

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL  
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología  
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“CICLOS HAMILTONIANOS EN GRAFOS 3-CONEXOS  
SIMPLES NO DIRIGIDOS LIBRES DE GARRA  
(HAMILTONIAN CYCLES IN 3 CONNECTED CLAW- FREE  
GRAPHS)”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. DANNYMAR GONZALEZ

COMO REQUISITO FINAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO

EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: MATEMÁTICA DISCRETA.

TUTOR: PROF. (MSc) JULIO CESAR YSACCURA CANCINES



Universidad Centroccidental  
 "Lisandro Alvarado"  
 Decanato de Ciencias y Tecnología  
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA  
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“CICLOS HAMILTONIANOS EN GRAFOS 3-CONEXOS SIMPLES NO DIRIGIDOS LIBRES DE GARRA (HAMILTONIAN CYCLES IN 3 CONNECTED CLAW- FREE GRAPHS)”

Presentado por la ciudadana BR. DANNYMAR GONZALEZ titular de la Cédula de Identidad N° 19.166.915. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

<sup>1</sup> \_\_\_\_\_

Con una calificación de \_\_\_\_\_ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los \_\_\_\_ días del mes de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_  
 TUTOR

\_\_\_\_\_  
 FIRMA

\_\_\_\_\_  
 PRINCIPAL

\_\_\_\_\_  
 FIRMA

\_\_\_\_\_  
 PRINCIPAL

\_\_\_\_\_  
 FIRMA

OBSERVACIONES:

---



---



---

<sup>1</sup> Aprobado ó Reprobado

*Dedicado a mis padres Danny y  
Marywalblanc, a mi hermano Danny  
Antonio y a mis abuelos blanca, Pilo y  
Florencia.*

# AGRADECIMIENTOS

A **DIOS** por permitirme un día entrar en esta carrera, cursarla, llenarme de paciencia, fuerza y voluntad para hoy en día poder culminarla.

A la **Divina Pastora** por todas sus bendiciones y por estar siempre a mi lado.

A mis **padres**, por apoyarme, por guiarme, por ser mi base para superarme, por sus consejos, por cuidarme en extremo, por insentivarme a seguir siempre adelante y por todos esos sacrificios que hicieron por mi para lograr me hacer una profesional. GRACIAS MARYWALBLANC y DANNY POR SER MIS PADRES.

A mi **hermano**, por ayudarme, apoyarme, por hacerme reír cuando me veía estresada, por inspirarme a terminar esta carrera y poder darle mi ejemplo. SI YO PUDE TU TAMBIÉN PUEDES.

A mis **abuelos** Pilo y Blanca, por sus bendiciones, por sus consejos, por sus atenciones, por cuidarme, por todas las noches que me acompañaron a estudiar hasta tarde, por todo eso y mas GRACIAS.

A mi **abuela** Florencia, por cuidarme desde el cielo y darme fuerzas.

A mis tías (Marizlania, Tere, Coro,), tios (Pedro, Antonio, Naudi, Mervis, Mauro), primas (Jenni, Meiber) y primos(Richard, Jhon) por sus consejos, por el apoyo brindado y por motivarme a luchar por lo que quiero.

A mis amigos y grupo de estudio (DATSY, GLENNI Y MARCOS), por compartir conmigo buenos y malos momentos, por acompañarme y levantarme el ánimo en una etapa de depresión y grandes problemas. Gracias por la mantequilla muchachos.

A los maquediche (Kissy, Fran, Jose, Emelyn, Javier), por su apoyo incondicional cada vez que los necesite y por todo lo que me hicieron reír con sus locuras. NO CAMBIEN.

A Javier Montes, por vivir conmigo mis problemas, mis tristezas, mis alegrías y por mostrarme que con DIOS todo se puede lograr.

A mis compañeros de carrera (Elvis, el Gocho, Betza, Aura, Cesar, Joan), por todas las experiencias vividas y las enseñanzas que me dejaron cada uno de ellos.

A Louis Perdomo, por esas palabras de aliento que me ayudaron a mantenerme constante y a no decaer.

A Diana, por apoyarme y ayudarme durante toda mi carrera.

A Juan Coronado por todos los favores que me hizo y por aconsejarme siempre para bien.

A mi tutor JULIO YSACCURA por ser mi guía en este trabajo de grado y por ayudarme a cumplir este deseo tan grande de ser licenciada en ciencias matemáticas.

A todos los profesores que me ayudaron y me enseñaron en estos años de carrera.

Y a todos aquellos que de una u otra forma colaboraron conmigo.

“CICLOS HAMILTONIANOS EN GRAFOS 3-CONEXOS  
SIMPLES NO DIRIGIDOS LIBRES DE GARRA  
(HAMILTONIAN CYCLES IN 3 CONNECTED CLAW- FREE  
GRAPHS)”

## RESUMEN

Analizaremos con detalle que todo grafo  $G$  3-conexo simple, no dirigido libre de garra con  $n$  vértices y  $\delta \geq (n + 5)/5$  es hamiltoniano.

Trabajo realizado por el Doctor Mingchu Li profesor del departamento de matemática y mecánica de la Universidad de Ciencia y Tecnología de Beijing de la Republica Nacional De China. y publicado en la revista Journal of Graph Theory. Volumen 17/ No.3, páginas 303-313, (1993 John Wiley Sons, inc).

**Palabras claves:** grafos 3-conexos, grafos libres de garra (claw free), grafos Hamiltonianos.

# NOTACIONES

$S$	subconjunto propio de $V(G)$
$H$	subgrafo de $G$
$G[S]$	grafo de $G$ inducido por $S$
$G - H$	grafo de $G$ inducido por $(V(G) - V(H))$
$N(x)$	conjunto de vertices para los cuales $x$ es adyacente
$\delta$	mínimo grado de un grafo $G$
$K$	subconjunto de $V(G)$ o subgrafo de $G$
$T$	subconjunto de $V(G)$ o subgrafo de $G$
$N_T(K)$	conjunto vertices en $T$ que son adyacentes a algún vértice en $K$
$d_T(K)$	$ N_T(K) $
$d_T(x)$	$ N(x) \cap T $
$C[x, y]$	conjunto de vértices de $x$ a $y$ en $C$ (incluyendo $x$ e $y$ )
$C(x, y)$	$C[x, y] - \{x, y\}$
$x^-$ y $x^+$	denotan el sucesor y el predecesor de $x$
$P[u, v]$	subcamino de un camino $P$

# ÍNDICE

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>Resumen</b>	<b>ii</b>
<b>Notaciones</b>	<b>iii</b>
<b>1. Preliminares.</b>	<b>3</b>
1.1. Teoría de Grafos . . . . .	3
1.2. Subgrafo y subgrafo inducido . . . . .	7
1.3. Camino y ciclo . . . . .	9
1.4. Grafos conexo . . . . .	10
1.5. Grafos hamiltonianos . . . . .	11
<b>2. Ciclos Hamiltonianos en grafos libres de garra</b>	<b>13</b>
2.1. Desarrollo de los lemas . . . . .	13
<b>3. Teorema principal</b>	<b>34</b>
3.1. Demostración del teorema . . . . .	34
<b>Referencias bibliográficas.</b>	<b>47</b>

# Índice de figuras

1.1. Representación de un grafo . . . . .	4
1.2. Orden y tamaño de un grafo . . . . .	4
1.3. Grado de un vértice . . . . .	5
1.4. G1 es isomorfo a G2 . . . . .	5
1.5. Grafos regulares . . . . .	6
1.6. Grafos completos $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ . . . . .	6
1.7. Subgrafo inducido . . . . .	7
1.8. Subgrafo no inducido . . . . .	7
1.9. Grafo bipartito . . . . .	8
1.10. Grafo bipartito completo $K_{2,3}$ . . . . .	8
1.11. Grafo $K_{1,3}$ . . . . .	9
1.12. Camino y ciclo . . . . .	10
1.13. Grafo desconexo . . . . .	10
1.14. Grafo Hamiltoniano . . . . .	11
1.15. Grafo no Hamiltoniano . . . . .	11
2.1. GRAFO 2-conexo . . . . .	13
2.2. Grafo libre de garra . . . . .	14
2.3. Grafo libre de garra . . . . .	14
2.4. Grafo libre de garra . . . . .	15
2.5. Grafo libre de garra . . . . .	15
2.6. Grafo libre de garra . . . . .	16
2.7. Grafo libre de garra . . . . .	16

---

2.8. CICLO C . . . . .	17
2.9. COMPONENTE H . . . . .	17
2.10. GRAFO 3-conexo . . . . .	18
2.11. CICLO C . . . . .	19
2.12. $G - C$ y componente H . . . . .	19
2.13. GRAFO G . . . . .	21
2.14. GRAFO $R = G - C$ . . . . .	22
2.15. GRAFO G . . . . .	23
2.16. representación de $C = (u_1, S_1, u_2, S_2, \dots, u_k, S_k)$ . . . . .	26
2.17. Representacion de $S_i = \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{it_i}\}$ . . . . .	27
3.1. Ciclo $c_1 c_2 \dots c_i^- c_i^+ \dots c_j^- c_j^+ \dots c_l^- c_l^+ \dots c_m c_1$ . . . . .	35
3.2. Grafo garra . . . . .	35
3.3. CICLO $C'$ . . . . .	38
3.4. CICLO $C_1$ . . . . .	40
3.5. Ciclo $C1 : (c_1 c_2 \dots c_k^- c_k^+ x c_k^+ \dots c_j \dots c_l \dots c_1)$ . . . . .	41
3.6. Ciclo $C2 : (c_1 c_2 \dots c_k^- c_k^+ y c_k^+ \dots c_j \dots c_l \dots c_1)$ . . . . .	41
3.7. Ciclo C . . . . .	41
3.8. Grafo $G[N_C(c_k^+) - \{c_k^-, c_k\}]$ . . . . .	41
3.9. Grafo 3-conexo . . . . .	46

