UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

# Estimaciones para Densidades Invariantes no Acotadas

Autor: Br. María Antonietta Mendoza
Tutor: Dr. Sergio Muñoz (UCLA)

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
como requisito final para optar al grado de
Licenciada en Ciencias Matemáticas

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Febrero, 2012

# Resumen

En el presente trabajo se realizó una revisión detallada del artículo presentado por M.Thaler, Estimates of the Invariant Densities of Endomorphisms with Indifferent Fixed Points [6] donde se estudian las transformaciones monótonas a trozos del intervalo que presentan puntos fijos indiferentes, los cuales son puntos que hacen que la derivada de la transformación tienda a uno. Las densidades obtenidas para este tipo de transformaciones generan medidas infinitas. Sin embargo, es posible determinar estimaciones por medio del producto de funciones lejos de cero y de infinito. Es importante destacar que nuestro propósito no es probar la existencia de medidas invariantes absolutamente contínuas para estas transformacines, sino que partimos de su existencia para dar estimaciones de las densidades invariantes de dichas transformaciones. De esta manera, asumiendo la existencia de estas medidas pretendemos mostrar la naturaleza de las estimaciones para las densidades invariantes de transformaciones con puntos fijos indiferentes.

# ÍNDICE

# Introducción

Un sistema dinámico consiste de un ambiente con estados iniciales, junto con una ley que gobierna el paso de un estado a otro; pensando en forma simple, cualquier transformación T de un espacio topológico X en si mismo es un sistema dinámico, generalmente se denota por (X,T) o T: X $\rightarrow X$. La dinámica del sistema T: $X \rightarrow X$ es el comportamiento asintótico de los estados iniciales, luego que la ley es aplicada muchas veces. Lo que se quiere es entender el conjunto de puntos de acumulación de las órbitas $o(x) = \{T^n(x) : n \in Z\}$; cualquier sea el estado inicial $x \in X$.

La Teoría Ergódica utiliza herramientas del análisis real (teoría de medidas) para entender la dinámica de los sistemas. Si T: X $\rightarrow X$ es un sistema dinámico se buscan medidas T - invariantes interesantes; esto es, medidas T - invariantes con soportes no triviales (fractales, todo X, etc) lo cual indica que muchas órbitas (un conjunto grande de órbitas con respecto a la respectiva medida) tienen comportamientos desordenados (caos topológico). Por ejemplo es conocido que las transformaciones expansoras de Markov del intervalo, que tienen la propiedad de la distorsión limitada, poseen medidas invariantes absolutamente continuas y ergódicas como lo muestra R.Mañe ver [2] lo cual indica que Lebesgue - casi todas las órbitas se acumulan en el espacio ambiente.

En el contexto de transformaciones del intervalo existen resultados interesantes desde el punto de vista de la Teoría Ergódica Infinita; es conocido que las transformaciones de Markov del intervalo con puntos fijos indiferentes no satisfacen, por lo general, la condición de Rényi como lo mostraron A. Rényi y F. Schweiger y sus trabajos ver [4]y [5], y sus densidades invariantes son no acotadas.

Nuestro propósito es dar estimados para densidades correspondientes a transformaciones con medidas invariantes infinitas, generalizando los estimados obtenidos por A.

Renyi [4] en el caso de medidas finitas como lo muestra Thaler en su trabajo sobre estimaciones de densidades invariantes de endomorfismos con puntos fijos indiferentes, ver [6].

El trabajo está conformado por tres capitulos, el primer capítulo es destinado a los preliminares en el cual se exponen algunas definiciones y teoremas de la teoria de medidas y algunos resultados del análisis matemático; en la segunda sección de este primer capítulo se introducen las definiciones fundamentales para el desarrollo del teorema principal asi como también se define el tipo de transformaciones con las que se estará trabajando. En el segundo capítulo se desarrolla la parte más importante del trabajo, puesto que es alli donde se hacen las estimaciones para las densidades invariantes de las transformaciones que presentan puntos fijos indiferentes; es decir, se demuestra el Teorema Central. Antes de la demostración se dan dos lemas necesarios en la prueba del teorema Central. Finalmente se presenta el tercer capítulo donde se enuncian algunos resultados que conducen a la aplicación del Teorema Central, cerrando el capítulo con dos ejemplos.

# CAPÍTULO 1

# Preliminares

Para el desarrollo del presente trabajo es necesario proporcionar algunas definiciones, resultados y notaciones que seran utilizadas para la mejor comprensión del mismo, con este objetivo se da inicio a este primer capítulo, conformado de una primera sección donde se recordaran, en téminos generales, definiciones y resultados básicos del análisis matemático y del análisis real sin mayor detalle, en caso de ser necesario pueden ser consultados en textos como: Lima y Royden, ver [7] y [3]. En la segunda sección se proporcionan las definiciones fundamentales para la exposición del trabajo, además que se especifica el contexto en el cual se estará desarrollando el mismo.

## 1.1. Definiciones Básicas

**Definición 1.1 (Espacio medible)** Un espacio medible es un par $(X, \mathcal{B})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{B}$ es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de X.

**Definición 1.2 (Medida)** Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible. La función de conjuntos no-negativa $\mu$ es una medida definida sobre $\mathcal{B}$ si satisface:

$$\mu(\emptyset) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$$

para cualquier sucesión $E_i$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos.

**Definición 1.3 (Espacio de medida)** Un espacio de medida es una terna $(X, \mathcal{B}, \mu)$ donde $(X, \mathcal{B})$ es un Espacio medible y $\mu$ es una medida definida sobre $\mathcal{B}$.

***Ejemplos:***

• $(\mathbb{R}, \mathcal{C}, \lambda)$ es un espacio de medida, donde $\mathcal{C}$ es la $\sigma$-álgebra de conjuntos medibles y $\lambda$ es

la medida de lebesgue en $\mathbb{R}$.
• $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ es un espacio de medida, donde $\mathcal{B}$ es la $\sigma$-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ y $\lambda$ es la medida de lebesgue en $\mathbb{R}$.

**DEFINICIÓN 1.4** Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Diremos que:

- $\mu$ es una medida finita si $\mu(X) < +\infty$.
- $\mu$ es una medida $\sigma$-finita si existe una sucesión $(X_n)$ de conjuntos medibles con $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n$ tal que $\mu(X_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**DEFINICIÓN 1.5** Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y $\mu$ , $\lambda$ dos medidas definidas sobre $(X, \mathcal{B})$. Diremos que la medida $\lambda$ es absolutamente continua respecto a la medida $\mu$ si $\lambda(A) = 0$ para cada conjunto A para el cual $\mu(A) = 0$. Lo cual denotaremos por $\lambda \ll \mu$ para decir que $\lambda$ es absolutamente continua con respecto a $\mu$.

**TEOREMA 1.1 (Radon-Nikodym )** *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma$-finito, y sea $\lambda$ una medida definida sobre $\mathcal{B}$ la cual es absolutamente continua con respecto a $\mu$, entonces existe una función f medible no negativa tal que para cada conjunto E en $\mathcal{B}$ se tiene*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

**OBSERVACIÓN 1.1** *La función de conjuntos $\lambda$ definida sobre $\mathcal{B}$ es una medida y será finita si y solo si f es integrable. Además como la integral sobre un conjunto de medida $\mu$ cero es cero, se tiene que $\lambda$ es absolutamente continua con respecto a $\mu$.*

**DEFINICIÓN 1.6** Sea $T : X \to X$ una transformación sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, diremos que:

1. T es medible si $T^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.
2. T es no singular si cumple que $\mu(T^{-1}(B)) = 0$ si, y solo si $\mu(B) = 0$, $B \in \mathcal{B}$.
3. T preserva la medida $\mu$ (o $\mu$ es T-invariante) si $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

**TEOREMA 1.2 (Teorema de la función Inversa)** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en un intervalo A. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces f es creciente en A. Además f posee inversa $f^{-1}$ definida en el intervalo $f(A) = B$, $f^{-1} : B \to A$, la cual es derivable en B con $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{f'(x)}$ para todo $y = f(x) \in B$.*

**Teorema 1.3 (Teorema del Valor Médio)** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a,b), existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## 1.2. Definiciones Fundamentales

En esta sección daremos las definiciones necesarias para el desarrollo del teorema central; además se especifica el tipo de trasformaciones con las que se estará trabajando.

**Definición 1.7 (Punto Fijo Indiferente)** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Diremos que un punto z en $\overline{A}$ es un **Punto Fijo Indiferente de f**, si

$$\lim_{x \to z} f(x) = z, \qquad \lim_{x \to z} |f'(x)| = 1.$$

**Definición 1.8 (Fuente Regular)** Un punto fijo indiferente es una **fuente regular**, si existe un número real $\alpha > 0$ tal que $|f'(x)|$ es creciente en $(z, z + \alpha) \bigcap A$ y $|f'(x)|$ es decreciente en $(z - \alpha, z) \bigcap A$.

En lo que sigue consideraremos un intervalo B con (0,1) $\subset B \subset [0, 1]$ y un espacio de medida (X, $\mathcal{B}$, $\mu$) donde X es el intervalo B, $\mathcal{B}$ es la $\sigma$ - álgebra de Borel de subconjuntos de B y $\mu$ la medida de Lebesgue y consideremos una particion $\{B(i) : i \in I\}$ de B, donde $I$ es un conjunto finito o numerable de índices con al menos dos elementos, y los $B(i)$ son intervalos no degenerados.

Estaremos trabajando con transformaciones sujetas a las siguientes condiciones:

$(T1)$ $T_i = T|_{B(i)}$ es de clase $C^1$ y para todo $i \in I$ existe $b > 0$ tal que $T_i' \geqslant b$ sobre $B(i)$.

$(T2)$ $T_i B(i) = B$, para todo $i \in I$.

$(T3)$ Todos los puntos fijos indiferentes son fuentes regulares.

Las condiciones $(T1)$ y $(T2)$ indican que cada $B(i)$ contiene un único punto fijo, el cual denotamos por $x_i$.

$(T4)$ El conjunto $J = \{i \in I : x_i \text{ es un punto fijo indiferente } \}$ es no vacio y finito.

