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{m} \log f'(f^{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{m} g(f^k(x)).$$

Por tanto,

$$\log(f^m)'(x) = \sum_{k=1}^{m} g(f^k(x)).$$

Luego,

$$|\log(f^m)'(x) - \log(f^m)'(t)| = \left|\sum_{k=0}^{m-1} g(f^k(x)) - g(f^k(t))\right|.$$

Así,

$$\begin{aligned}
|\log(f^m)'(x)-\log(f^m)'(t)| &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1}|g(f^k(x))-g(f^k(t))| \\
&\leqslant \frac{c}{\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}|f^k(x)-f^k(t)| \qquad \text{(Por (1))} \\
&\leqslant \frac{c}{\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon\lambda^{-m+k+1} \qquad\qquad \text{(Por (3))} \\
&= \frac{c\varepsilon}{\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{m-k-1} \\
&= \frac{c\varepsilon}{\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{m-(k+1)} \\
&\leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{k} \\
&\leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda}\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}} \\
&\leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda}\frac{\lambda}{\lambda-1} \\
&\leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\log(f^m)'(t)-\log(f^m)'(x)| \leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda-1}.$$

Entonces

$$-\frac{c\varepsilon}{\lambda-1} \leqslant \log\frac{(f^m)'(t)}{(f^m)'(x)} \leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda-1}.$$

Usemos la parte derecha de esta última igualdad. Aplicamos la función exponencial, la cual es creciente, y obtenemos que:

$$(f^m)'(t) \leqslant (f^m)'(x)\exp\left(\frac{c\varepsilon}{\lambda-1}\right).$$

Integramos con respecto a t en la ecuación anterior y obtenemos lo siguiente:

$$\varepsilon \leqslant f^m(x)-x_0 \leqslant f^m(x)-f^m(x_0) = \int_{x_0}^{x}(f^m)'(t)dt \leqslant \int_{x_0}^{x}(f^m)'(x)dt =$$
$$|x-x_0|(f^m)'(x)\exp\left(\frac{c\varepsilon}{\lambda-1}\right).$$

Luego,

$$\varepsilon \leqslant |x - x_0|(f^m)'(x) \exp\left(\frac{c\varepsilon}{\lambda - 1}\right).$$

Por tanto, hemos de escoger $B(U) = \varepsilon \exp\left(\dfrac{-c\varepsilon}{\lambda - 1}\right)$. ■

§2.2. Enunciado del Teorema Central.

Asumiremos que f es una Transformación de Markov que no es plana en los puntos $p \in S$ con $H(p) > 0$ y que todos los puntos $p \in S$ con $H(p) = 0$ son fuentes regulares periódicas para f.

Definición 2.1 (Intervalo Regular)**.** *Un intervalo regular $U = U_p$ para un punto singular p con $H(p) > 0$ es un intervalo que satisface las condiciones del Lema 2.1 ($U = (p, p + \varepsilon)$ o $U = (p - \varepsilon, p)$, dependiendo de que $p = a_k$ o $p = b_k$, ver Capítulo 1, Sección 1.3). Un intervalo regular $U = U_p$ para un punto singular p con $H(p) = 0$ es un intervalo tal que $f^r|U$ es continua, $(f^r)' > 1$ en $\overline{U_p} \backslash \{p\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} (f^{-r})^k x = p$ para $x \in U$ y tal que el Lema 2.2 se satisface para U_p (en este caso $x_0 = p$, se coloca f^r en lugar de f y el intervalo regular U es $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ o bien $(x_0 - \varepsilon, x_0)$).*

Teorema 2.1 (Teorema Central)**.** *Sea $f\colon I \to I$ una transformación de Markov. Supongamos que:*

1) f no es plana en puntos $p \in S$ con $H(p) > 0$.

2) Todos los puntos $p \in S$ con $H(p) = 0$ son fuentes regulares periódicas.

