

**UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"**

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



**OPTIMIZACIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL PROCESO DE
SOLDADURA POR FRICCIÓN AGITACIÓN DE ALUMINIO AA 1100-0
UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

RAISA L. VALDIVÉ LUNAR

COMO REQUISITO FINAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA

EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: **MÉTODOS NUMÉRICOS, ELEMENTOS FINITOS**

TUTOR: DR. JUAN CARLOS OSORIO

Barquisimeto, Venezuela.

Febrero de 2012



Universidad Centroccidental
 "Lisandro Alvarado"
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designados por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"OPTIMIZACIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL PROCESO DE SOLDADURA POR FRICCIÓN AGITACIÓN DE ALUMINIO AA 1100-0 UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS"

Presentado por la ciudadana RAISA L. VALDIVÉ LUNAR titular de la Cédula de Identidad N° 16.583.388. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 JURADO

 FIRMA

 JURADO

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

Dedicado a Dios todopoderoso, artífice de mi existencia y a quien le debo la sapiencia para lograr la meta trazada.

A mis padres quienes moldearon con amor y dedicación la persona que ahora soy.

A mis abuelos y abuelas, en especial a mi abuela Rafaela.

A Fernando por toda su paciencia, comprensión, amor y dedicación.

AGRADECIMIENTOS

Al Ing. Rafael Valdivé por aportar su experiencia en la comprensión del proceso de soldadura por fricción agitación.

Al Dr. Juan Carlos Osorio por sus valiosas observaciones y sugerencias que hicieron posible la culminación de este trabajo.

A la Msc. Kendy Lunar de Valdivé y la Dra. Carmen Valdivé por facilitar sus conocimientos matemáticos y metodológicos en la realización de este trabajo.

Al Ing. Juan Briceño por brindar su apoyo en la comprensión de los conocimientos teóricos de transferencia de calor.

A Margarita Valdivé por su apoyo moral incondicional.

A mis hermanas Alicia y Susana por su comprensión y apoyo moral.

Al Dr. Rodolfo Gallo y al Dr. Giovanni Calderón por sus aportes en la aplicación del método de elementos finitos.

Al Ing. Samuel Blanco por facilitar los datos experimentales y ensayos termográficos.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
Resumen	vi
Introducción	1
Capítulo 1. El Problema	3
1.1. Planteamiento del Problema	3
1.2. Objetivos	5
1.2.1. Objetivo General	5
1.2.2. Objetivos Específicos	5
1.3. Justificación	5
1.4. Alcances y Limitaciones	7
Capítulo 2. Marco Conceptual	8
2.1. Antecedentes	8
2.2. Bases Teóricas	10
2.2.1. El Método de los Elementos Finitos	10
2.2.2. Transferencia de Calor	28
2.2.3. Deducción de la Ecuación de Calor	31
2.2.4. Soldadura por Fricción Agitación	33
Capítulo 3. Metodología y Resultados	35
3.1. Método de los Elementos Finitos	35
3.2. Procedimiento en ABAQUS/CAE v6.7-1	36
3.2.1. Módulo Parte	36
3.2.2. Módulo Propiedad	37
3.2.3. Módulo Ensamblaje	38
3.2.4. Módulo Paso	38
3.2.5. Módulo Interacción	39

3.2.6. Módulo Carga	40
3.2.7. Módulo Malla	41
3.2.8. Módulo Trabajo	42
3.2.9. Módulo Visualización	43
3.3. Consideraciones	43
3.4. Comparación de Resultados	43
Capítulo 4. Conclusiones y Recomendaciones	46
4.1. Conclusiones	46
4.2. Recomendaciones	46
Apéndice A. Especificaciones de los Metales	48
A.1. Descripción del Aluminio AA 1100-0	48
A.2. Descripción del Acero AISI 1045	50
Referencias bibliográficas	52

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Propiedades de las Funciones de Forma Lineales.	15
3.1. Propiedades del Aluminio y Acero.	35

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Esquema de los componentes para el proceso de FSW.	4
2.1. Típica malla de elementos finitos. Elementos, nodos y lados.	11
2.2. Elementos finitos unidimensionales. (a) Un elemento lineal, (b) un elemento cuadrático, (c) lineal y (d) la variación cuadrática de la temperatura sobre un elemento.	13
2.3. Variación de las funciones de forma, temperatura y derivadas dentro de un elemento lineal.	15
2.4. Un elemento triangular lineal.	17
2.5. Coordenadas de área de un elemento triangular.	19
2.6. Un elemento cuadrilátero típico.	21
2.7. Un elemento rectangular simple.	22
2.8. Coordenadas adimensionales de un elemento rectangular.	23
2.9. Elementos tridimensionales, (a) tetraedro y (b) hexaedro.	24
2.10. Representación gráfica de la Ley de Conservación de Energía.	32
3.1. Sección de las Placas.	36
3.2. Geometría de la Herramienta.	37
3.3. Ventanas de creación de paso de análisis.	38
3.4. Ventanas de creación de propiedad de interacción entre las partes.	40
3.5. Condiciones de borde aplicadas.	40
3.6. Detalle del Proceso de Mallado.	42
3.7. Ventana de la Realización del Trabajo.	42
3.8. Ventana del módulo visualización.	43
3.9. Termografía obtenida durante el proceso de FSW.	44
3.10. Campos de temperaturas obtenidos en el modelado por MEF en ABAQUS/-CAE v6.7-1.	44
3.11. Comparación de resultados en Termografía y Simulación	45

Universidad Centroccidental
“Lisandro Alvarado”
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

**“OPTIMIZACIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL PROCESO DE
SOLDADURA POR FRICCIÓN AGITACIÓN DE ALUMINIO AA 1100-0
UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS”**

Raisa L. Valdivé Lunar

Tutor: Dr. Juan Carlos Osorio

RESUMEN

El trabajo que se presenta tiene como objetivo optimizar los valores de las temperaturas durante el proceso de soldadura por fricción agitación de placas de aluminio AA 1100-0 utilizando el método de los elementos finitos (MEF). Se estudió el comportamiento de las temperaturas aplicando MEF a la ecuación de transferencia de calor utilizada por [14]. La metodología implementada permitió modelar el problema aplicando el software ABAQUS/CAE v6.7-1 con elementos hexaédricos de ocho nodos y tetraédricos de cuatro nodos. La simulación del proceso de soldadura por fricción agitación de aluminio AA 1100-0 reportó una diferencia de temperaturas de 80.3°C en comparación con el valor máximo obtenido experimentalmente por [1]. El resultado evidencia que el modelado del proceso permite predecir el comportamiento térmico de la soldadura. Así mismo, el análisis de la ecuación realizado con el MEF permite que el uso del software sea confiable para generar valores óptimos en la solución del problema objeto de estudio.

Palabras Clave: Método de los Elementos Finitos, Temperatura, Optimización, Soldadura.

INTRODUCCIÓN

Hoy día, el método numérico de los elementos finitos constituye una parte implícita en la ciencia y la ingeniería moderna. Diversos y distintos procesos físicos en problemas de mecánica y de formaciones de sólidos, entre otros, requieren el modelado.

Los procesos de transferencia de calor, en particular, el de soldadura por fricción agitación están colaborando con la optimización de la temperatura de una manera comparativa entre lo práctico-real (ensayos) y lo simulado (computacional). Esto da lugar a que los matemáticos se avoquen al trabajo de búsqueda de los cálculos que optimicen los valores.

La soldadura por fricción agitación o "Friction Stir Welding"(FSW), es un proceso relativamente nuevo para unir dos láminas o placas por medios mecánicos, a través del cual se obtiene una soldadura en estado sólido de alta calidad y la unión se produce por el calentamiento por fricción agitación que experimentan las mismas con el correspondiente flujo de calor entre ellas, este proceso ha permitido el desarrollo de aplicaciones importantes que han causado impacto en la producción y en el uso de metales livianos ya que facilita la soldadura de metales como el aluminio, magnesio, cobre y acero incluyendo muchas aleaciones consideradas de difícil soldabilidad por procesos convencionales por fusión [14].

Las piezas soldadas a través del proceso de soldadura por fricción agitación pueden ser utilizadas en transbordadores espaciales, aviones, embarcaciones, equipos médicos, entre otros, debido a la calidad, a las propiedades que adquiere el material y al bajo costo. Cabe destacar que para este proceso se requiere menos energía y materiales, porque al realizar las uniones no se requiere alcanzar la temperatura de fusión del material y sólo se desperdicia una mínima cantidad de éste. En tal sentido, en este trabajo se da un aporte ya que se logra optimizar la temperatura en el proceso de la FSW de dos placas de aluminio AA 1100-0, con el método de elementos finitos y el paquete computacional ABAQUS/CAE v6.7-1.

El informe se ha dividido en capítulos. En el capítulo 1 se hace una exposición del planteamiento del problema, justificación, objetivos de la investigación, alcances y limitaciones de la misma. En el capítulo 2, se reseñan los trabajos y los elementos teóricos que sustentan el objeto de estudio. En el 3 se presenta una metodología que permite lograr el objetivo de la investigación y finalmente, en el capítulo 4 se describen los resultados obtenidos en la investigación.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA

En el presente capítulo se plantea la problemática estudiada, se exponen los objetivos que fueron planteados para alcanzar la solución satisfactoria del problema. Se justifica la investigación y por último se exponen las consideraciones realizadas y las limitantes encontradas.

§1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A raíz de la creación del proceso FSW [14], en la última década se han abierto espacios para realizar ensayos en aluminio AA 1100-0 soldando por fricción agitación, obteniendo resultados satisfactorios con respecto al cordón soldado.

La soldadura por fricción agitación es un proceso de unión en estado sólido de láminas o placas gruesas por medios mecánicos. En la figura 1.1 se esquematizan los componentes del proceso donde la herramienta está conformada por un apoyo normal al eje de rotación, y un perno de diámetro pequeño conectado al apoyo. El apoyo de la herramienta actúa como un respaldo superior para prevenir que el material salga expulsado de las piezas a soldar.

El proceso de soldadura FSW se describe a continuación: (1) las láminas se colocan a tope en un eje común; (2) el perno rotativo se hunde dentro de las piezas a soldar hasta que el apoyo de la herramienta está en contacto íntimo con la superficie de trabajo; (3) el pin se mueve en la dirección de soldadura a medida que la herramienta se mueve a lo largo de la costura, así el material calentado y ablandado fluye alrededor del pin hacia su parte posterior, (4) se crea la unión de las láminas, debido a que se produce un calentamiento por fricción entre ellas promoviendo un comportamiento pastoso/viscoso del material.

El proceso permite observar el comportamiento del material utilizando variaciones en las velocidades, tanto de rotación como de traslación de la pieza, para determinar la temperatura óptima en la zona de contacto y obtener el mejor resultado. El estudio que realizó [1] para encontrar esta temperatura requirió de varios ensayos termográficos. Estos ensayos consisten en producir imágenes de la radiación infrarroja emitida en forma de calor por algún cuerpo, a través de una cámara llamada detector de barrido de infrarrojos. Asimismo, para obtener

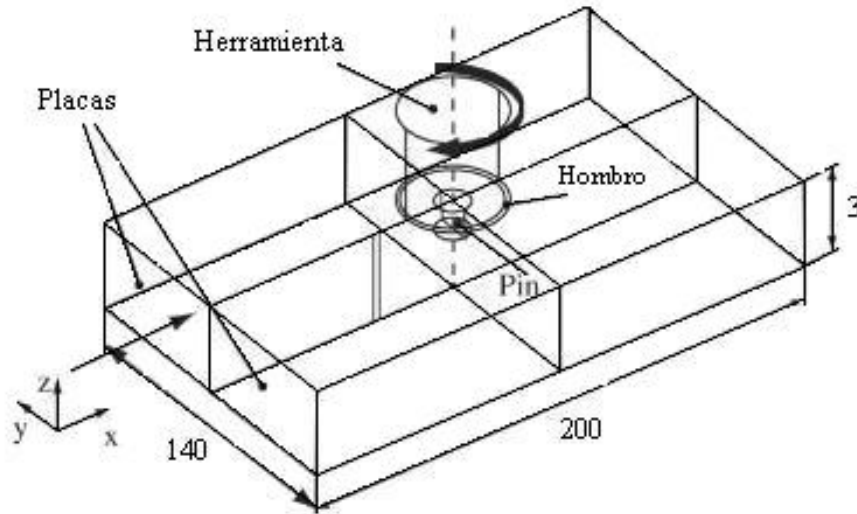


FIGURA 1.1: Esquema de los componentes para el proceso de FSW.

un cordón de soldadura que no presente defectos en cuanto a material residual alrededor del mismo (conocido como rebaba) se deben realizar pruebas de ensayo y error modificando factores como la velocidad de rotación del pin y la velocidad de traslación de la pieza, así como también el esfuerzo o fuerza que ejerce la herramienta sobre las placas. Esto deriva una serie de problemas de tipo experimental, ya que requiere de la inversión de mucho tiempo y recursos, tanto humanos como materiales. En tal sentido surge la necesidad de analizar y profundizar sobre los campos de temperaturas involucrados en el proceso de FSW de dos placas de aluminio AA 1100-0, utilizando métodos numéricos aplicables a la ecuación de conservación de calor (1.1) utilizada por [14], con el fin de minimizar los ensayos prácticos y poder predecir la temperatura óptima.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) + Q \quad (1.1)$$

donde ρ es la densidad del material, C_p es el calor específico, T la temperatura y Q la tasa de generación de calor interna.

Uno de los métodos numéricos aplicables a la ecuación (1.1) fue abordado por [5]. Este autor trabajó con el método de los elementos finitos para obtener el modelo matemático de un problema de conducción de calor en placas metálicas y materiales compuestos tipo carbono-carbono, especificando las condiciones fronteras consistentes con el fenómeno de transferencia de calor en el material considerado.