# Introducción y antecedentes

Todo grafo finito no dirigido  $G$  es considerado claw-free si este no contiene una copia de un  $K_{1,3}$  grafo. Es decir, ningún subgrafo inducido de  $G$  es isomorfo al grafo bipartito completo Estrella o grafo garra  $K_{1,3}$ . Sean  $S$  un subconjunto propio de  $V(G)$  y  $H$  un subgrafo de  $G$ , denotaremos por  $G[S]$  y por  $G - H$  a los grafos de  $G$  inducido por  $S$  y  $(V(G) - V(H))$  respectivamente. Si  $N(x)$  y  $\delta$  para todo  $x$  en  $V(G)$  denotan al conjunto de vértices para los cuales  $x$  es adyacente (o conjunto vecindad de  $x$ ) y al mínimo grado de un grafo  $G$  respectivamente y además  $K$  y  $T$  son subconjuntos de  $V(G)$  o subgrafos de  $G$ ,  $N_T(K)$  representará al conjunto de vértices en  $T$  que son adyacentes a algún vértice en  $K$ , y  $d_T(K) = |N_T(K)|$  y  $d_T(x) = |N(x) \cap T|$ . Para un ciclo  $C$  en el cual definimos una orientación, y cualquier par de vértices  $x, y$  en  $C$ ,  $C[x, y]$  es el conjunto de vértices de  $x$  a  $y$  en  $C$  (incluyendo  $x$  e  $y$ ) cuando sigamos la orientación de  $C$ . Además  $C(x, y) = C[x, y] - \{x, y\}$  y  $x^-, x^+$  denotan el sucesor y el predecesor de  $x$  respectivamente de acuerdo a la orientación definida sobre  $C$ . Un subcamino de un camino  $P$  será denotado de la forma  $P[u, v]$  donde  $u, v$  son los vértices inicial y final del subcamino.  $P(u, v)$  es obtenido de  $P[u, v]$  por supresión de  $u$  y  $v$ .

Existen varios artículos referentes a la determinación de ciclos hamiltonianos en grafos libres de garra (claw-free graphs). M. M. Matthews and D. P. Summer demuestran en [6] que cada grafo 2-conexo libre de garra  $G$  con  $\delta \geq (n - 2)/3$  ( $n = |V(G)|$ ) es hamiltoniano. Li Mingchu prueba en [4] que cada grafo 2-conexo  $k$ -regular libre de garra con a lo sumo  $5k$  vértices es hamiltoniano. Así mismo Liu y Li muestran en [5] que cada grafo 3-conexo  $k$ -regular libre de garra con a lo sumo

---

$5k-5$  vértices es hamiltoniano. Y en el caso de grafos no  $k$ -regulares, el resultado mas conocido proviene del artículo [8]: "Hamiltonian cycles in claw-free graphs" realizado por C. Q. Zhang, en el mismo  $\delta \geq (n-3)/4$  ( $n = |V(G)|$ ).

El propósito central de este trabajo esta en mostrar que la condición de regularidad del artículo desarrollado por Liu Zhenhong and Li Mingchu en [5] titulado "Longest cycles in 3-connected claw-free graphs" puede ser mejorada y extendendida a los resultados logrados en [8] y [6].

Nuestro trabajo consta de tres capítulos:

- En el primer capítulo, indicamos todas y cada una de las definiciones necesarias para entender y desarrollar nuestro cometido.
- En el segundo capítulo, mostramos detalladamente la validez de los lemas utilizados en el desarrollo del teorema principal así como algunos ejemplos.
- Y por ultimo en el tercer capítulo tenemos el desarrollo del teorema principal.

Todos los grafos considerados en este trabajo son no dirigidos, finitos, sin lazos y sin multiples lados (o lados paralelos).

# Capítulo 1

## Preliminares.

### §1.1. Teoría de Grafos

**Definición 1.1.** Un grafo no dirigido es una estructura denotada por  $G := [V, E]$  formada por los siguientes conjuntos:  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  a los que llamaremos vértices (puntos o nodos) del grafo  $G$ , cuya notación sera  $V(G)$ , ( $V(G) \neq \emptyset$ ), y  $E = \{a_1, \dots, a_m\}$  conjunto de pares no ordenados con  $a_i = \{v_k, v_j\}$  llamados aristas o lados del grafo  $G$  para algún  $k, j \in \{1, \dots, n\}$  e  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

**Observación 1.1.** Otra notación usual para los lados  $a_i$  es  $a_i = v_k v_j$  donde  $v_k$  y  $v_j$  son los extremos del lado, siempre que exista un único  $a_i$  entre los vértices.

**Definición 1.2.** Si  $e = x_i x_j$  representa un lado de un grafo  $G$ , diremos que  $x_i, x_j$  son adyacentes y que el lado "e" incide en sus vértices extremos. En caso de que  $i=j$  el lado  $e$  es un bucle o lazo.

**Definición 1.3.** El orden de un grafo  $G := [V, E]$  denotado por  $|V|$  no es mas que el número de vértices del grafo; en forma análoga la dimensión o tamaño de  $G$  es el número de lados del grafo  $G$  denotado por  $|E|$ .

**Ejemplo 1.1.** La figura 1.1 representa un grafo  $G$ , donde  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ .

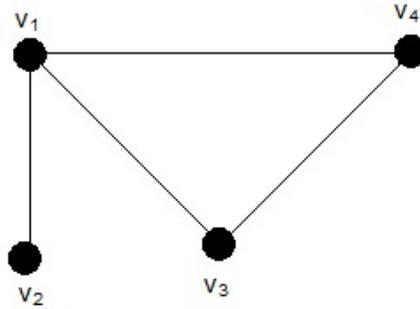


FIGURA 1.1: REPRESENTACIÓN DE UN GRAFO

**Ejemplo 1.2.** En la figura 1.2, el orden del grafo  $G$  es  $|V|=5$  y el tamaño de  $G$  es  $|E|=7$ .

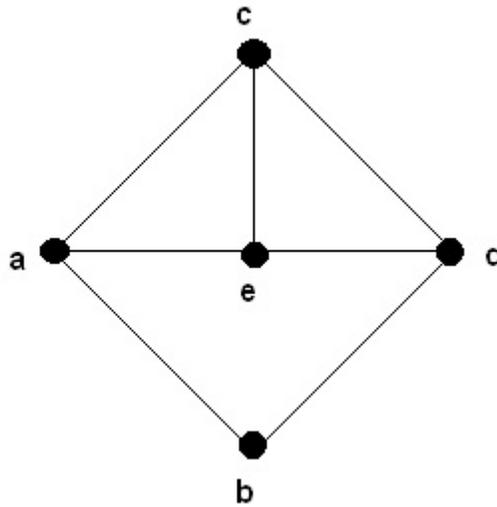


FIGURA 1.2: ORDEN Y TAMAÑO DE UN GRAFO

**Definición 1.4.** Los lados paralelos en un grafo  $G$  son dos o más lados que tienen los mismos vértices extremos.

**Definición 1.5.** Un grafo simple es un grafo sin lazos ni lados paralelos. O si a lo más existe un lado entre dos vértices cualesquiera.

**Ejemplo 1.3.** La figura 1.2 representa un grafo simple.

**Definición 1.6.** Sea  $G := [V, E]$  un grafo, se define grado de un vértice  $x$ , denotado por  $d_G(x)$  con  $x \in V(G)$  al número de lados de  $G$  incidentes a  $x$ .

**Ejemplo 1.4.** En la siguiente figura, los grados de los vértices  $a$  y  $c$  son:  $d_G(a) = 2$ ,  $d_G(c) = 3$ .

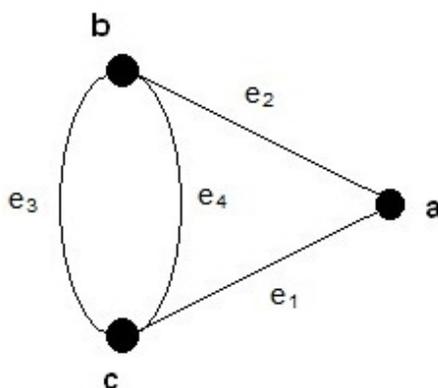


FIGURA 1.3: GRADO DE UN VÉRTICE

**Definición 1.7.** Dos grafos  $G_1 := [V_1, E_1]$  y  $G_2 := [V_2, E_2]$  no dirigidos son isomorfos si hay una función  $f: V_1 \rightarrow V_2$  biyectiva con la propiedad de que para cada par de vértices  $a, b \in V_1$ ,  $a$  y  $b$  son adyacentes en  $G_1$  si y solo si  $f(a), f(b)$  son adyacentes en  $G_2$ .

**Ejemplo 1.5.**

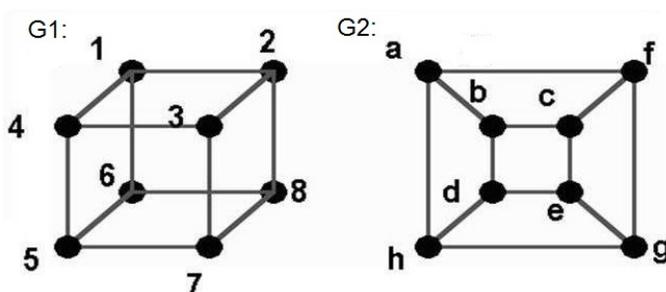


FIGURA 1.4: G1 ES ISOMORFO A G2

Al construir una función  $f$  la cual sea un isomorfismo de  $G$  y  $H$ . Una posible función  $f$  es la siguiente:

i	f(i)
1	a
2	f
3	g
4	h
5	d
6	b
7	e
8	c

**Definición 1.8.** Un grafo  $G := [V, E]$  se dice que es  $k$ -regular si todos sus vértices poseen grado  $k$ .

**Ejemplo 1.6.** En los siguientes grafos tenemos que (a) es un 3-regular y (b) no es un grafo regular.

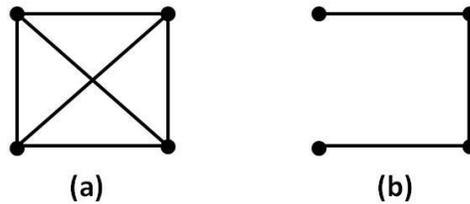


FIGURA 1.5: GRAFOS REGULARES

**Definición 1.9.** Sea  $G := [V, E]$  un grafo de orden  $n$  ( $|V(G)| = n$ ), diremos que es completo si y sólo si es simple y  $(n-1)$  regular. Los grafos completos son denotados por  $K_n$  donde  $n$  es el número de vértices y su dimension es  $n(n-1)/2$ .