3) Existen intervalos regulares U_p (ver definición anterior), $p \in S$, tales que:

a) Si $p \in S$ y $H(p) > 0$, entonces $f(U_p) \subset U_{f(p)}$.

b) Si $p \in S$ y $H(p) > 0$, entonces longitud$(U_p) < A(U_p)A(U_{f(p)}) \dots A(U_{f^{H(p)-1}(p)})B(U_{f^{H(p)}(p)})$, donde A y B son como en el Lema 2.1 y Lema 2.2.

4) $\lambda_N^* = \inf\left\{ \max\limits_{1\leqslant n\leqslant N} \left|(f^n)'(x)\right| : x \notin \bigcup\limits_{p\in S} \overline{U}_p \right\} > 1$, para algún $N > 1$

Entonces existe $K \subset [a, b]$ tal que la transformación inducida de f en K, $f_K : K \to K$ está bien definida y es uniformemente expansora en el sentido de la Definición 1.6.

Capítulo 3

Teorema Central.

§3.1. Desarrollo del Teorema Central.

En lo que sigue f satisface las hipótesis del Teorema Central. Para $K \subset [a, b]$ y $x \in K$, denotamos por $n_K(x)$ al menor entero $n > 0$ tal que $f^n(x) \in K$, siempre que exista tal n (ver Definición 1.15), y $f_K(x) = f^{n_K(x)}(x)$.

Lema 3.1. *Si $S \cap \overline{K} = \emptyset$, existen M y $\lambda > 1$ de manera que $|(f_K^M)'(x)| > \lambda$, siempre que $f_K^M(x) = (f_K)^M(x)$ esté definida.*

Demostración. Coloquemos $\mathcal{U} = \bigcup_{p \in S} U_p$ y supongamos que $x \in \mathcal{U}$, es decir, $x \in U_p$ para algún $p \in S$. Asumamos que $H(p) > 0$ y denotemos $q = f^{H(p)}(p)$, el cual es un punto de S de período r (q es una fuente regular para f^r).

Por la condición 3(a) del Teorema Central tenemos lo siguiente:

$$x \in U_p \Rightarrow f^{H(p)}(x) \in f^{H(p)}(U_p) \subset U_{f^{H(P)}(p)} = U_q.$$

Por lo tanto,

$$f^{H(p)}(x) \in U_q.$$

Sea $m = m(x)$ el menor entero positivo tal que:

$$f^{rm+H(p)}(x) = f^{rm}(f^{H(p)}(x)) \notin U_q. \tag{3.1}$$

Notemos que la existencia de m está garantizada por la Proposición 1.1 aplicada a q, que es una fuente regular para f^r.

Ahora, por la regla de la cadena, Teorema 1.1, tenemos

$$\begin{aligned}
|(f^{rm+H(p)}(x))'| &= |(f^{rm}(f^{H(p)}(x)))'| \\
&= \left|(f^{rm})'(f^{H(p)}(x)).(f^{H(p)})'(x)\right| \\
&= |\underbrace{(f^{rm})'(f^{H(p)}(x))}_{(I)}| \underbrace{\prod_{k=0}^{H(p)-1} |f'(f^k(x))|}_{(II)}.
\end{aligned}$$

Estudiamos la expresión (I). De (3.1) tenemos que $f^{H(p)}(x) \in U_q = (q, q+\varepsilon)$, luego, por el Lema 2.2 aplicado a q como punto fijo (fuente regular) para f^r, tenemos que existe una constante $B(U_q) > 0$ ($B(U_q)$ no depende de x) tal que :

$$(f^{rm})'(f^{H(p)}(x)) > \tfrac{B(U_q)}{|f^{H(p)}(x)-q|}.$$

Examinemos la expresión (II). Por el lema 2.1 existe $A(U_p) > 0$ (independiente de x) tal que:

$$A(U) \leqslant \left|\frac{f'(x)(x-p)}{f(x)-f(p)}\right| \Rightarrow |f'(x)| \geqslant \frac{|A(U)(f(x)-f(p))|}{|x-p|}.$$