**Definición 1.9 ( Cilindros)** Dados $(k_1, ..., k_n) \in I^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, al conjunto $B(k_1, ..., k_n) := \bigcap_{i=1}^{n} T^{-i+1}(B(k_i))$ se le llama cilíndro de orden n, relativo a los índices $(k_1, ..., k_n)$.

Dado $k \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, por conveniencia, colocamos $B_n(k) := B(\underbrace{k, ..., k}_{n})$.

Denotamos por $\mathcal{Z}$ a la clase de todos los cilíndros $B(k_1, ..., k_n)$ donde $(k_1, ..., k_n) \in I^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

**Definición 1.10 ( Colecciones de Cilindros)**

$\mathfrak{D}_\mathfrak{n} := \{B_n(k) : k \in J\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$,

$\mathcal{A} := \mathcal{Z} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}_\mathfrak{n}$.

$\mathfrak{B}_\mathfrak{n} := \{B(k_1, ..., k_n) \in \mathcal{A} : B(k_1, ..., k_{n-1}) \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{n}-\mathfrak{1}}\}$ , $n \geqslant 1$
y denotamos $D_n := \bigcup_{Z \in \mathfrak{D}_\mathfrak{n}} Z$ y $B_n := \bigcup_{Z \in \mathfrak{B}_\mathfrak{n}} Z$.

**Observaciones:**

1) Note que, si $B(k_1, ..., k_n) \in \mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ entonces $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1}$.

2) Nuestras suposiciones implican que $\lim_{n \to \infty} \mu(D_n) = 0$.

Verifiquemos la última observación. En efecto, recordemos que

$$\mathfrak{D}_\mathfrak{n} := \{B_n(k) : k \in J\} \quad \text{y} \quad D_n := \bigcup_{Z \in \mathfrak{D}_\mathfrak{n}} Z$$

Observese que el número de cilindros que hay en $\mathfrak{D}_\mathfrak{n}$ depende del número de elementos que hay en $J$.

Así pues, como por (T4) $J$ es finito entonces $D_n$ es una unión finita y disjunta de cilindros y por propiedad de la medida $\mu$, se tiene:

$\mu(D_n) = \sum_{Z \in \mathfrak{D}_\mathfrak{n}} \mu(Z) = \sum_{k \in J} \mu(B_n(k))$

Basta que probemos que la medida de los cilindros en $\mathfrak{D}_\mathfrak{n}$ es cero. Sea T bajo las condiciones (T1)-(T4) y sea $B_n(k) \in \mathfrak{D}_\mathfrak{n}$ para algún $k \in J$, es decir que el punto fijo indiferente $x_k \in B(k)$.

Vamos a suponer que estamos en el caso general donde el punto fijo indiferente no está en los extremos de los intervalos de la partición.

Sea $x$ el extremo inferior de $B$. Entonces $a_n = T_k^{-n}(x)$ es la sucesión de los extremos inferiores de los cilindros $B_n(k)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
La sucesión $a_n = T_k^{-n}(x)$ es creciente y converge a $x_k$. En efecto;

Por teorema del valor médio , para $x < x_j$, existe $c \in (x, x_j)$ tal que

$$T_k^{-1}(x_j) - T_k^{-1}(x) = (T_k^{-1})'(c)(x_j - x)$$

Además $(T_k^{-1})'(c) < 1$ para todo $c \in (x, x_j)$ pues $(T_k)'(y) > 1$.
Entonces, $T_k^{-1}(x_j) - T_k^{-1}(x) < x_j - x \Rightarrow x_j - T_k^{-1}(x) < x_j - x$.

Es decir, $x < T_k^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} x < T_k^{-1}(x) \quad &\Rightarrow \quad T_k^{-1}(x) < T_k^{-1}(T_k^{-1}(x)) = T_k^{-2}(x) \\ &\Rightarrow \quad T_k^{-1}(x) < T_k^{-2}(x) \end{aligned}$$

De esta forma se tiene, $a_n = T_k^{-n}(x) < T_k^{-(n+1)}(x) = a_{n+1}$.

Por lo tanto $(a_n)$ es creciente.
Veamos ahora que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_k$
Supongamos por absurdo que existe $p \neq x_k$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = p$
Por continuidad

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} T_k^{-(n+1)}(x) &= \lim_{n\to\infty} T_k^{-1}(T_k^{-n}(x)) \\ &= T_k^{-1}(\lim_{n\to\infty} T_k^{-n}(x)) \\ &= T_k^{-1}(p) \end{aligned}$$

Pero $T_k^{-(n+1)}(x) = a_{n+1}$ y como $a_n \to p$ entonces $a_{n+1}(x) = T_k^{-(n+1)}(x) \to p$. Así, por unicidad del límite,

$$p = T_k^{-1}(p) \quad \Rightarrow \quad T_k(p) = p$$

Es decir que $p$ es punto fijo y $p = T_k^{-1}(p) \in B(k)$. Entonces se tiene que en $B(k)$ hay dos puntos fijos distintos $x_k$ y $p$, lo cual es una contradicción puesto que por las condiciones impuestas a T, en cada $B(i)$, $i \in I$ existe un único punto fijo.
Luego la sucesión $(a_n)$ converge a $x_k$. De la misma forma se prueba que si $y$ es el extremo

superior de B, la sucesión $b_n = T_k^{-n}(y)$ de los extremos superiores de los cilindros $B_n(k)$ es decreciente y converge a $x_k$.
Como el cilindro $B_n(k)$ es un intervalo de extremos $a_n$, $b_n$ tenemos que $\mu(B_n(k)) = | b_n - a_n |$. Así, $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n(k)) = 0$. Como $\mu(D_n) = \sum_{k\in J} \mu(B_n(k))$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mu(D_n) &= \lim_{n\to\infty} \big(\sum_{k\in J} \mu(B_n(k))\big)\\ &= \sum_{k\in J} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n(k))\\ &= 0\end{aligned}$$

Ahora vamos a definir para cada transformación T una transformación salto asociada.

**DEFINICIÓN 1.11 (Transformación Salto)**

Sea T : B $\to$ B una transformación sujeta por lo menos a las condiciones $(T1)$ y $(T2)$. La transformación $T^*$ conocida como la transformación salto asociada a T, esta dada por $T^*(x) = T^n(x)$, con x $\in B_n$ , la cual está definida en casi todo B.

**DEFINICIÓN 1.12** Consideremos la transformación T sujeta a las condiciones (T1)-(T4). Denotemos la inversa de $T_i$ por $V_i$ y definamos las funciones $G_i$ y $F_i$ de la siguiente forma.

$$G_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_i}{T(x) - x}, & x \in B(i), \quad x \neq x_i \\ 1, & x \in B \setminus B(i) \end{cases}$$

$$F_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_i}{x - V_i(x)}, & x \in B(i), \quad x \neq x_i \\ 1, & x \in B \setminus B(i). \end{cases}$$

Ahora vamos a tomar algunas definiciones del artículo de R. Bowen [1] y con esto cerramos el capítulo 1.

**DEFINICIÓN 1.13 (Transformación de Markov)** Una función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es de Markov si podemos determinar una colección finita o numerable $I_k$ de intervalos abiertos y disjuntos tales que :

a) f es definida sobre $\bigcup I_k$ y $[0,1]\backslash \bigcup I_k$ tiene medida cero.

b) $f|_{I_k}$ es estrictamente monótona y extiende a una fución $C^2$ sobre $\overline{I}_k$ para cada k.

c) Si $f(I_k) \bigcap I_j \neq \emptyset$, entonces $f(I_k) \supset I_j$

d) Existe un R tal que $\bigcup\limits_{n=1}^{R} f^n(I_k) \supset I_j$ para cada k y j.

**DEFINICIÓN 1.14 (Transformaciones Expansivas de Markov)** Sea A un intervalo y sea $T : A \to A$ una transformación medible , si existe $c > 0$, $\sigma > 1$ y una familia $\{I_k\}_{k\in I}$ es una partición del intervalo A exepto en un conjunto de medida cero, entonces se dice que T es una transformación expansiva en el sentido de Markov si cumple:

1. $T|_{I_k}$ es de clase $C^2$ $\forall k \in I$.
2. $\mid (T^n)'(x) \mid > c\sigma^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y cualquier punto $x \in A$ donde la derivada exista.
3. La imágen $T(I_k)$ para cada $k \in I$ coincide con alguna unión de elementos de la partición $\{I_k\}_{k\in I}$ excepto en un conjunto de medida de lebesgue cero.
4. Existe $\delta > 0$ de tal forma que $\mu(T(I_k)) \geqslant \delta$ para toda $k \in I$.
5. T es transitiva en el sentido que para cualquier $k, j \in I$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_k \bigcap T^n(I_k)$ tiene medida de lebesgue positiva.

**TEOREMA 1.4 (Teorema de Adler)** *Si $f : [0,1] \to [0,1]$ es de Markov,*

$$M = \sup_{I_k} \sup_{y,z\in I_k} \frac{\mid f''(z) \mid}{\mid f'(y) \mid} < +\infty \qquad y \qquad \lambda_n = \inf_{x} \mid (f^n)'(x) \mid > 1 \text{ para algún n.}$$

*Entonces f admite una medida finita invariante $d\mu = \rho(x)dx$ con $\rho(x)$ acotada lejos de cero e infinito.*

# CAPÍTULO 2

# Teorema Central

En este capítulo se realizaran las estimaciones para las densidades invariantes de las transformaciones que presentan puntos fijos indiferentes. Antes de dar la demostración del Teorema Central se presenta el enunciado y la prueba de dos Lemas necesarios para su demostración.