**Ejemplo 1.7.** En el siguiente ejemplo muestran los grafos completos de orden 1 al 5.

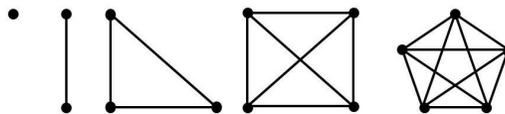


FIGURA 1.6: GRAFOS COMPLETOS  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$

## §1.2. Subgrafo y subgrafo inducido

**Definición 1.10.** Dado un grafo  $G := [V, E]$ . Diremos que el grafo  $H := [V, E]$  es un subgrafo de  $G$  si:  $V(H) \subset V(G)$  y  $E(H) \subset E(G)$ .

**Definición 1.11.** Sea  $G := [V, E]$  un grafo y  $H := [U, E(G)]$  un subgrafo de  $G$ . Diremos que  $H$  es inducido si todo lado de  $G$  con extremos en  $U$ , esta en  $H$ . Denotado por  $G[U]$ .

**Ejemplo 1.8.** En la figura 1.7, sean  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $U = \{v_1, v_2, v_4\}$  subconjuntos de  $V$ . El segundo grafo  $G[U]$  es un subgrafo del primer grafo  $G$ . Además,  $G[U]$  es el subgrafo de  $G$  inducido por  $U$ .

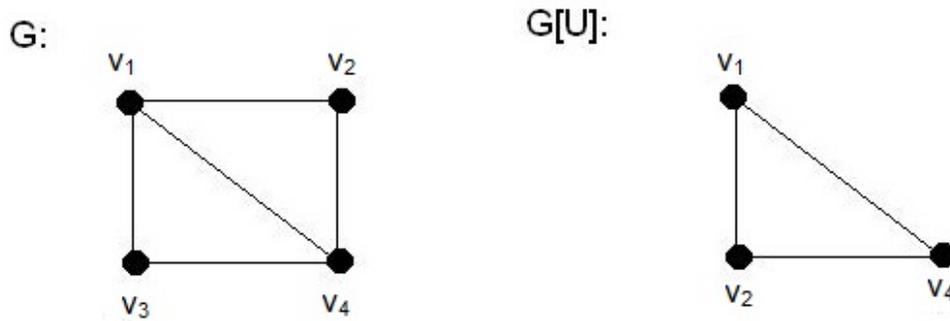


FIGURA 1.7: SUBGRAFO INDUCIDO

**Ejemplo 1.9.** En la figura 1.8 el segundo grafo  $G'$  es un subgrafo de  $G$ , pero no inducido.

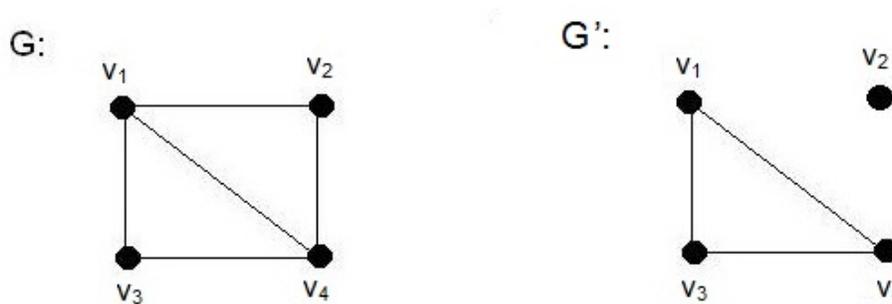


FIGURA 1.8: SUBGRAFO NO INDUCIDO

**Definición 1.12.** Un grafo  $G := [V, A]$  es bipartito si puede expresarse como  $G := \{V_1 \cup V_2, A\}$  donde  $V_1 \cup V_2$  es una partición de  $V$ , bajo las siguientes condiciones:

- Cada arista de  $A$  une un vértice de  $V_1$  con uno de  $V_2$ .
- No existen vértices adyacentes ni en  $V_1$  ni en  $V_2$

**Definición 1.13.** Un grafo  $G := \{V_1 \cup V_2, E\}$  es bipartito completo con  $|V_1|=m$  y  $|V_2|=n$ , denotado por  $K_{m,n}$  si y sólo si es bipartito y cada vértice de  $V_1$  es adyacente a todo vértice en  $V_2$  y viceversa.

**Ejemplo 1.10.** Sea  $G := [V, E]$  un grafo con  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ ,  $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$  y  $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ . (ver figura 1.9).

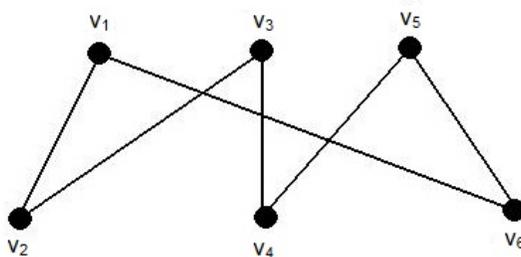


FIGURA 1.9: GRAFO BIPARTITO

**Ejemplo 1.11.** Sea  $G := [V, E]$  un grafo y sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $V(G)$  tal que  $A = \{a_1, a_2\}$  y  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ .  $|A|=2$  y  $|B|=3$  (ver figura 1.10).

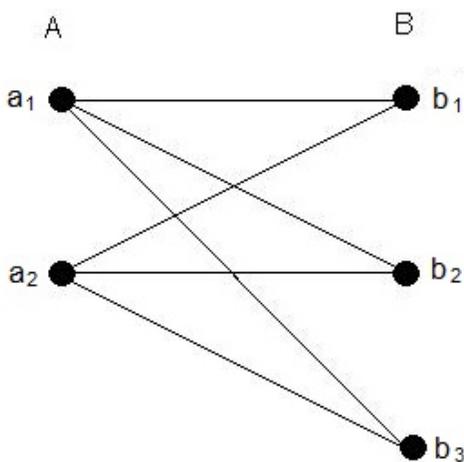


FIGURA 1.10: GRAFO BIPARTITO COMPLETO  $K_{2,3}$

**Observación 1.2.** El grafo bipartito completo  $K_{1,3}$  es conocido como un grafo garra o estrella.

**Ejemplo 1.12.** En la siguiente figura vemos un grafo estrella.

$K_{1,3}$ :

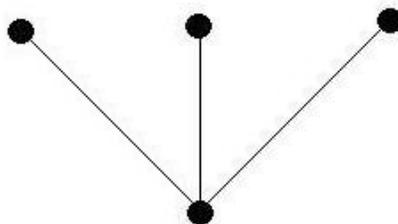


FIGURA 1.11: GRAFO  $K_{1,3}$

### §1.3. Camino y ciclo

**Definición 1.14.** En un grafo  $G$  un camino es una sucesión finita de vértices y aristas alternos,  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ , donde  $v_0$  y  $v_n$  son los vértices extremos del camino, además  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$  para  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ . En caso de que  $G$  sea simple el camino es denotado  $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . La longitud de un camino es el número de lados que hay en el camino.

**Observación 1.3.** Si todos los lados y vértices del camino son distintos diremos que el camino simple es elemental, y en caso de que el vértice final e inicial coincidan ( $v_0 = v_n$ ), dicho camino simple es conocido como ciclo.

**Ejemplo 1.13.** En la figura 1.11 algunos caminos del grafo  $G$  son:  $P: x_1x_2x_3x_4x_5$ ,  $R: x_1x_4x_5x_3$  y  $S: x_3x_1x_2x_5$ . Estos caminos son simples, la longitud de  $P$  es 4, la longitud de  $R$  y  $S$  es 3. Un ciclo en  $G$  es  $C: x_1x_2x_3x_5x_4x_1$ .

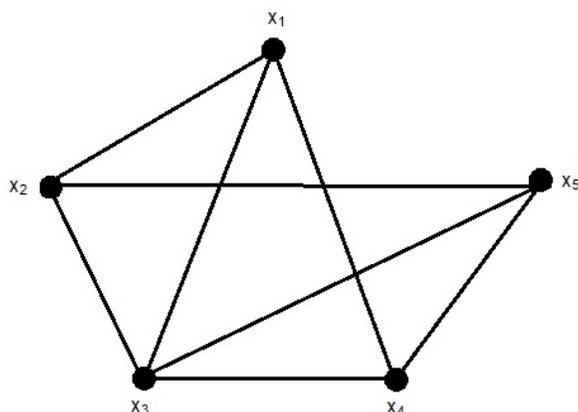


FIGURA 1.12: CAMINO Y CICLO

### §1.4. Grafos conexo

**Definición 1.15.** Un grafo  $G := [V, E]$  es conexo, o si  $|V|=1$  ó para dos vértices cualesquiera  $u$  y  $v$  en  $V(G)$ , siempre es posible determinar un camino entre ellos.

**Ejemplo 1.14.** La figura 1.1 representa un grafo conexo.

**Definición 1.16.** Un grafo  $G := [V, E]$  no dirigido es  $K$ -conexo si para cada par de vértices  $u, v$  en  $V(G)$ , podemos determinar por lo menos  $K$  caminos disjuntos respecto a los lados entre ellos. Es decir, los caminos no poseen ningún lado en común.

**Ejemplo 1.15.** El grafo  $K_4$  del ejemplo 1.7 es 3-conexo.

**Definición 1.17.** Una componente conexa de un grafo  $G$  es un subgrafo conexo que no esta propiamente contenido en ningún otro subgrafo conexo de  $G$ .

El grafo de la figura 1.12 tiene cuatro componentes conexas.

