UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Operadores de Composición Compactos sobre Espacios de Bergman"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br.César Moreno.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional.
Tutor: MSc. Jurancy. Ereú.

Barquisimeto, Venezuela. Febrero del 2012

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"OPERADORES DE COMPOSICIÓN COMPACTOS SOBRE ESPACIOS DE BERGMAN"

Presentado por el ciudadano BR.CÉSAR MORENO. titular de la Cédula de Identidad Nº 16089546. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

---

[1] Aprobado ó Reprobado

Al Maestro de Maestros, ***Dios****. A mis abuelos padres y hermanos por su apoyo y amor incondicional.*

Agradecimientos

Ante todo agradezco a **Dios** por darme esa fuerza de voluntad que me impulsó a seguir adelante, en el camino del buen saber, y por darme la oportunidad de compartir con todas esas personas que hicieron posible este sueño. a mis padres y a mis hermanos gracias por brindarme siempre su amor, apoyo y buenos consejos, a mis tíos mis tías primos primas y demás familiares, a la familia Peraza mi segunda familia que siempre me tendieron la mano en los momentos difíciles, a los profesores que me brindaron su conocimiento e hicieron posible se cumpliera esta parte de mi meta.

Introducción

El estudio de los espacios de Bergman ha tenido un desarrollo muy vertiginoso a partir las últimas décadas del siglo XIX, estudio requiere de conocimiento de métodos tanto del Análisis Complejo como del Análisis Funcional y la teoría de Operadores. Los Operadores de Composición se desarrollan en ambas líneas de investigación, por esta razón también han sido objeto de multiples estudios en los últimos años , quedando aún muchos problemas por estudiar

Éste trabajo pretende recopilar algunos aspectos importantes de los Operadores de Composición actuando sobre Espacios de Bergman en el disco unitario, entre los cuales tenemos su acotamiento y su compacidad.

El trabajo esta estructurado en tres capítulos: El primer capítulo: Preliminares, está dedicado específicamente a introducir la teoría básica necesaria para comprender mejor el desarrollo del trabajo. En el capítulo dos: Espacios de Bergman, se definen los espacios de Bergman y se estudian algunas propiedades importantes necesarias para el tratamiento del ultimo capítulo; Operadores de Composición, donde se defininen los operadores de composición sobre cualquier espacio de Banach, se enuncia y demuestra el Teorema de Subordinación de Littlewood el cual garantizará el acotamiento del Operador de Composición sobre los espacios de Bergman y se hace un estudio de la compacidad de dicho Operador.

Resumen

Este trabajo presenta en un primer lugar una revisión detallada de los conceptos fundamentales de la teoría de funciones analíticas u holomorfas, espacios de Hilbert y teoría de Operadores compactos en espacios de Hilbert que nos permitirán tener una base teórica, la cual será necesaria para el desarrollo del trabajo. En segundo lugar se introducirán los espacios de Bergman A^2 de funciones analíticas, veremos como es la norma es este espacio, se usa el Teorema de Subordinación de Littlewood para demostrar que el Operador de Composición sobre el espacio de Bergman es acotado y finalmente se estudia la compacidad de este Operador.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Preliminares

Con la intención de que este trabajo sea en gran medida auto contenido a continuación introduciremos un conjunto de definiciones algunas propiedades y resultados básicos de teoría de Operadores: teoría de espacios normados completos y nociones elementales de series y sucesiones. Gran parte de las demostraciones de los enunciados son consecuencias inmediatas de definiciones, las mismas pueden encontrarse en libros de topología de espacios métricos y de series y sucesiones en espacios normados completos, como en: [1], [2] ,[11], [13],[17]

§1.1. Espacios vectoriales

Definición 1.1. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y X un conjunto no vacío dotado con reglas de adición y multiplicación por escalar que asignan a todo vector $x, y \in X$ una suma $x + y \in X$ y todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ un producto $\alpha x \in X$, entonces X se llama un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si se cumplen los axiomas siguientes*

1. *X es un grupo abeliano con respecto a la suma, es decir:*

   1.1 *Para todo $x \in X$: $x + y = y + x$.*

   1.2 *Para todo $x, y, z \in X$: $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

   1.3 *Existe un único $\oslash$, tal que para todo $x \in X$ se cumple:*
   $x + \oslash = x = \oslash + x$.

1.4 *Para todo* $x \in X$, *existe un único* $-x \in X$, *tal que:*
$x + (-x) = \oslash = (-x) + x$.

2. *La multiplicación por escalar verifica:*

2.1 *Para todo,* $x \in X$, *Para todo,* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha(\beta.x) = (\alpha.\beta)x$.

2.2 *Para todo* $x \in X$: $1.x = x = x,1$, (*1 la identidad en* $\mathbb{K}$) .

2.3 *Para todo* $x \in X$ *y para todo,* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $x(\alpha + \beta) = x.\alpha + x\beta$.

2.4 *Para todo,* $x, y \in X$ *y todo* $\alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.

Adicionalmente un espacio vectorial X cumple:

$$\text{Para todo } x \in X : \ 0.x = \oslash = x.0 \quad (\oslash \text{ es el elemento neutro de } \mathbb{K}).$$

Por otro lado, siempre que no se especifique el campo $\mathbb{K}$, entenderemos que se trata de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.1. *El conjunto* $\mathbb{R}$, *con campo* $\mathbb{R}$ *es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar. No es difícil verificar las condiciones de la definición* (2.18) *para este conjunto. Además,* $\mathbb{R}$ *se le denomina espacio vectorial real.*

Ejemplo 1.2. *El conjunto* $\mathbb{C}$, *con campo* $\mathbb{C}$ *también es un espacio vectorial con las operaciones de suma y multiplicación por escalar que a continuación serán definidas respectivamente;*

- *Para todo* $(x, y), (z, w) \in \mathbb{C}$: $(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$.
- *Para todo* $(x, y), (z, w) \in \mathbb{C} : (x, y).(z, w) = (x.z - y.w, x.w + y.z)$, *donde* (x, y) *es un escalar en el campo* $\mathbb{C}$.

Además, el conjunto $\mathbb{C}$ *se le denomina espacio vectorial complejo. Por otra parte, del hecho que* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *obtenemos que* $\mathbb{C}$ *con campo* $\mathbb{R}$ *también es un espacio vectorial.*

§1.2. Espacios métricos

Definición 1.2. *Un espacio métrico se define como un par* (X, d) *donde* X *es un conjunto arbitrario no vacío y* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *una aplicación, denominada métrica en* X*, tal que, para cuales quiera* x, y, $z \in X$ *se verifica:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in X$ *con* $d(x, y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para todo* $x, y, z \in X$.

Se dice que la condición (2) es la propiedad de simetría que debe tener cualquier noción de distancia, y la condición (3) se conoce como desigualdad triangular.

Ejemplo 1.3. *La métrica euclidiana sobre* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 0)$ *se define como:*

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *y* $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

§1.2.1. Espacios normados

Definición 1.3. *Un espacio normado es un par* $(X, \|.\|)$ *formado por un espacio vectorial* X *y una aplicación* $\|.\| : X \to \mathbb{R}$*, llamada norma, con las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$*, para todo* $x \in X$ *con* $\|x\| = 0$ *si, y sólo si,* $x = 0$.
2. $\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$*, para todo* $x \in X$ *y todo escalar* $\alpha \in K$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*, para todo* $x, y \in X$.

Ahora ilustraremos esta definición con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.4. $\mathbb{C}$ *es un espacio normado con La norma euclidiana, la cual se define como sigue:*

$$\|x - z\|_e = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}\,.$$

Donde $x = (x_1, x_2)$ *y* $z = (z_1, z_2)$. *Además la norma euclidiana también se denota como* $|.|$, *a esta notación se le conoce como módulo, esta notación coincide con la norma o métrica usual en* $\mathbb{R}$, *en lo sucesivo se empleará la notación* $|.|$, *cuando se refiera a distancia entre elementos del conjunto* $\mathbb{C}$. *También, notemos que la métrica euclidiana es la misma que la norma euclidiana sobre* $\mathbb{C}$ *.*

Ejemplo 1.5. $\mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 0$*) es un espacio normado con la norma euclidiana que se define como sigue :*

$$\|(x, y)\|_e = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

Donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *y* $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *.*

Definición 1.4. *Un espacio vectorial normado* X *se dice que es Banach si es completo respecto a la métrica inducida por la norma.*

Definición 1.5. *para* X *un espacio normado se define :*

$$\mathbf{B_1} := \{\ x \in X :\ \|x\|\ \leq 1\ \}\,.$$

y se llama Bola unitaria de X *.*

§1.3. Teoría de Operadores

Definición 1.6. *Sean* X,Y *espacios normados. Una aplicación* $T : X \rightarrow Y$ *es un operador lineal si, para todo* $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *.*

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y).$$

Definición 1.7. *Un operador lineal* T, *es acotado, si existe una constante* $M > 0$ *para la cual :*

$$\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$$

para todo $x \in X$ *.*

Definición 1.8. *Dado un operador* $T : X \rightarrow Y$ *lineal y acotado, donde* X, Y *son espacios normados ,se llama norma de* T *a la siguiente expresión :*

$$||T|| := \sup_{||x||_X} \frac{||T(x)||_Y}{||x||_X} \quad para\ x \neq 0\ .$$

Definición 1.9. *Para X, Y espacios de vectoriales normados, se define el conjunto:*

$$\mathfrak{L}(X,Y) := \{\ T : X \to Y : T \text{ es un operador lineal y acotado}\}\ .$$

y en el caso particular que $Y = X, \mathfrak{L}(X,Y)$ se denota como sigue.

$$\mathfrak{L}(X) := \{T\ : X\ \to\ X\ :\ T \text{ es un operador lineal y acotado}\}\ .$$

El cual es un espacio vectorial con las operaciones algebraicas usuales y es normado si definimos $||T||_{\mathfrak{L}}$ como en la definición anterior.

Teorema 1.1. *Sean X, Y espacios vectoriales normados. Si Y es de Banach entonces el espacio $\mathfrak{L}(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración:

Sea $\{T_n\}$ una sucesión se Cauchy en $\mathfrak{L}(X,Y)$, esto es:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{Existe } N_{(\varepsilon)}\ > 0,\ \text{tal que si } n,m > N_{(\varepsilon)} \text{ entonces }\ \| T_n - T_m \|_{\mathfrak{L}} < \varepsilon.$$

Luego, para cualquier $x \in X$ se cumple.

$$\begin{aligned} \| T_n(x) - T_m(x) \|_Y &= \| (T_n - T_m)(x) \|_Y \\ &\leq \| T_n - T_m \|_{\mathfrak{L}}\, ||x||_X \\ &< \varepsilon ||x||_X \quad \text{para } n,m\ >\ N_{(\varepsilon)}\ . \end{aligned}$$

Esto nos dice que $\{T_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y, como Y un espacio de Banach $\{T_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy que converge en Y luego existe $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$. Definamos ahora el siguiente operador:

$$\begin{aligned} T : X &\to Y \\ x &\to T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \end{aligned}$$

Veamos que T es lineal.

Sean $x, y \in X\ \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\ &= \alpha T(x) + T(y)\ . \end{aligned}$$

Luego T es lineal.

Veamos que T es acotado.

Si $n > N$ tenemos

$$\begin{aligned} \| T_n(x) - T(x) \|_Y &= \| T_n(x) - \lim_{m\to\infty} T_m(x) \|_Y \\ &= \lim_{m\to\infty} \| T_n(x) - T_m(x) \|_Y \\ &< \lim_{m\to\infty} \varepsilon ||x||_X = \varepsilon ||x||_X . \end{aligned}$$

Así, $T_n - T$ es acotado para $n > N$, y dado que por hipótesis T_n es acotado, entonces:

$$T = T_n - (T_n - T) \text{ es acotado}.$$

Luego T es acotado.

Ahora debemos probar que $T_n \to T$.

En efecto, sabemos que

$$\| T_n(x) - T(x) \|_Y < \varepsilon ||x||_x .$$

De esta desigualdad tenemos:

$$\frac{\| T_n(x) - T(x) \|_Y}{||x||_x} < \varepsilon \text{ para } x \neq 0 . \tag{1.1}$$

Luego ,al tomar el supremo sobre los $x \neq 0$ en (1.1) obtenemos:

$$\| T_n - T \|_{\mathfrak{L}} < \varepsilon .$$

De esta forma $T_n \to T$ con la norma de $\mathfrak{L}(X,Y)$ lo que establece la completitud de $\mathfrak{L}(X,Y)$.

■

Definición 1.10. *Sean $(X,d),(Y,d')$ espacios métricos. Se dice que una aplicación $T : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$, cuando:*

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0, \text{ tal que, } T(B(x_0,\delta)) \subset B(T(x_0),\varepsilon) .$$

Si T es continua en todo $x \in X$, a esta se llama aplicación continua.

Proposición 1.2. *$T : X \to Y$ es continua en x_0 si, y sólo si, toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x_0 verifica $T(x_n) \to T(x_0)$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) *Sea T continua en x_0, así por definición tenemos que˙:*
Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque $T(B(x_0, \delta)) \subset B(T(x_0), \varepsilon)$.
Como $x_n \to x_0$, y considerando el mismo δ de la continuidad, existe $N > 0$ tal que $x_n \in B(x_0, \delta)$, para todo $n > N$. Así, $T(x_n) \in B(T(x_0), \varepsilon)$.
En otras palabras .
Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N > 0 : T(x_n) \in B(T(x_0), \varepsilon)$ para todo $n > N$ lo que significa que $T(x_n) \to T(x_0)$.
($\Leftarrow$) *Supongamos por contrarrecíproco que T no es continua en x_0, entonces tenemos que :*

$$\textit{Existe } \varepsilon > 0, \textit{ para todo } \delta > 0, \textit{ existe } y \in B(x_0, \delta), \textit{ tal que, } T(y) \notin B(T(x_0), \varepsilon) .$$

Si elegimos $\delta_n = 1/n$, encontramos una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que, $y_n \in B(x_0, \delta_n)$ y $T(y_n) \notin B(T(x_0), \varepsilon)$. Entonces $y_n \to x_0$ pero $T(y_n) \nrightarrow T(x_0)$.