En el presente trabajo se estudia el Método de los Elementos Finitos, para encontrar la temperatura óptima durante el proceso de soldadura por fricción agitación de dos placas de aluminio AA 1100-0.

§1.2. OBJETIVOS

§1.2.1. Objetivo General

- Optimizar los valores de las temperaturas durante el proceso de soldadura por fricción agitación de placas de aluminio AA-1100-0 utilizando el Método de los Elementos Finitos.

§1.2.2. Objetivos Específicos

- Analizar la ecuación de transferencia de calor planteada utilizando el Método de los Elementos Finitos.
- Modelar el problema utilizando el software ABAQUS/CAEv6.7-1 con los elementos tetraédricos de cuatro nodos y hexaédricos de ocho nodos.
- Comparar los resultados prácticos obtenidos por termografía y los encontrados con el Método de los Elementos Finitos.

§1.3. JUSTIFICACIÓN

El proceso de soldadura por fricción agitación FSW, es un proceso relativamente nuevo para metales en estado sólido. El FSW consiste en unir dos láminas de metal aplicando fricción y fuerza a través de una herramienta giratoria.

La FSW está considerada como el adelanto más significativo en la unión de metales en décadas y, además es una tecnología "verde" debido a su eficiencia energética, su amabilidad con el ambiente, y versatilidad. Comparada con los procesos de soldadura tradicionales, la FSW consume considerablemente menos energía, no usa consumibles tales como cubierta de gas o flujo, y no se crean emisiones perjudiciales durante la soldadura. Asimismo, diferentes aleaciones y composiciones de aluminio pueden ser unidas con la misma facilidad [10].

Se han realizado estudios en universidades de América del Sur como los de [2], [4], [5], [6], [11]-[15] y [18], en relación al proceso de soldadura por fricción agitación, desde diversos

aspectos como modelados numéricos y análisis inversos del proceso de transferencia de calor utilizando algunas herramientas numéricas y materiales.

Cabe destacar las diversas e importantes aplicaciones de este proceso de soldadura, como lo son la construcción de partes para vehículos, embarcaciones y aeronaves. Actualmente se está aplicando este proceso para construir tanques de combustible para cohetes en la NASA [10].

Hasta el presente, en la UNEXPO no existen estudios que utilicen las ecuaciones que gobiernan la transferencia de calor en el proceso de soldadura por fricción agitación, debido a que esto involucra un amplio análisis matemático en el cual intervienen variables que deben ser controladas. En un principio, la UNEXPO cuenta con datos obtenidos en ensayos realizados por estudiantes y estudios de fotometría hechos a la pieza objeto de soldadura, pero no tienen una base matemática que respalde la validez de los resultados. Así mismo, debido a la existencia de softwares matemáticos que son capaces de manejar ecuaciones complejas y a los avances de la soldadura por fricción agitación con respecto a otros procesos de soldadura, surgió la necesidad de realizar este trabajo con la finalidad de utilizar la tecnología en paquetes computacionales que se basan en conocimientos matemáticos que permiten optimizar valores experimentales a través del modelado (simulación), como lo es el ABAQUS, entre otros.

ABAQUS es un programa destinado a resolver problemas en ciencias e ingeniería y está basado en el método de los elementos finitos. El programa puede resolver casi todo tipo de problemas, desde un simple análisis lineal hasta simulaciones complejas no lineales. Abaqus posee una extensa librería de elementos finitos que permite modelar virtualmente cualquier geometría, así como su extensa lista de modelos que simulan el comportamiento de una gran mayoría de materiales, permitiendo su aplicabilidad en distintas áreas de ingeniería.

ABAQUS es una de las herramientas más completas de elementos finitos disponible. La gama de funciones del software ABAQUS recorre toda la variedad de análisis computacionales, incluyendo el análisis implícito y explícito; las capacidades estáticas y transitorias tanto lineales como no lineales, y los métodos multicuerpo y multifísico. Los modelos ampliables de material es una de las características más importantes de ABAQUS, lo que permite a los usuarios agregar nuevos módulos de respuesta al material creado al cuerpo básico de capacidades de modelado de ABAQUS, como por ejemplo, modelos constitutivos para suelos, concreto y otros materiales de interés en la Ingeniería Civil. Otro aspecto importante de ABAQUS es el nivel de integración entre los productos que conforman esta familia, por lo

que las herramientas de ABAQUS ofrecen una excelente solución para una amplia variedad de necesidades de análisis de elementos finitos, esto es, según [17].

En este estudio se utiliza el paquete ABAQUS/CAE v6.7-1 para optimizar los valores de temperatura que se obtienen por termografía durante el proceso de soldadura por fricción agitación en placas de aluminio AA 1100-0.

§1.4. ALCANCES Y LIMITACIONES

En este trabajo, el estudio se realizó considerando solamente la influencia significativa del campo térmico (temperaturas) sobre el campo mecánico durante el proceso de soldadura por fricción agitación usando placas de aluminio AA 1100-0. Por lo tanto, se asumen constantes durante el proceso de soldadura: la conductividad térmica, densidad, calor específico, Módulo de Young, Radio de Poisson del aluminio AA 1100-0 y del acero AISI 1045, el coeficiente de fricción entre aluminio y acero; y la velocidad de rotación y de traslación. También se utilizó una geometría más sencilla al momento de realizar el modelado del proceso en ABAQUS/CAE v6.7-1 debido a la falta de tiempo y al nivel de complejidad que se tendría al incorporar la geometría real del pin dentro del proceso, por lo que se modeló un pin cilíndrico.

Los resultados obtenidos sirven como referencia para sustentar otros estudios de optimización de valores de temperaturas con muestras diferentes de placas de aluminio.

El conocimiento sobre el funcionamiento del paquete computacional ABAQUS/CAE constituye un aporte para mejorar la calidad de ensayos experimentales, que se traduce en resultados de exigencia industrial.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

En el presente capítulo se exponen algunos antecedentes de autores que han abordado la problemática en estudio. Así mismo, se introducen algunos elementos teóricos del proceso de Soldadura por Fricción Agitación y de la teoría del Método de los Elementos Finitos, en particular, los tipos de elementos (tetraédricos y hexaédricos) que se utilizan en la discretización del dominio. Finalmente, se presenta contenido relacionado con la teoría de transferencia de calor y la deducción de la ecuación (1.1) que modela el proceso.

§2.1. ANTECEDENTES

Algunos trabajos relacionados con el tema de soldadura por fricción agitación han sido realizados por varios autores. A continuación se detallan cada uno de ellos.

En el trabajo de [1] y [18] se realizaron una serie de ensayos de soldadura FSW con el aluminio AA 1100-0 obteniendo óptimos resultados al trabajar con una herramienta cilíndrica con pin roscado y velocidades de traslación y de rotación de 92 mm/min y 1700 rpm respectivamente. Como parte del estudio, realizaron termografías del proceso. Esto les permitió observar que la temperatura de fusión del material no es alcanzada en ningún momento y, las temperaturas máximas reflejadas en las termografías no sobrepasan los 300 °C. Cabe destacar que adicional a lo anterior, en el trabajo de [1], realizaron estudios metalográficos y mediciones del perfil de dureza en el área soldada. [1] indica que para lograr las uniones de buena calidad se deben respetar las condiciones anteriormente señaladas, obteniendo con ello un llenado total del cordón de soldadura del aluminio (proceso óptimo).

Los autores en [14] trabajan con la ecuación (1.1) como base de su modelo térmico, obteniendo un modelado numérico de la unión de las piezas involucradas en el proceso de soldadura por fricción agitación, a través del mallado de las mismas con el método de los elementos finitos.

Los autores en [12], modelan el proceso de soldadura utilizando programas de elementos finitos, reproduciendo el mapa térmico y la distribución de flujo del material y presentaron

desarrollos experimentales con mediciones de la distribución de temperaturas obtenidas por termografía y su análisis comparativo con los resultados numéricos.

En el estudio de [15], se modela el comportamiento de un caso en el que se varía la posición de la herramienta. Analizaron la influencia de esta variable del proceso de FSW en la distribución del flujo de material y campo de presiones. Estos autores llegaron a la conclusión de que para obtener mayor sensibilidad del modelo con respecto a la posición de la herramienta es necesario incluir condiciones de fricción más representativas de los fenómenos involucrados en FSW.

Los autores de [11], simulan el proceso de unión de aceros inoxidable austeníticos considerando acoplamiento térmico. Para la resolución del problema mecánico utilizaron un modelo visco plástico con una ley representativa de estos aceros en el rango de las temperaturas del proceso y un modelo de convección-difusión en la parte térmica. Estos autores concluyeron que los resultados obtenidos tenían buena correlación con los datos reportados.

En [2], simularon el proceso de soldadura por el Método de los Elementos Finitos mediante un modelo de prescripción del ciclo térmico, por simplicidad. Emplearon fuentes puntuales de temperatura a lo largo del cordón de soldadura y obtuvieron un modelo simple y suficientemente aproximado logrando obtener en el campo mecánico, resultados comparables a los que se obtienen mediante modelos más complejos que se aproximan a los que ocurren en un proceso real.

En [5], se trabaja con el método de los elementos finitos con el objeto de obtener un modelo matemático para un problema de conducción de calor en placas metálicas y materiales compuestos tipo carbono-carbono, especificando las condiciones fronteras consistentes con el fenómeno de transferencia de calor en el material considerado.

En el estudio de [4] utilizan un análisis inverso formulado como un problema de optimización, el cual resolvieron con la optimización extrema generalizada o GEO. Por otra parte, aplicaron el algoritmo de tri-diagonalización de matrices para resolver la ecuación de transferencia de calor y demostraron que el análisis inverso puede ser una manera efectiva para evaluar y predecir los parámetros que gobiernan el complejo proceso de FSW, los cuales de lo contrario serían muy difíciles de determinar a partir de una medida directa. Finalmente, los autores [6] propusieron un modelo térmico semianalítico para el proceso de FSW utilizando la siguiente ecuación

$$\rho C_p \dot{T} + Q_{int} = \nabla(k \nabla T) \quad (2.1)$$

donde Q_{int} es el término de fuente de calor volumétrica derivado de la disipación plástica, ρ es la densidad del material, C_p es la capacidad calórica, k es el coeficiente de conductividad térmica y T es la temperatura.

Los autores basaron la formulación del flujo de calor, durante el proceso de soldadura en soluciones genéricas de la ecuación diferencial para la conducción de calor en un cuerpo sólidos para una fuente de calor puntual con velocidad lineal constante. La generación de calor fue considerada como una función de la temperatura de la interface herramienta-placas, la cual fue calculada por medio de una rutina numérica escrita en código Matlab. Concluyeron que los resultados obtenidos con el modelo semianalítico concuerdan bien con los datos tomados de la literatura.

§2.2. BASES TEÓRICAS

§2.2.1. El Método de los Elementos Finitos

Según [19], [3] y [8], el método de los elementos finitos es una herramienta numérica para determinar soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas de ingeniería. El método fue desarrollado originalmente para estudiar los esfuerzos en estructuras de fuselaje complejas y fue extendido posteriormente al campo general de la mecánica de medios continuos. El método de los elementos finitos está recibiendo atención considerable en la enseñanza de las áreas de ingeniería y en la industria debido a su diversidad y flexibilidad como herramienta de análisis. A menudo es necesario obtener soluciones numéricas aproximadas para problemas industriales complejos, en los cuales las soluciones exactas son difíciles de alcanzar.

El método de los elementos finitos considera que la región de la solución se compone de muchas subregiones interconectadas, pequeñas (o elementos) que proporciona una aproximación por pieza a las ecuaciones gobernantes. Esto es, las ecuaciones diferenciales parciales complejas son reducidas a ecuaciones lineales o no lineales simultáneas. Así, el proceso de discretización de elementos finitos (es decir, dividiendo la región en un número de regiones más pequeñas) reduce el problema continuo, el cual tiene un número infinito de incógnitas, a uno con un número finito de incógnitas en puntos específicos conocidos como nodos.

Se aproxima la solución de un problema continuo a través del método de los elementos finitos siguiendo el proceso paso por paso que se detalla a continuación.

a) Discretizar el continuo.

Dividir la región de solución en subregiones (o elementos) de tal manera que no se solapen. La discretización por elemento finito admite una variedad de formas de elementos, por ejemplo, triángulos y cuadriláteros. Cada elemento está formado por una conexión de un cierto número de nodos (Figura 2.1).

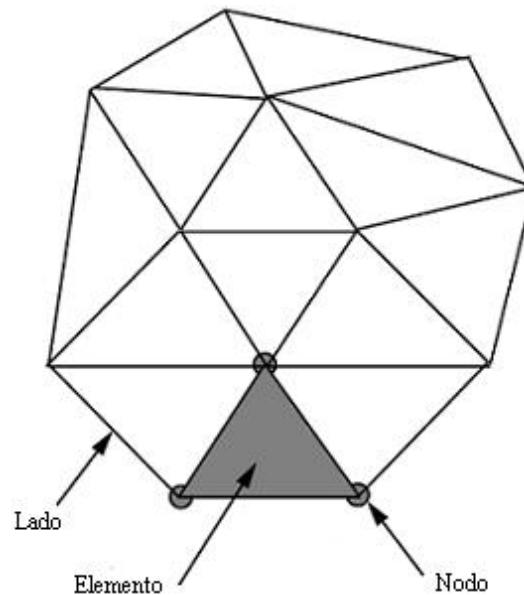


FIGURA 2.1: Típica malla de elementos finitos. Elementos, nodos y lados.

b) Seleccionar las funciones de forma o de interpolación.

Escoger el tipo de función de interpolación que representa la variación de la variable de campo, sobre un elemento. El número de nodos forman un elemento; la naturaleza y el número de incógnitas en cada nodo deciden la variación de la variable de campo en el elemento.

c) Formar ecuaciones de elemento (formulación).

Determinar las ecuaciones de matrices que expresen las propiedades de los elementos individuales formando una matriz por la izquierda (LHS) y un vector de carga.

d) Ensamblar las ecuaciones de elemento para obtener un sistema de ecuaciones simultáneas.