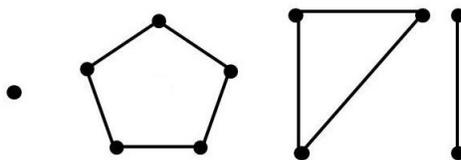


FIGURA 1.13: GRAFO DISCONEXO

## §1.5. Grafos hamiltonianos

**Definición 1.18.** Sea  $G$  un grafo. Un camino simple en  $G$  que contiene todos los vértices de  $G$  y no repite vértices es un camino hamiltoniano. Un ciclo hamiltoniano es un camino hamiltoniano que inicia y finaliza en el mismo vértice.

**Definición 1.19.** Sea  $G$  un grafo conexo, diremos que es un grafo hamiltoniano si este posee un ciclo hamiltoniano.

**Ejemplo 1.16.** En la figura 1.13 podemos encontrar un ciclo  $C := (x_1x_2x_3x_4x_5x_1)$  el cual es hamiltoniano, por lo tanto el grafo  $G$  también lo es. Mientras que la figura 1.14 muestra un grafo  $G'$  que no es Hamiltoniano ya que no posee ningún ciclo hamiltoniano.

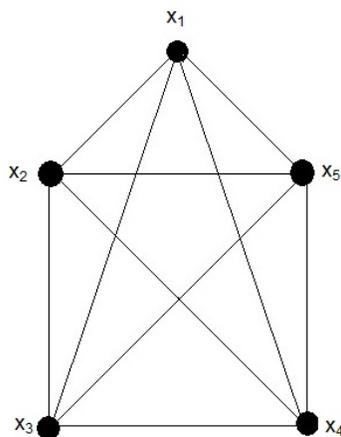


FIGURA 1.14: GRAFO HAMILTONIANO

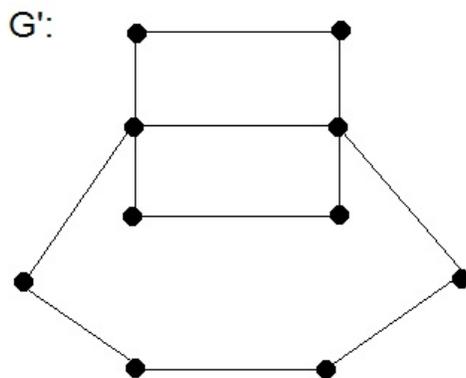


FIGURA 1.15: GRAFO NO HAMILTONIANO

**Observación 1.4.** Observe que un ciclo hamiltoniano debe contener todos los vértices, pero no necesariamente todas las aristas. Si  $n \geq 3$  el grafo completo  $K_n$  es hamiltoniano.

**Definición 1.20.** Un grafo  $G$  se dice que es hamiltoniano conectado si para cualquier par de vértices  $x, y$  en  $V(G)$  existe un camino hamiltoniano que los conecte.

**Ejemplo 1.17.** En la figura 1.13 el grafo  $G$  es Hamiltoniano conectado ya que es un  $K_5$ .

# Capítulo 2

## Ciclos Hamiltonianos en grafos libres de garra

### §2.1. Desarrollo de los lemas

**Lema 2.1.** [5] Sea  $C$  el ciclo de mayor longitud en un grafo  $m$ -conexo libre de garra  $G$ , y  $H$  una componente de  $G-C$ , donde  $m \geq 2$  y  $|V(H)| \geq 3$ . Si  $H$  es hamiltoniana conectada, entonces existe algún vértice  $v$  en  $H$  y un  $s$  entero tal que:

$$|V(C)| \geq s(d_G(v) - s + 4) + (m - s)(|V(H)| - s + 3), \quad (2.1)$$

donde  $0 \leq s \leq |V(H)| + 3$ .

**Ejemplo 2.1.** Consideremos el siguiente grafo  $G$ , 2-conexo

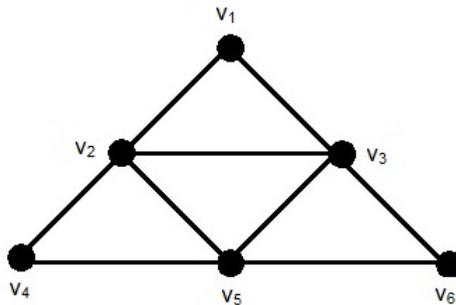


FIGURA 2.1: GRAFO 2-CONEXO

Veamos que  $G$  es un grafo libre de garra.

Sabemos que  $v_1$ ,  $v_4$  y  $v_6$  no pueden generar una garra ya que tienen grado 2. Veamos que  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_5$  tampoco generan una garra como subgrafo inducido.

Para  $v_2$  son adyacentes los vértices,  $v_1$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_5$ . Las posibles combinaciones de cuatro elementos con  $v_2$  son:  $\{v_2, v_1, v_3, v_4\}$ ,  $\{v_2, v_1, v_3, v_5\}$ ,  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . Veamos que esas combinaciones no generan una garra como subgrafo inducido.

- Con  $\{v_2, v_1, v_3, v_4\}$

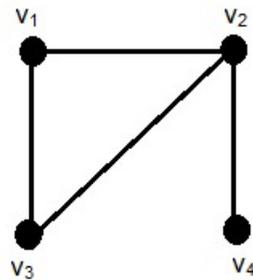


FIGURA 2.2: GRAFO LIBRE DE GARRA

- Con  $\{v_2, v_1, v_3, v_5\}$

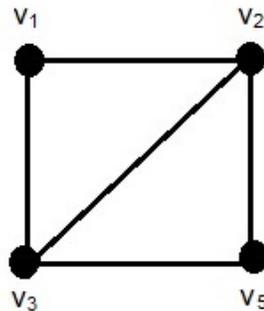


FIGURA 2.3: GRAFO LIBRE DE GARRA

- Con  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$

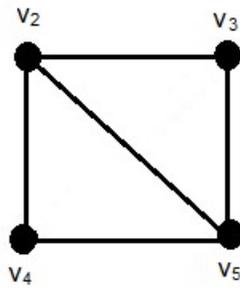


FIGURA 2.4: GRAFO LIBRE DE GARRA

Para  $v_3$  son adyacentes los vértices  $v_1, v_2, v_5, v_6$ . Las posibles combinaciones de cuatro elementos con  $v_3$  son:  $\{v_3, v_1, v_2, v_5\}$ ,  $\{v_3, v_1, v_2, v_6\}$ ,  $\{v_3, v_2, v_5, v_6\}$ . Veamos que estas combinaciones no generan una garra como subgrafo inducido.

- Con  $\{v_3, v_1, v_2, v_5\}$  tenemos la misma figura de  $\{v_2, v_1, v_3, v_5\}$ .
- Con  $\{v_3, v_1, v_2, v_6\}$

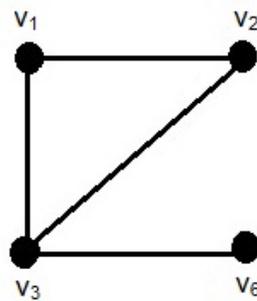


FIGURA 2.5: GRAFO LIBRE DE GARRA

- Con  $\{v_3, v_2, v_5, v_6\}$

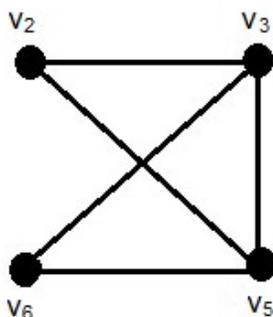


FIGURA 2.6: GRAFO LIBRE DE GARRA

Para  $v_5$  son adyacentes los vértices  $v_2, v_3, v_4, v_6$ . Las posibles combinaciones de 4 elementos con  $v_5$  son:  $\{v_5, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $\{v_5, v_2, v_3, v_6\}$ ,  $\{v_5, v_3, v_4, v_6\}$ . Veamos que estas combinaciones no generan una garra como subgrafo inducido.

- Con  $\{v_5, v_2, v_3, v_4\}$  tenemos la misma figura de  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ .
- Con  $\{v_5, v_2, v_3, v_6\}$  tenemos la misma figura de  $\{v_3, v_2, v_5, v_6\}$ .
- Con  $\{v_5, v_3, v_4, v_6\}$

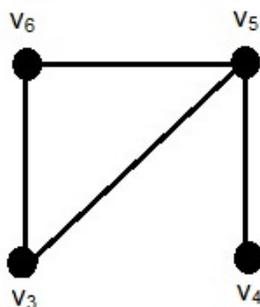


FIGURA 2.7: GRAFO LIBRE DE GARRA

Sea  $C: v_1v_2v_4v_5v_6v_3v_1$  el ciclo de mayor longitud que se encuentra de color rojo en el grafo  $G$  de la siguiente figura,  $|V(C)|=6$ .

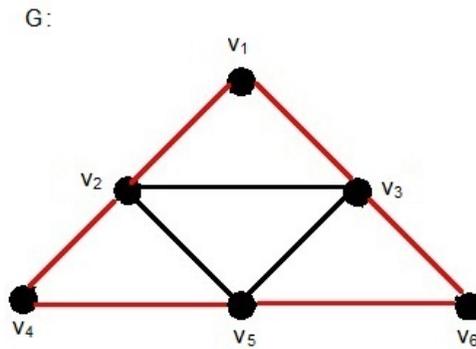


FIGURA 2.8: CICLO C

Sea H la única componente de  $G - C$  donde  $|V(H)| = 3$  y H es hamiltoniana conectada.

H:

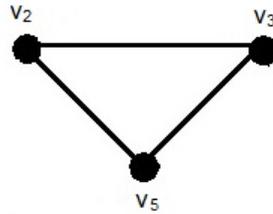


FIGURA 2.9: COMPONENTE H

Veamos ahora que existe algún vértice  $v \in H$  tal que:

$$|V(C)| \geq s(d(v) - s + 4) + (m - s)(|V(H)| - s + 3), \quad (2.2)$$

donde  $0 \leq s \leq |V(H)| + 3$ .

Como H es un grafo 2-regular entonces para cualquier vértice  $v \in H$ ,  $d(v) = 2$ ,  $m = 2$ . Tomemos  $v_2 = v$ .