Por la condición 3(a) del Teorema Central se tiene que:

$$x \in Up \Rightarrow f^k(x) \in f^k(U_p) \subset U_{f^k(p)}$$

Por tanto,

$$f^k(x) \subset U_{f^k(p)} \quad \text{para todo} \quad 0 \leqslant k \leqslant H(p)-1.$$

Por inducción se obtiene que:

$$|f'(f^k(x))| \geqslant \tfrac{|A(U_{f^k(p)})[f(f^k(x))-f(f^k(p))]|}{|f^k(x)-f^k(p)|} \text{ para todo } k \in \{0, 1, ..., H(p)-1\}.$$

Luego,

$$\prod_{k=0}^{H(p)-1} |f'(f^k(x))| = |f'(x)f'(f(x))\dots f'(f^{H(p)-1}(x))|.$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant \frac{A(U_p)|[f(x)-f(p))]|}{|x-p|} \frac{A(U_{f(p)})|[f(f(x))-f(f(p))]|}{|f(x)-f(p)|} \dots \frac{A(U_{f^{H(p)-1}})|[f(f^{H(p)-1}(x))-f(f^{H(p)-1}(p))]|}{|f^{H(p)-1}(x)-f^{H(p)-1}(p)|} \\
&= \prod_{k=0}^{H(p)-1} A(U_{f^k(p)}) \frac{|f^{H(p)}(x)-f^{H(p)|}(p)}{|x-p|}. \quad \text{[simplificando y haciendo } f(f^{H(p)-1})(p) = f^{H(p)}(p)\text{]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|(f^{rm+H(p)}(x))'| &= |(f^{rm})'(f^{H(p)}(x))| \prod_{k=0}^{H(p)-1} |f(f^k(x))| \\
&\geqslant \frac{B(U_q)}{|f^{H(p)}(x)-q|} \prod_{k=0}^{H(p)-1} A(U_{f^k(p)}) \frac{|f^{H(p)}(x)-q|}{|x-p|} \\
&= \frac{B(U_q)}{|x-p|} \prod_{k=0}^{H(p)-1} A(U_{f^k(p)}) \\
&= A(U_p).A(U_{f(p)}) \ldots A(U_{f^{H(p)-1}(p)}).\frac{B(U_q)}{|x-p|} \\
&\geqslant A(U_p).A(U_{f(p)}) \ldots A(U_{f^{H(p)-1}(p)}).\frac{B(U_q)}{long(U_p)} = v(p) > 1. \quad \text{(Por 3(b) del T. C.)}
\end{aligned}$$

Notemos que $v(p)$ no depende de x.

Puesto S es un conjunto finito podemos elegir $v_1 = \text{mín}\{v(p) : p \in S\}$. Como $v(p) > 1$ para todo $p \in S$, entonces $v_1 > 1$.

Por lo tanto, para todo $x \in U_p$ se tiene

$$|(f^{rm+H(p)}(x))'| \geqslant v_1 > 1.$$

Cuando H(p)=0, entonces $q = p$ y $|(f^{rm})'(x)| > v_2 > 1$, para alguna constante v_2, pues $(f^r)' > 1 \; en \; U_q - \{q\}$.

Para todo $x \in \mathcal{U}$, denotaremos por $g(x)$ a $f^{rm+H(p)}(x)$. Existe un entero N_1, independiente de x, tal que se cumple lo siguiente:

Si $f^k(x) \in K$ está en la f-órbita entre x y $g(x)$, entonces $rm + H(p) < k + N_1$. Esto se sigue de que $S \cap \overline{K} = \emptyset$ e implica que la órbita entre x y $g(x)$ intersecta a K a lo más N_1 veces.

Para probar la afirmación anterior vamos a considerar tres casos:

Caso 1: $H(p) = 0,\ r = 1$. Es decir, p es un punto fijo (fuente regular).