Para encontrar las propiedades de todo el sistema, se deben ensamblar todas las ecuaciones de los elementos individuales. Esto es, combinar las ecuaciones de matrices de

cada elemento de una forma apropiada tal que la matriz resultante represente el comportamiento de toda la región de solución del problema.

e) Resolver el sistema de ecuaciones.

El conjunto resultante de ecuaciones algebraicas, puede ahora ser resuelto para obtener los valores nodales de la variable de campo, como por ejemplo, temperatura.

f) Calcular las cantidades secundarias.

A partir de los valores nodales de la variable de campo, por ejemplo, temperatura, se puede calcular las cantidades secundarias, por ejemplo, flujos de calor espaciales.

Elementos y Funciones de Forma

Como se muestra en la Figura 2.1, el método de los elementos finitos involucra la discretización del dominio y de las ecuaciones gobernantes. En este proceso, las variables son representadas a trozos sobre el dominio. Dividiendo la región de solución en un número de regiones más pequeñas, llamadas elementos, y aproximando la solución sobre estas regiones a través de una función apropiada conocida, se establece una relación entre las ecuaciones diferenciales y los elementos. Las funciones empleadas para representar la naturaleza de la solución dentro de cada elemento son llamadas funciones de forma, o funciones de interpolación, o funciones base. Son llamadas funciones de interpolación ya que son utilizadas para determinar el valor de la variable de campo dentro del elemento, interpolando los valores nodales. También son conocidas como funciones base ya que forman la base del método de discretización. Las funciones de tipo polinomial han sido mayormente usadas ya que pueden ser integradas o diferenciadas, fácilmente, y la exactitud de los resultados pueden ser mejorados, aumentando el orden del polinomio como se muestra en la Figura 2.2.

Elemento Lineal Unidimensional

Muchos problemas industriales y ambientales pueden ser aproximados usando un modelo de elemento finito unidimensional. Por ejemplo, el flujo de tuberías, el flujo de ríos, la transferencia de calor a través de una aleta con sección transversal uniforme, y así sucesivamente. Pueden ser resueltos aproximadamente usando una hipótesis unidimensional. La Figura 2.2 muestra el perfil de temperatura en un elemento representado a través de polinomios lineales y cuadráticos.

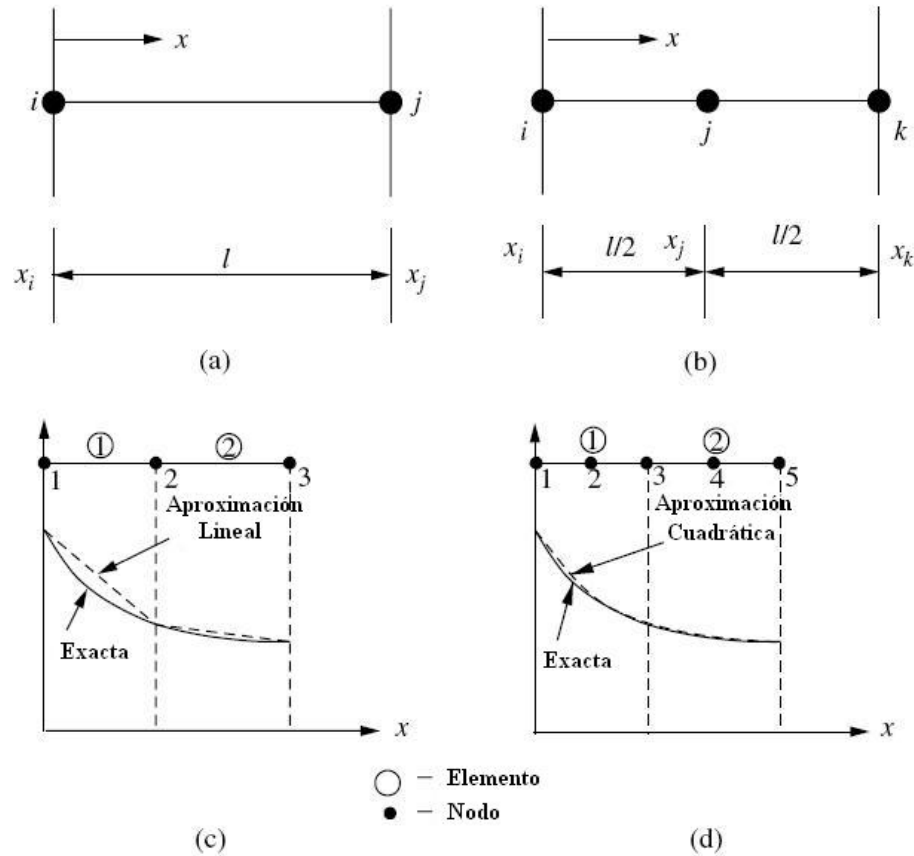


FIGURA 2.2: Elementos finitos unidimensionales. (a) Un elemento lineal, (b) un elemento cuadrático, (c) lineal y (d) la variación cuadrática de la temperatura sobre un elemento.

Consideremos un elemento lineal típico con nodos extremos i y j con la correspondiente temperatura denotada por T_i y T_j respectivamente. La variación de temperatura lineal en el elemento está representada como sigue

$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{2.2}$$

donde T es la temperatura en cualquier lugar x y los parámetros α_1 , y α_2 son constantes. Como hay dos constantes arbitrarias en la representación lineal, se requieren sólo dos nodos para determinar los valores de α_1 , y α_2 , digamos

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i \tag{2.3}$$

$$T_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j \tag{2.4}$$

De las ecuaciones anteriores, se obtiene lo siguiente

$$\alpha_1 = \frac{T_i x_j - T_j x_i}{x_j - x_i} \quad (2.5)$$

$$\alpha_2 = \frac{T_j - T_i}{x_j - x_i} \quad (2.6)$$

Sustituyendo los valores de α_1 y α_2 en la Ecuación 2.2 obtenemos

$$T = T_i \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right] + T_j \left[\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right] \quad (2.7)$$

o

$$T = N_i T_i + N_j T_j = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

donde N_i y N_j son llamadas funciones de forma o funciones de interpolación o funciones base.

$$N_i = \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right] \quad y \quad N_j = \left[\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right] \quad (2.9)$$

La Ecuación 2.8 puede ser escrita como sigue

$$T = [\mathbf{N}] \{\mathbf{T}\} \quad (2.10)$$

donde

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

es la matriz de función de forma y

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

es el vector de temperaturas desconocidas.

La Ecuación 2.8 muestra que la temperatura T en cualquier lugar x puede ser calculada usando las funciones de forma N_i y N_j evaluadas en x . Las funciones de forma en diferentes lugares dentro de un elemento se muestran en la Tabla 2.1.

Item	Nodo i	Nodo j	x arbitrario
N_i	1	0	entre 0 y 1
N_j	0	1	entre 0 y 1
$N_i + N_j$	1	1	1

TABLA 2.1: Propiedades de las Funciones de Forma Lineales.

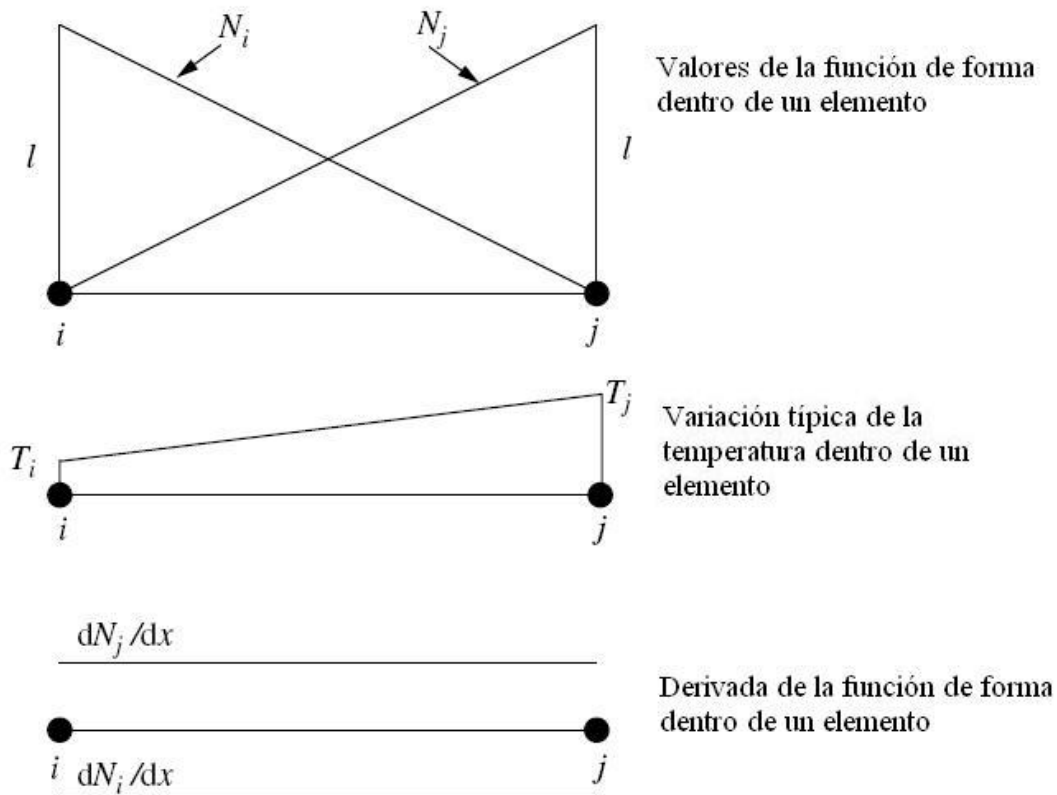


FIGURA 2.3: Variación de las funciones de forma, temperatura y derivadas dentro de un elemento lineal.

La función de forma asume un valor unitario en el nodo asignado y cero en todos los demás nodos. Se observa que la suma de todas las funciones de forma en un elemento es igual a la unidad en cualquier lugar dentro del elemento, incluyendo los bordes. Estos son los dos requisitos esenciales de las propiedades de las funciones de forma de cualquier elemento en una, dos o tres dimensiones. La Figura 2.3 muestra la variación de las funciones de

forma y sus derivadas dentro de un elemento lineal. También en esta figura se muestra una variación lineal típica de temperatura. Así mismo, las derivadas de las funciones de forma son constantes dentro de un elemento.

De la Ecuación 2.8, el gradiente de temperatura es calculado como sigue

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dN_i}{dx} T_i + \frac{dN_j}{dx} T_j = -\frac{1}{x_j - x_i} T_i + \frac{1}{x_j - x_i} T_j \quad (2.13)$$

o

$$\frac{dT}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

donde l es la longitud de un elemento igual a $(x_j - x_i)$.

Así, se observa que el gradiente de temperatura es constante dentro del elemento mientras que la variación de temperatura es lineal. Se puede reescribir la Ecuación 2.14 como sigue

$$g = [\mathbf{B}]\{\mathbf{T}\} \quad (2.15)$$

donde g es el gradiente de la variable de campo \mathbf{T} . $[\mathbf{B}]$ es la matriz de derivadas, o la matriz de esfuerzo en mecánica estructural, la cual relaciona el gradiente de la variable de campo con los valores nodales y $\{\mathbf{T}\}$ es el vector temperatura.

La matriz de función de forma $[\mathbf{N}]$ y la matriz de derivadas $[\mathbf{B}]$ son dos matrices importantes que son usadas en la determinación de las propiedades del elemento.

Elementos Triangulares Lineales Bidimensionales

El elemento triangular lineal bidimensional, también conocido como un elemento simple, está representado por

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.16)$$

donde el polinomio es lineal en x y y y contiene tres coeficientes. Como un triángulo lineal tiene tres nodos (Figura 2.4), los valores de α_1 , α_2 y α_3 se determinan en

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ T_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

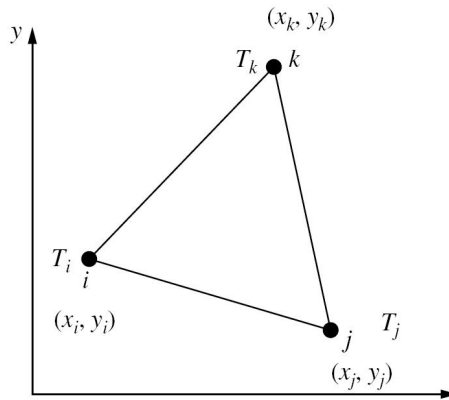


FIGURA 2.4: Un elemento triangular lineal.

de lo que se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) T_i + (x_k y_i - x_i y_k) T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k] \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(y_j - y_k) T_i + (y_k - y_i) T_j + (y_i - y_j) T_k] \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_k - x_j) T_i + (x_i - x_k) T_j + (x_j - x_i) T_k]
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

donde A es el área del triángulo dado por

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_j y_k - x_k y_j)
 \tag{2.19}$$

Sustituyendo los valores de α_1 , α_2 y α_3 en la Ecuación 2.17 y comparando los coeficientes de T_i , T_j y T_k , se obtiene

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}
 \tag{2.20}$$

donde,

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (2.21)$$

y

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j; & b_i &= y_j - y_k; & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k; & b_j &= y_k - y_i; & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i; & b_k &= y_i - y_j; & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (2.22)$$

Si se evalúa N_i en el nodo i , donde las coordenadas son (x_i, y_i) , entonces se obtiene lo siguiente

$$(N_i)_i = \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x_i + (x_k - x_j)y_i] = \frac{2A}{2A} = 1 \quad (2.23)$$

Similarmente, se puede verificar rápidamente que $(N_j)_i = (N_k)_i = 0$.

Así, se observa que las funciones de forma tienen un valor unitario en el vértice asignado y cero en los demás vértices. Es posible probar que

$$N_i + N_j + N_k = 1 \quad (2.24)$$

en todo el elemento, incluyendo los bordes.