Así,

$$\begin{aligned}
|V(C)| &\geq s(d(v) - s + 4) + (m - s)(|V(H)| - s + 3) \\
\Rightarrow 6 &\geq s(2 - s + 4) + (2 - s)(3 - s + 3) \\
\Rightarrow 6 &\geq s(6 - s) + (2 - s)(6 - s) \\
\Rightarrow 6 &\geq (6 - s)(s + 2 - s) \\
\Rightarrow 6 &\geq (6 - s)2 \\
\Rightarrow 3 &\geq 6 - s \\
\Rightarrow s &\geq 3 \text{ (I)}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
0 &\leq s \leq |V(H)| + 3 \\
\Rightarrow 0 &\leq s \leq 3 + 3 \\
\Rightarrow 0 &\leq s \leq 6 \text{ (II)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto de (I) y (II) tenemos que para  $3 \leq s \leq 6$  se cumple la desigualdad (2.2). ■

**Ejemplo 2.2.** Consideremos el siguiente grafo  $G$ , 3-conexo libre de garra

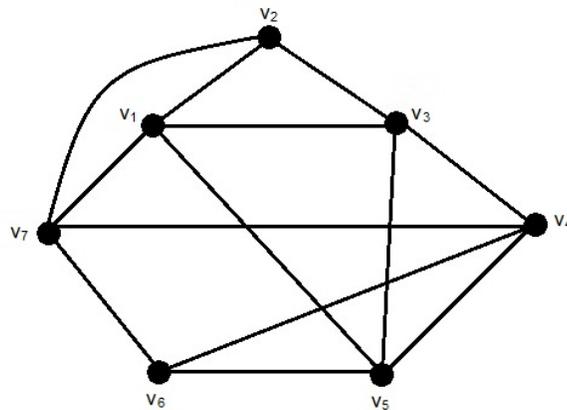


FIGURA 2.10: GRAFO 3-CONEXO

Sea  $C: v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7$  el ciclo de mayor longitud en  $G$  que se encuentra de color rojo en la siguiente figura, donde  $|V(C)|=7$ .

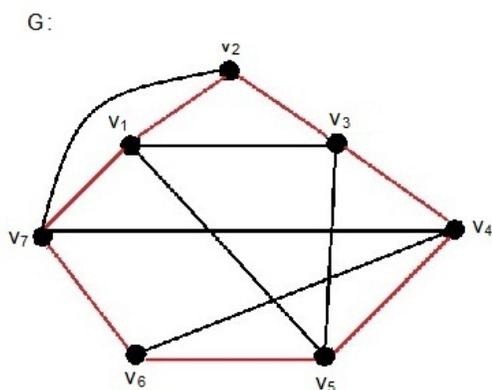


FIGURA 2.11: CICLO C

Tengamos también a \$G-C\$ y a \$H\$ una componente de \$G - C\$ donde \$|V(H)| = 3\$ y \$H\$ es hamiltoniana conectada.

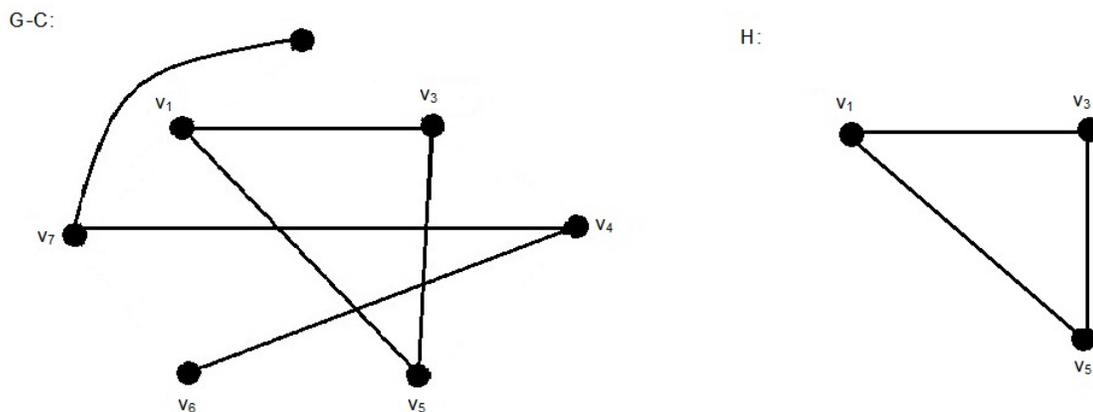


FIGURA 2.12: \$G - C\$ Y COMPONENTE H

Veamos entonces que existe algún vértice \$v \in H\$ tal que

$$|V(C)| \geq s(d(v) - s + 4) + (m - s)(|V(H)| - s + 3), \tag{2.3}$$

donde \$0 \leq s \leq |V(H)| + 3\$.

Como \$H\$ es un grafo 2-regular entonces para cualquier vértice \$v \in H\$, \$d(v) = 2\$. Tomemos \$v\_3 = v\$.

Así:

$$\begin{aligned}
|V(C)| &\geq s(d(v) - s + 4) + (m - s)(|V(H)| - s + 3) \\
\Rightarrow 7 &\geq s(2 - s + 4) + (3 - s)(3 - s + 3) \\
\Rightarrow 7 &\geq s(6 - s) + (3 - s)(6 - s) \\
\Rightarrow 7 &\geq 6s - s^2 + 18 - 3s - 6s + s^2 \\
\Rightarrow 7 &\geq 18 - 3s \\
\Rightarrow 3s &\geq 18 - 7 \\
\Rightarrow 3s &\geq 11 \\
\Rightarrow s &\geq 11/3 \approx 4 \text{ (III)}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
0 \leq s &\leq |V(H)| + 3 \\
\Rightarrow 0 \leq s &\leq 3 + 3 \\
\Rightarrow 0 \leq s &\leq 6 \text{ (IV)}
\end{aligned}$$

Así de (III) y (IV) tenemos que para  $4 \leq s \leq 6$  se cumple la desigualdad (2.3) . ■

**Lema 2.2.** [5] Sea  $C$  el ciclo de mayor longitud en un grafo  $G$  libre de garra y  $R = G - C$  distinto de cero. Si hay un camino  $P$  de orden  $s$  en  $R$  tal que el vértice final  $e$  inicial,  $a$  y  $b$  de  $P$  están unidos a los vértices  $c_i$  y  $c_j$  en  $C$  respectivamente ( $i < j$ ) entonces:

- a)  $c_i^+ c_i^-, c_j^+ c_j^- \in E(G)$ ;
- b)  $c_i^+, c_i^- \notin N(c_j)$  y  $c_j^+, c_j^- \notin N(c_i)$ ;
- c)  $|C(c_i, c_j)| \geq s + 2$ ;
- d) Si  $c_i c_t, c_j c_g \in E(G)$  con  $i < g < j, i < t < j$  y  $g \neq t$ , entonces  $|g - t - 1| \geq s$ ;
- e) Si  $c_t c_g \in E(G)$  con  $i < t < j > g$ , entonces  $j - t + |C(c_g, c_i)| \geq s$ .

**Observación 2.1.** En el item e) del lema del paper aparece la expresión  $t-i+g-j-4 \geq h$  pero esta no aparece en el lema de otros paper investigado (Hamiltonian cycles in

regular 2-connected Claw-free graphs, Li Ming-chu) y no se utiliza para demostrar ningún cometido de nuestro paper, mas aun, consideramos que hay un error, en ves de  $-j$  debe ser  $+j$ , hecho que nos llevo a investigar el lema en otros paper.

**Ejemplo 2.3.** En la figura 2.13 tenemos un grafo  $G:[V, E]$  con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$  y  $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_9, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_9, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_4v_7, v_4v_8, v_5v_6, v_5v_7, v_5v_9, v_6v_7, v_6v_8, v_6v_9, v_7v_8, v_8v_9\}$  el cual es fácilmente demostrable que es libre de garra.

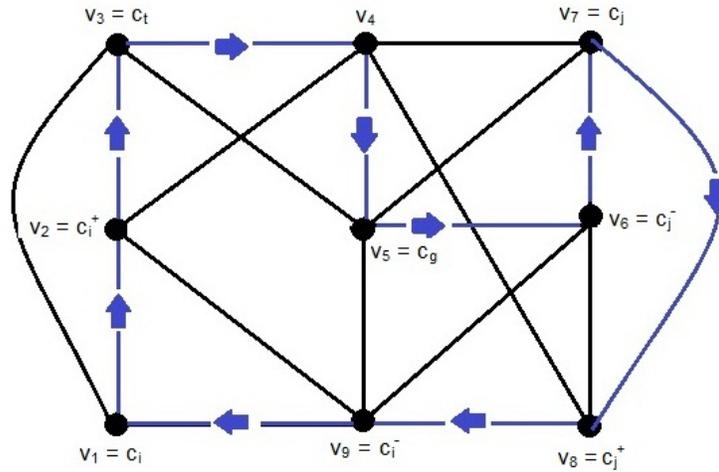
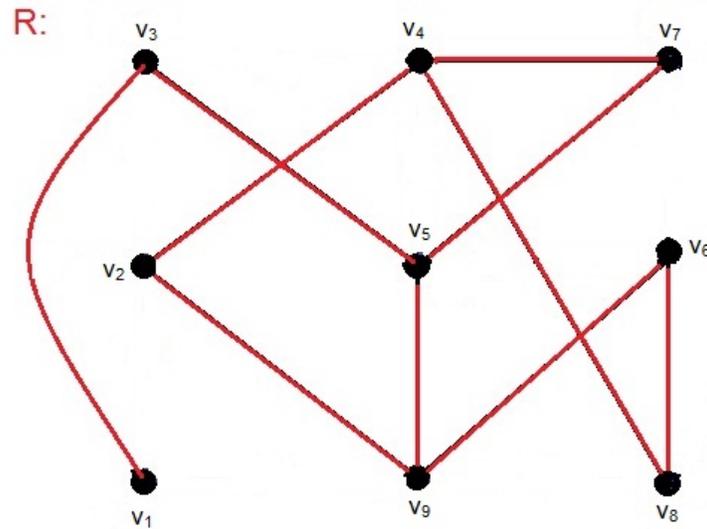


FIGURA 2.13: GRAFO G

Datos de la figura 2.13:

- $C:v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_1$  es el ciclo de mayor longitud en  $G$  con una orientación indicada.
- $R = G - C$ .
- $c_i = v_1, c_i^+ = v_2, c_i^- = v_9, c_t = v_3$ .
- $c_j = v_7, c_j^+ = v_8, c_j^- = v_6, c_g = v_5$ .
- $|C(c_i, c_j)| = |C(v_1, v_7)|=5$ .
- $N(c_j = v_7) = \{v_4, v_5, v_6, v_8\}$ .