Supongamos que $x \in \mathcal{U}$, $x \in U_p$ y que $f^k(x) \in K$ para algún $0 \leqslant k < m(x)$. Notemos que esto implica que $K \bigcap U_p \neq \emptyset$. Supongamos sin perder generalidad que $U_p = (p, p+\varepsilon)$ (Si U_p fuese de la forma un intervalo a izquierda de p el resultado se sigue tomando el supremo de este conjunto).

Sea $x_0 = \text{ínf}\{x \in K \bigcap U_p\}$. Puesto que $S \cap \overline{K} = \emptyset$, tememos que $x_0 \neq p$, luego, podemos considerar $m_0 = m(x)$, el primer tiempo es salida de x_0 del intervalo U_p.

Notemos que:

$$m_0 \geqslant m(y) \text{ para todo } y \in U_p \bigcap K$$

Luego, tomando $y = f^k(x)$ se tiene que

$$m_0 \geqslant m(f^k(x)).$$

Observar que

$$m(x) = k + m(f^k(x)).$$

Entonces,

$$m(x) - k = m(f^k(x)) \leqslant m_0.$$

Por tanto,

$$m(x) \leqslant m_0 + k.$$

En este caso tomamos $N_1 = N_1(p) > m_0$ y se obtiene la desigualdad requerida.

Puesto que S es un conjunto finito entonces tomamos el máximo de todos los enteros $N_1 = N(p)$, para los puntos $p \in S$ que entran en este caso.

<u>Caso 2</u> $H(p) = 0$, $r > 1$. Supongamos que $x \in \mathcal{U}$, $x \in U_p$, $f^k(x) \in K$, $0 \leqslant k < rm(x)$. Como esto último implica que $K \bigcap [U_p \bigcup U_{f(p)} \cdots \bigcup U_{f^r(p)}] \neq \emptyset$, supongamos que $f^k(x) \in K \bigcap U_p$, luego k es múltiplo de r (En el caso en que $f^k(x) \in K \bigcap U_{f^i(p)}$ *con* $1 < i \leqslant r$ se repite la prueba que trataremos a continuación con $f^i(p)$, el cual es también un punto de período r).

Sea $h = f^r$. Entonces,

$$h^{\frac{k}{r}}(x) = (f^r)^{\frac{k}{r}}(x) = f^k(x) \in K \bigcap U_p.$$

Denotemos por $m_h(x)$ al menor entero positivo tal que :

$$h^{m_h(x)}(x) = (f^r)^{m_h(x)}(x) \notin U_p.$$

Sea $x_0 = \text{ínf}\{x \in K \bigcap U_p\}$, puesto que $S \cap \overline{K} = \emptyset$, tenemos que $x_0 \neq p$.

Notemos que:

$$m_h(y) \leqslant m_h(x_0) \text{ para todo } y \in K \bigcap U_p.$$

Haciendo $y = h^{\frac{k}{r}}(x)$ en la expresión anterior, obtenemos que:

$$m_h(h^{\frac{k}{r}}(x)) \leqslant m_h(x_0).$$

Sea $t(x) = rm_h(x)$. Notemos que:

$$t(x) = k + t(f^k(x)).$$

Así obtenemos que :

$$rm_h(x) = k + rm_h(h^{\frac{k}{r}}(x)).$$

Luego,

$$rm_h(x) - k = rm_h(h^{\frac{k}{r}}(x)) \leqslant rm_h(x_0).$$

Por lo tanto,

$$rm_h(x) \leqslant rm_h(x_0) + k.$$

Sea r_0 el máximo del conjunto de todos los períodos de puntos $q \in S$. Entonces,

$$rm_h(x) \leqslant r_0 m_h(x_0) + k.$$

Luego, en este caso, tomamos $N_1 > r_0 m_h(x_0)$.

Caso 3: $H(p) > 0$, $r \geqslant 1$. Este caso se trata como en los casos anteriores aplicados a $q = f^{H(p)}(p)$ que es una fuente periódica regular para f^r.