**Teorema 2.1** *Sea $T$ satisfaciendo $(T_1)$ - $(T_4)$ y asumamos que $T^*$ tiene una densidad invariante $h^*$ satisfaciendo $c_1^* \leqslant h^* \leqslant c_2^*$, donde $c_1^*$, $c_2^*$ son constantes positivas .*
*Entonces existen constantes positivas $c_1$ y $c_2$ tal que la densidad invariante $h$ de $T$ satisface*

$$c_1 \prod_{j\in J} G_j(x) \leqslant h(x) \leqslant c_2 \prod_{j\in J} F_j(x) \; ; \qquad x \in B\backslash\{x_j : j \in J\}$$

**Lema 2.1** *Sea $a$, $e_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$, $e_i \geqslant 0$, $e_1 + e_2 > 0$, $E = (a - e_1, a + e_2)$, y sea $f : E \to E$ creciente y diferenciable, satisfaciendo:*
*(a) $| f(x) - a | < | x - a |$, $x \in E\backslash\{a\}$,*
*(b) $f'$ es creciente en $(a - e_1, a)$ y decreciente en $(a, a + e_2)$.*
*Denotando por $f_n$ la iterada n-ésima de f, y haciendo $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, $x \in E$, se tiene*

$$g(x) \leqslant (f(x) - a)(x - f(x))^{-1}, x \in E\backslash\{a\},$$

*y*

$$g(x) \geqslant (x - a)(f^{-1}(x) - x)^{-1}, x \in f(E)\backslash\{a\},$$

***Observación:***

1. *Por hipótesis $(x - f(x))^{-1} \in \mathbb{R}$, puesto que no hay puntos fijos distintos de a.*
   *Si suponemos que existe $c \in E$ tal que $c \neq a$ y $f(c) = c$, entonces por (a) tenemos $| f(c) - a | < | c - a | \Rightarrow | c - a | < | c - a |$ lo cual es una contradicción.*

2. *f es invertible, ya que f es creciente y diferenciable*

***Demostración.***

Supongamos que $e_2 > 0$ y definamos $g_N(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n'(t)$, $t \in (a, a+e_2)$

Sea $x \in (a, a+e_2)$ fijo. Tenemos $f(x) < x$. En efecto, si $x > a$ entonces $x - a > 0$ y por (a) se tiene,

$$\begin{aligned} | f(x) - a | < x - a \quad &\Rightarrow \quad f(x) - a < x - a \\ &\Rightarrow \quad f(x) < x \end{aligned}$$

Así, usando propiedad de la integral de Riemann y el teorema fundamental del cálculo tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{f(x)}^{x} g_N(t)dt &= \int_{f(x)}^{x} \Big( \sum_{n=1}^{N} f_n'(t) \Big) dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Big( \int_{f(x)}^{x} f_n'(t)dt \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Big[ f_n(x) - f_n(f(x)) \Big] \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Big[ f_n(x) - f_{n+1}(x) \Big] \\ &= f(x) - f_{N+1}(x) \end{aligned}$$

Por la condición (b) $f'$ es decreciente en $(a, a+e_2)$ y puesto que la composición de funciones decrecientes es decreciente se tiene que $f_n'$ es decreciente en $(a, a+e_2)$. De esta manera, $g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n'(t)$ con $t \in (a, a+e_2)$ también lo es. En particular,
$g_N(f(x)) \geqslant g_N(t) \geqslant g_N(x)$, para $f(x) \leqslant t \leqslant x$

Luego integrando la segunda y primera desigualdad respectivamente se tiene,

$$(x - f(x))g_N(x) \leqslant \int_{f(x)}^{x} g_N(t)dt = f(x) - f_{N+1}(x), \tag{2.1}$$

$$(x - f(x))g_N(f(x)) \geqslant \int_{f(x)}^{x} g_N(t)dt = f(x) - f_{N+1}(x) \tag{2.2}$$

Afirmación $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = a$.
Aseguramos que $(f_n(x))$ con $x \in (a, a+e_2)$ es una sucesión monótona y acotada; en efecto, puesto que f es creciente, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) < x \quad &\Rightarrow \quad f_2(x) = f(f(x)) < f(x) \\ &\Rightarrow \quad f_3(x) = f(f_2(x)) < f(f(x)) = f_2(x) \end{aligned}$$

Así sucesivamente se tiene ; $f_{n+1}(x) < f_n(x)$
Por lo tanto $(f_n(x))$ es decreciente.
Ahora veamos que a es cota inferior de $(f_n(x))$. Supongamos por absurdo que a no es cota inferior; esto es, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) < a$, es decir, $f_n(x) - a < 0$.Por (a) se tiene

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - a| < |f_n(x) - a| \quad &\Rightarrow \quad |f_{n+1}(x) - a| < a - f_n(x) \\ &\Rightarrow \quad f_n(x) - a < f_{n+1}(x) - a < a - f_n(x) \\ &\Rightarrow \quad f_n(x) < f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Lo cual contradice el hecho de que $(f_n(x))$ es decreciente con $x \in (a, a+e_2)$.
Así $(f_n(x))$ es una sucesión monótona y acotada, por lo tanto es convergente; mas aún, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.
Sea $l = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, como a es cota inferior de $(f_n(x))$, $a \leqslant l$.
Supongamos por absurdo que $a < l$. Por la continuidad de $f$ tenemos,

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} f(f_n(x)) = f(l)$$

Pero $f_n(x) \to l$, luego por unicidad del límite $f(l) = l$.
Como $a < l$, entonces $l \in E\backslash\{a\}$ y por (a)

$$| f(l) - a | < | l - a | \Rightarrow | l - a | < | l - a |$$

Lo cual es una contradicción. Así $a = l$.Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = a$.

De esta manera, si hacemos $N \to \infty$ en (2.1) y (2.2) obtenemos:

$$(x - f(x))g(x) \leqslant f(x) - a \tag{2.3}$$

$$(x - f(x))g(f(x)) \geqslant f(x) - a \tag{2.4}$$

Sustituyendo $x$ por $f^{-1}(x)$ en (2.4), obtenemos:

$$(f^{-1}(x) - x)g(x) \geqslant x - a \Rightarrow g(x) \geqslant (x-a)(f^{-1}(x) - x)^{-1}$$

De (2.3) se tiene

$$g(x) \leqslant (f(x)-a)(x-f(x))^{-1} \quad \text{con } x \in (a, a+e_2)$$

Así, se completa la prueba para el caso: $x > a$.

Ahora supongamos que $e_1 > 0$ y definamos $g_N(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n'(t)$, $t \in (a-e_1, a)$
Sea $x \in (a-e_1, a)$ fijo, entonces $x < f(x)$
En efecto; $x < a \Rightarrow x - a < 0$. y por (a) se tiene,

$$\begin{aligned} \mid f(x)-a \mid < a-x \quad &\Rightarrow \quad x-a < f(x)-a \\ &\Rightarrow \quad x < f(x) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_x^{f(x)} g_N(t)dt &= \int_x^{f(x)} \Big( \sum_{n=1}^{N} f_n'(t) \Big) dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Big( \int_x^{f(x)} f_n'(t)dt \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Big[ f_n(f(x)) - f_n(x) \Big] \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Big[ f_{n+1}(x) - f_n(x) \Big] \\ &= f_{N+1}(x) - f(x) \end{aligned}$$

Por la condición (b) $f'$ es creciente en $(a-e_1, a)$ asi, $f_n'$ es creciente, luego $g_N(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n'(t)$ con $t \in (a-e_1, a)$ es también creciente. En particular,

$$g_N(x) \leqslant g_N(t) \leqslant g_N(f(x)), \text{ para } x \leqslant t \leqslant f(x)$$

Integrando en la desigualdad anterior se tiene,

$$(f(x)-x)g_N(x) \leqslant \int_x^{f(x)} g_N(t)dt = f_{N+1}(x) - f(x), \tag{2.5}$$

$$(f(x)-x)g_N(f(x)) \geqslant \int_x^{f(x)} g_N(t)dt = f_{N+1}(x) - f(x) \tag{2.6}$$

De forma análoga a la anterior con $x \in (a - e_1, a)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = a$.

De esta manera, si hacemos $N \to \infty$ en (2.5) y (2.6) obtenemos:

$$(f(x) - x)g(x) \leqslant a - f(x) \tag{2.7}$$
$$(f(x) - x)g(f(x)) \geqslant a - f(x) \tag{2.8}$$

De (2.7) y teniendo en cuenta que $(x - f(x)) < 0$, tenemos:

$$(x - f(x))g(x) \geqslant f(x) - a \Rightarrow g(x) \leqslant (f(x) - a)(x - f(x))^{-1} \quad \text{con } x \in (a - e_1, a)$$

De (2.8) se tiene,

$$(x - f(x))g(f(x)) \leqslant f(x) - a \Rightarrow g(f(x)) \geqslant (f(x) - a)(x - f(x))^{-1}.$$

Haciendo $x = f(x)^{-1}$, se tiene $g(x) \geqslant (x - a)(f^{-1}(x) - x)^{-1}$ con $x \in (a - e_1, a)$
Así se completa la prueba del lema.

**Lema 2.2** *Sea $T$ como en el Teorema 2.1 y $h^*$ la densidad invariante de $T^*$. La densidad $h$ de $T$ dada por h(x)= $h^*(x) + \sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{n=1}^{\infty} h^*(V_j^n(x))(V_j^n)'(x)$ es una densidad invariante.*

***Demostración.***
<u>Notación:</u>
$V(k_1, .., k_n) = V(k_1, .., k_{n-1})V(k_n)$ y $V(k) = V_k = T_k^{-1}$
$B(k_1, .., k_n) = V(k_1, .., k_{n-1})B(k_n)$

Por el lema 3 de [5] una función de densidad h es invariante si satisface la siguiente igualdad:

$$h(x) = \sum_{i\in I} h(V_i(x))(V_i)'(x) \qquad \text{(I)}$$

La prueba de este lema se obtiene del teorema de cámbio de variable para integrales.

Ahora bién, como $h^*$ es la densidad invariante de $T^*$, por el lema 3 en [5] $h^*$ se escribe de la siguiente forma:

$$h^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{B}_n} h^*(V(k_1, ..., k_n)(x))(V(k_1, ..., k_n))'(x), \qquad x \in B$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I,i\neq j} h^*(V_j^{n-1}\circ V_i)(x))(V_j^{n-1}\circ V_i)'(x)$$

Veamos entonces que la función de densidad h dada por

$h(x)=h^*(x)+\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}h^*(V_j^n x)(V_j^n)'(x)$ satisface la igualdad (I) y quedará demostrado así que h es una densidad invariante de T.