■

Teorema 1.3. *Sean X, Y espacios normados para un operador lineal $T : X \to Y$, las siguientes proposiciones son equivalentes :*

1. *T es acotado .*
2. *T es continuo .*

Demostración:

($1 \Rightarrow 2$). *Por hipótesis existe una constante $M > 0$, tal que, para cualquier $x \in X$.*

$$||T(x)||_Y \leq M||x||_X .$$

Luego sea $\varepsilon > 0$, y consideremos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, tal que, $||x_0 - x||_X < \delta$ para $x_0, x \in X$.
Ahora estudiemos lo siguiente :

$$||T(x_0) - T(x)||_Y = ||T(x_0 - x)||_Y \leq M||x_0 - x||_X < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, *tal que,* $||T(x_0) - T(x)||_Y < \varepsilon$ *siempre que* $||x_0 - x||_X < \delta$. *De esta forma se tiene que* T *es continuo.*
$(2 \Rightarrow 1)$. *Supongamos que* T *es continuo y no acotado, así para* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $x_n \in X$ *tal que:*

$$||T(x_n)||_Y \; > n||x_n||_X.$$

Entonces:

$$\left|\left|T\Big(\frac{1}{n}\frac{x_n}{\parallel x_n \parallel}\Big)\ \right|\right|_Y > 1, \quad sea \quad y_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\parallel x_n \parallel_X}, \quad con \quad ||y_n||_X = \frac{1}{n}.$$

Ahora $\parallel y_n - 0 \parallel_X \; = \; ||y_n||_X \; = \; \dfrac{1}{n}$, *pero sabemos que* $\dfrac{1}{n} \rightarrow \; 0$ *si* $n \rightarrow \infty$, *es decir,* $y_n \rightarrow \; 0$ *pero* $T(y_n) \nrightarrow 0 \; = \; T(0)$, *luego* T *no es continuo en 0. Esto es una contradicción al hecho de ser* T *continua, luego lo supuesto es falso así* T *es acotado.*

■

Definición 1.11. *Un operador lineal* $f : X \rightarrow K$ *con* $K = (\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C})$, *se llama funcional lineal.*

Definición 1.12. *Sea* X *un espacio vectorial normado el conjunto* X^* *de todos los funcionales lineales acotados en* X *se llama Dual de* X.

Corolario 1.4. *El conjunto* X^* *dotado con las operaciones puntuales algebraicas y con la norma:*

$$||f||_{x^*} = \sup\{ \; ||f(x)||_Y \; : \; ||x||_X \; = 1\}.$$

es un espacio de Banach.
Demostración:
Cuando Y *es un cuerpo de escalares tenemos que el espacio* $\mathfrak{L}(X, Y) = \mathfrak{L}(X, \mathbb{K}) = X^*$.

■

§1.4. Espacios Topológicos

Definición 1.13. *Sea* X *un conjunto no vacío, Una clase* $\mathcal{T}$ *de subconjuntos de* X *es una topología de* X *(o en* X *) si, y sólo si,* $\mathcal{T}$ *verifica los axiomas siguientes:*

- *X y $\emptyset$ pertenecen a $\mathcal{T}$.*
- *La unión de cualquier número de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertenecen a $\mathcal{T}$.*
- *La intercección de dos conjuntos cualesquiera de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.*

Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman conjuntos $\mathcal{T}$-abiertos, o simplemente conjuntos abiertos, y X conjuntoamente con la clase $\mathcal{T}$, es decir, el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

Un espacio de Banach X posee la topología generada por la norma, ademas de esta topología lo podemos dotar de otra topología llamada la topología Débil.

§1.4.1. Topología Débil

Supongamos que X es un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones tal que cada f en $\mathcal{F}$ mapea a X sobre un espacio topológico Y_f. Siempre es posible hallar una topología de X que haga cada elemento de $\mathcal{F}$ continuo; por ejemplo, simplemente declaramos cada subconjunto de X un abierto. Por esa razón, es conveniente ser capaz de encontrar una topología en X que tenga los suficientes conjuntos abiertos que haga que cada elemento de $\mathcal{F}$ sea continuo. Esto es siempre posible, como se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 1.5. *Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones y $\{(Y_f, \tau_f) : f \in \mathcal{F}\}$ una familia de espacios topológicos tal que cada f en $\mathcal{F}$ mapea a X sobre el correspondiente Y_f. Entonces existe una topología más pequeña en X con respecto a la cual cada elemento de $\mathcal{F}$ es continuo. Es decir, existe una única topología $\tau_{\mathcal{F}}$ de X tal que:*

1. *Cada f en $\mathcal{F}$ es $\tau_{\mathcal{F}}$-continua; y*
2. *Si $\mathcal{T}$ es una topología de X tal que cada f en $\mathcal{F}$ es $\mathcal{T}$-continua, entonces $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau$.*

La topología $\tau_{\mathcal{F}}$ tiene a $\{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F}, U \in \tau_f\}$ como una subbase.

Demostración:

Sea $\delta = \{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F}, U \in \tau_f\}$ y sea $\tau_{\mathcal{F}}$ la topología generada por la subbase δ.
Dado que $\delta \subseteq \tau_{\mathcal{F}}$, cada elemento de $\mathcal{F}$ es $\tau_{\mathcal{F}}$-continua.
Ahora, supongamos que, τ es una topología de X tal que, cada miembro de $\mathcal{F}$ es τ-continua. Entonces $\delta \subseteq \tau$, así $\tau_{\mathcal{F}} \subseteq \tau$. La afirmación de la unicidad se sigue inmediatamente. ■

Definición 1.14. *Sea* $\mathcal{F}$ *un conjunto, el cual es una familia topológica de funciones de* X*, y la topología* $\tau_{\mathcal{F}}$ *es la* $\mathcal{F}$ *topología de* X *o la topología débil de* X *inducida por* $\mathcal{F}$*. La colección* $\{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F}, U \in \tau_f\}$ *es la subbase estándar de esta topología, y la base estándar de esta topología es la colección de todos los conjuntos que son intersecciones finitas de elementos de esta subbase.*

Definición 1.15. *Un conjunto dirigido es un subconjunto no vacío* I *con una relación* $\preceq$ *tal que:*

1. $\forall \alpha \in I, \alpha \preceq \alpha$.
2. $\forall \alpha, \beta \in I$*, tales que* $\alpha \preceq \beta$ *y* $\beta \preceq \alpha$*, entonces* $\alpha = \beta$
3. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in I$*, tales que* $\alpha \preceq \beta$ *y* $\beta \preceq \gamma$*, entonces* $\alpha \preceq \gamma$.
4. *Para cada par de elementos* $\alpha, \beta \in I$*, existe un* $\gamma_{\alpha,\beta} \in I$ *tal que,* $\alpha \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$ *y* $\beta \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$.

Definición 1.16. *Una red en un conjunto* X *es una función definida entre un conjunto dirigido* I *y el conjunto* X *de la siguiente manera:*

$$r: \begin{array}{l} I \rightarrow X \\ \alpha \rightarrow x_\alpha \end{array}.$$

Definición 1.17. *Sea* $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ *una red en un espacio topológico* X*, y sea* x *un elemento de* X*. Entonces* (x_α) *converge a* x*, y* x *es llamado el limite de* (x_α) *, si para cada vecindad* U *de* x*, existe* α_U *en* I *tal que,* $x_\alpha \in U$ *siempre que* $\alpha_U \preceq \alpha$*. Esta convergencia es denotada por* $x_\alpha \longrightarrow x$ *o* $\lim_{\alpha \in I} x_\alpha = x$.

Definición 1.18. *Sea* X *un espacio vectorial normado. Se dice que una red* $x_n \in X$*, converge (débilmente) a* $x \in X$*, lo cual denotaremos* $x_n \overset{w}{\rightarrow} x$ *si,* $f(x_n) \rightarrow f(x)$*, para todo* $f \in X^*$.

Definición 1.19. *Sea* $\mathcal{F}$ *la familia de funciones en* X^**, dada por:*

$$\mathcal{F} = \{J_f\}_{f \in X}, \text{ donde } J_f \in X^{**}.$$

La topología débil en X^**, es determinada por la familia* $\mathcal{F}$ *y es llamada simplemente topología débil en* X^* *o topología débil* *.

Proposición 1.6. *Una red* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *en* X^*, *converge a* φ *en* X^* *en la topología débil en* X^* *si, y sólo si,* $\lim_{\alpha\in I}\varphi_\alpha(x) = \varphi(x)$, *para todo* $x \in X$.

Teorema 1.7 (Teorema de Banach-Alaoglu). *La bola unitaria cerrada del espacio de Banach* X^*, *es compacta en la topología débil** .

Definición 1.20 (Convergencia de Operadores). *Sean* X, Y *espacios normados, una sucesión de operadores* $\{T_n\}$ *en* $\mathfrak{L}(X, Y)$, *se dice que converge :*

1. *Uniformemente al operador* T *si,* $\{T_n\}$ *converge a* T *en norma en* $\mathfrak{L}(X, Y)$, *esto es si,* $||T_n - T||_{\mathfrak{L}} \to 0$.
2. *Fuertemente al operador* T *si,* $\{T_n x\}$ *converge a* $T(x)$ *fuertemente en* Y, *para cada* $x \in X$, *esto es si,* $||T_n(x) - T(x)||_Y \to 0$.
3. *Débilmente al operador* T *si,* $\{T_n(x)\}$ *converge débilmente a* $T(x)$ *en* Y, *para cada* $x \in X$ *es decir,* $|f(T_n(x)) - f(T(x))| \to 0$, *para todo* $f \in \mathfrak{L}(X)$ *y para todo* $x \in X$.

§1.5. Operadores en Espacios de Hilbert

Los operadores estudiados en éste trabajo se desarrollaran básicamente en espacios de Hilbert, es por esto necesario exponer algunas definiciones y hechos elementales de estos espacios .

Definición 1.21. *Sea* H *un espacio vectorial real o complejo, se define la función producto interno,* $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{K}$, *tal que, para todo* $x, y, z \in H$ *y todo* $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
2. $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$ *; la igualdad se cumple si, y sólo si,* $x = 0$.

Un espacio vectorial complejo H dotado de un producto interno es un, espacio con producto interno o pre-Hilbert,.

Definición 1.22 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz.). *Para todo $x, y \in H$, espacio con producto interno*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}\,.$$

Consecuencia de ésta desigualdad, es que todo espacio con producto interno o pre-Hilbert es también un espacio normado con la norma :

$$||x|| := \ \langle x,x\rangle^{1/2}\,.$$

Por tanto es también métrico, con la distancia :

$$d(x,y) \ = \ ||x-y|| \ = \ \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}\,.$$

Esto motiva a la siguiente definición .

Definición 1.23. *Un espacio de Hilbert es un espacio Pre-Hilbert completo, (respecto a la métrica asociada).Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que se ha definido un producto interno .*

Definición 1.24. *Para $x, y \in \mathcal{H}$ diremos que :*

1. *Son ortogonales si $\langle x,y\rangle = 0$, y se escribe, $x \perp y$.*
2. *x es llamado vector unitario de $\mathcal{H}$ si $||x|| = 1$.*
3. *si* F *es un subespacio lineal de $\mathcal{H}$, entonces, el conjunto* $\mathrm{F}^{\perp} := \{\ x \in \mathcal{H} : \langle x,y\rangle = 0,\ para\,todo\,y \in \mathrm{F}\}$, *se llama complemento ortogonal de* F *en $\mathcal{H}$.*

Definición 1.25. *Una sucesión de vectores $\{e_n\}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es llamada base ortonormal de $\mathcal{H}$ si se cumple las siguientes propiedades :*

1. *Los vectores en $\{e_n\}$ son mutuamente ortogonales .*
2. *Cada e_n es un vector unitario .*
3. *Para cada $x \in \mathcal{H}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$ converge a x, en la norma de la topología de $\mathcal{H}$.*

Definición 1.26. *Una sucesión ortonormal* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathcal{H}$, *es una sucesión completa, si* $\langle x, e_n\rangle = 0$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$ *si, y sólo si,* $x = 0$.

A una sucesión ortonormal completa de un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, se le llama base ortonormal de ese espacio .

Teorema 1.8. *Sea* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortonormal en* $\mathcal{H}$, *los siguientes enunciados son equivalentes :*

1. $\{e_n\}_n$ *es una base ortonormal .*

2. *La igualdad de Parserval se cumple, es decir*

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\ \langle x, e_n\rangle\ |^2\ .$$

Demostración:

Ver en [1] ■

Ahora a un espacio de Hilbert dotado de una base ortonormal se le llama espacio de Hilbert Separable .

Teorema 1.9 (**Teorema de Reprecentasión de Riesz).** *Sea* X *un espacio de Hilbert un funcional* $f : X \to \mathbb{K}$ *es lineal y acotado si, y sólo si, existe un único* $y\in X$ *tal que* $f(x) = \langle x, y\rangle$ *para todo* $x\in X$. *y además* $||f|| = ||y||$.

Demostración:

Probaremos primero que $||f|| = ||y||$.

Dado que $y \in X$, *consideremos el funcional* $f(x) = \langle x, y\rangle$. *Claramente,* f *es lineal además* $|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||$ *por la desigualdad de Cauchy- Schwarz, por lo tanto,* f *está acotado y* $||f|| \leq ||y||$. *Pero si hacemos* $x = y$, $|f(y)| = ||y||.||y||$ *lo que implica que* $||f|| \geq ||y||$ *y de esta manera* $||f|| = ||y||$.

Por otro lado sea f *un funcional lineal y acotado en* X, *y definimos*

$M = \{\, x\in X : f(x) = 0 \,\}$ *que es un subespacio cerrado de* X *por la continuidad de* f.

Si $M = X$, $f \equiv 0$ *y* $f(x) = \langle x, 0\rangle$, *es decir, existe* $y = 0$ *tal que* $f(x) = \langle x, 0\rangle$.

Si $M \neq X$, *existe* $w \neq 0$ *tal que* $w \in M^{\perp}$, *vamos a probar que existe* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tal que* $y = \alpha w$ *satisface las condiciones del teorema.*

Si $x\in M$, $f(x) = 0$ *y* $\langle x, \alpha w\rangle = \overline{\alpha}\langle x, \alpha w\rangle = 0$, *y cualquier* α *sirve.*

Si $x = \beta w$ *con* $\beta \neq 0$, $f(x) = \beta f(w)$ *y* $\langle x, \alpha w\rangle = \beta\overline{\alpha}\langle w, w\rangle$, *con lo que,* $f(x) = \langle x, \alpha w\rangle$ *cuando* $\alpha = \overline{f(w)}/||w||^2$.
Si $x \in X$ *es arbitrario,* $x = x - \beta w + \beta w$ *y elegimos* β *para que* $x - \beta x \in X$, *es decir* $\beta = f(x)/f(w)$. *De este modo*
$f(x) = f(x - \beta w) + f(\beta w) = \langle x - \beta w, \alpha w\rangle + \langle \beta w, \alpha w\rangle = \langle x, \alpha w\rangle = \langle x, y\rangle$.
Una vez establecido esto queremos demostrar que $y \in X$ *es único.*
Supongamos que no es único, es decir que existe otro elemento digamos $z \in X$ *tal que:*

$$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \text{ para todo } x \in X .$$

Ahora de esta igualdad y por las propiedades del producto interno tenemos $\langle x, y - z\rangle = 0$, *para cada x en x lo que a su vez implica que y - z = 0 o que y = z, lo que completa la demostración del teorema.*

■

Una de las aplicaciones de Teorema de Riesz es que permite de manera natural asociar a todo operador $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ el llamado operador adjunto $T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ definido por la condición $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. para todo $x, y \in \mathcal{H}$, lo cual expresaremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.10. *Sea* T *un operador acotado en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$, *entonces, existe un único operador* $T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *tal que :*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle .$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$ *y además* $||T|| = ||T^*||$.