Los gradientes de la temperatura T están dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} T_k = \frac{b_i}{2A} T_i + \frac{b_j}{2A} T_j + \frac{b_k}{2A} T_k \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} T_k = \frac{c_i}{2A} T_i + \frac{c_j}{2A} T_j + \frac{c_k}{2A} T_k \end{aligned}$$

o

$$\{\mathbf{g}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Se debe notar que ambas $\partial T/\partial x$ y $\partial T/\partial y$ son constantes dentro de un elemento así como lo son b_i, b_j, b_k y c_i, c_j y c_k para un triángulo dado. Luego, los flujos de calor q_x y q_y también son constantes dentro de un elemento triangular lineal.

Coordenadas de Área

Ahora se introduce un sistema de coordenadas de área (o natural), para elementos triangulares con el fin de simplificar el proceso de solución. Se considera un punto P dentro de un triángulo en cualquier ubicación como se muestra en la Figura 2.5. Las coordenadas locales L_i, L_j y L_k de este punto se pueden establecer calculando distancias adimensionales o áreas apropiadas. Por ejemplo, L_i está definida como una razón entre la distancia perpendicular desde P al borde jk (OP) y la distancia perpendicular del punto i desde el borde jk (QR). Así se tiene lo siguiente

$$L_i = \frac{OP}{QR} \tag{2.26}$$

Similarmente, se definen L_j y L_k . El valor de L_i es también igual a la razón entre el área A_i (opuesta al nodo i) y el área total del triángulo, esto es,

$$L_i = \frac{A_i}{A} = \frac{0,5(OP)(jk)}{0,5(QR)(jk)} = \frac{OP}{QR} \tag{2.27}$$

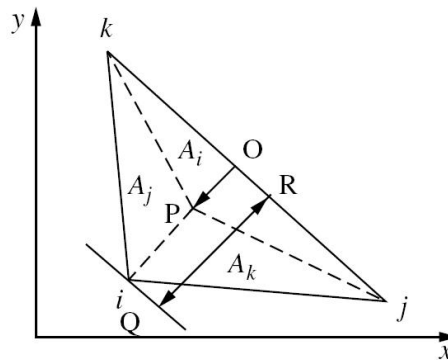


FIGURA 2.5: Coordenadas de área de un elemento triangular.

Así, la coordenada local L_i varía desde 0 en el lado jk a 1 en el nodo i . En la Figura 2.5 se observa que

$$A_i + A_j + A_k = A \tag{2.28}$$

o

$$\frac{A_i}{A} + \frac{A_j}{A} + \frac{A_k}{A} = 1 \quad (2.29)$$

por tanto,

$$L_i + L_j + L_k = 1 \quad (2.30)$$

La relación entre las coordenadas (x, y) y las coordenadas de área, o naturales, están dadas por

$$x = L_i x_i + L_j x_j + L_k x_k \quad (2.31)$$

y

$$y = L_i y_i + L_j y_j + L_k y_k \quad (2.32)$$

De las ecuaciones 2.30, 2.31 y 2.32, se pueden deducir las siguientes relaciones para las coordenadas locales:

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ L_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ L_k &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde las constantes a, b y c están definidas en la Ecuación 2.22. Comparando con la Ecuación 2.21, es claro que

$$\begin{aligned} L_i &= N_i \\ L_j &= N_j \\ L_k &= N_k \end{aligned} \quad (2.34)$$

Así, las coordenadas locales o de área en un triángulo son las mismas así como las funciones de forma para un elemento triangular lineal. En general, las coordenadas locales y las funciones de forma son las mismas para elementos lineales sin importar si son de una, dos o tres dimensiones. Para un elemento triangular lineal bidimensional, con coordenadas locales L_i, L_j y L_k , se tiene una simple fórmula para la integración sobre el triángulo, esta es,

$$\int_A L_i^a L_j^b L_k^c dA = \int_A N_i^a N_j^b N_k^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A \quad (2.35)$$

donde A es el área del triángulo. Se puede notar que L_i , L_j y L_k son las funciones de forma para un elemento triangular lineal.

Elementos Cuadriláteros Bidimensionales

El elemento cuadrilátero tiene cuatro nodos localizados en los vértices como se muestra en la Figura 2.6. En la práctica también se usan cuadriláteros de ocho y nueve nodos. La malla cuadrilátera se asemeja a una malla de diferencias finitas. Sin embargo, para el caso de una malla de diferencias finitas, la malla debe ser ortogonal, esto es, todas las líneas se intersectan en ángulo recto una con la otra, mientras que en la malla de elemento finito, cada elemento puede ser único en forma y cada lado puede tener una inclinación diferente. En su forma más simple, el elemento cuadrilátero se convierte en un elemento rectangular (Figura 2.7) donde los bordes del elemento son paralelos a un sistema de coordenadas.

La temperatura dentro de un cuadrilátero se representa como sigue

$$T = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4xy \quad (2.36)$$

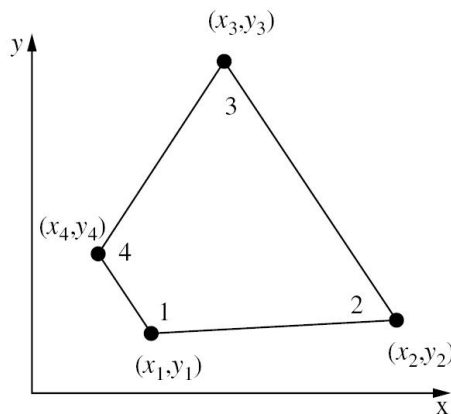


FIGURA 2.6: Un elemento cuadrilátero típico.

y así los gradientes de temperatura pueden ser escritos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha_2 + \alpha_4y \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha_3 + \alpha_4x \end{aligned} \quad (2.37)$$

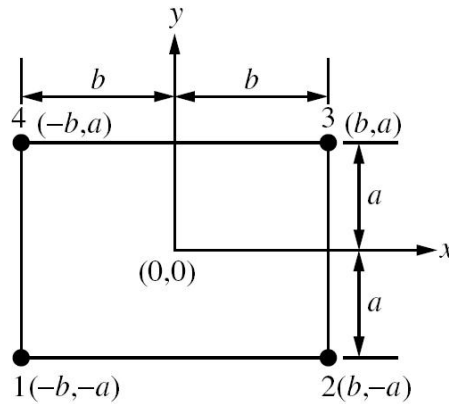


FIGURA 2.7: Un elemento rectangular simple.

Por tanto, el gradiente varía dentro del elemento en forma lineal. Al sustituir los valores de T_1, T_2, T_3 y T_4 en la Ecuación 2.36. para los nodos $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ y resolver, se obtienen los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 . Al sustituir estas relaciones en la Ecuación 2.36 y comparando los coeficientes de T_1, T_2, T_3 y T_4 , se obtiene lo siguiente

$$T = N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3 + N_4T_4 \quad (2.38)$$

donde para un elemento rectangular (Figura 2.7),

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y) \\ N_2 &= \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y) \\ N_3 &= \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y) \\ N_4 &= \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Se pueden expresar estas funciones de forma en términos de las razones de longitud $\frac{x}{b}$ y $\frac{y}{a}$ como

$$N_1 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{a}\right) = \frac{1}{4}(1 - \zeta)(1 - \eta) \quad (2.40)$$

donde

$$-1 \leq \zeta \leq 1 \quad y \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (2.41)$$

son las coordenadas adimensionales de un elemento (Figura 2.8).

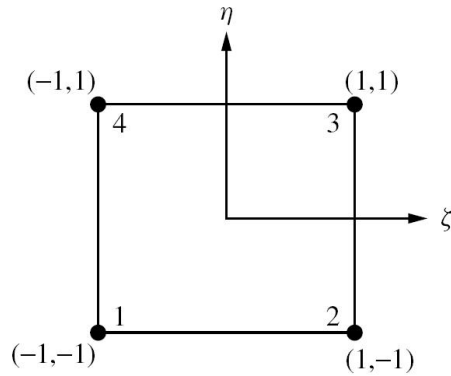


FIGURA 2.8: Coordenadas adimensionales de un elemento rectangular.

En general, las funciones de forma pueden ser escritas como sigue

$$N_i = (1 + \zeta\zeta_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (2.42)$$

donde (ζ_i, η_i) son las coordenadas del nodo i .

Debido a que las funciones de forma son lineales en las direcciones x y y , a la que se refiere como configuración bilineal. Las derivadas pueden ser expresadas como sigue:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} T_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} T_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} T_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} T_4 = \frac{1}{4ab} [-(a-y)T_1 + (a-y)T_2 + (a+y)T_3 - (a+y)T_4] \quad (2.43)$$

Similarmente,

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{4ab} [-(b-x)T_1 - (b+x)T_2 + (b+x)T_3 + (b-x)T_4] \quad (2.44)$$

La matriz gradiente se puede escribir como

$$\{\mathbf{g}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(a-y) & (a-y) & (a+y) & -(a+y) \\ -(b-x) & -(b+x) & (b+x) & (b-x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

La matriz $[\mathbf{B}]$ se escribe como

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\zeta) & -(1+\zeta) & (1+\zeta) & (1-\zeta) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Elementos Tridimensionales

La cantidad de datos requeridos para establecer el dominio computacional y las condiciones de borde se vuelve significativamente más grande en problemas de tres dimensiones que en los de dos dimensiones. Por tanto la cantidad de costo/trabajo computacional aumenta considerablemente, en consecuencia, elementos tridimensionales apropiados necesitan ser usados. Los elementos tetraédrico (a) y hexaédrico con forma de ladrillo (b) son desarrollados en esta sección (Figura 2.4), los cuales son extensiones de los elementos triangulares lineales y cuadriláteros en dos dimensiones. La representación lineal de temperatura para un elemento tetraédrico (elemento lineal tridimensional) está dada como sigue

$$T = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z \tag{2.47}$$

Las constantes de la Ecuación 2.10 pueden ser determinadas y puede ser escritas de la siguiente forma:

$$T = N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3 + N_4T_4 \tag{2.48}$$

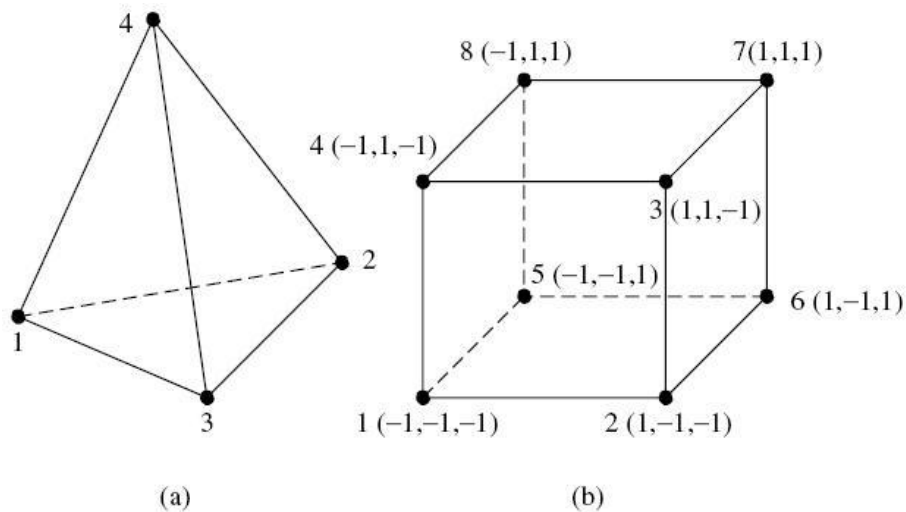


FIGURA 2.9: Elementos tridimensionales, (a) tetraedro y (b) hexaedro.

donde

$$N_i = \frac{1}{6V}(a_i + b_ix + c_iy + d_iz) \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.49}$$

El volumen del tetraedro está expresado como sigue

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

También se observa que

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{b_1}{6V}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{c_1}{6V}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial z} = \frac{d_1}{6V}$$

Por tanto, la matriz de gradiente de las funciones de forma pueden ser escritas como sigue

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

donde

$$b_1 = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$c_1 = -\det \begin{bmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$d_1 = -\det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Similarmente, los demás términos en la Ecuación 2.20 pueden ser también determinados. Todos los términos se pueden resumir como sigue:

b-términos

$$b_1 = (y_2 - y_4)(z_3 - z_4) - (y_3 - y_4)(z_2 - z_4)$$

$$b_2 = (y_3 - y_4)(z_1 - z_4) - (y_1 - y_4)(z_3 - z_4)$$

$$b_3 = (y_1 - y_4)(z_2 - z_4) - (y_2 - y_4)(z_1 - z_4)$$

$$b_4 = b_1 + b_2 + b_3$$

c-términos

$$c_1 = (x_3 - x_4)(z_2 - z_4) - (y_2 - x_4)(z_3 - z_4)$$

$$c_2 = (x_1 - x_4)(z_3 - z_4) - (y_3 - x_4)(z_1 - z_4)$$

$$c_3 = (x_2 - x_4)(z_1 - z_4) - (y_1 - x_4)(z_2 - z_4)$$

$$c_4 = -(c_1 + c_2 + c_3)$$

d-términos

$$d_1 = (x_2 - x_4)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_3 - z_4)$$

$$d_2 = (x_3 - x_4)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_3 - z_4)$$

$$d_3 = (x_1 - x_4)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - z_4)$$

$$d_4 = -(d_1 + d_2 + d_3)$$

Se puede establecer un sistema de coordenadas de volúmen para el tetraedro de forma parecida a como fue hecho con las coordenaas de área para un triángulo. En el tetraedro, se utilizan cuatro radios de distancia, cada uno normal a los lados L_1 , L_2 , L_3 y L_4 . Note que $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$.