En efecto;

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} h(V_i(x))(V_i)'(x) &= \sum_{i\in I}\Big[h^*(V_i(x))(V_i)'(x)+\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}h^*\Big(V_j^n(V_i(x))\Big)\Big((V_j^n)'(V_i(x))\Big)(V_i)'(x)\Big]\\
&= \sum_{i\in I}h^*(V_i(x))(V_i)'(x)+\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}h^*\Big((V_j^n\circ V_i)(x)\Big)(V_j^n\circ V_i)'(x)\\
&= \sum_{i\in I\setminus J}h^*(V_i(x))(V_i)'(x)+\sum_{i\in I\setminus J}\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}h^*\Big((V_j^n\circ V_i)(x)\Big)(V_j^n\circ V_i)'(x)\\
&+ \sum_{i\in J}h^*(V_i(x))(V_i)'(x)+\sum_{i,j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}h^*\Big((V_j^n\circ V_i)(x)\Big)(V_j^n\circ V_i)'(x)\\
&= \sum_{i\in I\setminus J}\sum_{j\in J}\sum_{n=0}^{\infty}h^*\Big((V_j^n\circ V_i)(x)\Big)(V_j^n\circ V_i)'(x)\\
&+ \sum_{i,j\in J}\sum_{n=0}^{\infty}h^*\Big((V_j^n\circ V_i)(x)\Big)(V_j^n\circ V_i)'(x)\\
&= \sum_{i\in I\setminus J}\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}h^*\Big((V_j^{n-1}\circ V_i)(x)\Big)(V_j^{n-1}\circ V_i)'(x)\\
&+ \sum_{i,j\in J,i\neq j}\sum_{n=1}^{\infty}h^*((V_j^{n-1}\circ V_i)(x))(V_j^{n-1}\circ V_i)'(x)\\
&+ \sum_{i,j\in J,i=j}\sum_{n=1}^{\infty}h^*\Big((V_j^{n-1}\circ V_i)(x)\Big)(V_j^{n-1}\circ V_i)'(x)\\
&= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I,i\neq j}\sum_{n=1}^{\infty}h^*\Big((V_j^{n-1}\circ V_i)(x)\Big)(V_j^{n-1}\circ V_i)'(x)\\
&+ \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}h^*((V_j^n)(x))(V_j^n)'(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h^*(x) + \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty} h^*((V_j^n)(x))(V_j^n)'(x) \\
&= h(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto h(x)=$\sum_{i\in I} h(V_i(x))(V_i)'(x)$

De esta forma, vemos que h(x)= $h^*(x) + \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty} h^*(V_j^n x)(V_j^n)'(x)$ es una densidad invariante para T.

## 2.1. Demostración del Teorema Central

***Demostración.***

La densidad invariante h puede ser escrita de la siguiente forma por [5] y Lema 2.2

$$h(x) = h^*(x) + \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty} h^*(V_j^n x)(V_j^n)'(x) \quad (1)$$

De esta manera

$$
\begin{gathered}
c_1^* + \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty} c_1^*(V_j^n)'(x) \leqslant h(x) \leqslant c_2^* + \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty} c_2^*(V_j^n)'(x) \\
c_1^*\Big(1 + \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x)\Big) \leqslant h(x) \leqslant c_2^*\Big(1 + \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x)\Big) \quad (2)
\end{gathered}
$$

A la transformación T se le han impuesto las condiciones (T1) a (T4) que son:

$(T1)$ $T_i = T|_{B(i)}$ es de clase $C^1$ y para todo $i \in I$ existe $b > 0$ tal que $T_i' \geqslant b$ sobre $B(i)$.

$(T2)$ $T_iB(i) = B$, para todo $i \in I$.

$(T3)$ Todos los puntos fijos indiferentes son fuentes regulares.

$(T4)$ El conjunto $J = \{i \in I : x_i$ es un punto fijo indiferente $\}$ es no vacio y finito.

Estas propiedades nos permiten determinar vecindades $E_j \subset B(j)$, $j \in J$, tal que $V_j : E_j \to E_j$ satisface las condiciones del Lema 2.1.

En efecto, sea $j \in J$, por (T3) $x_j$ es fuente regular; es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tal que

$T_j'(x)$ es decreciente en $(x_j-\alpha, x_j)\cap B(j)$ y creciente en $(x_j, x_j+\alpha)\cap B(j)$ .
Así, existe una vecindad de $x_j$ dada por $(x_j-\alpha, x_j+\alpha)\cap B(j)$ y tomando $\overline{\alpha}<\alpha$ tal que $(x_j-\overline{\alpha}, x_j+\overline{\alpha})\subset B(j)$ tenemos que $E_j=(x_j-\overline{\alpha}, x_j+\overline{\alpha})$ es también vecindad de $x_j$ y $E_j\subset B(j)$.

Por (T1) $T_j : B(j)\to B$ es diferenciable y $T_j'(x)>0$, $\forall x\in B(j)$. Entonces, por teorema de la función inversa, $T_j$ posee inversa $T_j^{-1} : B\to B(j)$ derivable en B con $(T_j^{-1})'(y)=\dfrac{1}{T_j'(x)}>0$, $\forall y=T_j(x)\in B$. Como $V_j'(y)=(T_j^{-1})'(y)>0$, $\forall y\in B$, $V_j$ es creciente en B.
De esta manera $V_j$ es creciente y diferenciable en B y particularmente lo es en $E_j$.
Ahora verifiquemos que $V_j : E_j\to E_j$ satisface las condiciones del Lema 2.1.

(i) Sea $x\in E_j\backslash\{x_j\}$, $x>x_j$. Por teorema de valor médio existe $\xi\in(x_j,x)$ tal que $\mid V_j(x)-V_j(x_j)\mid = V_j'(\xi)\mid x-x_j\mid$
Además, como $T_j'(y)>1$ $\forall y\in(x_j,x)$ entonces $V_j'(y)=\dfrac{1}{T_j'(T_j^{-1}(y))}<1$ $\forall y\in(x_j,x)$. Asi, $\mid V_j(x)-V_j(x_j)\mid = V_j'(\xi)\mid x-x_j\mid \Rightarrow \mid V_j(x)-x_j\mid < \mid x-x_j\mid$, para $x>x_j$.
Similarmente para $x<x_j$, existe $\xi\in(x,x_j)$ tal que

$$\mid V_j(x_j)-V_j(x)\mid = V_j'(\xi)\mid x_j-x\mid$$

Y por ser $T_j'(y)>1$ $\forall y\in(x,x_j)$ se tiene $V_j'(y)<1$, de esta manera

$$\mid V_j(x)-x_j\mid < \mid x-x_j\mid, \text{ para } x<x_j$$

Finalmente, $\mid V_j(x)-x_j\mid < \mid x-x_j\mid$, $x\in E_j\backslash\{x_j\}$

(ii) Veamos ahora que $V_j'$ es creciente en $(x_j-\overline{\alpha}, x_j)$ y decreciente en $(x_j, x_j+\overline{\alpha})$ sean $x,y\in(x_j-\overline{\alpha}, x_j)$, como $T_j'$ es decreciente en $(x_j-\overline{\alpha}, x_j)$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} x<y \quad &\Rightarrow \quad T_j'(x)>T_j'(y) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{T_j'(x)}<\frac{1}{T_j'(y)} \\ &\Rightarrow \quad V_j'(x)<V_j'(y) \end{aligned}$$

Siendo de esta manera $V_j'$ creciente en $(x_j-\overline{\alpha}, x_j)$. De la misma manera probaremos que $V_j'$ es decreciente en $(x_j, x_j+\overline{\alpha})$. En efecto para $x,y\in(x_j, x_j+\overline{\alpha})$ y teniendo en cuenta que $T_j'$ es creciente en $(x_j, x_j + \overline{\alpha})$, tenemos

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow T_j'(x) < T_j'(y) \\ &\Rightarrow \frac{1}{T_j'(y)} < \frac{1}{T_j'(x)} \\ &\Rightarrow V_j'(y) < V_j'(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto $V_j : E_j \to E_j$ satisface las condiciones del Lema 2.1, estamos ahora en condiciones de hacer los estimados deseados, para este fin escojamos un número positivo $M_1$ tal que

$$\prod_{j \in J} G_j(x) \leqslant M_1, \text{ para } x \in B \setminus \bigcup_{j \in J} V_j(E_j)$$

La escogencia de $x \in B \setminus \cup_{j \in J} V_j(E_j)$ es para evitar tener un punto fijo, lo cual provocaria una próximidad a cero en el denominador de algún $G_j$, $j \in J$ y no pudiendo asi ser acotado. Por lo tanto, en virtud de que $x \in B \setminus \cup_{j \in J} V_j(E_j)$ existe dicho $M_1$ positivo tal que

$$\prod_{j \in J} G_j(x) \leqslant M_1.$$

Busquemos acotar a h. Primero supongamos que $x \in V_j(E_j)$, $x \neq x_j$, para algún $j \in J$. Usando (2) y el Lema 2.1 se tiene,

$$\begin{aligned} h(x) &\geqslant c_1^* \Big(1 + \sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty} (V_j^n)'(x)\Big) && \text{por (2)} \\ &= c_1^* + c_1^* \sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty} (V_j^n)'(x) \\ &> c_1^* \sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty} (V_j^n)'(x) && \text{pues } c_1^* > o \\ &> c_1^* \sum_{n=1}^{\infty} (V_j^n)'(x) = c_1^* g(x) && \text{para algún } j \in J \\ &\geqslant c_1^* (x - x_j)(T(x) - x)^{-1} && \text{pues } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_j^n)'(x) \text{ y por Lema 2.1} \\ &= c_1^* G_j(x) && \text{por Def. de G pues } x \in V_j(E_j) \subset B(j) \text{ y } x \neq x_j \\ &= c_1^* \prod_{j \in J} G_j(x) && \text{ya que fuera de } B_j,\ G_j(x) = 1 \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $x \in B \backslash \bigcup_{j\in J} V_j(E_j)$. Como $\prod_{j\in J} G_j(x) \leqslant M_1$, para $x \in B \backslash \bigcup_{j\in J} V_j(E_j)$, entonces

$$\prod_{j\in J} G_j(x).M_1^{-1} \leqslant 1 \qquad (*)$$

$$\begin{array}{rcll} h(x) & \geqslant & c_1^*\Big(1+\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x)\Big) & \text{por (2)} \\ & \geqslant & c_1^* = c_1^* \cdot 1 & \text{pues } (V_j^n)' > 0 \\ & = & c_1^* \prod_{j\in J} G_j(x).M_1^{-1} & \text{por } (*) \end{array}$$