Demostración:
Para cada $y \in \mathcal{H}$ definamos el funcional $f_y(x) = \langle T(x), y\rangle$. Debido a que

$$|\langle T(x), y\rangle| \leq ||T(x)||.||y|| \leq ||T||.||x||.||y|| .$$

Se deduce que f_y es un funcional lineal acotado, luego por el teorema de reprecentación de Riesz, existe un único $z \in \mathcal{H}$, tal que, $f_y(x) = \langle x, z\rangle$, definamos el operador

$T^*(y) = z$. Dicho operador es lineal pues, para todo $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(\alpha y_1 + y_2)\rangle &= \langle T(x), \alpha y_1 + y_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle T(x), y_1\rangle + \langle T(x), y_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle x, T^*(y_1)\rangle + \langle x, T^*(y_2)\rangle \\
&= \langle x, \alpha T^*(y_1) + T^*(y_2)\rangle \,.
\end{aligned}$$

Además T^* está acotado pues para todo $x, y \in \mathcal{H}$

$$|\langle x, T^*(y)\rangle| = |\langle x, T^*(y)\rangle| \leq ||T||.||x||.||y|| \,.$$

En particular, para $x = T^*(y)$ Tenemos que $||T^*(y)||^2 \leq ||T||.||T^*(Y)||.||y||$, de donde $||T^*(y)|| \leq ||T||.||y||$ y $||T^*|| \leq ||T||$ (1).
Por otra parte, como $T^{**} = T$, resulta que $||T|| = ||T^{**}|| \leq ||T^*||$ (2) luego de (1) y (2) obtenemos que $||T|| = ||T^*||$.

$\blacksquare$

Se dirá que T es autoadjunto si $T = T^*$. Para un operador autoadjunto la norma se calcula según .

$$||T|| := \sup\{ \, \langle T(x), x\rangle \; : \; ||x||_X = 1 \, \} \,.$$

Definición 1.27. *Para $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, se define su Núcleo como sigue :*

$$\ker(T) := \{ \, x \in \mathcal{H} : T(x) = 0 \, \} \,.$$

Éste conjunto es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

Definición 1.28. *Un operador lineal se llama definido positivo si, $\langle T(x), x\rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Un ejemplo de un operador definido positivo, es el operador Módulo de T; $|T| := (T^*T)^{1/2}$.*

Definición 1.29. *Sea T un operador lineal en $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, la Descomposición Polar de T, se define como $T := V|T|$, donde $V \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ es una isometría parcial, es decir,*
$||V(x)|| = ||x||$, para todo $x \in (\ker T)^{\perp}$.

§1.6. Operadores Compactos

Definición 1.30. *Un operador lineal T en $\mathcal{H}$. Es un operador compacto si,* $T(\mathbf{B_1})$ *es compacto (en la topología de la norma de $\mathcal{H}$).*

De esta definición se desprende que todo operador compacto debe ser acotado, en efecto: si T es un operador compacto $T(\mathbf{B}_1)$ es compacto , en particular $T(\mathbf{B}_1)$ es acotado, luego para cualquier $x\in \mathbf{B_1}$, existe un $M>0$ tal que $\| T(x) \|_Y \leq M$, luego si $x\neq 0$

$$\begin{aligned} \| T(x/||x||_X) \|_Y &\leq M \\ \| T(x) \|_Y &\leq M||x||_X . \end{aligned}$$

por lo tanto T es un operador acotado.

Proposición 1.1. *Un operador lineal T en $\mathcal{H}$ es compacto si, y sólo si, $\overline{T(B_1)}$ es compacto en $\mathcal{H}$.*

Demostración:

(⇒). Supongamos que T es un operador lineal y compacto en $\mathcal{H}$,
luego por la definición (1.30) se tiene que $T(\mathbf{B_1})$ es compacto en $\mathcal{H}$, y en particular $T(\mathbf{B_1})$ es cerrado en $\mathcal{H}$, por tanto se cumple que $T(\mathbf{B_1})=\overline{T(\mathbf{B_1})}$, lo que prueba que $\overline{T(\mathbf{B_1})}$ es compacto.

(⇐). Supongamos ahora que $\overline{T(\mathbf{B_1})}$ es compacto en $\mathcal{H}$.
Como $\overline{T(\mathbf{B_1})}$ es compacto tenemos en particular que es acotado en $\mathcal{H}$, consideremos una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en $\mathcal{H}$ que converja débilmente a x.
Veamos ahora que T es débilmente continuo, sabemos que $x_\alpha \to x$ débilmente, es decir que para todo funcional $\varphi\in\mathcal{H}^*$, $\varphi(x_\alpha)\to\varphi(x)$, o equivalentemente como $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert por el teorema de Riesz (1.9) que, $\langle x_\alpha, g\rangle \to \langle x, g\rangle$ esto es
$\lim_{\alpha\in I}\langle x_\alpha, g\rangle = \langle x, g\rangle$ para $g\in\mathcal{H}$, debemos probar que $T(x_\alpha)\to T(x)$ débilmente sobre $\mathcal{H}$. Para $\varphi\in\mathcal{H}^*$, nuevamente por el teorema de Riesz (1.9) existe $\overline{g}\in\mathcal{H}$, tal que $\overline{\varphi}(T(x_\alpha)) = \langle T(x_\alpha),\overline{g}\rangle$, por otro lado, por definición de T^* se tiene, $\overline{\varphi}(T(x_\alpha)) = \langle T(x_\alpha),\overline{g}\rangle = \langle x_\alpha, T^*(\overline{g})\rangle = \langle x_\alpha, g\rangle$, así
$\lim_{\alpha\in I}\overline{\varphi}(T(x_\alpha)) = \lim_{\alpha\in I}\langle T(x_\alpha),\overline{g}\rangle = \lim_{\alpha\in I}\langle x_\alpha, g\rangle = \langle x, g\rangle = \langle x, T^*(\overline{g})\rangle = \langle T(x),\overline{g}\rangle \quad (I)$.
Lo que prueba que $T(x_n)\to T(x)$ débilmente, así, T es débilmente continua en $\mathcal{H}$.
Ahora por el teorema en [6] sabemos que $\mathbf{B_1}$ es débil compacta en $\mathcal{H}$, ahora de este hecho y de la continuidad débil continuidad de T, tenemos que $T(\mathbf{B_1})$ es débil cerrado

en $\mathcal{H}$, podemos afirmar que $T(\mathbf{B_1})$ es cerrado en la topología de la norma en $\mathcal{H}$.
En efecto
consideremos una red $\{y_\alpha\}$ en $T(\mathbf{B_1})$, tal que $y_\alpha \to y$, debemos probar que $y \in T(\mathbf{B_1})$, para esto consideremos la red $\{x_\alpha\}$ en $\mathcal{H}$ que converja débilmente a x, si definimos $T(x_\alpha) = y_\alpha$, y por los cálculos realizados en (I) tenemos que $T(x_\alpha) \to T(x)$ débilmente esto implica que $y_\alpha \to y$ débilmente, como $T(\mathbf{B_1})$ es débil mente cerrado
$y = T(x) \in T(\mathbf{B_1})$, luego $T(\mathbf{B_1})$ es cerrado en la topología de la norma, con lo que se cumple que $T(\mathbf{B_1}) = \overline{T(\mathbf{B_1})}$, lo que garantiza la compacidad de $T(\mathbf{B_1})$ en la topología de la norma.

■

Existen unas series de condiciones equivalentes a la definición de operador compacto que se presentan en los siguientes teoremas.

Teorema 1.11. *Sea T en $\mathcal{H}$ un operador lineal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *T es compacto.*

2. *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión acotada en X, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ para la cual $\{T(x_{n_k})\}$ es convergente en la topología de la norma.*

Demostración:
$(1 \Rightarrow 2)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X, esto es, existe $M > 0$, para el cual se cumple que, $||x_n|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego podemos afirmar que, $\left\{\dfrac{x_n}{M}\right\}$ es una sucesión en $\overline{B_1}$, en efecto, notemos que:

$$\left|\left|\frac{x_n}{M}\right|\right| = \frac{1}{M}||x_n|| \leq \frac{1}{M}M = 1\,.$$

Ahora, consideremos $\{y_n\} = \{T(\frac{x_n}{M})\}$, la cual es una sucesión, tal que, $y_n \in \overline{T(\mathbf{B_1})}$ como T es compacto, entonces $\overline{T(\mathbf{B_1})}$ es compacto, por lo tanto $\{y_n\}$ tiene una subsucesión digamos $\{y_{n_k}\}$ la cual converge a algún $y \in \overline{T(\mathbf{B_1})}$, esto es, $y_{n_k} \to y$ en la topología de la norma. Por lo tanto, existe $\{x_{n_k}\}$ subsucesión de $\{x_n\}$, tal que, $\{T(x_{n_k})\}$ converge en la topología de la norma.
$(2 \Rightarrow 1)$. La prueba de esta parte de la demostración se realizará por contrarrecíproco, esto es supondremos que el operador T, no es compacto, esto implicaría que existe

una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *acotada tal que para cualquier subsucesión* $\{x_{n_k}\}$ *se cumple que* $\{Tx_{n_k}\}$ *no converge en la topología de la norma.*
En efecto, como T *no es compacto, por la definición* (1.30) *tenemos que* $\overline{T(B_1)}$ *no es compacto, sea* $M = \overline{T(B_1)}$. *Luego* M *es un conjunto no compacto, así, existe* M_n *sucesión en* M, *tal que, ninguna subsucesión* M_{n_k} *de* M_n *converge, ahora para* M_n *existe* $T(x_n) \in T(B_1)$, *de tal manera que se pueden hacer las siguientes correspondencias:*

$$\begin{aligned} M_1 &\longrightarrow T(x_1) \\ M_2 &\longrightarrow T(x_2) \\ M_3 &\longrightarrow T(x_3) \\ &\vdots \\ M_n &\longrightarrow T(x_n)\,. \end{aligned}$$

Ahora, podemos seleccionar un epsilon lo suficientemente pequeño, de tal forma que, la diferencias entre las M_n *y las* $T(x_n)$ *sean tan pequeña como queramos, esto lo podemos hacer para toda n. Por lo tanto, existe* $\{x_n\} \in B_1$ *y por otro lado como* $\{M_n\}$ *no poseen ninguna subsucesión convergente tenemos que,* $\{T(x_n)\}$ *no posee ninguna subsucesión convergente, lo que completa la prueba del teorema.*

■

Teorema 1.12. *Sea* T *en* $\mathcal{H}$ *un operador lineal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. T *es compacto.*
2. $\| T(x_n) \| \to 0$ *siempre que* $x_n \to 0$ *débilmente en* X.

Demostración:
$(1 \Rightarrow 2)$. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión acotada que converge débilmente a 0,* $y_n = T(x_n)$. *Sea* $h : X \to \mathbb{C}$, *un funcional lineal acotado, definamos:*

$$f(x) = h(T(x))\,.$$

Siendo h un funcional acotado, f *también lo es, en efecto:*

$$|f(x)| = |h(T(x))| \leq ||h||_X.||T(x)||_Y \leq ||h||_X.||T||_X.||x||_X \leq \widetilde{M}.||x||_X\,.$$

como $x_n \to 0$ *débilmente,* $f(x_n) \to f(0)$ *para todo* $f \in X^*$. *(A)*
De ésta forma $h(y_n) \to h(0)$, *luego, como* h *es un funcional acotado cualquiera,* $y_n \to 0$ *débilmente.*
Ahora se debe probar que $||y_n|| \to 0$. *Supongamos que no, es decir, supongamos que existe* $\varepsilon > 0$, *para todo* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > N$ *y* $||y_n|| > \varepsilon$. *Así existe una subsucesión digamos* $y_{n_k} \nrightarrow 0$ *en* $M = T(\mathbf{B_1})$, *Para esta subsucesión tenemos una sucesión* $\{x_{n_k}\}$ *la cual es acotada en* $\mathbf{B_1}$, *luego por la condición (2) del teorema* (1.11), *existe una subsucesión* $\{y_{\widehat{n}_k}\}$, *para la cual,* $\{T_{\widehat{n}_k}\}$ *es convergente en la topología de la norma, esto es,* $y_{\widehat{n}_k} = T_{\widehat{n}_k} \to \widehat{y}$, *luego por teorema se tiene que* $y_{\widehat{n}_k} \xrightarrow{w} \widehat{y}$, *y por (A) , tenemos* $y_n \xrightarrow{w} 0$ *luego* $y_{\widehat{n}_k} \xrightarrow{w} 0$, *y por la unicidad del límite* $\widehat{y} = 0$.
Así

$$||y_{\widehat{n}_k}|| \to 0 \quad y \quad ||y_n|| > \varepsilon\,.$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $\| y_n \| \to 0$.
$(2 \Rightarrow 1)$. *Suponiendo que* T *no es compacto, por teorema* (1.11) *existe una sucesión* $\{x_n\}$, *para la cual no hay subsucesión convergente a* $T(x_{n_k})$. *Sin pérdida de generalidad se puede suponer además que* $\{x_n\} \subset \mathbf{B_1}$, *por el teorema de Banach-Alaoglú,* $\mathbf{B_1}$ *es compacta, de ésta forma* $\{x_n\}$ *tiene una subsucesión convergente la cual es acotada pero no tiene imagen convergente por* T .

$\blacksquare$

Definición 1.31. *Si* X, Y *son espacios de Banach, se define el conjunto :*

$$\mathcal{K}(X,Y) = \{\ T : X \to Y : T \text{ es un Operador Compacto}\}.$$

En caso en que $X = Y$ *se denota por* $\mathcal{K}(X)$.