Las funciones de forma lineales están relacionadas a las coordenadas de volumen com sigue:

$$N_1 = L_1; N_2 = L_2; N_3 = L_3 \text{ y } N_4 = L_4 \quad (2.55)$$

Las integrales de volumen pueden ser fácilmente evaluadas con la relación,

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V \quad (2.56)$$

El ladrillo, o elemento hexaédrico mostrado en la Figura 2.9(b), es un elemento simple, el cual es fácil de visualizar cuando el dominio es discretizado. La función de interpolación bilineal es

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 xyz \quad (2.57)$$

la cual puede ser escrita como

$$T = \sum_{i=1}^8 N_i T_i \quad (2.58)$$

donde

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \zeta \zeta_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \rho \rho_i) \quad (2.59)$$

donde ζ_i , η_i y ρ_i son las coordenadas locales.

Condiciones de Contorno

Una vez establecida la ecuación que rige la transferencia de calor en el cuerpo es necesario plantear las condiciones de contorno del problema. Éstas pueden ser de varios tipos:

- a) **Temperatura conocida en un contorno:** En este caso se conoce la temperatura de una determinada parte del cuerpo S_1 :

$$T(x, y, z, t) = T_0; \quad \forall (x, y, z) \in S_1 \quad (2.60)$$

donde T_0 es el valor de la temperatura en ese contorno.

- b) **Flujo conocido en una superficie:** En este caso se conoce el flujo de calor a través de una superficie del dominio S_2 . La expresión que define esta condición de contorno es:

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z = -q_0 \quad (2.61)$$

donde $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ es el vector normal a la superficie S_2 de flujo conocido, y q_0 es el valor del flujo.

- c) **Flujo convectivo conocido en una superficie:** Alternativamente se puede conocer el flujo convectivo de calor a través de una superficie del dominio S_3 . En este caso el valor del flujo q_0 de la ecuación anterior se sustituye por la expresión:

$$\alpha(T - T_{ext}) \quad (2.62)$$

donde $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ es el vector normal a la superficie S_3 de flujo conocido, S_3 .

Nótese que las condiciones de contorno mostradas hasta el momento se emplean tanto para problemas estacionarios como para transitorios, si bien en el caso de los estacionarios la variable tiempo se elimina de las ecuaciones y de las condiciones de contorno.

Desde un punto de vista matemático las condiciones de contorno en problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

§2.2.2. Transferencia de Calor

Según [7], la transferencia de calor ocurre cuando hay una diferencia de temperatura dentro de un cuerpo y el medio que lo rodea. El calor es transferido por conducción, convección y radiación.

Transferencia de Calor por Conducción

La transferencia de calor por medio de la conducción se logra a través de dos mecanismos. El primero es la interacción molecular, en el cual las moléculas de niveles energéticos relativamente mayores (indicados por su temperatura) ceden energía a moléculas adyacentes en niveles inferiores. Este tipo de transferencia sucede en los sistemas que tienen moléculas de sólidos, líquidos o gases y en los que hay un gradiente de temperatura [7].

El segundo mecanismo de transferencia de calor por conducción es el de electrones libres, los cuales se presentan principalmente en los sólidos metálicos puros. La concentración de electrones libres varía considerablemente para las aleaciones metálicas y es muy baja para los no metales.

La facilidad que tienen los sólidos para conducir el calor varía directamente con la concentración de los electrones libres; en consecuencia los metales puros son los mejores conductores de calor.

La ecuación de Fourier es la expresión cuantitativa

$$\frac{Q_x}{A} = -K \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.63)$$

que relaciona el gradiente de temperatura con la naturaleza del medio conductor y la razón de transferencia de calor. Aquí, Q_x es la razón de flujo de calor en la dirección de x , A es el área normal a la dirección del flujo de calor, $\frac{\partial T}{\partial x}$ es el gradiente de temperaturas en la dirección de x y, K es la conductividad térmica.

A la relación $\frac{Q_x}{A}$ se le llama el flujo de calor direccional en x . La expresión vectorial para el flujo de calor es

$$\frac{\vec{Q}}{A} = -K \nabla T \quad (2.64)$$

donde \vec{Q} es el vector de flujo de calor, ∇T es el gradiente de temperatura en forma vectorial.

El signo negativo en (2.63) y (2.64) es debido a que el flujo de calor por conducción sucede en la dirección de un gradiente de temperatura decreciente.

Las ecuaciones (2.63) y (2.64) son respectivamente las formas escalar y vectorial de la ecuación de la relación de Fourier, conocida en ocasiones como la primera ley de Fourier de la conducción del calor.

La conductividad térmica K es una propiedad muy importante de un material o medio. Este valor determina en gran parte la adaptabilidad de un material para un uso determinado.

Un material anisotrópico es aquel cuyas propiedades para conducir el calor varían en distintas direcciones, se llama isotrópico al medio cuyas propiedades no varían con la dirección.

Se llama proceso de estado estable o estacionario al caso de transferencia de calor en que el tiempo no es un factor. Se llama proceso de estado inestable o transitorio al que depende del tiempo.

Transferencia de Calor por Convección

Una forma básica en que sucede la transferencia de calor es la convección, la cual involucra el intercambio de energía entre un fluido y una superficie o interface. Hay dos clases de

procesos convectivos: (1) la convección forzada en la cual se fuerza el movimiento de un fluido por una superficie debido al efecto de un agente externo tal como un ventilador o bomba; y (2) la convección natural o libre en que los cambios de densidad en el fluido a consecuencia del intercambio de energía provocan un movimiento natural del fluido.

Isaac Newton expresó por primera vez la ecuación básica de la relación para la transferencia convectiva del calor. Esta expresión conocida como la ecuación de la razón o ley de enfriamiento de Newton se escribe como sigue

$$Q = hA(T_{superficie} - T_{fluido}) \quad (2.65)$$

donde Q es la relación de la transferencia convectiva del calor, A es el área normal a la dirección del flujo de calor, $(T_{superficie} - T_{fluido})$ es la fuerza motriz de la temperatura y, h es el coeficiente convectivo de transferencia de calor.

La diferencia de la temperatura en la Ecuación (2.65) se puede escribir como $(T_{superficie} - T_{fluido})$ ó como $(T_{fluido} - T_{superficie})$, esta fuerza motriz de temperatura determina si la transferencia de calor es hacia o desde una superficie dada.

Transferencia de Calor por Radiación

La transferencia de calor por radiación no requiere de un medio para propagarse. De hecho, el intercambio de energía radiante entre las superficies es máximo cuando no hay material que ocupe el espacio intermedio. El intercambio de energía radiante puede ocurrir entre dos superficies, entre una superficie y un gas o medio participante, o puede involucrar una interacción compleja entre varias superficies y fluidos participantes. La transferencia de energía por radiación es un fenómeno electromagnético cuya naturaleza exacta no se conoce [7].

Se llama cuerpo negro a un cuerpo perfectamente emisor o absorbente de energía. La razón a la que emite energía radiante el cuerpo negro está dada por

$$\frac{Q}{A} = \sigma T^4 \quad (2.66)$$

donde Q es la emisión radiante, A es el área de la superficie de emisión, T es la temperatura absoluta y, σ es la constante de Stefan-Boltzmann, que numéricamente es igual a $\frac{0,1714 \times 10^{-8} \text{ Btu}}{\text{hr}} \cdot \text{ft}^2 \cdot (\text{°R})^4$.

La Ecuación (2.66) es la ecuación básica de la relación para la emisión de energía radiante y se conoce como la ecuación de la relación de Stefan-Boltzmann o como ley de Stefan-Boltzmann.

§2.2.3. Deducción de la Ecuación de Calor

La conducción es la forma de transferencia de calor en la que se realiza un intercambio de energía desde la región de mayor temperatura a la de menor temperatura, por el movimiento cinético de sus partículas, o por el impacto directo de sus moléculas, como es el caso de los fluidos en reposo, o por el arrastre de electrones como es el caso de los metales.

La ley básica de la conducción del calor, a partir de observaciones experimentales, proviene de Biot, pero en general se conoce con el nombre de ecuación de Fourier, ya que fue él quien la aplicó a su teoría analítica del calor. Esta ley establece que la tasa de transferencia de calor por conducción en una dirección dada, es proporcional al área normal a la dirección del flujo de calor, y al gradiente de temperatura en esa dirección.

Para el flujo térmico en la dirección x la Ley de Fourier viene dada por:

$$Q_x = -K \frac{\partial T}{\partial x} = -K \nabla T \quad (2.67)$$

donde Q_x es el vector flujo por unidad de área y por unidad de tiempo, y K es la conductividad térmica del material.

Así las componentes de la conducción de calor vienen dadas por la siguiente expresión:

$$Q = - \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \frac{\partial T}{\partial x} \\ -K \frac{\partial T}{\partial y} \\ -K \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

La ecuación de flujo de calor se puede formular partiendo de la Ley de Conservación de la Energía:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Calor que entra} \\ \text{en el sistema} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Calor generado} \\ \text{internamente} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Calor que sale} \\ \text{del sistema} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Cambio de la} \\ \text{energía interna} \end{array} \right]$$

Cuando se produce un aumento de la temperatura de un cuerpo, una parte de la energía térmica es almacenada. Si se considera un elemento diferencial de volumen $dV = dx dy dz$

como el mostrado en la Figura (2.10), la energía almacenada en el mismo viene dada por la expresión:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.69)$$

donde ρ es la densidad y C_p el calor específico del material, T es la temperatura del elemento (constante a lo largo de todo el diferencial de volumen) y t es el tiempo.

La energía generada internamente por unidad de volumen debido a las reacciones químicas, eléctricas o nucleares u otros fenómenos, viene representada por Q .

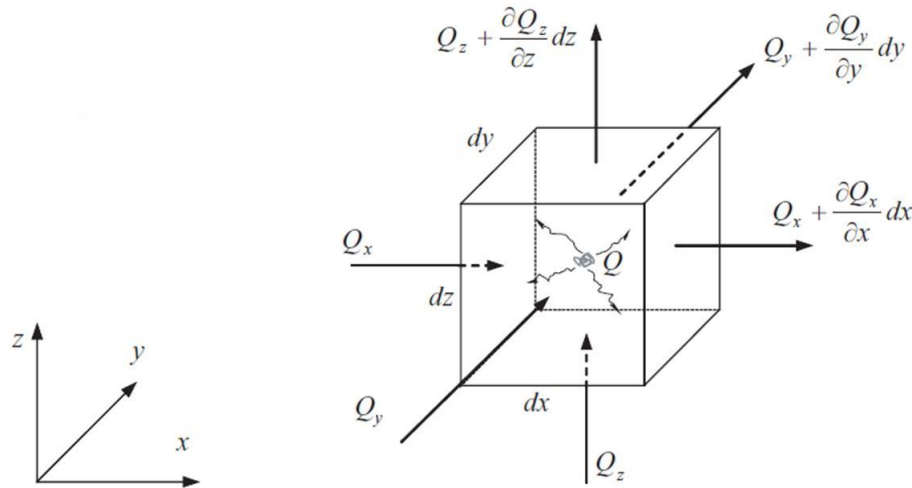


FIGURA 2.10: Representación gráfica de la Ley de Conservación de Energía.

Si se plantea la ley de la conservación de la energía en el elemento diferencial se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & (Q_x dy dz + Q_y dx dz + Q_z dx dy) + Q dx dy dz - \\ & \left[\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz \right) dx dy \right] \\ & = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \end{aligned}$$

donde los tres primeros términos representan el calor que entra en el cuerpo, el cuarto término es el calor generado internamente, los términos entre los corchetes representan el calor que sale del cuerpo, y el último término es la energía almacenada.

La expresión anterior se puede simplificar quedando de la siguiente manera:

$$Q - \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right] = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.70)$$

Sustituyendo el valor de conducción dado por la ley de Fourier la expresión anterior queda como sigue:

$$Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.71)$$

En el caso de que se esté tratando un problema estacionario en el que la temperatura en todos los puntos ha alcanzado un equilibrio (distribución de temperatura constante) el término de almacenamiento de energía en función del tiempo de la expresión anterior se anula quedando la siguiente ecuación:

$$Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.72)$$

que se conoce con el nombre de ecuación de Poisson. Si además de ser un problema estacionario, no hay generación interna de calor ($Q = 0$) la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.73)$$

que se conoce con el nombre de ecuación de Laplace.

§2.2.4. Soldadura por Fricción Agitación

Proceso de soldadura por Fricción-Agitación (FSW)

- Proceso de soldadura en fase sólida (patentado por [16]) con gran potencial de aplicación.
- Desarrollado originalmente para soldadura de Aluminio, empleado actualmente en una gran variedad de materiales (Cobre, Magnesio, Titanio, Acero, juntas disímiles, materiales compuestos, polímeros, etc.).
- Consiste en una herramienta rotante con dos cuerpos cilíndricos concéntricos (hombro y pin) que se inserta en la junta y se desplaza a lo largo de la misma.

Concepto y Principio de Funcionamiento

- El hombro es comprimido contra el material a soldar que está rígidamente fijado a una placa base.
- El calor generado por fricción en el hombro, y en menor medida en el pin lleva al material a un estado plástico.
- A medida que la herramienta se traslada en la junta se produce un flujo del material plastificado alrededor de la herramienta.
- El material es transportado (agitado) y forjado dentro de la junta.
- Se define un lado de avance (AS) y un lado de retroceso (RS) debido a que la junta presenta cierta asimetría.
- FSW involucra interacciones complejas entre proceso termomecánicos actuando simultáneamente, los que controlan las velocidades de calentamiento y enfriamiento, la deformación y el flujo plástico del material, la recristalización dinámica y la integridad mecánica de la junta.
- La soldadura se produce por extrusión y forjado del metal a altas velocidades de deformación.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

En este capítulo se explicita la metodología que permite encontrar una temperatura óptima en el problema que ha sido tratado de forma experimental por [1] y [18].

§3.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Para realizar esta investigación se tomaron como referencia los datos obtenidos por [1].

El Método de los Elementos Finitos se aplicó utilizando el software ABAQUS/CAE v6.7, con el que se realizó la discretización del problema con elementos tetraédricos de cuatro nodos y elementos hexaédricos de ocho nodos.