- $N(c_i = v_1) = \{v_2, v_3, v_9\}$ .
- $|C(c_g, c_i)| = |C(v_5, v_1)| = 4$ .

FIGURA 2.14: GRAFO  $R = G - C$ 

Datos de la figura 2.14:

P:  $v_2v_9v_6$  es un camino en R donde  $a = v_2$  y  $b = v_6$ . Por lo tanto  $|P| = s = 3$ .

Ahora de los datos obtenidos por las figuras 2.11 y 2.12 vemos que se cumple lo siguiente:

- a)  $c_i^+ c_i^- = v_2 v_9$  y  $c_j^+ c_j^- = v_8 v_6 \in E(G)$ .
- b)  $c_i^+ = v_2, c_i^- = v_9 \notin N(c_j = v_7)$  y  $c_j^+ = v_8, c_j^- = v_6 \notin N(c_i = v_1)$ .
- c)  $|C(c_i, c_j)| \geq h + 2$  (sustituyendo los datos).
- d)  $c_i c_t = v_1 v_3, c_j c_g = v_7 v_5 \in E(G)$  con  $i < g < j, i < t < j$  y  $g \neq t$ , ( $i = 1, j = 7, t = 3, g = 5$ ) entonces  $|g - t - 1| \geq h$  (sustituyendo los datos).
- e)  $c_t c_g = v_3 v_5 \in E(G)$  con  $i < t < j > g$ , entonces  $j - t + |C(c_g, c_i)| \geq h$  (sustituyendo los datos). ■

**Lema 2.3.** [3] Sea  $G$  un grafo conexo. Si cada camino mas largo  $P: v_i \dots v_r$  en  $G$  tiene la propiedad de que la suma de los grados de sus vértices finales es al menos  $|V(P)| + 1$ ,  $((d_P(v_i) + d_P(v_r)) \geq |V(P)| + 1)$ , entonces  $G$  es hamiltoniano conectado.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $G : [V, E]$  un grafo con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

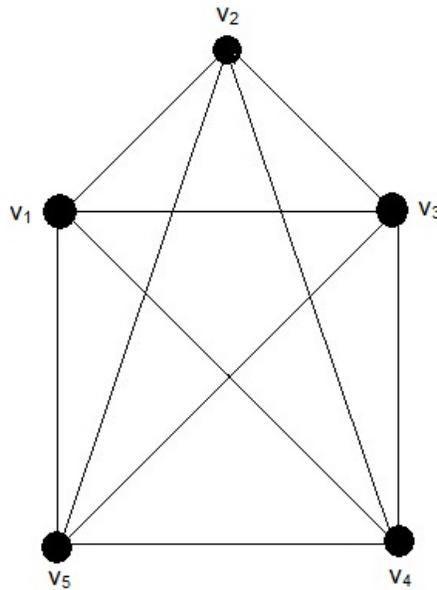


FIGURA 2.15: GRAFO  $G$

En este grafo los caminos mas largos tienen longitud 4. Algunos de esos caminos son:

Partiendo de  $v_1$ :

- $P_1: v_1 v_5 v_4 v_3 v_2$ .
- $P_2: v_1 v_2 v_5 v_4 v_3$ .
- $P_3: v_1 v_5 v_2 v_3 v_4$ .
- $P_4: v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ .

---

Partiendo de  $v_2$ :

- $P_5: v_2v_4v_3v_5v_1.$
- $P_6: v_2v_1v_4v_5v_3.$
- $P_7: v_2v_1v_5v_3v_4.$
- $P_8: v_2v_3v_1v_4v_5.$

Partiendo de  $v_3$ :

- $P_9: v_3v_5v_2v_4v_1.$
- $P_{10}: v_3v_4v_5v_1v_2.$
- $P_{11}: v_3v_2v_1v_5v_4.$
- $P_{12}: v_3v_4v_2v_1v_5.$

Partiendo de  $v_4$ :

- $P_{13}: v_4v_5v_2v_3v_1.$
- $P_{14}: v_4v_1v_3v_5v_2.$
- $P_{15}: v_4v_5v_1v_2v_3.$
- $P_{16}: v_4v_3v_1v_2v_5.$

Partiendo de  $v_5$ :

- $P_{17}: v_5v_4v_3v_2v_1.$
- $P_{18}: v_5v_1v_3v_4v_2.$
- $P_{19}: v_5v_4v_1v_2v_3.$
- $P_{20}: v_5v_1v_3v_2v_4.$

**Observación 2.2.** Todos los caminos son de orden 5; es decir  $|V(P)|=5$ .

Veamos que estos caminos cumplen con la hipótesis del lema.

$P_1$ :  $v_1v_5v_4v_3v_2$ , acá  $d_G(v_1)=4$  y  $d_G(v_2)=4$ , así  $d_G(v_1) + d_G(v_2)=8 \geq |V(P)| + 1=6$ .

$P_2$ :  $v_1v_2v_5v_4v_3$ , acá  $d_G(v_1)=4$  y  $d_G(v_3)=4$ , así  $d_G(v_1) + d_G(v_3)=8 \geq |V(P)| + 1=6$ .

$P_3$ :  $v_1v_5v_2v_3v_4$ , acá  $d_G(v_1)=4$  y  $d_G(v_4)=4$ , así  $d_G(v_1) + d_G(v_4)=8 \geq |V(P)| + 1=6$ .

.

.

.

y así sucesivamente, como el grafo es un  $K_5$  todos los vértices tienen grado 4 y como  $|V(P)|=5$  para todos los caminos, entonces es fácil ver que se cumple la hipótesis del lema.

Luego por lo anterior calculado vemos que para cualquier par de vértices  $v_i, v_j \in G$  existe un camino hamiltoniano.

Por lo tanto  $G$  es hamiltoniano conectado. ■

**Lema 2.4.** Sea  $G$  un grafo 3-conexo no hamiltoniano libre de garra de orden  $n \geq (n+5)/5$ ,  $C$  es el ciclo de mayor longitud junto con una orientación seleccionada y  $H$  una componente de  $G - C$  donde  $|V(H)| \geq 3$ . Si la componente  $H$  de  $G - C$  no es hamiltoniana conectada entonces  $|V(C)| \geq 4\delta - 5$ .

**Demostración.** En [2], H. A. Jung probó que un grafo 3-conexo no hamiltoniano que posee una componente no hamiltoniana conectada, contiene un ciclo  $C$  de longitud al menos  $4\delta - 5$ . Es decir,  $|E(C)| \geq 4\delta - 5$ . En consecuencia, por ser  $C$  un ciclo, el número de lados del ciclo coincide con el número de vértices.

Por lo tanto  $|V(C)| \geq 4\delta - 5$ . ■

**Lema 2.5.** Sea  $G$  un grafo 3-conexo no hamiltoniano libre de garra de orden  $n \geq (n+5)/5$ ,  $C$  es el ciclo de mayor longitud junto con una orientación seleccionada y  $H$  una componente de  $G - C$  donde  $|V(H)| \geq 3$ .  $G - C$  no contiene ningún vértice aislado.

**Demostración.** Sea  $v$  un vértice aislado en  $G - C$ , por lo tanto  $G - C \neq \emptyset$  y  $N_c(v) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  (donde  $k = d(v) \geq \delta$ , pues  $\delta$  es el mínimo grado posible en  $G$ ) tal que  $C$  se divide en  $k$  segmentos  $S_i = C(u_i, u_{i+1})$  ( $i=1, \dots, k-1$ ) y  $S_k = C(u_k, u_1)$ .

Sea  $C = (u_1, S_1, u_2, S_2, \dots, u_k, S_k)$  y  $S_i = \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{it_i}\}$ . Todo lo antes descrito nos asegura, primeramente la escogencia de una orientación sobre  $C$ , así como que las hipótesis del lema 2.2 se cumplen. Ver la siguiente figura.

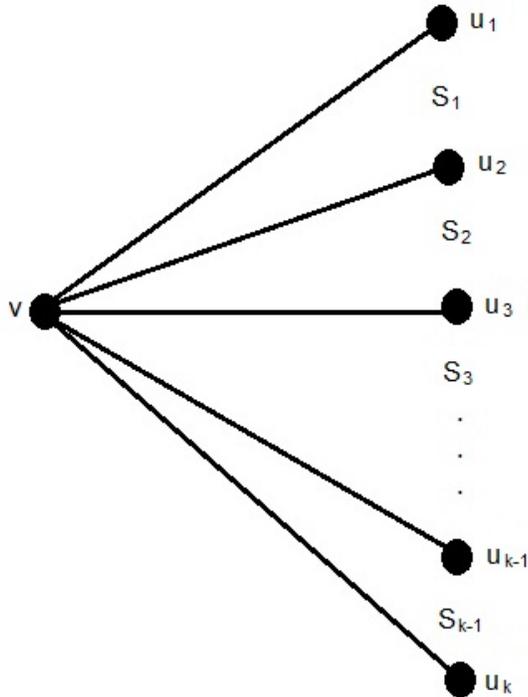
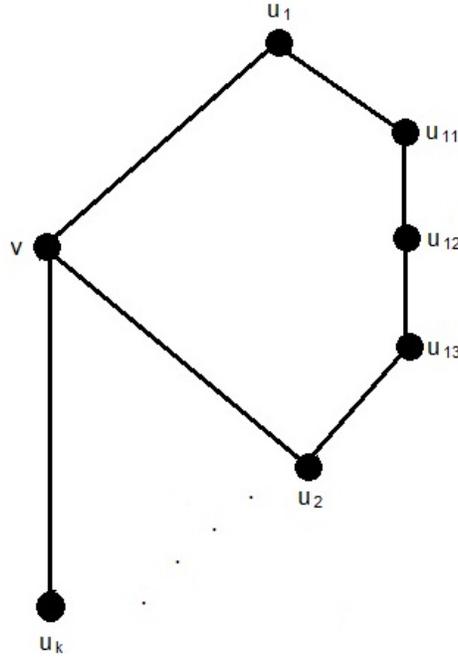


FIGURA 2.16: REPRESENTACIÓN DE  $C = (u_1, S_1, u_2, S_2, \dots, u_k, S_k)$

Como  $v$  está aislado (isolated vertex) en  $G - C$ , el camino  $P$  es de orden  $h=1$ . Por tanto, por el lema 2.2 ítem (c):  $|C(c_i, c_j)| \geq h+2=3$ , para todo  $i, j \in I = \{1, \dots, k\}$ .