Teorema 1.13. *El conjunto* $\mathcal{K}(X,Y)$ *es un espacio de Banach.*
Demostración:
Como $\mathfrak{L}(X,Y)$ *es un espacio de Banach, es suficiente demostrar que* $\mathcal{K}(X,Y)$ *es un subespacio lineal cerrado de el , en efecto.*
Sean T_1, T_2 *operadores compactos, y sea* $\{x_n\}$ *una sucesión acotada en* X, *luego existe,* $M > 0$, *tal que,* $||x_n|| < M$ *para todo* n, *ahora notemos que*
$\{(T_1 + T_2)(x_n)\} = \{T_1(x_n) + T_2(x_n)\}$. *Luego existe una subsucesión de* $\{x_n\}$ *para la cual*

$\{T_1(x_n)\}$ converge. A su vez ésa subsucesión tiene otra subsucesión una subsucesión para la que $\{T_2(x_n)\}$ converge, luego para ésa subsucesión T_1+T_2 converge. Así $\mathcal{K}(X,Y)$ es subespacio lineal de $\mathfrak{L}(X,Y)$. Ahora es necesario verificar que si $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores compactos que convergen a T, este operador es compacto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada que converge débilmente a 0, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\{x_n\}\in \mathbf{B}_1$, por el teorema anterior, $\| T_k(x_n) \|\to 0$ para todo k, ahora se debe probar que $\| T(x_n) \|\to 0$. Dado $\varepsilon>0$ se puede encontrar un $m\in\mathbb{N}$, tal que, $\| T_m-T \|<\varepsilon/2$. De igual manera se puede encontrar un $N\in\mathbb{N}$, tal que, $\| T_m(x_n) \|<\varepsilon/2$ para todo $n>N$. Entonces para todo $n>N$

$$\| T(x_n) \| \leq \| T(x_n)-T_m(x_n) \| + \| T_m(x_n) \|<\varepsilon\,.$$

Así queda demostrado que T es un operador compacto y el espacio $\mathcal{K}(X,Y)$ es un espacio de Banach.

■

El teorema anterior demostró que $\mathcal{K}(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathfrak{L}(X,Y)$, ésta propiedad unida a la expresada en el siguiente teorema indican que $\mathcal{K}(X,Y)$, es un ideal cerrado de $\mathfrak{L}(X,Y)$ con respecto a la norma del operador.

Teorema 1.14. *Si $T\in\mathcal{K}(X,Y)$, entonces para todo operador acotado $S\in\mathfrak{L}(X,Y)$, los operadores TS y ST son compactos.*

Demostración:

Sean T y S como en el enunciado. Si $\{f_n\}$ es una sucesión acotada en X, entonces $\{S(f_n)\}$ también lo es, siendo T compacto, $\{T(Sf_n)\}$ tiene una subsuceción convergente, y como $\{T(S(f_n))\} = \{T(S(f_n)0\}$: TS es compacto. Sea $\{T(f_{n,k})\}$ una subsuceción convergente de $T(f_n)$, como S es acotado $\{S(T(f_{n,k}))\}$ converge y así ST es compacto.

■

§1.7. Teoría de Operadores Compactos en Espacios de Hilbert

Teorema 1.15. *Un operador lineal y acotado T en $\mathcal{H}$ es compacto si, y sólo si, T^* es compacto.*

Demostración:

($\Rightarrow$). *Supongamos que T es compacto y consideremos una sucesión $\{x_n\}$ acotada en $\mathcal{H}$*

y que converja débilmente a 0, como $\{x_n\}$ *es acotado existe una constante* $M > 0$ *para el cual* $||x_n|| \leq M$ *ahora estudiemos* $||T^*(x_n)||^2$

$$\begin{aligned} ||T^*(x_n)||^2 &= \langle T^*(x_n), T^*(x_n)\rangle \\ &= \langle T(T^*(x_n)), (x_n)\rangle \\ &\leq |\langle T(T^*(x_n)), (x_n)\rangle| \\ &\leq ||T(T^*(x_n))||.||x_n|| \\ &\leq ||T(T^*(x_n))||M\,. \end{aligned}$$

Lo que debemos probar ahora que $T^*(x_n)$ *converge débilmente a 0 en* $\mathcal{H}$ *es decir debemos probar que para toda* $\varphi \in \mathcal{H}^*$ $\varphi(T^*(x_n)) \to \varphi(T^*(0))$ *por el teorema de Riesz existe un único* $\rho \in \mathcal{H}$ *tal que*

$$\varphi(T^*(x_n)) = \langle T^*(x_n), \rho\rangle = \langle x_n, T^{**}(\rho)\rangle\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{n\in I} \varphi(T^*(x_n)) &= \lim_{n\in I}\langle T^*(x_n), \rho\rangle \\ &= \lim_{n\in I}\langle x_n, T^{**}(\rho)\rangle \\ &= \langle 0, T^{**}(\rho)\rangle \\ &= \langle T^*(0), \rho\rangle \\ &= \langle 0, \rho\rangle\,. \end{aligned}$$

Lo que prueba que $T^*(x_n) \to 0$ *débilmente, y por tanto* T^* *es débilmente continuo. Ahora por la compacidad de* T *y del hecho que* $T^*(x_n) \to 0$ *débilmente, podemos concluir port teorema* (1.12)*, que* $||T(T^*(x_n))|| \to 0$*, y así* $||T^*(x_n)|| \to 0$*, lo que establece la compacidad de* T^* *por teorema* (1.12)*.*
$(\Leftarrow)$*. Del hecho que* $(T^*)^* = T$ *y de lo probado anterior mente podemos concluir que* T *es compacto.*

■

Teorema 1.16. *Siendo* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* T *un operador definido en él, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. T^* *es compacto.*

2. T^*T *es compacto*.

3. $\mid T \mid = (T^*T)^{1/2}$ *es compacto*.

Demostración:

$(1 \Rightarrow 2)$. *Como* T *es compacto por el teorema* (1.14) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, *es un ideal, así* T^*T *es compacto*.

$(2 \Rightarrow 3)$. *Por la descomposición polar de* T *se tiene que* $T = V|T|$ *para algún operador* V *unitario en* $\mathcal{H}$, *recordando que un operador* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *es unitario si es lineal y satisface que* $UU^* = I = U^*U$, *definamos ahora* $S = |T|$, *entonces podemos afirmar que* $S^2 = T^*T$, *en efecto*.

Como $T = V|T|$, *implica que*, $T^* = (V|T|)^* = |T|^*V^*$.

Así, $T^*T = |T|^*V^*V|T| = |T|^*I|T| = |T|^*|T| = |T|^2 = S^2$. *Sea* x_n *una sucesión acotada en* $\mathcal{H}$ *que converge débilmente a 0, entonces*

$$\begin{aligned} \| S(x_n) \| &= \langle S(x_n), S(x_n) \rangle \\ &= \langle S^*(S(x_n)), x_n \rangle \\ &= \langle S^2(x_n), x_n \rangle . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\| S(x_n) \| \leq ||S^2(x_n)||.||x_n|| .$$

Por hipótesis T^*T *es compacto, y dado que* $S^2 = T^*T$, *se tiene que* S^2 *es compacto por lo tanto, basado en el teorema* (1.12) *ocurre que* $||S^2(x_n)|| \to 0$, *así obtenemos que* $\| S(x_n) \| \to 0$, *queda demostrado así que* $S = |T|$ *es compacto, por teorema* (1.12).

$(3 \Rightarrow 1)$. *Si* $|T|$ *es compacto, por la descompocisión polar de* T *se tiene que.* $T = V|T|$ $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ *es un ideal cerrado, luego* T *también es compacto luego por teorema* (1.15) *podemos concluir que* T^* *es compacto*.

∎

CAPÍTULO 2

Espacios de Bergman

El objetivo de este capítulo es definir y estudiar las propiedades de los espacios de Bergman, se comenzará con algunas definiciones y resultados de Teoría de Funciones de Variable Compleja, que se pueden ampliar en [3], [8] [9],[16], [19], [20], [21], [22].

Definición 2.1. *Para $r > 0$ y $z \in \mathbb{C}$, se denota $\mathbf{D}(z,r)$ al disco abierto de centro z y radio r. De la siguiente manera:*

$$\mathbf{D}(z,r) = \{\ z_0 \in \mathbb{C} : \mid z_0 - z \mid < r\ \}\,.$$

El disco unitario en el plano complejo se denotará $\mathbb{D}$ y $\partial\mathbb{D}$ si se quiere referir a su frontera.

Definición 2.2. *La medida de Lebesgue de área normalizada sobre el disco unitario en el espacio complejo la denotaremos $dA(z)$, y viene dada por:*

$$dA(z) := \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} rdrd\theta\,.$$

Definición 2.3. *Una vecindad de un punto z_0 en el plano complejo es el conjunto de todos los puntos z tales que $|z - z_0| < \epsilon$ donde ϵ es cualquier número real positivo.*

Definición 2.4. *Un conjunto S se dice que es abierto (relativo al plano complejo) si cada punto c de S tiene una vecindad contenida en S.*

Definición 2.5. *Una disconexión de un conjunto S son dos conjuntos S_1 y S_2 tales que:*

1. $S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset$

2. $S_1 \cup S_2 = S$

3. $S1 \cap S_2 = \emptyset$

4. $S_1' \cap S_2 = \emptyset$ *y* $S_1 \cap S_2' = \emptyset$.

Donde A' denota el conjunto de puntos de acumulación de A, recordando que z_0 es un punto de acumulación de un conjunto S si toda vecindad de z_0 contiene infinitos puntos de S .

Definición 2.6. *Un conjunto S se dice que es conexo si este no tiene disconexión, es decir, no existen dos conjuntos S_1 y S_2 satisfaciendo la difinición anterior .*

Definición 2.7. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, donde Ω es un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Si para $z_0 \in \Omega$ existe*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} ,$$

éste se llamará derivada de f en z_0 y se denota $f'(z_0)$. Si la derivada existe para todo $z \in \Omega$ se dice f es analítica en Ω .

Definición 2.8. *Se denomina $Hol(\Omega, dA)$, al espacio de todas las funciones analíticas u holomorfas a valores complejos definidas en Ω .*

Teorema 2.1. *Si f puede representarse mediante series de potencia en Ω, la función $f \in Hol(\Omega, dA)$. Recírocamente si $f \in Hol(\Omega, dA)$, para $a \in \Omega$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de valores constantes en $\mathbb{C}$, existe un $R > O$ tal que :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \ \forall z \in \mathbf{D}(a, R) ,$$

donde R es el radio de convergencia de la serie :

$$R := \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \mid a_k \mid^{1/k}} .$$

Demostración:

Ver en [8] ■

Definición 2.9. *La función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, es una función armónica si u tiene segundas derivadas parciales continuas y :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Teorema 2.2. *Una función $f = u + iv$ definida en Ω es una función analíca si, y sólo si, $Re(f) = u$ e $Im(f) = v$ son funciones armónicas que satisfacen las ecuaciones de Cauchy, es decir*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Demostración:

Ver en [8] ■

Teorema 2.3 (Fórmula Integral de Cauchy). *Sean f una función analítica en Ω, sea $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$, tal que, $\overline{\mathbf{D}(z_0, r)} \subseteq \Omega$. Por último, sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ la curva $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi it}$. Entonces para cada $z \in \mathbf{D}(z_0, r)$.*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\,.$$

Demostración:

Ver en [8] ■

Definición 2.10. *para todo $z \in \Omega$ se define el funcional punto evaluación $\alpha_z(f) := f(z)$ para todo $f \in Hol(\Omega, dA)$.*

Un espacio de Banach X en el cual los funcionales punto evaluación son continuos, se le llama Espacio Funcional Analítico.

Definición 2.11. *Supongamos que X es un espacio de medida y μ una medida positiva. Se define para $1 \leq p < \infty$, el espacio de funciones de potencia p-ésima integrable,como*

$$L^p(\mu) = \{\, f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\ :\ f\, medible\, y\ \int_X |f| d\mu < \infty\,\}\,.$$

Si definimos la aplicación $||\cdot||_P : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$, por

$$\|\ f\ \|_p := \left(\int_X \mid f \mid^p d\mu)\right)^{1/p},$$

tendremos que

$$L^p(\mu) = \{\, f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\ :\ f\, medible\, y\, ||f||_p < \infty\,\}\,.$$

En el caso $p = \infty$

$$L^{\infty}(\mu) := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \ ||f||_{\infty} = \sup ess\{ \ |f| : \ z \in \Omega \ \} < \infty\} .$$

Proposición 2.4. *Si* $1 \leq p \leq \infty$ *entonces* $L^p(\mu)$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *y* $||\cdot||_p$ *es una semi norma .*

Demostración:

Ver en [13] ∎

Teorema 2.5 (**Teorema Riesz-Fischer).** *Si* $1 \leq p \leq \infty$ *entonces* $(L^p(\mu), ||\cdot||)$ *es de Banach*

Demostración:

Ver en [13] ∎

En éste momento contamos con la teoría necesaria para definir los espacios de Bergman y estudiar algunos aspectos interesante de ellos .

Definición 2.12. *El espacio de Bergman* $A^p(\mathbb{D})$*, para* $1 \leq p < \infty$*, consiste de todas las funciones analíticas tales que* $f \in L^p(\Omega, dA)$*, esto es .*

$$A^p(\mathbb{D}) \ = \{ \ f \in L^p(\Omega, dA) : \ f \ \ es \ \ analítica \ \} .$$

Así, $A^p(\mathbb{D})$ *es el subespacio de funciones analíticas que están en* $L^p(\Omega, dA)$ *.*
En la mayoría de los casos se trabajará en el disco unitario $\mathbb{D}$ *y mientras no se preste a confución se escribirá* $L^p := L^p(\mathbb{D}, dA), Hol(\mathbb{D}) := Hol(\mathbb{D}, dA),$ *y* $A^p := A^p(\mathbb{D})$ *.*

§2.1. Fórmula Integral de Cauchy en A^p

Sabemos que cualquier $f \in A^p$ es una función analítica, luego para cualquier $z \in \mathbb{D}$, la fórmula de Cauchy expresa :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w - z} dw \, ,$$

donde $w \in \mathbf{D}(z, r)$ y $0 < r_1 \leq r = 1 - |z|$.
Si $w = z + r_1 e^{i\theta}$, entonces :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r_1 e^{i\theta})}{r_1 e^{i\theta}} r_1 i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r_1 e^{i\theta}) d\theta \, . \end{aligned}$$

Al multiplicar por r_1 a esta igualdad e integrando en función de r_1 se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_0^r r_1 f(z)dr_1 &= \frac{1}{2}\int_0^r\int_0^{2\pi} f(z+r_1e^{i\theta})\frac{r_1dr_1d\theta}{\pi}\\ \frac{r^2}{2}f(z) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} f(w)dA(w)\\ f(z) &= \frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}} f(w)dA(w)\,. \end{aligned}\tag{2.1}$$

Luego la expresión (2.1) obtenida, es la Fórmula de Cauchy en espacios de Bergman.