Matemáticamente se analiza la ecuación (1.1) con el MEF presentado en el capítulo 2 utilizando en el simulador los siguientes datos:

Propiedades	Aluminio AA 1100-0	Acero AISI 1045
Conductividad	222	51.9
Densidad	2710	7870
Módulo de Young	69	200
Radio de Poisson	0.33	0.29
Calor Específico	904	486

TABLA 3.1: Propiedades del Aluminio y Acero.

También se utiliza el coeficiente de fricción entre los dos metales de 0.1, el valor de la velocidad de rotación es de 1700 rpm (178.023 ya que se utilizó la conversión de este valor a radianes/segundo para mantener la consistencia de las unidades de medición).

§3.2. PROCEDIMIENTO EN ABAQUS/CAE v6.7-1

El tratamiento aplicado en este estudio para la optimización de los datos que obtuvo [1] se basa en el modelaje matemático (simulación) planteado por el paquete computacional ABAQUS/CAE v6.7-1 que permite corroborar los valores de la temperatura encontrados. A continuación se describe el procedimiento desarrollado.

§3.2.1. Módulo Parte

En este módulo se crean las dos partes involucradas en el proceso de FSW.

■ Crear Parte (Placas):

- 3D, deformable, por extrusión, sólida, tamaño aproximado 1.
- Crear rectángulo con vértices diagonalmente opuestos.
- Introducir $(-0.07, 0.003)$, $(0.07, 0)$, con extrusión de 0.2.
- Crear corte hueco circular.
- Seleccionar plano superior.
- Seleccionar uno de los lados de menor tamaño e introducir 0.1.
- Seleccionar lado de mayor tamaño e introducir 0.07.
- Introducir diámetro 0.0031.

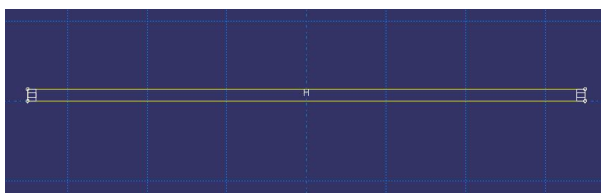


FIGURA 3.1: Sección de las Placas.

■ Crear Parte (Herramienta):

- 3D, deformable, por revolución, sólido, tamaño aproximado 1.
- Crear perfil de la herramienta utilizando el comando de líneas conectadas.
- Introducir los valores $(0, 0)$, $(0.0015, 0)$, $(0.0015, 0.003)$, $(0.003, 0.003)$, $(0.003, 0.007)$, $(0.004, 0.007)$, $(0.005, 0.014)$, $(0.005, 0.018)$, $(0.00635, 0.018)$, $(0.00635, 0.026)$, $(0, 0.026)$, $(0, 0)$.
- Introducir 360 grados de revolución.

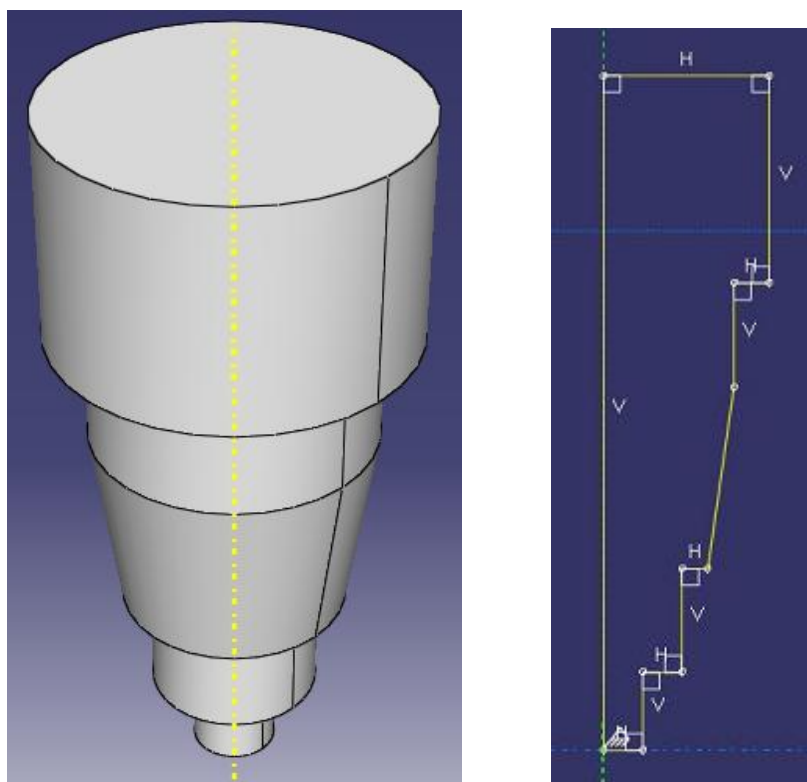


FIGURA 3.2: Geometría de la Herramienta.

§3.2.2. Módulo Propiedad

En este módulo se crean los materiales a utilizar con sus respectivas propiedades.

- Crear Material (Placas): Nombrar material como Aluminio AA 1100-0. Definir los siguientes elementos: elástico como propiedad mecánica, isotrópico (Módulo de Young 69, Radio de Poisson 0.33), Densidad 2710, Conductividad 222 y Calor Específico 904.
- Crear Material (Herramienta): Nombrar material como Acero AISI 1045. Definir los siguientes elementos: elástico como propiedad mecánica, isotrópico (Módulo de Young 200, Radio de Poisson 0.29), Densidad 7870, Conductividad 51.9 y Calor Específico 486.
- Crear Sección (Placas): Nombrar sección como Placas, sólida y homogénea, Aluminio AA 1100-0.
- Crear Sección (Herramienta): Nombrar sección como Pin, sólida y homogénea, Acero AISI 1045.
- Asignar Sección (Placas): Asignar las placas a la sección Placas y definir independiente.

- Asignar Sección (Herramienta): Asignar las placas a la sección Herramienta y definir independiente.

§3.2.3. Módulo Ensamblaje

- Crear Instancia de la Parte (Placas), independiente.
- Crear Instancia de la Parte (Herramienta), independiente.
- Crear restricción coaxial entre las partes.

§3.2.4. Módulo Paso

- Crear Paso de Análisis.
- Definir paso de tipo de proceso general.
- Definir el paso de tipo Coupled temp-displacement.
- En la pestaña Básica, introducir respuesta transitoria, período de tiempo 300, dejar por defecto Nlgeom Off, no definir la estabilización automática, e incluir el comportamiento creep/swelling/viscoelastic (esto incluye la deformación durante el análisis).

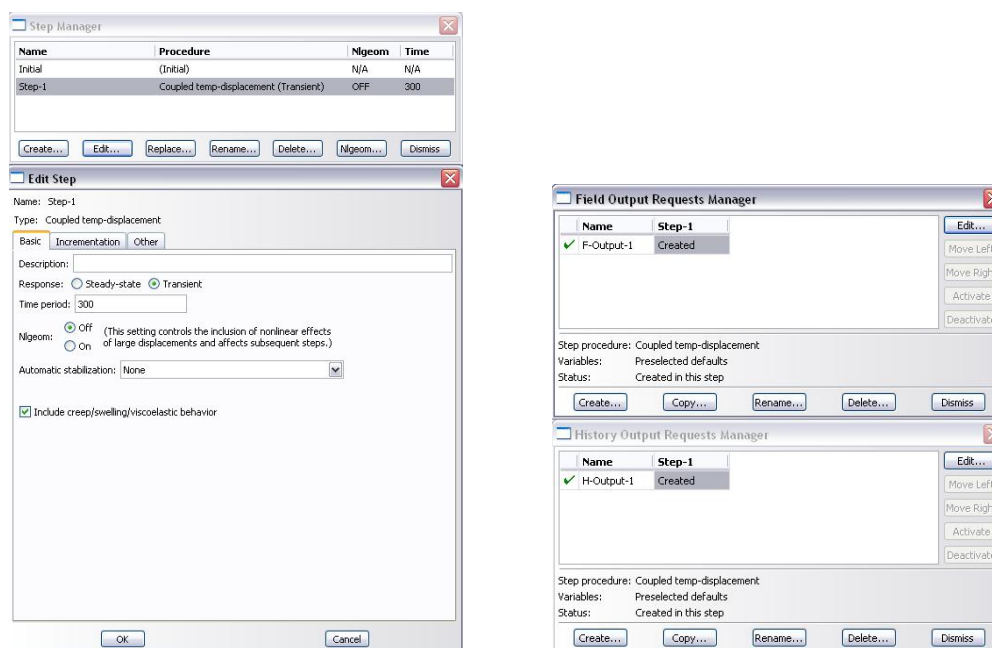


FIGURA 3.3: Ventanas de creación de paso de análisis.

- En la pestaña de Incrementación, introducir tipo automático, máximo número de incrementos 300, tamaño del incremento: inicial 10, mínimo 0.0001, máximo 300. Introducir el cambio de temperatura máxima permisible por incremento 100, definir la integración creep/swelling/viscoelastic Explícita.
- En la pestaña Otros, introducir almacenamiento de la matriz asimétrico, técnica de solución Separada, variación de la carga con respecto al tiempo por defecto: aplicación lineal a lo largo del paso de análisis. Nota: automáticamente al finalizar la creación del paso de análisis, el programa genera los requerimientos de salida (variables en estudio) y el historial de salidas.

§3.2.5. Módulo Interacción

- Ir al menú Interacción, seleccionar Propiedad -Crear, definir tipo contacto.
- En la pestaña Mecánica (Opciones de Propiedad de Contacto), seleccionar Comportamiento Tangencial por penalización.
 - En la pestaña Fricción introducir coeficiente de fricción 0.1 y direccionalidad isotrópica.
 - En la pestaña Shear Stress dejar opción por defecto sin límite.
 - En la pestaña Elastic Slip dejar valores por defecto.
- En la pestaña Mecánica, seleccionar: Comportamiento Normal, método de refuerzo de restricción por penalización, presión como contacto "fuerte", no permitir separación después de contacto, y dejar por defecto las opciones de Contact Stiffness.
- En la pestaña Térmica seleccionar conductancia térmica.
 - Definición por tabla con uso de datos dependientes de la distancia e introducir: conductividad 200 y 0, y distancia 0 y 10 respectivamente.
- En la pestaña Térmica seleccionar Generación de calor y dejar por defecto el valor de 1.0 como fracción de energía generada por fricción y 0.5 como fracción de calor convertido distribuido a la superficie sometida.

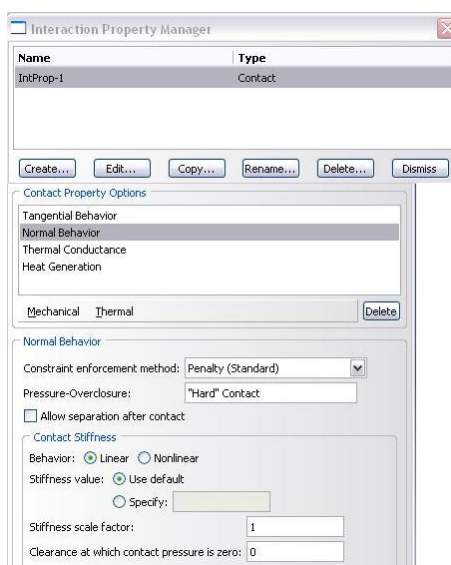


FIGURA 3.4: Ventanas de creación de propiedad de interacción entre las partes.

§3.2.6. Módulo Carga

- Ir al menú de Campo Predefinido, seleccionar crear campo predefinido.
- Seleccionar cada parte y asignar un campo predefinido de temperatura igual a 177°C para la herramienta y a 100°C para las placas (debido al precalentamiento realizado durante el proceso experimental).

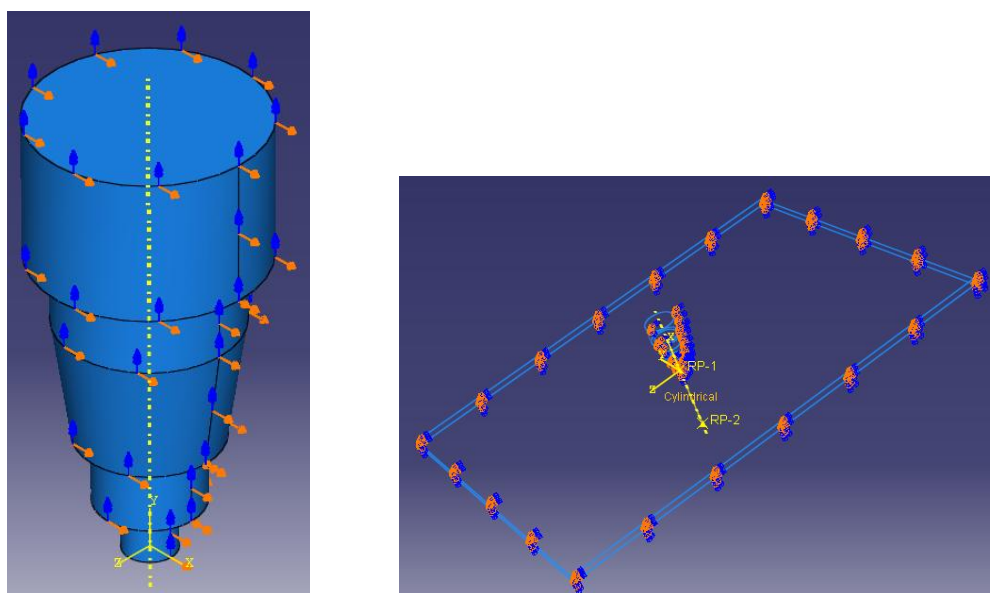


FIGURA 3.5: Condiciones de borde aplicadas.