Por lo tanto, tomando $c_1 = \text{mín}\Big\{c_1^*, c_1^*.M_1^{-1}\Big\}$ obtenemos que

$$c_1 \prod_{j\in J} G_j(x) \leqslant h(x), \qquad \text{para } x \in B\backslash\{x_j : j \in J\} \qquad (3)$$

Para hallar los estimados superiores mostraremos primero que las funciones $\sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x)$ son acotadas sobre $B\backslash E_j$ para cada $j \in J$. Para este fin, consideremos $j \in J$ y tomemos un entero positivo $p = p(j)$ tal que $B_p(j) \subseteq E_j$. Usando (T1) y aplicando el Lema 2.1 obtenemos,

$$\begin{array}{rcll} \sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x) & = & \sum_{n=1}^{p}(V_j^n)'(x) + \sum_{n=p+1}^{\infty}(V_j^n)'(x) & \\ & = & \sum_{n=1}^{p}(V_j^n)'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(V_j^{n+p})'(x) & \\ & = & \sum_{n=1}^{p}(V_j^n)'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n \circ V_j^p)'(x) & \\ & = & \sum_{n=1}^{p}(V_j^n)'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'((V_j^p)(x)).(V_j^p)'(x) & \\ & \leqslant & \sum_{n=1}^{p}(b^{-n}) + b^{-p}.\sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'((V_j^p)(x)) & \text{por (T1)} \\ & \leqslant & \sum_{n=1}^{p}(b^{-n}) + b^{-p}\Big[V_j^{p+1}(x) - x_j\Big]\Big[V_j^p(x) - V_j^{p+1}(x)\Big]^{-1} & \text{por Lema 2.1} \end{array}$$

Sabemos que para $x \in B \backslash E_j$, $V_j^p(x) \in B \backslash B_{2p}(j)$ y como $B_{2p}(j)$ es vecindad de $x_j$ se tiene que en $B \backslash B_{2p}(j)$ el denominador en la expresión $\Big[V_j(x) - x_j\Big]\Big[x - V_j(x)\Big]^{-1}$ no se anula, lo cual hace posible acotar dicha expresión. En consecuencia las funciones $\sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x)$ son acotadas sobre $B \backslash E_j$ para cada $j \in J$.

De esta manera podemos tomar $M_2$ y $M_3$ números reales positivos tales que

$$\sum_{k \in J \backslash \{j\}} \sum_{n=1}^{\infty}(V_k^n)'(x) \leqslant M_2, \qquad \text{para } x \in E_j,\ j \in J \qquad \text{(i)}$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x) \leqslant M_2, \qquad \text{para } x \in B \backslash \bigcup_{j \in J} E_j \qquad \text{(ii)}$$

$$\prod_{j \in J} F_j(x) \geqslant M_3, \qquad \text{para } x \in B \backslash \bigcup_{j \in J} E_j \qquad \text{(iii)}$$

Asi tenemos para $x \in E_j$, $x \neq x_j$

$$\begin{aligned}
h(x) &\leqslant c_2^*\Big[1 + \sum_{k \in J} \sum_{n=1}^{\infty}(V_k^n)'(x)\Big] && \text{por(2)} \\
&= c_2^*\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x) + \sum_{k \in J \backslash \{j\}} \sum_{n=1}^{\infty}(V_k^n)'(x)\Big] \\
&\leqslant c_2^*\Big[1 + \Big(V_j(x) - x_j\Big)\Big(x - V_j(x)\Big)^{-1} + M_2\Big] && \text{por Lema 2.1} \\
&\leqslant c_2^*\Big[(1 + M_2) + (1 + M_2)\Big(V_j(x) - x_j\Big)\Big(x - V_j(x)\Big)^{-1}\Big] \\
&= c_2^*(1 + M_2)\Big[1 + \Big(V_j(x) - x_j\Big)\Big(x - V_j(x)\Big)^{-1}\Big] \\
&= c_2^*(1 + M_2)\Big[\frac{x - V_j(x) + V_j(x) - x_j}{x - V_j(x)}\Big] \\
&= c_2^*(1 + M_2)\Big(x - x_j\Big)\Big(x - V_j(x)\Big)^{-1} \\
&= c_2^*(1 + M_2)\prod_{j \in J} F_j(x), && \text{pues } F_j(x) = 1 \text{ fuera de } B(j)
\end{aligned}$$

Ahora tomemos $x \in B \backslash \cup_{j \in J} E_j$, por (iii) tenemos que $\prod_{j \in J} F_j(x) \geqslant M_3$, es decir

$$1 \leqslant M_3^{-1} \prod_{j \in J} F_j(x). \quad (**)$$

Así, para $x \in B\setminus \cup_{j\in J} E_j$ obtenemos

$$\begin{aligned} h(x) &\leqslant c_2^*\Big[1+\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}(V_j^n)'(x)\Big] && \text{por (2)} \\ &= c_2^*[1+M_2]\cdot 1 && \text{por (ii)} \\ &= c_2^*[1+M_2]\prod_{j\in J} F_j(x).M_3^{-1} && \text{por (**)} \end{aligned}$$

Finalmente tomando $c_2 = \text{máx}\{c_2^*(1+M_2)\ ,\ c_2^*(1+M_2)M_3^{-1}\}$ obtenemos que

$$h(x) \leqslant c_2\prod_{j\in J} F_j(x), \qquad x \in B\setminus\{x_j : j \in J\} \tag{4}$$

De esta manera de (3) y (4) se concluye que

$$c_1\prod_{j\in J} G_j(x) \leqslant h(x) \leqslant c_2\prod_{j\in J} F_j(x), \qquad x \in B\setminus\{x_j : j \in J\} \qquad \blacksquare$$

# CAPÍTULO 3

# Aplicaciones

Los resultados anteriores pueden ser aplicados a una transformación T sujeta a las condiciones (T1)-(T4), siempre que se demuestre que la transformación salto $T^*$, asociada a T, tiene una densidad invariante acotada lejos de 0 y de $\infty$. Hallar ésto no es muy complicado gracias a que Adler introdujo una condición suficiente, la cual asegura la existencia de tal densidad para transformaciones expansivas. Además que se verá en los siguientes resultados que $T^*$ verificará estas condiciones siempre que se verifiquen para T.

**Corolario 3.1** *Sea T satisfaciendo las condiciones del Teorema 2.1. Asumiendo además que T admite expansión*

*$T(x) = 1 + a_{n_j+1}(x-x_j)^{n_j+1} + a_{n_j+2}(x-x_j)^{n_j+2} + ...$, donde $a_{n_j+1} = \dfrac{T^{(n_j+1)}(x_j)}{(n_j+1)!} \neq 0$, en cada punto fijo indiferente $x_j$.*

*Entonces existen constantes $d_2 \geqslant d_1 > 0$ tal que*

$$d_1 \prod_{j\in J} \mid x - x_j \mid^{-n_j} \leqslant h(x) \leqslant d_2 \prod_{j\in J} \mid x - x_j \mid^{-n_j} .$$

Consideremos ahora la unión de los $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, como una partición conveniente para $T^*$ y sea $I^*$ el conjunto de índices dado por $I^* = \{(k_1, ..., k_n) : B(k_1, ..., k_n) \in \mathfrak{B}_\mathfrak{n}, n \geqslant 1\}$.

Si $k^* = (k_1, ..., k_n) \in I^*$, denotaremos la inversa de $T^* : B(k_1, ..., k_n) \to B$ por $W_{k^*}$.

**Teorema 3.1** *Sea T satisfaciendo (T1)-(T4). suponga que las funciones $V_i$ ($i \in I$) son dos veces diferenciables, y*

$$A = \sup_{i\in I} \sup_{x\in B} \frac{\mid V_i''(x) \mid}{\mid V_i'(x) \mid} \text{ es finito.}$$

*Entonces*

$$A^* = \sup_{k^* \in I^*} \sup_{x \in B} \frac{\mid W_k''(x) \mid}{\mid W_k'(x) \mid} \text{ es finito.}$$

**COROLARIO 3.2** *Sean $T$ y $V_i$ $(i \in I)$ satisfaciendo las condiciones del teorema 3.1. Si $T^*$ tiene una potencia con derivada acotada lejos de 1, entonces las hipótesis del teorema 2.1 se cumplen.*

En particular, $T^*$ tiene la propiedad requerida, si $T'$ es acotada lejos de 1 sobre $B \setminus \cup_{j \in J} E_j$ para cualquier vecindad $E_j$ de $x_j$.

## 3.1. Ejemplo 1.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, considerese la transformación $T : [0,1) \to [0,1)$ definida como sigue:

$$T(x) = f^{-1}|_{[0,1)}(x)(mod \;\; 1).$$

Muestrese que T satisface las condiciones del Teorema Central y aplicar los resultados.