Si se evalúa el módulo en la igualdad (2.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}} f(w)dA(w)\right|\\ &\leq \frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}} |f(w)|dA(w)\,. \end{aligned}\tag{2.2}$$

Considerando $q\in\mathbb{R}$ de tal forma que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, es decir q es el conjugado de p, como $f\in L^p$ por la desigualdad de *Hölder* se tiene en (2.2) que:

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq \left(\int_{\mathbb{D}}(|f(w)|)^p dA(w)\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{r^2}\right)^q dA(w)\right)^{1/q}\\ |f(z)| &\leq \frac{1}{r^2}\left(\int_{\mathbb{D}}(|f(w)|)^p dA(w)\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|f(z)| \leq \frac{\| f\|_p}{(1-|z|)^2}\,. \tag{2.3}$$

para cualquier función $f\in A^p$.

Luego para cualquier conjunto compacto $\mathbf{K}\subset\mathbb{D}$, existe una constante C_K para la cual

$$\sup\{\,|f(z)| : z\in\mathbf{K}\,\}\leq \|\, f\,\|_p\, C_k\,.$$

Por lo tanto cada funcional evaluación puntual es acotado en $\mathbb{D}$ y de ésta forma continuo en el espacio de Bergman A^p.

Proposición 2.6. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones que pertenecen a A^p, si $\{f_n\}$ es una sucesión norma-p convergente, entonces su límite es una función analítica.*

Demostración:

Siendo $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión norma-p convergente es norma-p Cauchy, es decir, se cumple que para todo $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$, tal que, para $n,m>n_0$ implica $||f_n-f_m||_p<\varepsilon$ por otro lado, por la desigualdad (2.3) para $|z|<r$ con $r\in(0,1)$ fijo, se tiene:

$$| f_n(z) - f_m(z) | < \frac{\| f_n - f_m \|}{(1-r)^2} < \frac{\varepsilon}{(1-r)^2} < \varepsilon \, .$$

Por lo tanto, $\{f_n(z)\}$ *es una sucesión uniforme de Cauchy para cada subconjunto compacto de* $\mathbb{D}$*, lo que quiere decir que,* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una suseción de funciones analíticas que converge localmente a* $f(z)$*, veamos ahora que* $f(z)$ *es analíca, en efecto como cada* $f_n(z)$ *es analítica en* Ω*, tenemos por la fórmula integral de Cauchy.*

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f_n(w)}{w-z} dw \;\; z \in \mathbf{D}(a,r) \, .$$

Además que $f_n(z) \to f(z)$ *uniformemente sobre cada* $\overline{\mathbf{D}(a,r)} \subset \Omega$*, podemos tomar límites dentro de la integral, obteniéndose:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \;\; z \in \mathbf{D}(a,r) \, ,$$

lo cual demuestra que, $f(z)$ *es analítica en* $\mathbf{D}(a,r)$ *y así en* Ω*.*

■

Teorema 2.7. *El espacio de Bergman* A^p *es un espacio de Banach para* $1 \leq p < \infty$*.*

Demostración:

Como el espacio L^p *es completo, basta demostrar que,* A^p *es un subespacio cerrado de él. para ello Supongamos que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones analíticas en* A^p*, tal que,* $\| f_n - f \|_p \to 0$ *para alguna* $f \in L^p$*, ahora fijemos algún* $r \in (0,1)$*, entonces para* $|z| < r$*, por la desigualdad* (2.3) *tenemos que*

$$| f_n(z) - f_m(z) | \leq \frac{1}{(1-r)^2} \| f_n - f_m \|_p \, .$$

Luego $\{f_n(z)\}$ *es una sucesión uniforme de Cauchy es cada subconjunto compacto de* $\mathbb{D}$*, así,* $f_n(z) \to f(z)$ *uniformemente en cada subconjunto compacto de* $\mathbb{D}$*, y por la proposición* (2.6) $f(z)$ *es analítica en* $\mathbb{D}$*.*

■

Se ha demostrado que el espacio A^p es de Banach y también que los funcionales punto evaluación son acotados, luego podemos afirmar que A^p es un Espacio de Banach Funcional Analítico. En el caso particular en que $p = 2$, se tiene el espacio A^2, definamos ahora un producto interno sobre él.

Definición 2.13. *Si f y g son dos funciones en A^2, la expresión de su producto interno esta dado de la siguiente manera:*

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}dA(w)\,.$$

Luego, por el teorema (2.7) con (p = 2) se tiene que A^2 es Banach con la norma en A^2 como:

$$||f||_2 = \left(\int_{\mathbb{D}} (|f(w)|)^2 dA(w) \right)^{1/2}.$$

Así A^2 es un espacio de Hilbert con producto interno.

Para cualquier función $f \in A^2$, sabemos que por ser analítica, tiene un desarrollo en serie de Taylor convergente en $\mathbb{D}$, y el producto interno se puede expresar en función de tales series.

Sean

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\; y \;\; g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\,.$$

Para ciertos valores $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, los desarrollos de Taylor de dos funciones en $A^2(\mathbb{D})$, entonces:

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{ni\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^n e^{-ni\theta}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} r^{2n}\,. \end{aligned}$$

Luego, multiplicando por $\dfrac{rdrd\theta}{\pi}$, e integrando sobre $\mathbb{D}$ tenemos;

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}dA(w) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}r^{2n}\frac{rdrd\theta}{\pi}\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}r^{2n+1}\frac{drd\theta}{\pi}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}\int_0^1 r^{2n+1}dr\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\pi}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}\int_0^1 r^{2n+1}dr\left(\frac{2\pi}{\pi}\right)\\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}\left(\frac{r^{2n+2}}{2n+2}\right)_{r=0}^{r=1}\\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\overline{b_n}}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Así

$$\langle f,g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\overline{b_n}}{n+1}\,,$$

esta sería la expresión del producto interno en $A^2(\mathbb{D})$. De esta manera la norma para cada $f\in A^2$ se puede calcular en función de los coeficientes de su expansión en serie.

$$\| f \|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}\,. \tag{2.4}$$

De manera que podemos dar una nueva definición para el espacio de Bermang A^P

Definición 2.14. *Sea f una función analítica y $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ su expansión en serie de Taylor. Se define el espacio de Bergman A^2 como el espacio de las funciones analíticas tales que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}<\infty\,.$$

A^2 es un Espacio Funcional Analítico y por el Teorema de representación de Riez, existe una única función K_z para la cual:

$$\alpha_z(f)=f(z)=\langle f,K_z\rangle \quad para\,todo\, f\in A^2\,.$$

La intención ahora es caracterizar a K_z como un elemento de A^2.

Teorema 2.8. *Sea $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base ortonormal de A^2 entonces.*

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n(w)\,.$$

Demostración:

Si $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de A^2 como $K_z \in A^2$,

$$\begin{aligned} K_z &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle K_z, e_n\rangle e_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle e_n, K_z\rangle} e_n\,. \end{aligned}$$

Como K_z es el funcional punto evaluación, $\langle e_n, K_z\rangle = e_n(z)$.

$$K_z = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n\,.$$

Notemos que $K_z(w)$ para $w \in \mathbb{D}$ es una función analítica, y su serie de Taylor es convergente luego:

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n}(z) e_n(w)\,.$$

Así queda demostrado el teorema. ∎

Definición 2.15. *Se define el Núcleo de Bergman o Núcleo Reproductor de A^2 como*

$$K(z,w) = \overline{K_z(w)}\,.$$

Corolario 2.9. *En A^2, el funcional punto evaluación en el punto $w \in \mathbb{D}$ viene dado por $f(z) = \langle f, K_z\rangle$ donde:*

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} \quad y \quad \| K_z \| = \frac{1}{1-|z|^2}\,.$$

Demostración:

Sea $e_n(w) := \sqrt{n+1}w^n$. primero se verificará que $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ forma una base ortonormal para $A^2(\mathbb{D})$ en efecto.

$$\begin{aligned} \langle e_m, e_n\rangle &= \int_{\mathbb{D}} e_m(w)\overline{e_n(w)} dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} (\sqrt{m+1}) w^m (\sqrt{n+1}) \overline{w^n} dA(w)\,. \end{aligned}$$

Si $w = re^{i\theta}$ *para* $0 \leq r \leq 1$ *y* $0 \leq \theta \leq 2\pi$, *se tendrá:*

$$\begin{aligned}\langle e_m, e_n\rangle &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{(m+1)(n+1)}r^{m+n}e^{i(m-n)\theta}\frac{rdrd\theta}{\pi}\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{(m+1)(n+1)}r^{m+n+1}dr\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)\theta}d\theta.\end{aligned}$$

Pero

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)\theta}d\theta = \begin{cases}0 & si\ m\neq n\\ 2\pi & si\ m=n\,.\end{cases}$$

Por lo tanto si $m = n$

$$\begin{aligned}\langle e_m, e_m\rangle &= \frac{2\pi(m+1)}{\pi}\int_0^1 r^{2m+1}dr\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Así, $e_n(w) = \sqrt{n+1}w^n$ *con* $n = 0$ *forma un conjunto ortonormal.*
Para probar que es una base de A^2 *se verificará que es completo. Es bien conocido que probar este hecho es equivalente a demostrar que la igualdad de Parserval se cumple para esta sucesión, es decir:*

$$\parallel f\parallel^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|\ \langle f, e_n\rangle\ |^2 \quad para\ todo\ f\in A^2(\mathbb{D})\,.$$

Sea $f \in A^2(\mathbb{D})$ *y* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ *su desarrollo de Taylor correspondiente, ahora estudiemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned}\langle f, e_m\rangle &= \int_{\mathbb{D}}f(z)\Big(\sqrt{m+1}\Big)\overline{(z^m)}dz\\ &= \int_{\mathbb{D}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\Big(\sqrt{m+1}\Big)\overline{(z^m)}dz\\ &= \sqrt{m+1}\int_{\mathbb{D}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\overline{(z^m)}dz\\ &= \sqrt{m+1}\int_0^1\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(a_nr^{n+m}e^{i(n-m)\theta})\frac{rdrd\theta}{\pi} \qquad si \qquad z = re^{i\theta}\\ &= \frac{\sqrt{m+1}}{\pi}\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^{n+m+1}dr\ \int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}d\theta\,.\end{aligned}$$

Esta última integral es diferente de cero sólo para $n = m$, así se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle f, e_m \rangle &= 2\sqrt{m+1}\int_0^1 a_m r^{2m+1} dr \\
&= 2\sqrt{m+1}a_m\Big(\frac{r^{2m+2}}{2m+2}\Big)_{r=0}^{r=1} \\
&= 2\sqrt{m+1}a_m\Big(\frac{1}{2(m+1)}\Big) \\
&= \sqrt{m+1}a_m\Big(\frac{1}{m+1}\Big) \\
&= \frac{a_m}{\sqrt{m+1}}\,.
\end{aligned}$$

Esto es

$$\langle f, e_m \rangle = \frac{a_m}{\sqrt{m+1}}\,. \tag{2.5}$$

Entonces por (2.4)

$$\begin{aligned}
||f||_2^2 &= \sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{a_m}{\sqrt{m+1}}\right|^2 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{|a_m|^2}{(m+1)}\,.
\end{aligned}$$

Por la igualdad (2.5) *se obtiene*

$$\parallel f \parallel_2^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \mid \langle f(z), e_m(z) \rangle \mid^2 \ .$$

Lo que prueba que $\{e_m\}_{m=0}^{\infty}$ *es una base ortonormal para* $A^2(\mathbb{D})$. *Siguiendo con la demostración del colorario, por el teorema* (2.8) *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
K(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\overline{w}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(z\overline{w})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(z\overline{w})^n\,.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pero sabemos que la segunda serie en (2.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z\overline{w})^n = \frac{1}{1-z\overline{w}} \quad para \ \mid z\overline{w} \mid < 1\,. \tag{2.7}$$

Ahora, consideremos el producto de Cauchy de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(z\overline{w})^n$ *con si misma para hallar una fórmula para la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\overline{w}^n$ *esto es:*

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z\overline{w})^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{w})^k\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(z\overline{w})^k(z\overline{w})^{n-k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((z\overline{w})^n\sum_{k=0}^{n}1\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z\overline{w})^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}n(z\overline{w})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(z\overline{w})^n
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}n(z\overline{w})^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(z\overline{w})^n\right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty}(z\overline{w})^n\right)\\
&= \left(\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\right) - \frac{1}{1-z\overline{w}} \quad para \ |z\overline{w}| < 1\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Así al sustituir (2.7) *y* (2.8) *en* (2.6) *tenemos*

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\,.$$

Ahora, estudiemos $\parallel K_z \parallel$.

$$\begin{aligned}
\parallel K_z \parallel &= \langle K_z, K_z\rangle^{1/2}\\
&= [K_z(z)]^{1/2}\\
&= \left[\frac{1}{(1-z\overline{z})^2}\right]^{1/2}\\
&= \frac{1}{1-\mid z\mid^2}\,.
\end{aligned}$$

y así queda demostrado el teorema.

■

Corolario 2.10. *Sea $f \in A^2$, ésta función puede ser representada por la siguiente integral*

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w) .$$

Demostración:

Por la definición del núcleo Reproductor

$$\alpha_z(f) \;=\; f(z) \;=\; \langle f, K_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)} dA(w) = \; \int_{\mathbb{D}} f(w) K(z,w) dA(w)$$

Luego por el corolario (2.9) *:*

$$f(z) \;=\; \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w) .$$

■

Definición 2.16. *La función $k_z(w)$ se llamará kernel reproductor normalizado en $A^2(\mathbb{D})$ y su expresión es:*

$$k_z(w) := \frac{K(w,z)}{\sqrt{K(z,z)}} .$$

Donde

$$\frac{K(w,z)}{\sqrt{K(z,z)}} \;=\; \frac{\dfrac{1}{(1-w\overline{z})^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{(1- \mid z \mid^2)^2}}} = \frac{1- \mid z \mid^2}{(1-w\overline{z})^2} .$$

Notemos que para $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base ortonormal de A^2 , $k_z(w)$ también se puede expresar de la siguiente forma:

$$k_z(w) = (1- \mid z \mid^2) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(w)\overline{e_n(z)} .$$

Definición 2.17. *Sea dA una medida de área de Lebesgue normalizada en $\mathbb{D}$. Para $\beta > -1$, dA_β será la medida finita definida según*

$$dA_\beta(z) := (1- \mid z \mid^2)^\beta dA(z) .$$

Definición 2.18. *El espacio de Bergman Ponderado A^p_β, con $\beta > -1$ y $p > 0$, se define como el conjunto de las funciones alalíticas en $\mathbb{D}$ para las cuales*

$$\int_{\mathbb{D}} \mid f(z) \mid^p dA_\beta(z) < \infty .$$

El espacio de Bergman Ponderado A^p_β es un subespacio cerrado del espacio $L^p(\mathbb{D}, dA_\beta)$, como éste último espacio es un espacio de Banach, A^p_β también lo es. La demostración de éste hecho es perecida a la realizada en el teorema (2.7) .