- Ir al menú de Condiciones de Borde y crear las siguientes condiciones:
 - Crear condición de borde para las placas de tipo encastre.
 - Crear condición de borde para la herramienta de tipo desplazamiento/rotación y seleccionar U2, U3, UR2 y UR3 y dejar cero como valores por defecto.
 - Crear condición de borde para las placas de tipo encastre pero seleccionando la opción Pinned.

§3.2.7. Módulo Malla

- Ir al menú Seed, seleccionar cada una de las partes separadamente y especificar tamaño de elemento aproximado de 0.005 para las placas y de 0.01 para la herramienta.
- Para la malla de la herramienta:
 - Mallar la instancia.
 - Asignar controles de mallado y especificar tipo de elemento tetraédrico, con técnica libre de mallado y usar algoritmo por defecto.
 - Asignar tipo de elemento y dejar la selección por defecto de librería de elementos estándar, orden geométrico lineal, de familia coupled temp-displacement.
 - Verificar que el tipo de elemento resultante sea C3D4T y que la malla completa tenga 2204 elementos.
- Para la malla de las placas:
 - Mallar la instancia.
 - Asignar controles de mallado y especificar tipo de elemento hexaédrico, con técnica de mallado por barrido y usar algoritmo Advancing front.
 - Asignar tipo de elemento y dejar la selección por defecto de librería de elementos estándar, orden geométrico lineal, de familia coupled temp-displacement y seleccionar integración reducida.
 - Verificar que el tipo de elemento resultante sea C3D8RT y que la malla completa tenga 698 elementos.

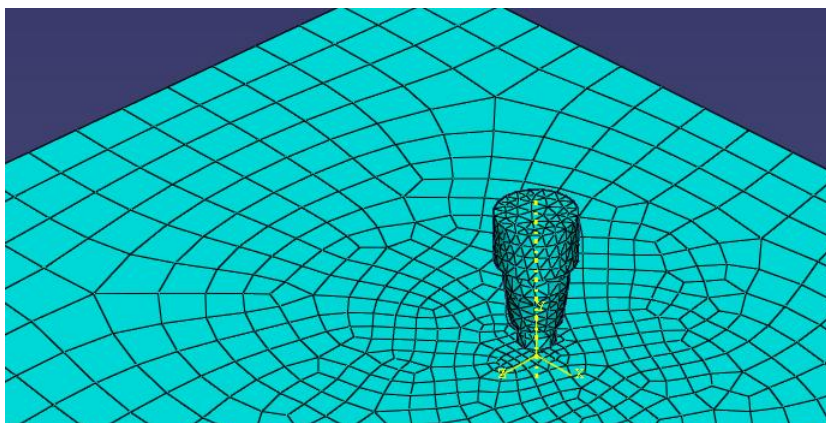


FIGURA 3.6: Detalle del Proceso de Mallado.

§3.2.8. Módulo Trabajo

- Crear Trabajo.
- Realizar verificación de datos.
- Analizar el trabajo.
- Visualizar los resultados

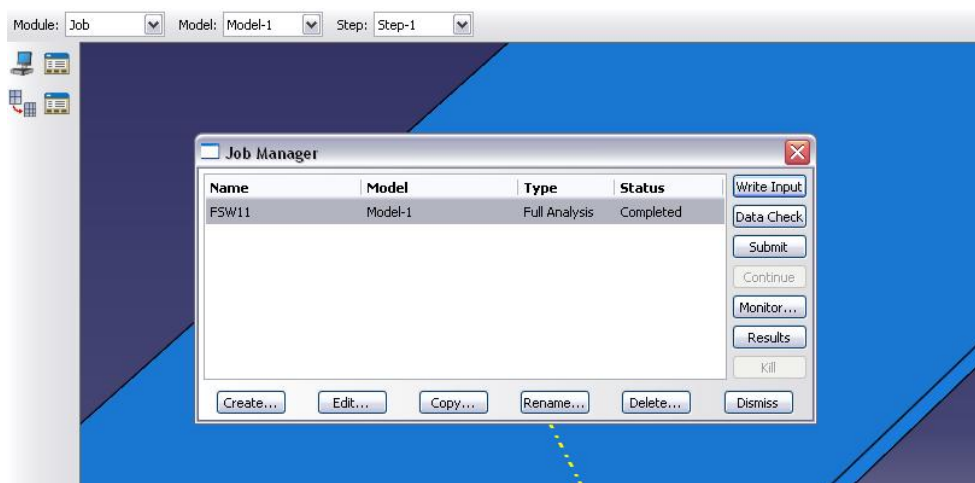


FIGURA 3.7: Ventana de la Realización del Trabajo.

§3.2.9. Módulo Visualización

- Ir al menú Resultado y seleccionar la opción Field Output y de la lista seleccionar el resultado que se desea ver.

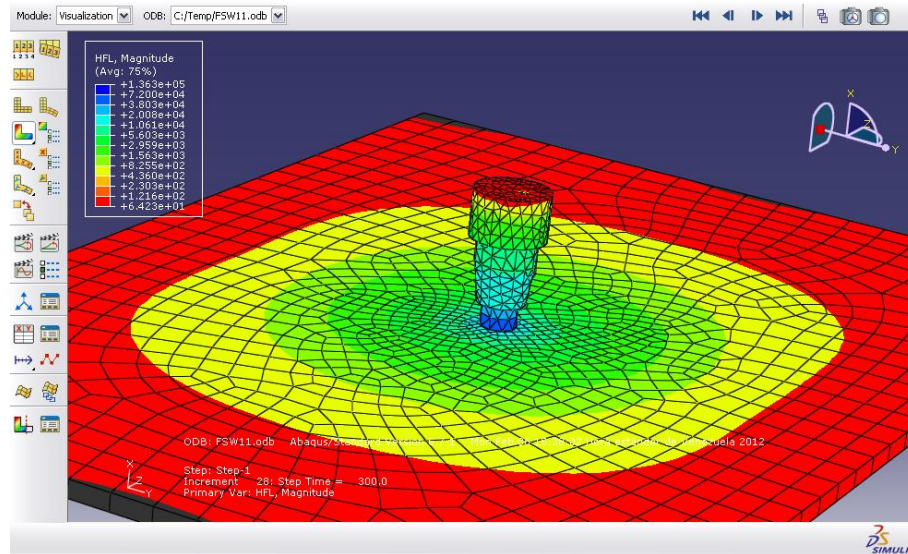


FIGURA 3.8: Ventana del módulo visualización.

§3.3. CONSIDERACIONES

Las limitaciones consideradas al inicio del proceso son el coeficiente de fricción entre el aluminio y el acero (0.1).

Además de todos los valores, se tomó un pin cilíndrico de iguales dimensiones al utilizado en el experimento real pero sin rosca. El aluminio tiene un punto de fusión bajo de 660°C.

§3.4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se presenta la comparación de los resultados obtenidos en este trabajo con el software ABAQUS/CAE v6.7-1 y los obtenidos en las termografías realizadas al proceso de FSW en el trabajo de [1].

La temperatura máxima alcanzada en el trabajo realizado por [1] es de 232.1°C como se puede observar en la Figura 3.9.

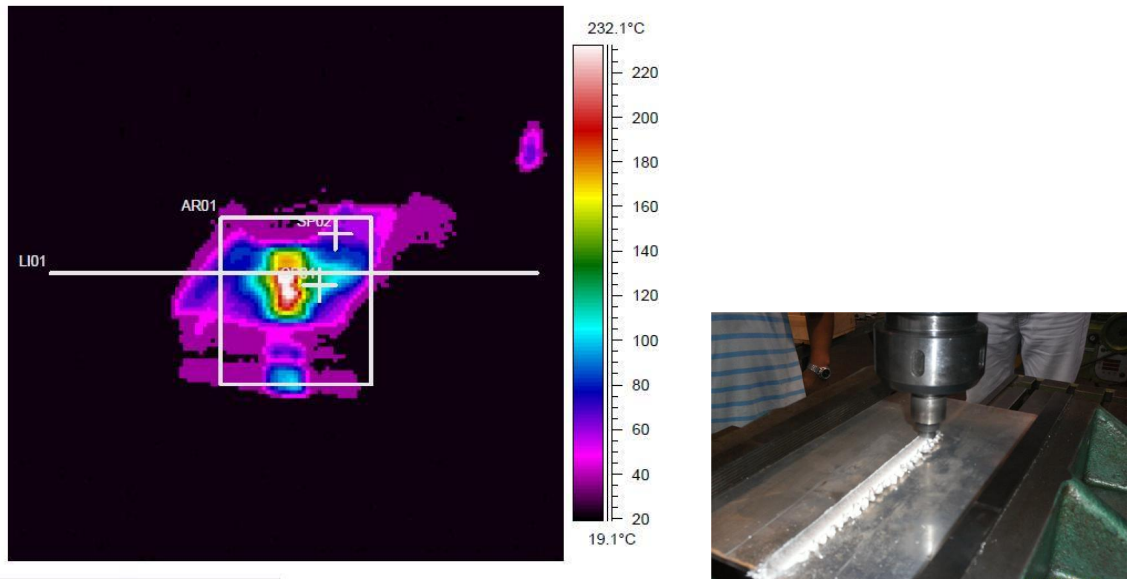


FIGURA 3.9: Termografía obtenida durante el proceso de FSW.

La temperatura máxima alcanzada en esta investigación a través del proceso de simulación con MEF, utilizando 2204 elementos tetraédricos de cuatro nodos y 698 elementos hexaédricos de ocho nodos, es de 312.4 °C como se puede observar en la Figura 3.10.

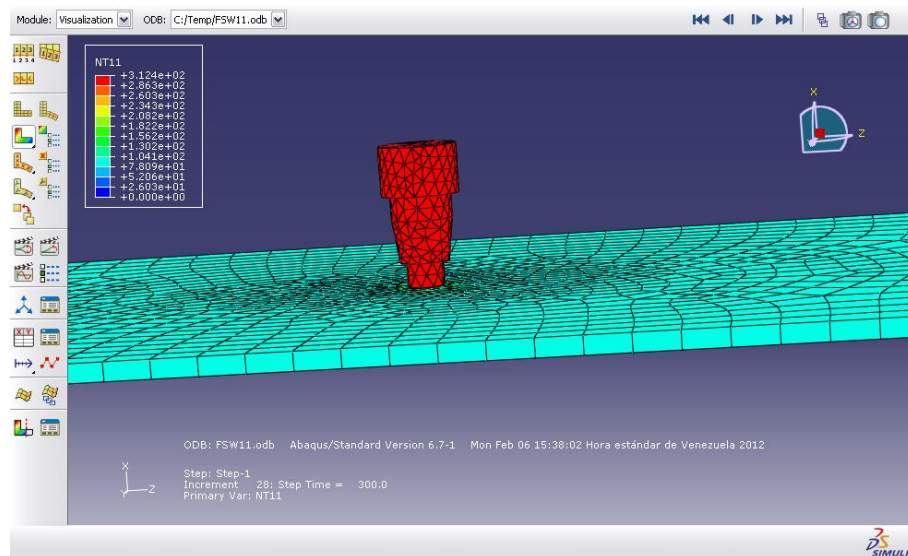


FIGURA 3.10: Campos de temperaturas obtenidos en el modelado por MEF en ABAQUS/CAE v6.7-1.

Al comparar los resultados de [1] con los obtenidos en esta investigación se puede observar que existe una diferencia de 80.3°C de temperatura lo que permite evidenciar que el

MEF logra optimizar los valores obtenidos experimentalmente (Figura 3.11), manteniéndose una congruencia en las mediciones.

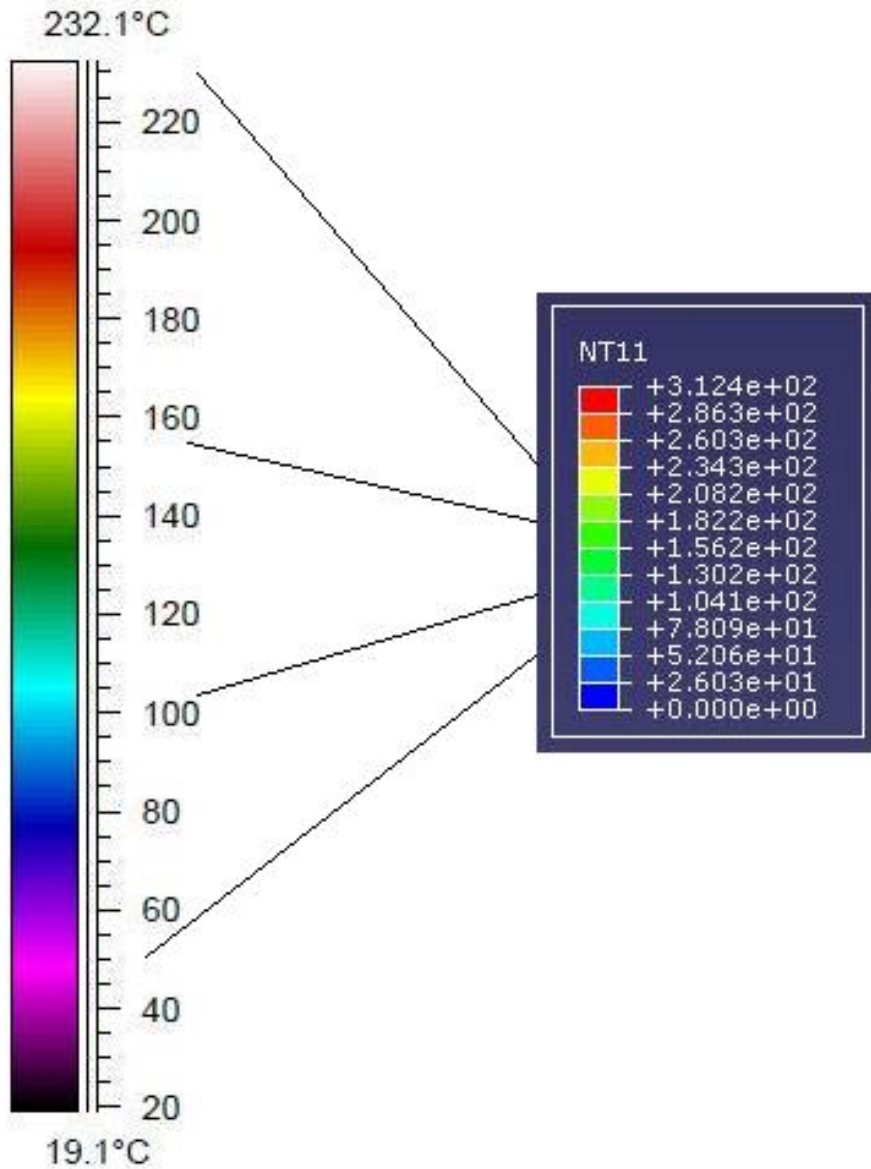


FIGURA 3.11: Comparación de resultados en Termografía y Simulación

Con los resultados obtenidos por [1] se logra una optimización al obtener llenado total de un cordón de soldadura con la temperatura registrada y en esta investigación con la temperatura obtenida por simulación de la soldadura de las placas se mantienen intactas las condiciones físicas del material.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se exponen las conclusiones a las que se llegan con la realización del trabajo y algunas recomendaciones.