Así,  $t_i \geq 3$  y más aun aclaramos que  $t_i \geq 4$ , con  $i = 1, \dots, k$ . De lo contrario, sin pérdida de generalidad asumiendo que  $S_1 = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\}$  gráficamente tenemos:

FIGURA 2.17: REPRESENTACION DE  $S_i = \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{it_i}\}$ 

En consecuencia por el lema 2.2 ítem(b) ocurre  $u_1, u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i} \notin N(u_{i2})$  con  $i= 2, \dots, k$ . Ahora bien como  $|N(u_{i2})| \geq \delta$  y por otro lado  $|N(u_{i2})| \leq (n - 1) - (|\bigcup_{i=2}^k \{u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i}\}| + |\{u_1, v\}|)$  donde  $n$  es el orden de  $G$ , el (1) que se le resta es el  $u_{i2}$  mismo,  $\{u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i}\}$  con  $i = 2, \dots, k$  tampoco están en  $N(u_{i2})$ ; así como  $u_1$  y además como  $v$  esta aislado entonces le restamos  $|\{u_1, v\}|$  y  $|\bigcup_{i=2}^k \{u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i}\}|$ . Pero como:

1.  $\delta \geq (n + 5)/5 \Leftrightarrow n \leq 5\delta - 5$ , por lo tanto  $n - 1 \leq 5\delta - 6$
2.  $|\bigcup_{i=2}^k \{u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i}\}| = 4(k - 1)$ , pues
 
$$|\bigcup_{i=2}^k \{u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i}\}| = |\{u_2, u_{21}, u_{22}, u_{2t_2}\} \cup \{u_3, u_{31}, u_{32}, u_{3t_3}\} \cup \dots \cup \{u_k, u_{k1}, u_{k2}, u_{kt_k}\}|$$

$$= |\{u_2, u_{21}, u_{22}, u_{2t_2}\}| + \dots + |\{u_k, u_{k1}, u_{k2}, u_{kt_k}\}|$$
 (Por el principio de INCLUSION-EXCLUSION, pues  $\{u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i}\}_{i=2}^k$  son disjuntos y  $|\{u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i}\}|=4$ ).
3.  $|\{u_i, v\}|=2$ .

por lo tanto;

$$\begin{aligned}
\delta &\leq |N(u_{12})| \leq (n-1) - (|\bigcup_{i=2}^k \{u_i, u_{i1}, u_{i2}, u_{it_i}\}| + |\{u_1, v\}|) \\
&\leq 5\delta - 6 - 4(k-1) - 2 \text{ (por (1), (2) y (3))} \\
&= 5\delta - 6 - 4k + 4 - 2 \\
&= 5\delta - 4k - 4 \\
&= 5\delta - 4\delta - 4 \text{ (pues } k \geq \delta \text{ mas aun } k = \delta) \\
&= \delta - 4
\end{aligned}$$

lo que genera una contradicción pues  $\delta > \delta - 4$ , conservando nuestra aseveración,  $t_i \geq 4$ . Ahora bien como  $t_i \geq 4$ ,  $\sum_{i=1}^k t_i \geq 4k$ ,  $d(v) \geq \delta$  y  $k \geq \delta$  entonces tenemos:

$$n \geq \sum_{i=1}^4 t_i + d(v) \geq 4k + \delta + 1 \geq 4\delta + \delta + 1 = 5\delta + 1 \quad (2.4)$$

despejando  $\delta$  de la ecuación (2.4) obtenemos  $\delta \leq (n-1)/5$  lo que contradice nuestra hipótesis ya que  $\delta \geq (n+5)/5$ .

En consecuencia  $G - C$  no contiene ningún vértice aislado alguno. ■

**Lema 2.6.** Si  $G$  es un grafo 3-conexo no hamiltoniano libre de garra de orden  $n \geq (n+5)/5$ ,  $C$  es el ciclo de mayor longitud junto con una orientación seleccionada y  $H$  una componente de  $G - C$  donde  $|V(H)| \geq 3$ , entonces cada componente  $H$  de  $G - C$  es hamiltoniana conectada.

**Demostración.** Supongamos que  $H$  no es hamiltoniana conectada. Entonces por el lema 2.4 obtenemos  $|V(C)| \geq 4\delta - 5$  y  $|V(H)| \leq \delta$  pues de ser mayor uno de los vértices de  $H$  tendría grado mayor que  $\delta$  y eso es contradictorio pues  $\delta$  es el mínimo grado de  $G$ .

Es claro que el grado de los vértices de  $H$  en  $G - C$  es mayor o igual a 1 ( $d_H(v) \geq 1$ ) por lema 2.5. Si este vértice de  $H$  esta en  $C$ , su grado también sera mayor o igual que 1 ( $d_C(v)$ ). Por el contrarreciproco en el lema 2.3 como  $H$  no es hamiltoniana conectada y es conexa entonces existe al menos un camino  $P$  de mayor longitud tal que:

1.  $d_H(a) + d_H(b) \leq |V(P)|$ .
2.  $|V(P)| \leq |V(H)|$ . (Por ser  $P$  un camino de  $H$ )
3.  $|V(H)| \geq 3$ .

luego por transitividad tenemos:

$$3 \leq d_H(a) + d_H(b) \leq |V(P)| \leq |V(H)|. \quad (2.5)$$

Sea  $p = |V(P)|$  y  $h = |V(H)|$ .

Sea  $Q$  el conjunto de pares ordenados  $(u_i, u_j)$  de vértices distintos de  $C$  tal que o  $u_i \in N(a)$  y  $u_j \in N(b)$  o  $u_i \in N(b)$  y  $u_j \in N(a)$  y ningún vértice en  $C(u_i, u_j)$  es adyacente ni a "a" ni a "b".

Entonces por el lema 2.2 ítem (c),  $|C(u_i, u_j)| \geq p + 2$  para  $(u_i, u_j) \in Q$ . Sean  $q = |Q|$  y  $X = N_C(a) \cap N_C(b)$ . Entonces  $q \geq 2$  ya que si tenemos un ciclo con al menos 3 vértices el va formar al menos dos pares sin incluir los extremos y como  $X$  es la intersección de los vecinos a los extremos de  $P$  y por definición de  $Q$  entonces  $|Q| \geq |X| = x$ , mas aun si  $|Q| < |X|$  tenemos  $|N_C(a) \times N_C(b)| < |N_C(a) \cap N_C(b)|$  lo cual por simple lógica es imposible dado que en el producto cartesiano se generan pares ordenados con los elementos comunes y no comunes a  $N_C(a)$  y  $N_C(b)$ . Notemos a su vez que a causa de que  $C$  es maximal, si  $u_i \in N_C(v)$  con  $v \in V(H)$ , entonces  $u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3} \notin N_C(v)$ . En otras palabras si  $u_{i+j} \in N_C(v)$ , con  $j=1, 2, 3$ , existiría un ciclo de mayor longitud que  $C$ . Aclarando que  $x < \delta$  pues, si  $x \geq \delta$  entonces tendría tanto "a" como "b" grado mayor al mínimo.

Ahora bien, dado que  $\delta \geq (n + 5)/5$  entonces  $5\delta - 5 \geq n$  pero;

$$n \geq |V(H)| + |N_C\{a, b\}| + 3|N_C(\{a, b\}) - X| + x(p + 2)$$

luego por transitividad tenemos

$$5\delta - 5 \geq |V(H)| + |N_C\{a, b\}| + 3|N_C(\{a, b\}) - X| + x(p + 2) \quad (2.6)$$

Por otro lado;

- a)  $|N_C(\{a, b\})| = |N_C(a) \cup N_C(b)|$ .
- b)  $3|N_C(\{a, b\}) - X| = 3(|N_C\{a, b\}| - |N_C(\{a, b\}) \cap X|)$  (Por lema de cardinalidad).
- c)  $N_C(\{a, b\}) \cap X = N_C(a) \cap N_C(b) = X$  donde  $|X| = x$ .

sustituyendo a), b) y c) en la ecuación (2.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} 5\delta - 5 &\geq p + 4|N_C(a) \cup N_C(b)| + x(p - 1) \\ \Rightarrow 5\delta - 5 &\geq p + 4(|N_C(a)| + |N_C(b)| - |N_C(a) \cap N_C(b)|) + x(p - 1) \end{aligned} \quad (\text{Por principio de}$$

INCLUSION Y EXCLUSIÓN en teoría de conjuntos)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq p + 4((\delta - d_H(a)) + (\delta - d_H(b)) - x) + x(p - 1) \text{ (Puesto que} \\ &\quad \delta \leq |N_C(a)| + d_H(a), \delta \leq |N_C(b)| + d_H(b) \text{ y } |N_C(a) \cap N_C(b)| = |X| = x) \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq p + 4(2\delta - d_H(a) - d_H(b) - x) + x(p - 1) \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 8\delta - 3p - 4x + x(p - 1) \end{aligned}$$

así;

$$5\delta - 5 \geq 8\delta - 3p - 4x + x(p - 1). \quad (2.7)$$

Luego por la ecuación (2.5) tenemos  $|V(P)| \geq 3$  entonces:

Si  $p=3$  y sustituyendo en la ecuación (2.7)

$$\begin{aligned} &5\delta - 5 \geq 8\delta - 3p - 4x + x(p - 1) \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 8\delta - 3p - 4x + x(p - 1) \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 8\delta - 9 - 4x + 2x \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 5\delta + 2\delta + \delta - 4 - 5 - 2x \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 5\delta - 4 + 2(\delta - x) + (\delta - 5) \end{aligned}$$

pero  $5\delta - 4 > 5\delta - 5$

luego  $5\delta - 4 \geq 5\delta - 4 + 2(\delta - x) + (\delta - 5)$  lo que es una contradicción.