CAPÍTULO 3

Operadores de Composición

La composición es una operación que surge de manera natural al trabajar en espacios de funciones, en éste caso para una función φ analítica en el disco unitario, se estudiará el operador que compone una función en $Hol(\mathbb{D})$ con φ, que se llamará Operador de Composición. La acotación y la compacidad, serán los temas específicos ha ser desarrollados en este capítulo, sera necesario recordar algunos resultados y definiciones relevantes necesarias para el desarrollo del tema y se pueden ampliar en [4],[12], [16], [19],[20],[21] .

Definición 3.1. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{D}$ si para cada $z \in \mathbb{D}$, $r \in (0,1)$ y h una función armónica definida en una vecindad de $\overline{D(z,r)}$ que satisface $f \leq h$ para $z = r$,se dice que f es subarmónica es $\mathbb{D}$ si $f \leq h$ para $z \leq r$.*

Teorema 3.1. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{D}$, f es subarmónica, si y sólo si, para cada $z_0 \in \mathbb{D}$ existe un $r_0 > 0$ tal que si $D(z_0, r_0) \subset \mathbb{D}$:*

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \quad \text{para todo} \ \ r \in (0, r_0) .$$

Un ejemplo interesante de una función subarmónica, que será usado mas adelante, es el siguiente .

Ejemplo 3.1. *Si $f \in Hol(\mathbb{D})$, la función $\mid f(z) \mid^p$, para $p > 0$, es una función subarmónica .*

Si $z_0 \in \mathbb{D}$ *es tal que* $f(z_0) \neq 0$, *entonces una rama de* $(f(z))^p$ *es analítica en una vecindad de* z_0, *así para* $r > 0$ *tal que ,* $D(z_0, r) \subset \mathbb{D}$ *:*

$$(f(z_0))^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(z_0 + re^{i\theta}))^p d\theta \,.$$

de aquí se deduce que:

$$\mid f(z_0) \mid^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0 + re^{i\theta}) \mid^p d\theta \,.$$

Si $f(z_0) = 0$, *la desigualdad también se cumple, entonces se puede afirmar que* $\mid f(z) \mid^p$ *es una función subarmónica .*

Teorema 3.2 (Teorema del Módulo Máximo). *Si* f *es una función analítica en un dominio* Ω *y* z_0 *es un punto en* Ω *con* $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ *para todo* $z \in \Omega$, *entonces* f *debe ser una función constante.*

Demostración:

Si $f(z)$ *es analítica en un dominio* Ω *y* $z_0 \in \Omega$, *debido a la fórmula integral de cauchy*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{f(z)}{z - z_0}dz \,.$$

Ahora como $\Omega \subset \mathbb{D}$, *es un abierto no necesariamente convexo, con* $z_0 \in \Omega$ *y* $R > 0$, *tal que* $D(z_0, R) \subset \Omega$ *entonces por ser* $D(z_0, R)$ *convexo, a partir de la igualdad anterior obtenemos que para cada* $r \in (0, R)$ *.*

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(z_0)}{z - z_0}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}}e^{i\theta}d\theta \quad \textit{para } z = z_0 - re^{i\theta} \;\; \textit{y } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta \,. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es conocida como la Fórmula del valor medio de Gauss, y así al tomar módulo.

$$\mid f(z_0) \mid \quad \leq \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0 + re^{i\theta}) \mid\mid d\theta \mid \,. \tag{3.1}$$

Ahora por hipótesis tenemos que $\mid f(z) \mid \leq \mid f(z_0) \mid$, *para* $\mid z - z_0 \mid < \; r$ *tenemos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0 + re^{i\theta}) \mid\mid d\theta \mid &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0) \mid\mid d\theta \mid \\ &= \mid f(z_0) \mid \,. \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0+re^{i\theta}) \mid\mid d\theta \mid \quad \leq \quad \mid f(z_0) \mid \,. \tag{3.2}$$

De (3.1) *y* (3.2) *se tiene*

$$\mid f(z_0) \mid = \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0+re^{i\theta}) \mid\mid d\theta \mid \ .$$

Así

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0+re^{i\theta}) \mid\mid d\theta \mid - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0) \mid\mid d\theta \mid = \ 0\,.$$

Luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mid f(z_0+re^{i\theta}) \mid - \mid f(z_0) \mid) \mid d\theta \mid = \ 0\,.$$

Como el integrando es menor o igual que cero se tiene que

$$\mid f(z_0+re^{i\theta}) \mid - \mid f(z_0) \mid d\theta \ = \ 0\,.$$

Por lo tanto

$$\mid f(z) \mid = \mid f(z_0) \mid = \ 0 \ en \ \mid z-z_0 \mid < r\,.$$

Ahora dado que el módulo de la función analítica $f(z)$ es constante en $D(z_0,r)$, entonces $f(z)$ es constante en $\mid z-z_0 \mid < r$. Así queda demostrado el teorema.

■

Una aplicación importante del Teorema del Módulo Máximo, que se utilizará en éste trabajo es el Lema de Schwarz

Lema 3.3 (Lema de Schwarz). *Sea $f \in Hol(\mathbb{D})$ tal que $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y $f(0)=0$, entonces:*

1. *$|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, con igualdad para algún $z \in \mathbb{D}$ si, y sólo si, f es una rotación.*

2. *$\mid f'(0) \mid \leq 1$, con igualdad solamente si f es una rotación.*

Demostración:
ver en [8] ■

Ahora se está en condiciones de desarrollar el tema de Operadores de Composición.

Definición 3.2. *Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, una función analítica se define el Operador Composición asociado a φ (llamado el símbolo) en el espacio $Hol(\mathbb{D})$ como:*

$$C_\varphi f = f \circ \varphi \text{ para todo } f \in Hol(\mathbb{D}).$$

Como $f \circ \varphi \in Hol(\mathbb{D})$, podemos asegurar que,

$$C_\varphi : Hol(\mathbb{D}) \to Hol(\mathbb{D}).$$

Algunas propiedades de los Operadores de Composición son caracterizadas por la función analítica φ asociada.

Teorema 3.4. *C_φ es uno a uno si φ no es constante.*
Demostración:
Sean $f, g \in Hol(\mathbb{D})$, si $C_\varphi(f) = C_\varphi(g)$ entonces

$$\begin{aligned} C_\varphi(f(z)) &= C_\varphi(g(z)) \\ f(\varphi(z)) &= g(\varphi(z)). \end{aligned}$$

Por hipótesis φ no es constante, $\varphi(\mathbb{D})$ es abierto y por teorema de unicidad, en [8], se tiene que $f = g$ ■

Teorema 3.5. *C_φ es invertible si, y sólo si, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es biyectiva.*
Demostración:
Sea $f \in Hol(\mathbb{D})$, si φ es biyectiva, existe φ^{-1}, entonces

$$\begin{aligned} C_{\varphi^{-1}} \circ C_\varphi(f) &= C_{\varphi^{-1}}(f(\varphi)) \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1})) \\ &= f. \end{aligned}$$

De igual manera se tiene que

$$C_\varphi \circ C_{\varphi^{-1}}, = f.$$

De esta forma C_φ tiene como inversa a $C_{\varphi^{-1}}$.
Si ahora se supone que φ no es uno a uno. Sean $a, b \in \mathbb{D}$, tales que $a \neq b$ y $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Entonces $f(\varphi(a)) = f(\varphi(b))$ *para cada* $f \in Hol(\mathbb{D})$. *De esta forma cada función* g *que pertenezca al rango de* C_φ *satisface*
$g(a) = g(b)$, *pero la función identidad no está en el rango de* C_φ, *pues de ser así* $f \circ \varphi = I$ *lo que no puede ocurrir pues* φ *no es uno a uno, de ese modo,* C_φ *tampoco en uno a uno y por lo tanto no tiene inversa.*
¿Que pasa cuando φ *no es sobreyectiva ?*
Se elige $w \in \mathbb{D} \backslash \varphi(\mathbb{D})$, *y se definen estas dos funciones.:*

$$f(z) = \frac{1}{z-w} \quad y \quad g(z) = \frac{1}{\varphi(z)-w}\,.$$

Para cualquier $z \in \mathbb{D}$, f *es analítica en* $\varphi(\mathbb{D})$ *y* g *es analítica en* $\mathbb{D}$, *también se puede ver que* $g(z) = f(\varphi(z))$ *para todo* $z \in \varphi(\mathbb{D})$, *entonces* $g \notin RanC_\varphi$.
Si $g \in RanC_\varphi$, *debería existir una función* $h \in H(\mathbb{D})$ *que cumple la condición,* $C_\varphi(h) = g$, *y se tendría que:*

$$g(z) = h(\varphi(z)) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

pero cuando $z \neq w$ *se tiene*

$$g(z) = f(\varphi(z))\,.$$

por lo que

$$h(\varphi(z)) = f(\varphi(z)) \quad \text{para todo } z \neq w\,.$$

y por Teorema de unicidad en [8], *se tiene que*

$$h = f\,.$$

Como h *es analítica en* $\mathbb{D}$, f *también lo es, así* f *sería acotada en* $\mathbb{D}$ *y en particular en un entorno de* w, *lo que es una contradicción.*
De ésta forma $g \notin RanC_\varphi$, *quedando entonces, demostrado el teorema.* ∎

Definición 3.3. *Un automorfismo conforme es una función* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, *analítica y biyectiva.*

Teorema 3.6. *Sea* φ_w *una función definida para cualquier* $w \in \mathbb{D}$, *como:*

$$\varphi_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Entonces, φ_w es un automorfismo conforme.

Demostración:

Notemos que

$$\begin{aligned} 1-\mid \varphi_w(z)\mid^2 &= \frac{\mid 1-\overline{w}z\mid^2 - \mid w-z\mid^2}{\mid 1-\overline{w}z\mid^2} \\ &= \frac{(1-\overline{w}z)(1-w\overline{z})-(w-z)(\overline{w}-\overline{z})}{\mid 1-\overline{w}z\mid^2} \\ &= \frac{1-w\overline{z}-\overline{w}z+\overline{w}zw\overline{z}-(w\overline{w}-w\overline{z}-z\overline{w}+z\overline{z})}{\mid 1-\overline{w}z\mid^2} \\ &= \frac{1-w\overline{z}-\overline{w}z+\mid w\mid^2\mid z\mid^2-\mid w\mid^2+w\overline{z}+z\overline{w}-\mid z\mid^2}{\mid 1-\overline{w}z\mid^2} \\ &= \frac{1+\mid w\mid^2\mid z\mid^2-\mid w\mid^2-\mid z\mid^2}{\mid 1-\overline{w}z\mid^2} \\ &= \frac{(1-\mid w\mid^2)(1-\mid z\mid^2)}{\mid 1-\overline{w}z\mid^2} \quad \textit{para todo } z\in\mathbb{D}. \end{aligned}$$

Luego

$$1-\mid \varphi_w(z)\mid^2 > 0.$$

y

$$\mid \varphi_w(z)\mid^2 < 1.$$

En cambio si $z\in\partial\mathbb{D}$

$$1-\mid \varphi_w(z)\mid^2 = 0.$$

Entonces

$$\mid \varphi_w(z)\mid^2 = 1.$$

De ésta forma

$$\varphi_w(\mathbb{D}) = \mathbb{D}.$$

y además

$$\varphi_w(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}.$$

Por la definición de φ_w, ella es analítica en el conjunto $R = \{\, z\in\mathbb{C} \;:\; \mid z\mid \,<\, 1/|w|\,\}$ como $w\in\mathbb{D}$ se tiene que $\mathbb{D}\subset R$ por lo que φ_w es analítica en $\mathbb{D}$.

Por último es siguiente cálculo muestra que φ_w es su propia inversa:

$$\begin{aligned}\varphi_w(\varphi_w(z)) &= \varphi_w\left(\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right)\\ &= \frac{w-\frac{w-z}{1-\overline{w}z}}{1-\overline{w}\frac{w-z}{1-\overline{w}z}}\\ &= \frac{w-w\overline{w}z-w+z}{1-\overline{w}z-w\overline{w}+\overline{w}z}\\ &= \frac{z(1-\mid w\mid^2)}{(1-\mid w\mid^2)}\\ &= z\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto φ_w es biyectiva. Así se concluye que φ_w es un automorfismo conforme.

■

Teorema 3.7. *Si φ es un automorfismo conforme de $\mathbb{D}$, entonces existe $a\in\mathbb{D}$ y existen $w, v\in\partial\mathbb{D}$ que cumplen*

$$\varphi(z) = w\varphi_a(z) \quad y \quad \varphi(z) = \varphi_a(vz)\,.$$

Demostración:
Siendo φ un automorfismo, existe $a\in\mathbb{D}$ tal que $\varphi(a) = 0$. Si se define $\phi = \varphi\circ\varphi_a$, él es un automorfismo que fija el origen y por lo tanto es una rotación, es decir existe $w\in\partial\mathbb{D}$ tal que $\phi(z) = wz$, entonces se tiene que:

$$\phi(z) = \varphi\circ\varphi_a(z) = wz\,.$$

al sustituir $z = \varphi_a(z)$, de las propiedades de φ_a se obtiene

$$\varphi(z) = w\varphi_a(z)\,.$$

Por otra parte, se define $\psi = \varphi_a\circ\varphi$ esta función también es un automorfismo conforme que fija el origen. De la misma forma que en el caso anterior, existe $v\in\partial\mathbb{D}$ tal que $\psi(z) = vz$, entonces:

$$\psi(z) = \varphi_a\circ\varphi(z) = vz\,.$$

y al aplicar φ_a a las dos últimas igualdades, como φ_a, és involutiva, se obtiene;

$$\varphi(z) = \varphi_a(vz)\,.$$

■

Este teorema acaba de demostrar que cualquier automorfismo conforme en $\mathbb{D}$, puede ser expresado en función de algún automorfismo conforme del tipo φ_a. Los operadores de composición actuando en espacios de Hilbert pueden ser caracterizados por medio del estudio del conjunto de funcionales punto evaluación como se observará en el siguiente teorema .