§4.1. CONCLUSIONES

- El análisis y simulación del problema utilizando el método de los elementos finitos a través del software ABAQUS/CAE v6.7-1 permite optimizar el valor de la temperatura experimentalmente.
- En este trabajo se logra realizar la optimización de los valores de las temperaturas involucradas en el proceso de soldadura por fricción agitación comparando los datos arrojados por el modelado computacional del proceso y las termografías tomadas al proceso real.
- Finalmente el algoritmo utilizado para obtener la simulación permite realizar predicciones acerca del comportamiento de otros materiales, entre los cuales están el cobre, el titanio, diferentes aleaciones de aluminio y acero.
- El análisis de la ecuación (1.1) con el MEF permite que el uso del ABAQUS/CAE v6.7-1 sea confiable para generar valores óptimos en la solución de los problemas.

§4.2. RECOMENDACIONES

- Este trabajo permite a futuro el desarrollo de cálculos sobre las variables temperatura, velocidad de rotación, velocidad de traslación, esfuerzos, involucrando las mejoras en que metalúrgicamente resultara de las soldaduras en aluminio AA 1100-0.
- Se podrían realizar estudios similares para aluminio AA 6063 aplicando una simulación que incluya este material de composición general distinta.

-
- También se podría estudiar la aplicabilidad de este trabajo para el caso en que se solden placas de aluminio disímiles, es decir, placas de diferente composición química.

APÉNDICE A

ESPECIFICACIONES DE LOS METALES

§A.1. DESCRIPCIÓN DEL ALUMINIO AA 1100-0

Es la aleación más trabajable y utilizada, aún cuando no es tratable en caliente, la aleación 1100 tiene poca fuerza pero una alta resistencia a la corrosión, permite un anodizado satisfactorio, tiene buena soldabilidad y es apropiado para ser utilizado con latón o soldadura, cuando es maquinado tiende a la gomosidad. Los usos típicos para este material son el finstock, almacenamiento de químicos, equipo de proceso, utensilios de cocina y trabajo general en hoja. Esta aleación es fácilmente maquinable, su mecanizado puede realizarse en seco, aunque en cortes pesados deben usarse aceites lubricantes. Las herramientas de corte deben tener ángulos de salida de viruta grandes (superior y laterales), similares a las herramientas para cortar o mecanizar aceros rápidos.

Cabe destacar que este puede trabajarse fácilmente por todos los métodos convencionales, tales como repujado, estampado o forjado donde es posible ejecutar la mayor parte del trabajo en frío antes de requerirse un nuevo recocido debido a la buena ductilidad del aluminio puro. Es fácilmente soldable por técnicas comerciales tales como resistencia eléctrica, metálica con arco eléctrico y gas, preferiblemente con gas inerte y arco protegido. El metal de aporte que se debe usar es de la aleación de aluminio 1100. Si se desea soldar aluminio 1100 a una aleación de aluminio de alta aleación, tal como 6063 o 5052 entonces el alambre metálico deberá ser de la aleación de aluminio 4043, y en cuanto a los tratamientos térmicos no responde a ninguno debido a su alta pureza en frío donde adquiere un elevado endurecimiento.

- Características del Aluminio
 - Número atómico: 13
 - Peso atómico: 26,974.
 - No se conoce ningún isótopo radioactivo natural.
 - Disposición de los electrones: K2, L8, M3.

- Volumen atómico: 10,0 /átomo gramo.
 - Sección efectiva para los neutrones térmicos: 0,215 barns.
 - Estructura cristalina: cúbica de caras centradas, constante reticular: 4,0413 Å
- Características Físicas
- Es un metal ligero, cuya densidad o peso específico es de 2700 kg/m³ (2,7 veces la densidad del agua).
 - Tiene un punto de fusión bajo 660° C (933 °K)
 - El peso atómico del aluminio es de 26,9815
 - Es de color blanco brillante.
 - Buen conductor del calor y de la electricidad.
 - Resistente a la corrosión.
 - Material abundante en la Naturaleza
 - Material fácil y barato de reciclar.
- Características Mecánicas
- De fácil mecanizado.
 - Muy maleable, permite la producción de láminas muy delgadas.
 - Bastante dúctil, permite la fabricación de cables eléctricos.
 - Material blando (Escala de Mohs 2-3). Límite de resistencia en tracción 160-200 N/mm² [160-200 MPa] en estado puro, en estado aleado el rango es de 1400-6000 N/mm². El duraluminio es una aleación particularmente resistente.
 - Material que forma aleaciones con otros metales para mejorar las propiedades mecánicas.
 - Permite la fabricación de piezas por fundición y moldeo.
 - Material soldable.
- Características Químicas
- Debido a su elevado estado de oxidación se forma rápidamente al aire una fina capa superficial de óxido de aluminio (Alúmina Al₂O₃) impermeable y adherente

que detiene el proceso de oxidación, lo que le proporciona resistencia a la corrosión y durabilidad. Esta capa protectora, de color gris mate, puede ser ampliada por electrólisis en presencia de oxalatos.

- El aluminio tiene características anfóteras. Esto significa que se disuelve tanto en ácidos (formando sales de aluminio) como en bases fuertes (formando aluminatos con el anión $[Al(OH)_4]^-$ liberando hidrógeno).
- La capa de óxido formada sobre el aluminio se puede disolver en ácido cítrico formando citrato de aluminio.
- El principal y casi único estado de oxidación del aluminio es +III como es de esperar por sus tres electrones en la capa de valencia.

§A.2. DESCRIPCIÓN DEL ACERO AISI 1045

El acero al carbono es una aleación de composición química compleja. Además de hierro, cuyo contenido puede oscilar entre 97,0% – 99,5%, hay en él muchos elementos cuya presencia se debe a los procesos de su producción (manganeso y silicio), a la dificultad de excluirlos totalmente del metal (azufre, fósforo, oxígeno, nitrógeno e hidrógeno) o a circunstancias casuales (cromo, níquel, cobre y otros). El aumento del contenido de carbono en el acero eleva su resistencia a la tracción, incrementa el índice de fragilidad en frío y hace que disminuya la tenacidad y la ductilidad. Es un acero muy apropiado para piezas de pequeño tamaño.

Este material puede ser llevado a las formas y acabados de barra redonda, cuadrada, hexagonal y solera, laminadas o forjadas en caliente, estiradas en frío y peladas o maquinadas, placa laminada caliente, anillos forjados. Entre sus principales características se tiene que es el más popular de los aceros al carbón templeables, en todo tipo de aplicaciones en donde se requiera soportar esfuerzos por encima de los 600 MPa (61 kgf/mm^2), o en el caso de diámetros mayores, en donde se necesite una superficie con dureza media, 30 a 40 Rc, y un centro tenaz. Aunque su maquinabilidad no es muy buena, se mejora con el estirado en frío, además con este acabado se vuelve ideal para flechas, tornillos, etc. de alta resistencia.

Cabe destacar que por sus características de temple, se tiene una amplia gama en el campo automotriz y de maquinaria en general, en la elaboración de piezas como ejes y semiejes, cigüeñales, etc. de resistencia media. Se emplea para herramientas forjadas de todo tipo, como: hachas, azadones, rastrillos, picas, martillos de varios usos, porras, etc. Además, el principal producto siderúrgico es el acero, siendo aproximadamente el 90% de la produc-

ción acero al carbono y el 10, acero aleado. Por lo tanto, el material metálico más importante para la industria es el acero al carbono. Su composición química es la siguiente:

- Carbono: 0.43-0.50
- Manganeso: 0.6-0.9
- Silicio: 0.10-0.30
- Azufre: 0.060 máx
- Fósforo: 0.040 máx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BLANCO S. *Obtención de Cordón de Soldadura Mediante el Proceso de Fricción Agitación en Aluminio AA 1100-0*. Tesis de grado en Ingeniería Mecánica. Barquisimeto: Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre", 2009.
- [2] BULLÓN W., ACOSTA J., FRANCO R. & VALVERDE G.(2007). *Simulación de un Proceso de Soldadura mediante un Modelo Termo-mecánico Considerando el Efecto de Esfuerzos Residuales Utilizando el Método de los Elementos Finitos*. Consultada el 5 de enero de 2010, Pontificia Universidad Católica del Perú, página web conmemorativa del 8° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica: <http://www.pucp.edu.pe/congreso/cibim8/pdf/20/20-38.pdf>
- [3] CALDERON G. & GALLO R. (2011). *Introducción al Método de los Elementos Finitos: Un Enfoque Matemático*. Ediciones IVIC. Caracas.
- [4] CENTENO F. & FRANÇA F. (2009). *Inverse Analysis of Heat Transfer in Friction Stir Welding using Generalized Extremal Optimization*. High Temperatures-High Pressures, 38(1). Consultada el 10 de marzo de 2010, <http://www.oldcitypublishing.com/HTHP/HTHPcontents/HTHP38.2contents.html>
- [5] COLMENARES E. *Discretización de Elemento Finito para la Ecuación de Conducción de Calor en Metales y Materiales Compuestos Tipo Carbono-Carbono*. Tesis de grado en Ciencias Matemáticas. Barquisimeto: Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", 2008.
- [6] FERRO P. & BONOLLO F. (2010, febrero). *A Semianalytical Thermal Model for Friction Stir Welding*. Metallurgical and Materials Transactions, 41(2). Consultada el 10 de marzo de 2010, <http://www.springerlink.com/content/711211v608705071/>
- [7] INCROPERA F. & DEWITT D.(1999). *Fundamentos de Transferencia de Calor*. México. Pearson.

- [8] LEWIS R., NITHIARASU P. & SEETHARAMU K.(2004). *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley & Sons, Ltd. England.
- [9] MANUAL ABAQUS/CAE. *Manual del Usuario. ABAQUS/CAE versión 6.4*. Consultado el 20 de abril de 2010, <http://es.scribd.com/doc/35917219/Abaqus-cae-Users-Manual>
- [10] NASA (EEUU). MARSHALL SPACE FLIGHT CENTER (2010). *First Friction-Stir Welded, Spun-Form Dome Unveiled*. Consultada el 20 de diciembre de 2010, http://www.nasa.gov/centers/marshall/about/work/technology/friction_stir_mar30.html
- [11] PEREYRA S., LOMBERA G., URQUIZA S., SANTIAGO D. & DE VEDIA, L. (2008). *Modelado Numérico del Proceso de Soldadura por Fricción Agitación en Aceros Inoxidables*. Revista *Matéria*, 13(2). Consultada el 6 de enero de 2010, <http://www.materia.coppe.ufrj.br/sarra/artigos/artigo11009/>
- [12] SANTIAGO D., LOMBERA G., CASSANELLI A., URQUIZA S. & DE VEDIA, L. (2005, noviembre). *Análisis Térmico en Soldadura por Fricción*. *Mecánica Computacional*, 24(17). Consultada el 5 de enero de 2010, <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/183/163>
- [13] SANTIAGO D., LOMBERA G. & URQUIZA S. (2007, octubre). *Modelado del proceso "Friction Stir Welding" incluyendo la geometría real de una herramienta*. *Mecánica Computacional*, 26(43). Consultada el 16 de enero de 2010, <http://www.amcaonline.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/1372/1321>
- [14] SANTIAGO D., LOMBERA G., URQUIZA S. & DE VEDIA, L. (2003, noviembre). *Modelado Numérico de Uniones Soldadas por "Friction Stir Welding"*. *Mecánica Computacional*, 22(28). Consultada el 6 de enero de 2010, <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/840/792>
- [15] SANTIAGO D., PEREYRA S., LOMBERA G. & URQUIZA, S. (2006, noviembre). *Análisis de Defectos en Soldadura por Fricción-Agitación mediante un Modelado 3D*. *Mecánica Computacional*, 25(24). Consultada el 5 de enero de 2010, <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/604/575>

-
- [16] THE WELDING INSTITUTE. *Friction Stir Welding*. Consultada el 5 de enero de 2010, <http://www.twi.co.uk/technologies/welding-coating-and-material-processing/friction-stir-welding/>
- [17] UNIVERSIDAD DE OKLAHOMA. NETWORK FOR EARTHQUAKE ENGINEERING SIMULATION (NEES) (2003). *Commercial Applications for Earthquake Engineering Simulation*. Consultada el 6 de enero de 2010, http://nees.ou.edu/cots_apps.html
- [18] VALDIVÉ R. & BLANCO S. (2012). *Cordón de Soldadura mediante el Proceso de Soldadura por Fricción Agitación en Aluminio AA 1100-0*. XI CIMENICS. Venezuela.
- [19] ZIENKIEWICZ O. & CHEUNG, Y. (1967). *The finite element method in structural and continuum mechanics*. McGraw-Hill book Company. New St. Louis San Francisco Colorado Spring.