Supongamos que $x \notin \mathcal{U} \cup S$. Puesto que f satisface la hipótesis 4 del Teorema Central, tenemos que existe un entero $N > 1$ tal que $\lambda_N^* = \text{ínf}\{\max_{1 \leqslant n \leqslant N} |(f^n(x))| : x \notin \cup_{p \in S} \overline{U_p}\} > 1$. Denotamos por $g(x)$ a $f^n(x)$, con $n \in [1, N]$, donde n es el menor entero tal que $|(f^n)'(x)| \geqslant \lambda_N^*$. Para todo $x \notin S$ tenemos que $g(x)$ está definida y

$|g'(x)| > \mu = \text{mín}\{v_1, v_2, \lambda_N^*\} > 1$. Además, la f-órbita entre x y $g(x)$ intersecta a K a lo más $N_2 = \text{máx}\{N, N_1\}$ veces.

Ahora supongamos que $x \in K$ y que $(f_K^M)(x)$ está definida, es decir, x retorna al conjunto K M-veces. La f-órbita entre x y $(f_K^M)(x)$ no intersecta a S, pues $f(S) \subset S$ y $S \cap K = \emptyset$. Así, están definidas $g(x)$, $g^2(x) = g(g(x))$, ..., $g^j(x)$, $g^{j+1}(x)$, con $(f_K^M)(x)$ en la f-órbita entre $g^j(x)$ y $g^{j+1}(x)$ (Para algún $j \in \mathbb{N}$). Ahora $M \leqslant N_2(j+1)$ y el número de puntos en la órbita de f entre f_K^M y $g^{j+1}(x)$ es a lo sumo N_2. De acá, si $\alpha = \sup |f'(y)|$, entonces

$$|(f_K^M)'(x)| \geqslant \mu^{j+1}\alpha^{-N_2} \geqslant (\mu^{\frac{1}{N_2}})^M \alpha^{-N_2},$$

para M grande, esta cantidad es más grande que 1. ■

LEMA 3.2. *Sea V un intervalo abierto pequeño con fuente periódica $p \in S$ como punto extremo, entonces V contiene un punto de $\widetilde{S} = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(S)$.*

Demostración. Notemos que si $x \in \widetilde{S}$, entonces $x \in f^{-k}(S)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, esto implica que $f^k(x) \in S$ para algún k.
Si $x \notin \widetilde{S}$, entonces los $g^i(x)$ arriba, están definidos para $j \geqslant 1$, y obtenemos que $\sup\limits_{n>0}(f^n)'(x) = +\infty$. En efecto , por el lema anterior, tenemos que:

$$|(f_k^M)'(x)| = |(f^{n_K(x)M})'(x)| \geqslant \mu^{j+1}\alpha^{-N_2} \geqslant (\mu^{\frac{1}{N_2}})^{n_K(x)M}, \text{ donde } \mu > 1.$$

Entonces, si $n_k(x)M$ es muy grande se obtiene que:

$$|(f_k^M)'(x)| \to +\infty.$$

Además,

$$|(f_k^M)'(x)| \in \{|(f^n)'(x)|/n > 0\}.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{n>0}(f^n)'(x) = +\infty.$$

Supongamos ahora, por reducción al absurdo que el lema es falso.

Entonces, por inducción se prueba que $f|_{f^mV}$ es una función inyectiva y continua, además f^mV es un intervalo para todo $m > 0$. En efecto, Tenemos que $V \bigcap \widetilde{S} = \emptyset$, luego V es un intervalo que no contiene puntos de S. Ahora, f es continua en V por ser transformación de Markov, luego $f(V)$ es un intervalo. Así sucesivamente se obtiene que $f^m V$ es un intervalo y que f es continua en $f^m V$ para todo $m > 0$. Además, por definición de Transformación de Markov, f es estrictamente monótona además de ser continua en $f^m V$ para todo $m > 0$, entonces $f|_{f^m V}$ es inyectiva. En conclusión $f|_{f^m V}$ es continua e inyectiva y $f^m V$ es un intervalo.