Teorema 3.8. *Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador acotado. T, es un operador de composición si, y sólo si, el conjunto $K(\mathbb{D}) = \{ K_x : x \in \mathbb{D} \}$ es invariante sobre T^*. De esta forma $T = C_\varphi$ y $T^*(K_x) = K_\varphi(x)$.*

Demostración:

supongamos que T es un operador composición para alguna función $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, así $T = C_\varphi$. Luego para toda función $f \in Hol(\mathbb{D})$:

$$\begin{aligned} \langle f, T^*(K_z)\rangle &= \langle Tf, K_z\rangle \\ &= \langle C\varphi(f), K_z\rangle \\ &= \langle f \circ \varphi, K_z\rangle \\ &= (f \circ \varphi)(z) \\ &= \langle f, K_{\varphi(z)}\rangle \,. \end{aligned}$$

De ésta forma $T^*K_z = K_{\varphi(z)}$ y por lo tanto $K(\mathbb{D})$ es invariante por T^*. Ahora si $K(\mathbb{D})$ es invariante por T^*, se define, $T^*K_z = K_{\varphi(z)}$ para alguna función $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ entonces

$$Tf(z) = \langle Tf, K_z\rangle == \langle f, T^*K_z\rangle = \langle f, K_{\varphi(z)}\rangle = f(\varphi(z)) = C_\varphi(f(z))\,.$$

y por lo tanto T es un operador de composición. ■

§3.1. Acotación de los Operadores de Composición

En esta sección se busca conseguir las condiciones bajo las cuales el operador de Composición es acotado. Para ello el teorema se subordinación de Littlewood muestra que aquellos operadores de composición cuyo símbolo fija el origen, son acotados.

Definición 3.4. *Para f y g funciones analíticas en $\mathbb{D}$, se dice que g está subordinada a f, si*

$$g(z) = f \circ \varphi(z), \ \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Para alguna función analítica $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *que fija el origen.*

Teorema 3.9 (Teorema de Subordinación de Littlewood). *Sean* f, g *funciones analíticas definidas en* $\mathbb{D}$ *y supongamos que* g *está subordinada a* f, *entonces:*

$$\int_0^{2\pi} \mid g(re^{i\theta}) \mid^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^p d\theta\,.$$

Para todo $r \in [0, 1)$ *y* $p > 0$.

Demostración:

Por definición, existe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *una función analítica con* $\varphi(0) = 0$, *tal que,* $g(z) = f(\varphi(z))$. *tomando* $r \in (0, 1)$ *fijo y considerando* $h(z)$ *una función armónica para todo* $\mid z \mid \leq r$ *definida para todo* $z = r$ *como* $h(z) :=\mid f(z) \mid^p$. *Ésta función así definida es subarmónica en* $\mathbb{D}$ *según el ejemplo* (3.1), *luego*

$$\mid f(z) \mid^p \leq h(z) \ \textit{para todo} \ |z| \leq r\,.$$

Además como φ *es un automorfismo de* $\mathbb{D}$, *que fija el origen, por el lema de Schwarz,* $\mid \varphi(z) \mid \leq \mid z \mid \leq r$, *así, para todo* $|z| \leq r$, *se tiene:*

$$\mid g(z) \mid^p = \mid f(\varphi(z)) \mid^p \leq h(\varphi(z))\,.$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(\varphi(re^{i\theta})) \mid^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi(re^{i\theta}))d\theta\,.$$

Como h *es armónica, por la propiedad del valor medio*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(\varphi(re^{i\theta})) \mid^p d\theta &\leq h(\varphi(0)) \\
&= h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^p d\theta\,.
\end{aligned}$$

Así queda demostrado el teorema. ■

La pregunta natural que surge es ¿Que ocurre si φ no fija el origen?. El siguiente teorema da repuesta a esta interrogante.

Teorema 3.10. *Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica y $p \geq 1$, entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} \mid f(\varphi(z)) \mid^p dA(z) \leq \left(\frac{1+ \mid \varphi(0) \mid}{1- \mid \varphi(0) \mid}\right)^2 \int_{\mathbb{D}} \mid f(z) \mid^p dA(z)\,.$$

Para toda función analítica en $\mathbb{D}$.

Demostración:

Sean $a = \varphi(0)$ y $\psi(z) = \varphi_a \circ \psi(z)$, entonces ψ fija el origen y por las propiedades de φ_a se tiene que $\varphi(z) = \varphi_a \circ \psi(z)$.

$$\int_0^{2\pi} \mid f(\varphi(re^{i\theta})) \mid^p d\theta = \int_0^{2\pi} \mid f(\varphi_a \circ \psi(re^{i\theta})) \mid^p d\theta\,.$$

Al aplicar el teorema (3.9)

$$\int_0^{2\pi} \mid f(\varphi(re^{i\theta})) \mid^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} \mid f(\varphi_a(re^{i\theta})) \mid^p d\theta\,.$$

Esta desigualdad se cumple para cualquier $r \in (0,1)$, por lo tanto al multiplicar por r/π e integrando sobre r, se obtiene

$$\int_{\mathbb{D}} \mid f(\varphi(z)) \mid^p dA(z) \quad \leq \quad \int_{\mathbb{D}} \mid f(\varphi_a(z)) \mid^p dA(z)\,. \tag{3.3}$$

Se realiza el cambio de variable $w = \varphi_a(z)$ donde el Jacobiano de φ_a es

$$J_{\varphi_a}(z) = \frac{(1- \mid a \mid^2)}{\mid 1 - \overline{a}z \mid^4}\,.$$

Veamos que en efecto $J_{\varphi_a}(z) = \dfrac{(1- \mid a \mid^2)}{\mid 1 - \overline{a}z \mid^4}$. Sabemos que $\varphi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$, sea z_0 un elemento en el dominio de φ_a, determinaremos $\varphi_a'(z)$ para ello estudiaremos la existencia del siguiente límite

$$\text{lím}_{z \to z_0} \frac{\varphi_a(z) - \varphi_a(z_0)}{z - z_0}\,.$$

Esto es

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi_a(z)-\varphi_a(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{\frac{a-z}{1-\overline{a}z}-\frac{a-z_0}{1-\overline{a}z_0}}{z-z_0}\right]\\
&= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{(a-z)(1-\overline{a}z_0)-(a-z_0)(1-\overline{a}z)}{(z-z_0)(1-\overline{a}z)(1-\overline{a}z_0)}\right]\\
&= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{-\mid a\mid^2 z_0-z+\mid a\mid^2 z+z_0}{(z-z_0)(1-\overline{a}z)(1-\overline{a}z_0)}\right]\\
&= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{z_0(1-\mid a\mid^2)-z(1-\mid a\mid^2)}{(z-z_0)(1-\overline{a}z)(1-\overline{a}z_0)}\right]\\
&= \lim_{z\to z_0}\left[-\frac{(z-z_0)(1-\mid a\mid^2)}{(z-z_0)(1-\overline{a}z)(1-\overline{a}z_0)}\right]\\
&= \lim_{z\to z_0}\left[-\frac{1-\mid a\mid^2}{(1-\overline{a}z)(1-\overline{a}z_0)}\right]\\
&= -\frac{1-\mid a\mid^2}{(1-\overline{a}z_0)^2}\,.
\end{aligned}$$

Como z_0 *es arbitrario podemos decir que* φ_a *es analítica en* $\mathbb{C}\backslash\{1/\overline{a}\}$, *más aún*

$$\varphi_a'(z)=-\frac{1-\mid a\mid^2}{(1-\overline{a}z)^2}$$

ahora es fácil ver que $\varphi_a'(z)$ *es igual a* $-k_a(z)$, *y es tal que el determinante Jacobiano real de* $\varphi_a(z)$, *es:*

$$J_{\varphi_a}(z)=\mid k_a(z)\mid^2=\frac{(1-\mid a\mid^2)^2}{\mid 1-\overline{a}z\mid^4}$$

Ahora al aplicarlo en la segunda integral de la ecuación (3.3), *se tiene*

$$\int_{\mathbb{D}}\mid f(\varphi(z))\mid^p dA(z) \;\leq\; \int_{\mathbb{D}}\mid f(w)\mid^p \frac{(1-\mid a\mid^2)^2}{\mid 1-\overline{a}w\mid^4}dA(w)\,. \tag{3.4}$$

Por otro lado como φ_a *es un automorfismo conforme se tiene que* $\varphi_a:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ *y además como* $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, *tenemos para* a *en el rango de* φ *que* $|a|\leq 1$ *y para* w *en el dominio de* φ_a *que* $\mid w\mid\leq 1$. *Ahora del análisis complejo sabemos que*

$$\mid 1-\overline{a}w\mid \;\geq\; \big|\mid 1\mid-\mid\overline{a}w\mid\big|=\big|1-\mid\overline{a}\mid\mid w\mid\big|\,. \tag{3.5}$$

Por otro lado tenemos que, $\mid\overline{a}\mid\leq 1$ *y* $\mid w\mid\leq 1$, *así tenemos ,* $\mid\overline{a}\mid\mid w\mid\leq 1$. *ahora del dado* $\mid w\mid\leq 1$ *esto implica que* $\mid\overline{a}\mid\mid w\mid\leq\mid\overline{a}\mid$ *en consecuencia* $-\mid\overline{a}\mid\mid w\mid\geq -\mid\overline{a}\mid$. *Luego*

$$-\mid \overline{a} \mid\mid w \mid \ \ \geq \ \ -\mid \overline{a}\mid \ . \tag{3.6}$$

Así de (3.6) *en* (3.5) *tenemos que*

$$\mid 1-\overline{a}w \mid \,\geq\, \mid 1-|\overline{a}||w| \mid \,\geq\, \mid 1-|\overline{a}| \mid = 1-|\overline{a}|\,.$$

y se obtiene que

$$\frac{1}{\mid 1-|\overline{w}| \mid} \ \leq \ \frac{1}{1-|\overline{a}|}\,.$$

luego al aplicarlo a la integral del lado derecho de la ecuación (3.4) *obtenemos que:*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi(z))|^p dA(z) &\leq \frac{(1-|a|^2)^2}{(1-|a|)^4}\int_{\mathbb{D}} |f(w)| dA(w) \\
&= \left(\frac{(1-|a|)^2(1+|a|)^2}{(1-|a|)^4}\right)\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA(w) \\
&= \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^2 \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA(w)\,.
\end{aligned}$$

Como, $a=\varphi(0)$*, el teorema queda demostrado.* ■

La norma del operador de composición en el espacio de Bergman A^p viene dada por:

$$||C_\varphi||_p \ := \sup_{f\neq 0} \frac{||C_\varphi f||_{A^P}}{||f||_{A^p}}\,.$$

Por el teorema (3.10), C_φ es un operador acotado en A^P para $p\geq 1$.

$$\begin{aligned}
||C_\varphi f||_{A^p} &= \left(\int_{\mathbb{D}} |f(\varphi(z))|^p dA(z)\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{2/p}\left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z)\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{2/p} ||f||_{A^p}
\end{aligned}$$

luego

$$||C_\varphi||_p \ \leq \ \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{2/p}.$$

para todo $p\geq 1$. En particular, si $p=2$, entonces C_φ es acotado en el espacio de Bergman A^2 con

$$||C_\varphi||_2 \ \leq \ \frac{1-|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\,.$$

De aquí en adelante, se estudiarán los operadores de composición actuando en el espacio de Bergman A^2

Teorema 3.11. *Si k_z es el kernel reproductor normalizado en A^2*

$$||C_\varphi^* k_z|| \;=\; \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \quad para\, todo\, z \in \mathbb{D}\,.$$

Demostración:
Recordemos primero que

$$k_z(w) = (1-|z|^2)K_z(w) \;=\; (1-|z|^2)K(w,z)\,.$$

Ahora por las propiedades de el producto interno definido en A^2,

$$\begin{aligned} C_\varphi^* K_z(w) \;&=\; \langle C_\varphi^* K_z, K_w\rangle \;=\; \langle K_z, C_\varphi K_w\rangle \\ &=\; \overline{C_\varphi K_w(z)} \;=\; \overline{K_w(\varphi(z))} \\ &=\; K(w,\varphi(z)) \;=\; K_{\varphi(z)}(w)\,. \end{aligned}$$

De esta forma

$$||C_\varphi^* K_z|| \;=\; ||K_{\varphi(z)}|| \;=\; \frac{1}{1-|\varphi(z)|^2}\,.$$

Luego para k_z se tiene

$$||C_\varphi^* k_z|| \;=\; \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\,.$$

■

§3.2. Operadores de Composición Compactos

La compacidad del operador C_φ ha sido estudiada ampliamente por diferentes autores y se puede encontrar en la literatura muchas demostraciones basadas en la no existencia de la derivada angular de φ, en éste trabajo se expondrá ese caso pero su análisis se hará en función de la existencia del límite de $||C_\varphi^* k_z|| \;=\; (1-|z|^2)/(1-|\varphi(z)|^2)$ cuando $|z| \to 1^-$. Se expone el Test de Schur, que será necesario para hacer a esta exposición auto contenida antes de esto daremos la siguiente definición.