Primeramente observemos cómo es la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

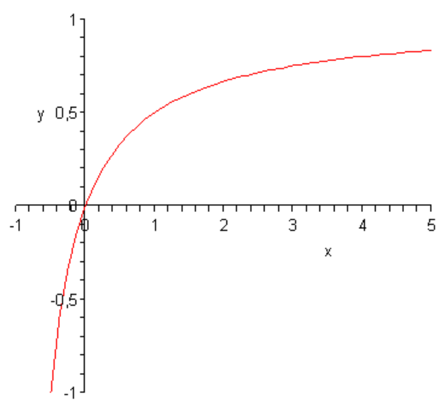


Figura 3.1: Gráfica de f

Consideremos $T(x) = f^{-1}|_{[0,1)}(x)(mod \;\; 1)$

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{1+x} &\Rightarrow y(1+x) = x \\ &\Rightarrow y = x - xy \\ &\Rightarrow y = x(1-y) \\ &\Rightarrow x = \frac{y}{1-y}, \qquad y \neq 1 \end{aligned}$$

Así, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$

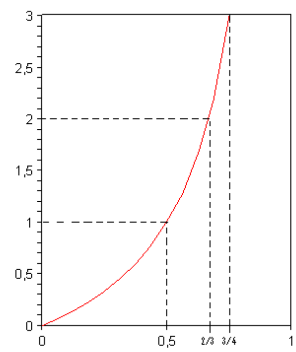


Figura 3.2: Gráfica de $f^{-1}|_{[0,1)}$

Por lo tanto, definimos $T : [0,1) \to [0,1)$ como $T(x) = \dfrac{x}{1-x}(mod\ \ 1)$

Para hallar los extremos de los intervalos de la partición haremos $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

$$f(1) = \tfrac{1}{2},\ \ f(2) = \tfrac{2}{3},\ \ f(3) = \tfrac{3}{4},\quad f(4) = \tfrac{4}{5}, ..., f(k) = \tfrac{k}{k+1}, ...$$

Así, los intervalos de la partición son de la forma:

$$B(k) = [\tfrac{k}{k+1}, \tfrac{k+1}{k+2}) \text{ con } k \in I = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Debemos verificar que T satisface las condiciones del Teorema 2.1 para ello probaremos que T esta en las condiciones del Corolario 3.2, las cuales son:

- T satisface $(T1) - (T4)$
- $V_i \quad (i \in I)$ son dos veces diferenciables

- $A = \sup_{i \in I} \sup_{x \in B} \dfrac{\mid V_i''(x) \mid}{\mid V_i'(x) \mid}$ es finito
- $T^*$ tiene una potencia con derivada acotada lejos de 1.

Observemos la gráfica de la transformación T dada en la figura 3.2 y notemos que en este caso la partición es infinita numerable.

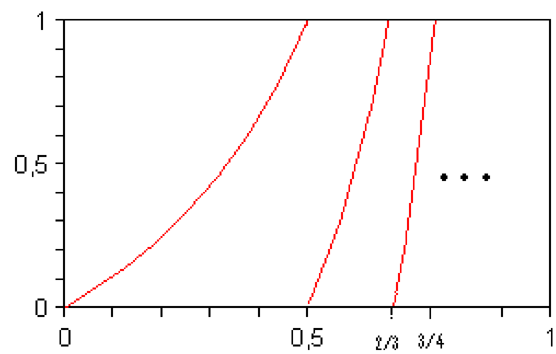


Figura 3.3: Gráfica de T(x)

Procedamos ahora a verificar que T está en las condiciones del Corolario 3.2.

• Veamos que se cumplen las condiciones (T1)-(T4)

(T1) $T_i = T|B(i)$ es diferenciable y existe $b > 0$ tal que $T_i' \geqslant b \quad \forall i \in I$.

En efecto, como $f^{-1}(x)$ es derivable para todo $x \in [0,1)$, $T|_{B(i)}$ también lo es y

$$T_i'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \;\; x \in B(i),\, i \in I$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x < 1 \;\; &\Rightarrow \;\; -1 < -x \leqslant 0 \\ &\Rightarrow \;\; 0 < 1-x \leqslant 1 \\ &\Rightarrow \;\; 0 < (1-x)^2 \leqslant 1 \\ &\Rightarrow \;\; \frac{1}{(1-x)^2} \geqslant 1 > 0 \end{aligned}$$

Así, existe $b = 1 > 0$ tal que $T_i' \geqslant 1$ sobre B(i),$\forall i \in I$.

(T2) $T_i(B(i)) = B$, para todo $i \in I$.

Por la forma como está definida T, $T(x) = \dfrac{x}{1-x}(mod \;\; 1)$, y los intervalos de la partición es claro que $T_i(B(i)) = B = [0,1) \;\; \forall i \in I$

(T3) Todos los puntos fijos indiferentes son fuentes regulares. Recordemos que $x_j$ es punto fijo indiferente de T si

$$\lim_{x\to x_j} T(x) = x_j \qquad y \qquad \lim_{x\to x_j} |T'(x)| = 1$$

y es fuente regular cuando $x_j$ es un punto fijo indiferente y existe un número real $\alpha > 0$ tal que $|T'(x)|$ es creciente en $(x_j, x_j+\alpha)\bigcap B$ y $|T'(x)|$ es decreciente en $(x_j-\alpha, x_j)\bigcap B$. Observese en la figura 3.4 que en cada $B(i)$ existe un único punto fijo.

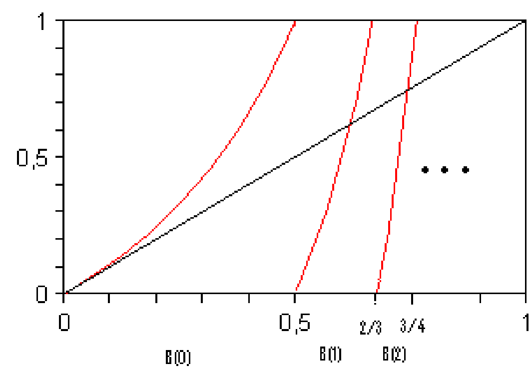


Figura 3.4: Gráfica de T(x) con la Identidad

En B(0) el punto fijo es cero,

$$T_0(0) = \frac{0}{1-0} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} T_0'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1-x)^2} = 1.$$

Es decir que 0 es un punto fijo indiferente. Notemos también que es el único punto fijo indiferente pues $T_i'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 1$ para $x > 0$.

Como $T_i''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} > 0, \forall x \in [0,1)$, entonces $T_i'(x)$ es creciente $\forall x \in B(i)$. Asi $T_0'$ es creciente a la derecha del punto fijo indiferente es decir que 0 es fuente regular.

(T4) Como el cero es el único punto fijo indiferente se tiene que el conjunto de índices $J = \{i \in I : x_i$ es punto fijo indiferente $\}$ es no vacio y finito, $J = \{0\}$.

- Veamos que las funciones $V_k = T_k^{-1}$ $\forall k \in I$ son dos veces diferenciables.

Recordemos que $T_k : B(k) \to B = [0,1)$ está dada por $T_k(x) = \dfrac{x}{1-x}(mod\ \ 1)$, $x \in B(k)$, $k \in I$ y definamos $V_k = T_k^{-1} : B \to B(k)$ como: $V_k(x) = \dfrac{x+k}{x+k+1}$, $\forall k \in I$, observese su gráfica en la figura 3.5.

$$V_k'(x) = \frac{x+k+1-(x+k)}{(x+k+1)^2} = \frac{1}{(x+k+1)^2}$$

$$V_k''(x) = \frac{-2}{(x+k+1)^3}.$$

Tanto $V_k'(x)$ como $V_k''(x)$ son continuas en B.

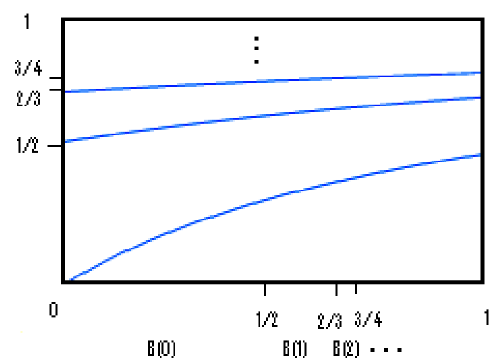


Figura 3.5: Gráfica de $V = T^{-1}$

•Probemos ahora que $A = \sup_{k\in I} \sup_{x\in B} \frac{| V_k''(x) |}{| V_k'(x) |}$ es finito. En efecto,

$$\frac{| V_k''(x) |}{| V_k'(x) |} = \frac{-V_k''(x)}{V_k'(x)} = \frac{\frac{2}{(x+k+1)^3}}{\frac{1}{(x+k+1)^2}} = \frac{2}{x+k+1} \leqslant 2 \quad \forall x \in B, \forall k \in I$$

De esta manera,

$$A = \sup_{k\in I} \sup_{x\in B} \frac{| V_k''(x) |}{| V_k'(x) |} \text{ es finito.}$$

• Finalmente verifiquemos que la transformación salto $T^*$ asociada a T tiene una potencia con derivada acotada lejos de 1.

$$T(x) = \frac{x}{1-x}.$$

$$T^2(x) = T(T(x)) = T(\frac{x}{1-x}) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x-x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

$$T^2(x) = \frac{x}{1-2x}, \quad x \neq \tfrac{1}{2}$$

$$T^3(x) = T(T^2(x)) = T(\frac{x}{1-2x}) = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1 - \frac{x}{1-2x}} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{\frac{1-2x-x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

$T^3(x) = \dfrac{x}{1-3x}, \quad x \neq \frac{1}{3}, \quad x \in B(3)$

De esta manera obtenemos que $T^n(x) = \dfrac{x}{1-nx}$, con $x \in B(n)$, $n > 1$.

Es decir, $T^*(x) = \dfrac{x}{1-nx}, \quad$ con $x \in B(n)$.

$(T^*)'(x) = \dfrac{1-nx-x(-n)}{(1-nx)^2} = \dfrac{1}{(1-nx)^2} > 0$

Además, como $T^* = T^n$, por regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}
(T^*)'(x) &= (T^n)'(x) = (T \circ T^{n-1})'(x) = T'(T^{n-1}(x))(T^{n-1})'(x) \\
&= T'(T^{n-1}(x)).T'(T^{n-2}(x)).T'(T^{n-3}(x))...T'(T^2(x)).T'(T(x)).T'(x)
\end{aligned}$$

Recordemos que $T : [0,1) \to [0,1)$, esta definida por $T(x) = \dfrac{x}{1-x}(mod \ \ 1)$

$$T'(x) = \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Como la transformación salto no esta definida en el punto fijo indiferente, el cual en nuestro caso es el cero, tenemos

$$\begin{aligned}
0 < x < 1 \quad &\Rightarrow \quad -1 < -x < 0 \\
&\Rightarrow \quad 0 < (1-x)^2 < 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^2} > 1
\end{aligned}$$

Así, $T'(x) > 1 \quad \forall x \in (0,1)$. Luego $(T^*)'(x) > 1$. Entonces para algún $m \in \mathbb{N}$ tenemos

$$((T^*)^m)'(x) = (T^{n+m})'(x) = \frac{1}{(1-(n+m)x)^2}$$

Y por regla de la cadena $((T^*)^m)'(x) > 1$.