Si suponemos que el punto $p \in S$ tiene período r, es decir, $f^r(p) = p$, entonces, como $f^r(V) \bigcap V \neq \emptyset$, por la condición 3(c) de las Definición 1.5, tenemos que $f^r(V) \supset V$. Debido a que $f^r(V) \supset V$ se obtiene que $V \subset f^r(V) \subset f^{2r}(V) \subset ...$ es una sucesión estrictamente creciente de intervalos abiertos. $f^{mr}(V)$ tiene a p como punto inicial y llamemos $q_m = f^{mr}(q_0)$ al punto final de dicho intervalo. La sucesión q_m es estrictamente monótona, luego podemos hacer $q = \lim\limits_{n\to\infty} q_m$, entonces $f^r(q) = q$. En efecto,

$q = \lim\limits_{m\to\infty} q_m = \lim\limits_{m\to\infty} q_{m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} f^{(m+1)r}(q_0) = \lim\limits_{m\to\infty} f^r(f^{rm}(q_0)) = \lim\limits_{m\to\infty} f^r(q_m) = f^r(\lim\limits_{m\to\infty} q_m) = f^r(q)$.

Puesto que $q = \lim\limits_{n\to\infty} f^{mr}(q_0)$, tenemos que q es un atractor para f^r y $(f^r)'(q) \leqslant 1$, entonces $\sup\limits_{n>0} |(f^n)'(q)| = \sup\limits_{0<n<r} |(f^n)'(q)| < \infty$. Por lo tanto $q \in \widetilde{S}$ (De lo contrario, si $q \notin \widetilde{S}$ se tendría que $\sup\limits_{n>0} |(f^n)'(q)| = +\infty$). Por tanto, $f^k(q) \in S$ para algún $k \geqslant 0$. Entonces $q \in S$ ya que q es periódico y $f(S) \subset S$. Esta es una contradicción ya que todos los puntos de S son fuentes. ■

§3.2. Demostración del Teorema Central.

Denotemos por s al número de órbitas periódicas en S. Sean $r_1, r_2, ..., r_s$ sus períodos y escojamos puntos $p_1, p_2, ..., p_s$ en cada una de dichas órbitas. Por el Lema 3.2, se pueden encontrar puntos $y_i \in \widetilde{S} \bigcap U_{p_i}$ arbitrariamente cerca de p_i. Haciendo que cada y_i esté muy cercano al p_i respectivo, podemos asumir que:

$$
\begin{aligned}
Z(f^k(p_i)) &= f^{k-r_i}(y_i) \in U_{f^k(p_i)} \ \ para\ 0 \leqslant k < r_i \quad (1)\\
Z(p) &= f^{-H(p)} Z(f^{H(p)}(p)) \in U_p \ \ para\ p \in S,\ H(p) > 0 \quad (2)
\end{aligned}
$$

están bien definidas. Para (2) estamos usando que la función $f^{H(p)} : U_p \to U_{f^{H(p)}(p)}$ es inyectiva. Denotemos por W_p al intervalo $(z(p), p]$ (o $(z(p), p]$) para todo $p \in S$.

Colocamos $K = [a, b] \setminus \bigcup_{p \in S} W_p$ y tenemos que f_K es una transformación inducida en K por f que es uniformemente expansora. ■

Referencias bibliográficas.

[A] R. L. Adler *F-expansions revisited.* Springer lecture notes 318, 1-5. 1973.

[B] R. Bowen. *Invariant Measure for Markov Maps of the Interval.* Commun Math Phys. 69, 1-17.

[L] E. L. Lima *Curso de Análise, Vol 1.* Projeto Euclides, IMPA. 1994.

[R] H. Royden. *Real Analysis, Second Edition.* Macmillan Publishing. New York, 1963.