Definición 3.5. *Sea (X,μ) un espacio medible y K una función medible en $X\times X$, entonces K induce un operador lineal T en el espacio de Hilbert $L^2(X,d\mu)$ dado por*

$$Tf(x)=\int_X K(x,y)f(y)d\mu(y) \quad f\in\ L^2(X,d\mu)\,.$$

Éste operador T es llamado Operador Integral inducido por el *kernel* K. Así presentaremos una condición suficiente muy usada para el acotamiento del operador integral T en $L^p(X,d\mu)$, en el caso $1\le p<\infty$, este resultado es llamado teorema de Schur o Test de Schur

Teorema 3.12 (Teorema de Schur). *Supongamos que K es una función medible no negativa en $X\times Y$, T el operador integral inducido por K, y sea $1<p<\infty$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si existe una constante $C>0$ y una función positiva h en X tal que:*

$$\int_X K(x,y)h(y)^q d\mu(y) \ \le\ Ch(x)^q\,. \tag{3.7}$$

para casi todo $x\in X$. Además

$$\int_X K(x,y)h(x)^q d\mu(x) \ \le\ Ch(y)^q\,. \tag{3.8}$$

para casi todo $y\in X$, entonces el operador T es un operador acotado en $L^p(X,d\mu)$, más aún:

$$||T||\ \le\ C\,.$$

Demostración:

Las desigualdades (3.7) y (3.8) son una consecuencia directa de la desigualdad de Hölder y el teorema de Fubini, en efecto;

si $f\in L^p(X,d\mu)$, entonces para algún $x\in X$

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &= \left|\int_X K(x,y)f(y)d\mu(y)\right| \\
&\le \int_X K(x,y)1|f(y)|d\mu(y) \\
&= \int_X K(x,y)h(y)h(y)^{-1}|f(y)|d\mu(y) \\
&= \int_X K(x,y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}h(y)h(y)^{-1}|f(y)|d\mu(y) \\
&= \int_X K(x,y)^{\frac{1}{p}}K(x,y)^{\frac{1}{q}}h(y)h(y)^{-1}|f(y)|d\mu(y) \\
&= \int_X K(x,y)^{\frac{1}{q}}h(y)K(x,y)^{\frac{1}{p}}h(y)^{-1}|f(y)|d\mu(y)\,.
\end{aligned}$$

Ahora por la desigualdad de Hölder

$$|Tf(x)| \;=\; \left[\int_X K(x,y)h(y)^q d\mu(y)\right]^{1/q}\left[\int_X K(x,y)h(y)^{-p}|f(y)|^p d\mu(y)\right]^{1/p}.$$

Luego por el teorema de Fubini y la desigualdades (3.7) *y* (3.8) *se tiene que*

$$\begin{aligned}
||Tf||^p = \langle Tf, Tf\rangle = \int_X |Tf(x)|^p d\mu(x) \;&\leq\; \int_X C^{p/q} h(x)^p \int_X K(x,y)h(y)^{-p}|f(y)|^p d\mu(y)d\mu(x)\\
&=\; C^{p/q}\int_X h(y)^{-p}|f(y)|^p \int_X k(x,y)h(x)^p d\mu(x)d\mu(y)\\
&\leq\; C^{p/q}\int_X h(y)^{-p}|f(y)|^p C h(y)^p d\mu(y)\\
&=\; C^{\frac{p}{q}+1}\int_X |f(y)|^p d\mu(y)\\
&=\; C^p \int_X |f(y)|^p d\mu(y)\\
&=\; C^p\langle f, f\rangle\,.
\end{aligned}$$

Así

$$||Tf||^p \;\leq\; C^p||f||^p\,.$$

Luego

$$||Tf|| \;\leq\; C||f||\, \textit{esto implica}\, \frac{||Tf||}{||f||} \;\leq\; C \quad \textit{para } f \neq 0\,.$$

de esta forma C *es cota superior de* $\dfrac{||Tf||}{||f||}$. *y*

$$||T|| = \sup\left\{\frac{||Tf||}{||f||} \;:\; f\neq\; 0\right\} \leq C\,.$$

esto es

$$||T|| \leq C$$

Así T *es un operador integral acotado en* $L^p(x, d\mu)$, *y con norma menor o igual a* C

■

Ahora daremos el siguiente corolario del Test de Schur en el caso particular de $L^2(x, d\mu)$

Test de Schur: Sea T un operador integral definido en $L^2(\mathbb{D})$

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{D}} H(x,y)f(y)dA(y)\,.$$

Donde H es una función medible en $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$. Supongamos que existe una función medible $h:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, y una constante $C>0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{D}} H(x,y)h(y)dA(y) \;\leq\; Ch(x)\,.$$

para casi todo $x\in\mathbb{D}$. Además

$$\int_{D} H(x,y)h(x)dA(x) \;\leq\; Ch(y)\,.$$

para casi todo $x\in\mathbb{D}$. Entonces el operador T es un operador acotado y más aún

$$||T||\leq C\,.$$

Acontinuación se dará una condición necesaria para la compacidad del operador C_φ

Teorema 3.13. *Supongamos que $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ es analítica entonces C_φ es compacto en A^2 si, y sólo si,*

$$\lim_{|z|\to 1^-}\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}=0\,.$$

Demostración:

Sea C_φ compacto, por el Teorema (1.15) *sabemos que C_φ^* es compacto y por el teorema* (3.11) *sabemos que:*

$$||C_\varphi^* k_z|| \;=\; \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \quad \textit{donde} \quad k_z(w) \;=\; \frac{1-|z|^2}{1-|w\overline{z}|}.$$

De la compacidad de C_φ^* y del hecho que $k_z\to 0$ cuando $|z|\to 1^-$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto $\mathbf{K}\subset\mathbb{D}$, entonces $||C_\varphi^* k_z||$ converge a cero cuando $|z|\to 1^-$.

Para demostrar la otra implicación se demostrará la compacidad del operador $C_\varphi C_\varphi^*$ y de nuevo por el teorema (1.15), *se habrá demostrado la compacidad de C_φ. Recordemos también que la función $K_z(w)$ es el núcleo reproductor de A^2 y por el corolario* (2.10) .

$$f(z)=\langle f,K_z\rangle=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2}dA(w)\,.$$

entonces

$$\begin{aligned} C_\varphi C_\varphi^* f(z) &= C\varphi(C^*(f(z))) \\ &= \langle C_\varphi C_\varphi^* f, K_z\rangle \\ &= \langle C_\varphi^* f, C_\varphi^* K_z\rangle \\ &= \langle C_\varphi^* f, K_{\varphi(z)}\rangle \\ &= \langle f, C_\varphi(K_{\varphi(z)})\rangle \\ &= \langle f, K_{\varphi(z)}\circ\varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\big(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}\big)^2} dA(z)\,. \end{aligned}$$

Para poder demostrar la compacidad de $C_\varphi C_\varphi^*$, se elige $\{f_k\} \in A^2$ una sucesión de funciones, que convergen a cero uniformemente en $K \subset \mathbb{D}$ compacto. Luego para $0 < r \leq 1$ definimos la siguiente función carasterística:

$$\chi_r(z) = \begin{cases} 0 & si\ |z| \leq r, \\ 1 & si\ r < |z| < 1\,. \end{cases}$$

Se pueden determinar estas dos integrales:

$$F_k(z) = \int_{|w|\leq r} \frac{f_k(w)}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})^2} dA(w)\,.$$

$$G_k(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f_k(w)\chi_r(w)}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})^2} dA(w)\,.$$

De esta forma

$$C_\varphi C_\varphi^* f(z) = F_k(z) + G_k(z)\,.$$

El objetivo es demostrar que las normas de F_k y G_k convergen a cero cuando $k \to \infty$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |F_k(z)|^2 dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{|w|\leq r} \frac{f_k(w)}{\big(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}\big)^2} dA(w) \right|^2 dA(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{|w|\leq r} \left| \frac{f_k(w)}{\big(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}\big)^2} \right| dA(w) \right)^2 dA(z)\,. \end{aligned}$$

Como $f_k(w) \to 0$ uniformemente cuando $|w| \leq r$,se tiene que

$$||F_k|| \to 0\,. \tag{3.9}$$

Para cualquier $0 < r < 1$ *notemos que:*

$$\int_{\mathbb{D}} |G_k(z)|^2 dA(z) = \int_{|z|\le r} |G_k(z)|^2 dA(z) + \int_{\mathbb{D}} |G_k(z)|^2 \chi_r(z) dA(z)\,. \quad (3.10)$$

Al revisar la primera integral de la suma en (3.10) *se obtiene*

$$\begin{aligned}\int_{|z|\le r} |G_k(z)|^2 dA(z) &= \int_{|z|\le r} \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{f_k(w)\chi_r(w)}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2} dA(w) \right|^2 dA(z) \\ &\le \int_{|z|\le r} \left(\int_{\mathbb{D}} \left| \frac{f_k(w)\chi_r(w)}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2} \right| dA(w) \right)^2 dA(z)\,.\end{aligned}$$

De esta forma

$$\int_{|z|\le r} |G_k(z)|^2 dA(z) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad k \to \infty\,. \quad (3.11)$$

Para acotar la segunda integral en (3.10) *se define el siguiente operador integral.*

$$Tf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2} dA(w)\,.$$

y

$$T_r f(z) = \int_{\mathbb{D}} H_r(z,w) f(w) dA(w)\,.$$

Donde

$$H_r(z,w) = \frac{\chi_r(w)\chi_r(z)}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2}\,.$$

es el núcleo reproductor del operador integral T_r.

La idea es utilizar el Test de Schur para acotar la norma de T_r *con la cantidad,*

$$M_r = \sup_{r<|z|<1} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \quad \textit{para} \quad 0 < r < 1\,.$$

Para lo cual se define $h(w) = (1-|w|^2)^\beta$, *donde* $-1 < \beta < 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} H_r(z,w) h(w) dA(w) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\chi_r(z)\chi_r(w)(1-|w|^2)^\beta}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2} dA(w) \\ &\le \chi_r(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2} dA(w) \\ &\le \chi_r(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2} dA_\beta(w) \\ &= \chi_r(z) \int_{\mathbb{D}} |C_\varphi(\psi(w))|^2 dA_\beta(w) \quad \textit{donde} \quad \psi = \frac{1}{1-\varphi(z)\overline{w}}\end{aligned}$$

Como C_φ es un operador acotado en los espacios de Bergman ponderados definidos en (2.18), *al tomar $-1<\beta<0$, se tiene:*

$$\int_{\mathbb{D}} H_r(z,w)h(w)dA(w) \;\leq\; \chi_r(z)\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\varphi(z)\overline{w}|^2}dA_\beta(w)\,.$$

Por la proposición 1.4.10 en [14], *se tiene que:*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} H_r(z,w)h(w)dA(w) &= C\chi_r(z)(1-|\varphi(z)|^2)^\beta\\ &= C\chi_r(z)(1-|z|^2)^\beta\left(\frac{(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|z|^2)}\right)^\beta\\ &= C\chi_r(z)h(z)\left(\frac{1-|\varphi(z)|^2}{(1-|z|^2)}\right)^\beta\\ &\leq Ch(z)M_r^{-\beta}\,.\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{D}} H_r(z,w)h(w)dA(w) \;\leq\; Ch(z)(M_r)^{-\beta} \quad \textit{para cualquier } z\in\mathbb{D}\,.$$

De manera análoga se tiene la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{D}} H_r(z,w)h(z)dA(z) \;\leq\; Ch(w)(M_r)^{-\beta} \quad \textit{para cualquier } w\in\mathbb{D}\,.$$

Por esta razón existe una constante $\tilde{C}>0$ para la cual

$$\int_{\mathbb{D}} |T_r(|f_k|)|^2 dA(z) \;\leq\; \tilde{C}(M_r)^{-2\beta}\,. \tag{3.12}$$

Pero sabemos que

$$\begin{aligned}|T_rf(z)|^2 &= \left|\int_{\mathbb{D}} H_r(z,w)|f(w)|dA(w)\right|^2\\ &= \left|\int_{\mathbb{D}} \frac{\chi_r(w)\chi_r(z)}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2}f(w)dA(w)\right|^2.\end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\mathbb{D}} |T_r(|f_k(z)|)|^2 \;=\; \int_{\mathbb{D}}\left|\int_{\mathbb{D}} \frac{\chi_r(w)\chi_r(z)}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2}|f_k(w)|dA(w)\right|^2 dA(z)\,.$$

por otro lado

$$G_k(z)=\int_{\mathbb{D}} \frac{f_k(w)\chi_r(w)}{\left(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}\right)^2}dA(w)\,.$$

Esto implica

$$|G_k(z)| \leq \int_{\mathbb{D}} \frac{|f_k(w)\chi_r(w)|}{\left(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}\right)^2} dA(w)\,.$$

y además sabemos que

$$\int_{\mathbb{D}} |G_k(z)|^2 = \int_{|z|\leq r} |G_k(z)|^2 dA(z) + \int_{\mathbb{D}} |G_k(z)|^2 \chi_r(z) dA(z)\,.$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |G_k(z)|^2 \chi_r(z) dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{f_k(w)\chi_r(w)}{\left(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}\right)^2} dA(w) \right|^2 \chi_r(z) dA(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{|f_k(w)|\chi_r(w)\chi_r(z)}{|1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}|^2} dA(w) \right|^2 dA(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} |f_k(w)| H_r(z,w) dA(w) \right|^2 dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |T_r(|f_k(z)|)|^2 dA(z)\,.
\end{aligned}$$

De esta manera se tiene que

$$\int_{\mathbb{D}} |G_k|^2 dA(z) \leq \int_{|z|<r} |G_k|^2 dA(z) + \int_{\mathbb{D}} |T_r(|f_k|)|^2 dA(z)\,.$$

Así al tomarle límite a esta ultima expresión obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{D}} |G_k|^2 dA(z) \leq \lim_{k\to\infty} \tilde{C}(M_r)^{-2\beta}\,.$$

y como $\lim_{r\to 1^-} M_r = 0$ *para cual para cualquier* r *y por* (3.9)

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{D}} |C_\varphi C_\varphi^*|^2 dA(w) = 0\,.$$

y por tanto C_φ *es compacto*.

∎

REFERENCIAS

[1] Bachman G., Narici L. *Functional Analysis*. Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[2] Conway J.*A Course in Functional Analysis,* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. 1990.

[3] Conway, John B. *Functions of one Complex Variables*, Springer-Verlag New York Inc. 1995. Volúmen II

[4] C. C. Cowen, and B. D. MacCluer,*Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, New York, 1994.

[5] P. Duren, And A, Shuter: *Bergman Spaces*. AMS. Surverys And Monographs, vol. 100,2004

[6] P. R. Halmos : *A Hilbert Space Problem Book*. Springer-Verlag New York Inc (1974)

[7] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions.* Academic Press,New-York, 1981.

[8] Miguel J. Vivas C.*Análisis en una Variable Compleja*Tipografía y Litografía Horizonte C.A. 2009

[9] H. Hedenmalm, B. Korenblum y k. Zhu: *theory of Berman Spaces*. Graduate text in math. 199 Spriger, new york, Berlin, etc. 2000

[10] Megginson R. *An Introduction to Banach Spaces Theory.* Springer, Verlag New York. 1998.

[11] A. Mukherjea and K. Pothoven, *Real and Functional Analysis*, Plenum Press, New York, 1978.

[12] E. A. Nordgren: Composition operators, Canad. J. Math. 20 (1968), 442-449.

[13] Erwin Kreyzig *troductory Functional Analysis With Application* Wiley Classics Library Edition Published 1989

[14] W. Rudin: Real and Complex Analysis. Third edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[15] W. Rudin: *Funxtion Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$ Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin (1980)

[16] Ronald G. Douglas *Banach Algebra Techniques in Operator Theory* Second Edition Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin (1998)

[17] Rudin W. *Functional Analysis.* Mc. Graw-Hill, Inc. New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Bogotá, Caracas, Lisbon, London, Madrid, México, Milan, Montreal, New Delhi, Parin, San Juan, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto. 1991.

[18] E. Schroeder, *Über itierte Funktionen*, Math. Ann. 3(1871), 296-322. Springer-Verlag, New York, 1993.

[19] H. J. Schwartz,*Composition Operators on* H^p, Thesis, University of Toledo, 1969.

[20] J. H. Shapiro,*Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993

[21] D. Vukotic: *on norm of composition Operators acting on Bergman Spaces*. J. Math. Anal. Appl. vol 291 (2004), 189-202

[22] K. Zhu. *Operator theory in function Spaces.* Marcel Dekker.1990