De esta manera podemos concluir que $T^*$ tiene una potencia con derivada lejos de 1.

Por lo cual se tienen las condiciones del corolario 3.2 y en consecuencia T satisface las condiciones del teorema 2.1. Es decir que $T^*$ tiene una densidad invariante $h^*$ tal que $c_1^* \leqslant h^* \leqslant c_2^*$ donde $c_1^*$ y $c_2^*$ son constantes positivas.

Así, se tiene la conclusión del Teorema Central; esto es, existen constantes positivas $c_1$ y $c_2$ tal que la densidad invariante h de T satisface

$$c_1 \prod_{j \in J} G_j(x) \leqslant h(x) \leqslant c_2 \prod_{j \in J} F_j(x) \ ; \qquad x \in B \backslash \{x_j : j \in J\}$$

En nuestro caso, $j = 0 \in J$. Donde además,

$$\bullet\ G_0(x) = \begin{cases} (x-0)(T(x)-x)^{-1}, & x \in B(0), x \neq 0 \\ 1, & x \in B \setminus B(0) \end{cases}$$

$$\frac{x}{T(x)-x} = \frac{x}{\dfrac{x}{1-x} - x} = \frac{x}{\dfrac{x - x(1-x)}{1-x}} = \frac{x(1-x)}{x^2} = \frac{1-x}{x}$$

Y además $B(0) = [0, \frac{1}{2})$

$$G_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x}, & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

$$\bullet\ F_0(x) = \begin{cases} (x-0)(x-V_0(x))^{-1}, & x \in B(0), x \neq 0 \\ 1, & x \in B \setminus B(0). \end{cases}$$

Recordemos que $V_k(x) = \dfrac{x+k}{x+k+1}$, $\forall k \in I$. Luego $V_0(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$$\frac{x}{x-V_0(x)} = \frac{x}{x - \dfrac{x}{x+1}} = \frac{x}{\dfrac{x(x+1)-x}{x+1}} = \frac{x(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{x}$$

$$F_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

De (A) y (B) y la conclusión del Teorema Central tenemos

$$c_1 G_0(x) \leqslant h(x) \leqslant c_2 F_0(x)\ ; \qquad x \in (0,1)$$

Lo cual implica que,

$$c_1\Big(\frac{1-x}{x}\Big) \leqslant h(x) \leqslant c_2\Big(\frac{x+1}{x}\Big), \text{ para } x \in (0, \tfrac{1}{2}) \quad \text{y} \quad c_1 \leqslant h(x) \leqslant c_2, \text{ para } x \in [\tfrac{1}{2}, 1)$$

Por otro lado, hallemos el desarrollo de taylor de T alrededor de cero. Calculemos los coeficientes $a_{n_j+1} = \frac{T^{(n_j+1)}(0)}{(n_j+1)!}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

$$T'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad T'(0) = 1$$

$$T''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad T''(0) = 2, \ \ a_2 = 1 \neq 0$$

$$T'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \quad T'''(0) = 6, \ \ a_3 = \frac{6}{3!} = 1$$

Luego, T admite una expansión $T(x) = x + x^2 + x^3 + ...$
Entonces por corolario 3.1, existen constantes $d_2 \geqslant d_1 > 0$ tal que

$$d_1(x-0)^{-1} \leqslant h(x) \leqslant d_2(x-0)^{-1}$$
$$d_1\frac{1}{x} \leqslant h(x) \leqslant d_2\frac{1}{x}$$

Esto nos lleva a decir que $h(x) = \frac{1}{x}h_0(x)$, donde $0 < d_1 \leqslant h_0(x) \leqslant d_2$.
Una densidad invariante para T es dada por F. Schweiger en su artículo Number Theorical Endomorphisms with $\sigma$- Finite invariant measure, ver [5], como $h(x) = \frac{1}{x}$. Observese que dado $A \subset [0,1)$ un intervalo cualquiera $A = [a,b]$, $a \neq b$, $a \neq 0$

$$\mu(A) = \int_A h(x)dx = \int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln x|_a^b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Si a=0, entonces $\mu(A) = +\infty$.

Así, T es una transformación con medida invariante infinita.

## 3.2. Ejemplo 2.

Dada la función $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{\pi x}{2})$, considerese la transformación $T : [0,1) \to [0,1)$ definida como sigue:

$$T(x) = \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)(mod \;\; 1).$$

Muestrese que T satisface las condiciones del Teorema Central y aplicar los resultados.
Observese la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{\pi x}{2})$ en la figura 3.6.

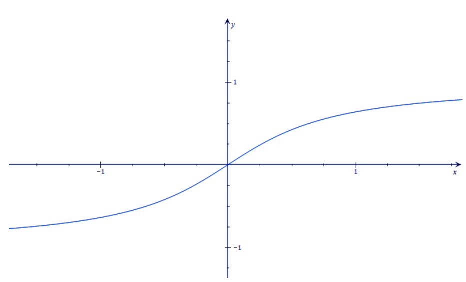

Figura 3.6: Gráfica de f

Hallemos $f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} y = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\pi y}{2} = \arctan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{\pi x}{2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right) = x \end{aligned}$$

Asi, $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{\pi}\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

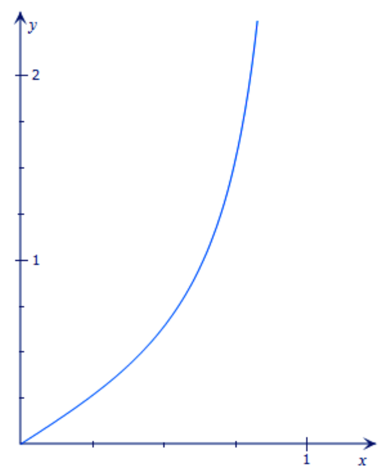


Figura 3.7: Gráfica de $f^{-1}|_{[0,1)}$

Entonces podemos considerar $T(x) = f^{-1}|_{[0,1)}(x)(mod\ \ 1)$. Es decir,
$T : [0,1) \to [0,1)$ está dada por $T(x) = \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)(mod 1)$
Para hallar los extremos de los intervalos de la partición calcularemos la imágen inversa de $f^{-1}$ para cada $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Es decir,
$f(0) = 0$; $\quad f(1) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,639$; $\quad f(2) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 0,803$;

$f(3) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}866$; $f(4) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 0,899$; $...f(k) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi.k}{2}\right)...$
Así, los intervalos de la partición son de la forma:

$$B(k) = \left[\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi.k}{2}\right), \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi.(k+1)}{2}\right)\right] \text{ con } k \in I = \{0,1,2,3,...\}$$

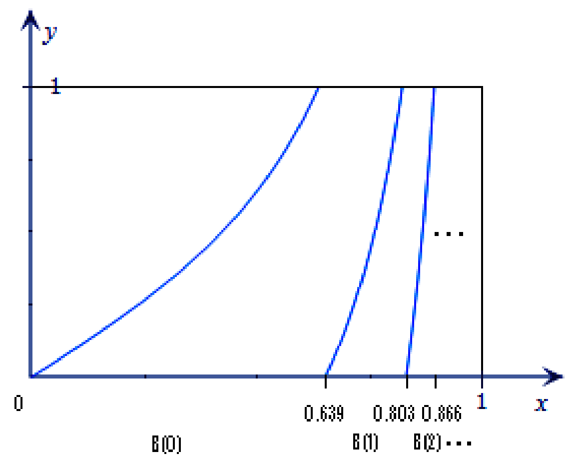


Figura 3.8: Gráfica de T(x)

Debemos verificar que T satisface las condiciones del teorema 2.1 para ello probaremos que T esta en las condiciones del corolario 3.2, las cuales son:

- T satisface $(T1)-(T4)$
- $V_i \quad (i \in I)$ son dos veces diferenciables
- $A = \sup_{i \in I} \sup_{x \in B} \dfrac{\mid V_i''(x) \mid}{\mid V_i'(x) \mid}$ es finito
- $T^*$ tiene una potencia con derivada acotada lejos de 1.

• Veamos que se cumplen las condiciones (T1)-(T4)

(T1) $\quad T_i = T|_{B(i)}$ es diferenciable y existe $b > 0$ tal que $T_i' \geqslant b \quad \forall i \in I$.

En efecto, como $f^{-1}(x)$ es derivable para todo $x \in [0,1)$, $T|_{B(i)}$ tambien lo es y

$$T_i'(x) = \left(\frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)' = \frac{2}{\pi}\sec^2\left(\frac{\pi . x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \sec^2\left(\frac{\pi . x}{2}\right), \quad x \in B(i),\, i \in I$$

Recordemos que $\sec(x) \geqslant 1$ para x en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x < 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{\pi . x}{2} < \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \quad \sec\left(\frac{\pi . x}{2}\right) \geqslant 1 \\ &\Rightarrow \quad \sec^2\left(\frac{\pi . x}{2}\right) \geqslant 1 \end{aligned}$$

Asi existe $b = 1 > 0$ tal que $T_i' \geqslant 1$ sobre B(i),$\forall i \in I$.

(T2) $\quad T_i(B(i)) = B$, para todo $i \in I$.

Por la forma como T está definida, $T(x) = \frac{2}{\pi} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)(mod \quad 1)$ y los intervalos de la partición, se tiene que $T_i(B(i)) = B = [0,1) \ \ \forall i \in I$.

(T3) Todos los puntos fijos indiferentes son fuentes regulares. Observese en la figura 3.10 que en cada $B(i)$ existe un único punto fijo.

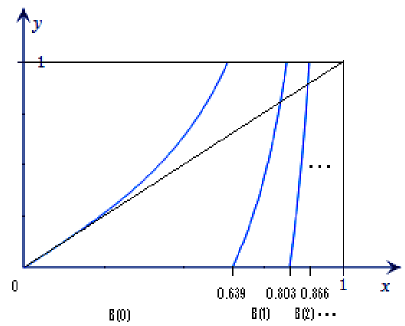


Figura 3.9: Gráfica de T(x) con la Identidad

En B(0) el punto fijo es cero,

$$T_0(0) = \frac{2}{\pi} \tan\left(\frac{\pi \cdot 0}{2}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} T_0'(x) = \lim_{x \to 0} \sec^2\left(\frac{\pi . x}{2}\right) = \left(\sec\left(\frac{\pi . x}{2}\right)\right)^2 = 1.$$

Es decir que 0 es un punto fijo indiferente. Notemos también que es el único punto fijo indiferente de T en [0,1) pues $T_i'(x) = \sec^2\left(\dfrac{\pi . x}{2}\right) > 1$ para $0 < x < 1$ y $\forall i \in I$ .

Es decir que $T_i$ tiene derivada lejos de 1 en todo B excepto en 0 (el punto fijo indiferente). Además el cero es también fuente regular. En efecto,

$$\begin{aligned} T_i''(x) = \left(\sec^2\left(\frac{\pi . x}{2}\right)\right)' &= 2\sec\left(\frac{\pi . x}{2}\right) \cdot \left(\sec\left(\frac{\pi . x}{2}\right)\right)' \\ &= 2\sec\left(\frac{\pi . x}{2}\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi . x}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi . x}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \sec^2\left(\frac{\pi . x}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi . x}{2}\right) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Como $T_i''(x) \geqslant 0, \forall x \in [0,1)$ entonces $T_i'(x)$ es creciente $\forall x \in B(i)$. Así, $T_0'$ es creciente a la derecha del punto fijo indiferente es decir que 0 es fuente regular.

(T4) Como el cero es el único punto fijo indiferente se tiene que el conjunto de índices $J = \{i \in I : x_i$ es punto fijo indiferente $\}$ es no vacio y finito, $J = \{0\}$.

• Veamos que las funciones $V_k = T_k^{-1} \ \forall k \in I$ son dos veces diferenciables.

Recordemos que $T_k : B(k) \to B = [0,1)$ esta dada por $T_k(x) = \frac{2}{\pi} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)(mod \quad 1)$,

$x \in B(k)$, $k \in I$ y definamos $V_k = T_k^{-1} : B \to B(k)$ como:

$$V_k(x) = \tfrac{2}{\pi} \arctan\Big(\tfrac{\pi}{2}(k+x)\Big)(mod \ \ 1), \ \forall k \in I.$$

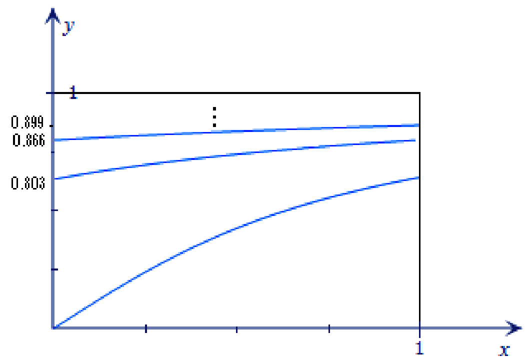


Figura 3.10: Gráfica de $V = T^{-1}$

$$V_k'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2} > 0$$

$$V_k''(x) = -\frac{\pi(k+x)\dfrac{\pi}{2}}{\Big(1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2\Big)^2} = -\frac{\pi^2(k+x)}{2\Big(1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2\Big)^2} < 0.$$

Tanto $V_k'(x)$ como $V_k''(x)$ son continuas en $B$.

- Ahora probemos que $A = \sup\limits_{k\in I} \sup\limits_{x \in B} \dfrac{| V_k''(x) |}{| V_k'(x) |}$ es finito. En efecto,

$$\frac{| V_k''(x) |}{| V_k'(x) |} = \frac{-V_k''(x)}{V_k'(x)} = \frac{\dfrac{\pi^2(k+x)}{2\Big(1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2\Big)^2}}{\dfrac{1}{1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2}} = \frac{\pi^2(k+x)\Big(1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2\Big)}{2\Big(1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2\Big)^2}$$

Así, $\dfrac{| V_k''(x) |}{| V_k'(x) |} = \dfrac{\pi^2(k+x)}{2\Big(1+\Big(\frac{\pi}{2}(k+x)\Big)^2\Big)}$

De esta manera,

$$A = \sup_{k\in I} \sup_{x \in B} \frac{| V_k''(x) |}{| V_k'(x) |} \text{ es finito.}$$

• Finalmente verifiquemos que la transformación salto $T^*$ asociada a T tiene una potencia con derivada acotada lejos de 1.

$$T(x) = \frac{2}{\pi}\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)(mod\ \ 1)$$

$$\begin{aligned} T^2(x) &= T(T(x)) = T\Big(\frac{2}{\pi}\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)(mod 1)\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\tan\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\frac{2}{\pi}\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\Big)\Big)(mod\ \ 1) \\ &= \frac{2}{\pi}\tan\Big(\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\Big)(mod\ \ 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^3(x) &= T(T^2(x)) = T\Big(\frac{2}{\pi}\tan\Big(\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\Big)(mod\ \ 1)\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\tan\Big(\tan\Big(\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\Big)\Big)(mod\ \ 1) \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que

$$T^n(x) = \tfrac{2}{\pi}\underbrace{\tan\Big(\tan\Big(\tan\Big(\cdots\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\cdots\Big)\Big)\Big)}_{n-veces}(mod\ \ 1),\text{ con } x \in B_n,\ n > 1.$$

Es decir, $T^*(x) = \frac{2}{\pi}\tan\Big(\tan\Big(\tan\Big(\cdots\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\cdots\Big)\Big)\Big)(mod\ \ 1)$, con $x \in B_n$.

Al igual que el ejemplo anterior tenemos por regla de la cadena que la derivada de la transformación salto se escribe como:

$$(T^*)'(x) = T'(T^{n-1}(x)).T'(T^{n-2}(x)).T'(T^{n-3}(x))...T'(T^2(x)).T'(T(x)).T'(x)$$

Además, como $T : [0,1) \to [0,1)$ esta definida por $T(x) = \frac{2}{\pi}\tan\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)(mod\ \ 1)$, tenemos $T'(x) = \sec^2\Big(\dfrac{\pi.x}{2}\Big)$

Como la transformación salto no esta definida en el punto fijo indiferente que en nuestro caso es el cero y $T'(x) > 1 \quad \forall x \in (0,1)$ tenemos

$(T^*)'(x) > 1 \quad \forall x \in B_n$.

Entonces para algún $m \in \mathbb{N}$ tenemos

$((T^*)^m)'(x) = (T^{n+m})'(x) > 1$

Concluyendo asi que $T^*$ tiene una potencia con derivada lejos de 1.

De esta manera se tienen las condiciones del corolario 3.2 y en consecuencia T satisface las condiciones del teorema 2.1.

Ahora hallemos la expansión de taylor para T alrededor de cero. Calculemos los coeficientes $a_{n_j+1} = \dfrac{T^{(n_j+1)}(x_j)}{(n_j+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}$.

$T'(x) = \sec^2\left(\dfrac{\pi.x}{2}\right), \quad T'(0) = 1$

$$T''(x) = 2\sec\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\sec\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\tan\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\frac{\pi}{2} = \pi\sec^2\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\tan\left(\frac{\pi.x}{2}\right)$$

$$T''(0) = \pi \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Luego $a_2 = 0$

$$T'''(x) = \pi\Big[\pi\sec^2\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\tan\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\tan\left(\frac{\pi.x}{2}\right) + \sec^2\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\sec^2\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\frac{\pi}{2}\Big]$$

$$= \pi^2\sec^2\left(\frac{\pi.x}{2}\right).\tan^2\left(\frac{\pi.x}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2}\sec^4\left(\frac{\pi.x}{2}\right)$$

$$T'''(0) = \pi^2 \cdot 1 \cdot 0 + \frac{\pi^2}{2} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{2} \neq 0$$

Así, T admite una expansión $T(x) = 1 + a_{n_j+1}(x-x_j)^{n_j+1} + a_{n_j+2}(x-x_j)^{n_j+2} + ...$ donde $a_{n_j+1} = \dfrac{T^{(n_j+1)}(x_j)}{(n_j+1)!} \neq 0$

En nuestro caso $a_3 = \dfrac{T^{(3)}(0)}{3!} = \dfrac{\pi^2}{12} \neq 0$, luego $n_j = 2$ y $T(x) = 1 + \dfrac{\pi^2}{12}(x-0)^3 + ...$

Entonces, por corolario 3.1, existen constantes $d_2 \geqslant d_1 > 0$ tal que

$$d_1(x-0)^{-2} \leqslant h(x) \leqslant d_2(x-0)^{-2}$$

$$d_1\frac{1}{x^2} \leqslant h(x) \leqslant d_2\frac{1}{x^2}$$

Es decir que $h(x) = \dfrac{1}{x^2}h_0(x)$, donde $0 < d_1 \leqslant h_0(x) \leqslant d_2$.

Con este ejemplo concluimos nuestro estúdio sobre acotaciones para densidades invariantes de transformaciones que presentan puntos indiferentes.

# Bibliografía

[1] R. Bowen. Invariant Measure for Markov Maps of the Interval. Commun, Math. Phys. 69, 1-17, (1979).

[2] R. Mañe. Teoría Ergódica, Proyecto Euclides . Rio de Janeiro (1983). Springer Verlag, Berlin (1987).

[3] H. L. Royden. Real Analysis.(1968).

[4] A. Rényi. Representations of real Numbers and Their Ergodic Properties, Acta Math. Sci. Hung. 8, 477-493, (1957).

[5] F. Schweiger, Number Theorical Endomorphisms with $\sigma$- Finite invariant measure,Israel J. Math, Vol. 21, $N_0$4, 308 - 318, (1975)

[6] M. Thaler, Estimates of the invariant Densities of Endomorphisms with Indifferent Fixed points. Israel J. Math, Vol. 37, $N_0$4, 303 - 314, (1980).

[7] Elon Lages Lima. Curso de Análise, volume 1,Proyecto Euclides . Rio de Janeiro (2009).