Si  $p=4$  y sustituyendo en la ecuación (2.7)

$$\begin{aligned} &5\delta - 5 \geq 8\delta - 3p - 4x + x(p - 1) \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 8\delta - 12 - 4x + 3x \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 5\delta + \delta + 2\delta - 8 - 4 - x \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 5\delta - 4 + (\delta - x) + (2\delta - 8) \end{aligned}$$

pero  $5\delta - 4 > 5\delta - 5$

luego  $5\delta - 4 \geq 5\delta - 4 + (\delta - x) + (2\delta - 8)$  lo que es una contradicción.

Si  $p \geq 5$  y sustituyendo en la ecuación (2.7)

$$\begin{aligned} &5\delta - 5 \geq 8\delta - 3p - 4x + x(p - 1) \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 5\delta + 3\delta - 3p - 4x + xp - x \\ &\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 5\delta + 3(\delta - p) - 5x + xp \end{aligned}$$

$\Rightarrow 5\delta - 5 \geq 5\delta + 3(\delta - p) + x(p - 5)$   
 pero  $5\delta - 4 > 5\delta - 5$   
 luego  $5\delta - 4 \geq 5\delta + 3(\delta - p) + x(p - 5)$  lo que es una contradicción.

Por lo tanto cada componente  $H$  de  $G - C$  es hamiltoniana conectada.  $\blacksquare$

**Lema 2.7.** Si  $G$  es un grafo 3-conexo no hamiltoniano libre de garra de orden  $n \geq (n + 5)/5$ ,  $C$  es el ciclo de mayor longitud junto con una orientación seleccionada y  $H$  una componente de  $G - C$  donde  $|V(H)| \geq 3$  entonces cada componente  $H$  de  $G - C$  contiene al menos  $\delta - 2$  vértices ( $|V(H)| \geq \delta - 2$ ).

*Demostración.* Asumiendo que  $H$  contiene a lo mas  $\delta - 3$  vértices ( $|V(H)| \leq \delta - 3$ ). Si  $|V(H)| = 2$ , entonces se puede obtener fácilmente una contradicción de manera similar a la del lema 2.5. Es decir,  $|V(H)| \leq \delta - 3 \Rightarrow 2 \leq \delta - 3 \Rightarrow \delta \geq 5$  lo que genera una contradicción ya que  $\delta \geq (n + 5)/5$ . Así podemos asumir que  $|V(H)| \geq 3$ .

Por lema 2.5 tomando  $d(v) = \delta$  y Por lema 2.1 dado que se cumplen las hipótesis, con  $s = |V(H)| + 3$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 |V(C)| &\geq s(d(v) - s + 4) + (m - s)(|V(H)| - s + 3) \\
 \Rightarrow |V(C)| &\geq (|V(H)| + 3)(d(v) - |V(H)| - 3 + 4) + (m - |V(H)| - 3)(|V(H)| - |V(H)| - 3 + 3) \\
 \Rightarrow |V(C)| &\geq (|V(H)| + 3)(d(v) - |V(H)| + 1) \\
 \Rightarrow |V(C)| &\geq (|V(H)| + 3)(\delta - |V(H)| + 1).
 \end{aligned}$$

Por tanto  $|V(C)| \geq (|V(H)| + 3)(\delta - |V(H)| + 1)$  y tomando  $|V(H)| = h$  nos queda que:

$$\begin{aligned}
 |V(C)| &\geq (h + 3)(\delta - h + 1) \\
 \Rightarrow |V(C)| &\geq \delta h - h^2 + h + 3\delta - 3h + 3 \\
 \Rightarrow |V(C)| &\geq -h^2 - 2h + \delta h + 3\delta + 3
 \end{aligned}$$

De este modo  $|V(C)| \geq -h^2 - 2h + \delta h + 3\delta + 3$ .

Ahora notemos que  $-h^2 - 2h + \delta h + 3\delta + 3 = -h^2 + h(\delta - 2) + 3(\delta + 1)$ .

Sea  $g(h) = -h^2 + h(\delta - 2) + 3(\delta + 1) + h$ .

Obviamente  $g(h)$  es una función cóncava debido a que es una parábola y su valor mínimo ocurre en la frontera. Dado que  $|V(H)| \geq 3$  y además estamos suponiendo

que  $|V(H)| \leq \delta - 3$  entonces  $g(3) = 6\delta - 9$  y  $g(\delta - 3) = 5\delta - 3$ , para todo  $\delta$ . En particular:

Si  $\delta \geq 6$ , entonces  $\min\{g(3), g(\delta - 3)\} = 5\delta - 3$ .

Si  $\delta = 5$ , entonces  $\min\{g(3), g(\delta - 3)\} = 6\delta - 9 \geq 5\delta - 4$ , pero  $5\delta - 4 > 5\delta - 5$ ; así  $\min\{g(3), g(\delta - 3)\} \geq 5\delta - 5$ .

De aquí;

$$n \geq |V(C)| + |V(H)| \geq \min\{g(3), g(\delta - 3)\} \geq 5\delta - 5,$$

lo cual es una contradicción debido a que como  $\delta \leq (n+5)/5$  entonces  $n \leq 5\delta - 5$ .

Por lo tanto cada componente  $H$  de  $G - C$  contiene al menos  $\delta - 2$  vértices. ■

**Lema 2.8.** Si  $G$  un grafo 3-conexo no hamiltoniano libre de garra de orden  $n \geq (n+5)/5$ ,  $C$  es el ciclo de mayor longitud junto con una orientación seleccionada y  $H$  una componente de  $G - C$  donde  $|V(H)| \geq 3$  entonces  $G - C$  tiene solo una componente.

**Demostración.** Supongamos por absurdo y sin pérdida de generalidad que hay dos componentes  $H$  y  $H'$  en  $G - C$ . Por lema 2.1 ya que se cumplen las hipótesis y tomando  $s = m = k(G) = 3$ ,  $d(v) = \delta$  tenemos:

$$\begin{aligned} |V(C)| &\geq s(d(v) - s + 4) + (m - s)(|V(H)| - s + 3) \\ \Rightarrow |V(C)| &\geq 3(\delta - 3 + 4) + (3 - 3)(|V(H)| - 3 + 3) \\ \Rightarrow |V(C)| &\geq 3(\delta + 1) = 3\delta + 3 \end{aligned}$$

Así,  $|V(C)| \geq 3\delta + 3$ .

Ahora usando lema 2.7 ( $|V(H)| \geq \delta - 2$ ) obtenemos

$$\begin{aligned} n &\geq |V(C)| + |V(H)| + |V(H')| \\ \Rightarrow n &\geq (3\delta + 3) + (\delta - 2) + (\delta - 2) \\ \Rightarrow n &\geq 5\delta - 1 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción ya que  $n \leq 5\delta - 5$ .

Por lo tanto podemos concluir que  $G - C$  tiene solo una componente. ■

De los lemas anteriores sabemos que  $G - C$  tiene solo una componente hamiltoniana conectada conteniendo al menos  $\delta - 2$  vértices.

**Lema 2.9.** Supongamos que  $N(x_i^+) - \{x_i^-, x_i\} \subseteq C(x_i^+, x_{i+1}^-) = S$  y  $G[N(x_i^+) - \{x_i^-, x_i\}]$  es un grafo completo. Consideremos a "d" el vecino de  $x_i^+$  mas cercano a  $x_{i+1}^-$  en S. Entonces para cada vértice  $w$  en  $C(x_i^+, d)$ , existe un camino  $P = P[w, x_i^+]$  de  $G[S \cup \{x_i^+\}]$  (grafo inducido por  $S \cup \{x_i^+\}$ ) entre  $w$  y  $x_i^+$  de por lo menos  $\delta - 1$  vértices ( $|P| \geq \delta - 1$ ) (simétricamente un camino  $Q = Q[w, x_{i+1}^-]$  de  $G[S \cup \{x_{i+1}^-\}]$  entre  $w$  y  $x_{i+1}^-$  contiene al menos  $\delta - 1$  vértices).

**Demostración.** Sean  $w_1, w_2 \in N(x_i)$  tal que:

i)  $C(w_1, w) \cap N(x_i^+) = \emptyset.$

ii)  $C(w, w_2) \cap N(x_i^+) = \emptyset.$

Entonces por ser  $G[N(x_i^+) - \{x_i^-, x_i\}]$  un grafo completo se cumple  $w_1 w_2, w_1 d, x_i^{++} w_2 \in E(G)$ , por otra parte  $N(x_i^+) - \{x_i^-, x_i\}$  esta contenido en  $C[x_i^+, w_1] \cup C[w_2, d] \cup \{w\}$  y podemos construir el camino P y Q de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P &= w w_+ \dots d w_1 w_1^- \dots x_{i+1}^{++} x_{i+1}^+ \\ Q &= w w_- \dots x_i^+ w_2 w_2^+ \dots x_{i+1}^- x_{i+1}^- \end{aligned}$$

Por lo tanto  $V(P) \supseteq (N(x_i^+) - \{x_i^-, x_i\}) \cup \{x_i^+\}$  y  $V(Q) \supseteq (N(x_i^+) - \{x_i^-, x_i\}) \cup \{x_i^+\}$  lo que implica que P y Q contienen al menos  $\delta - 1$  vértices. ■

# Capítulo 3

## Teorema principal

### §3.1. Demostración del teorema

**Teorema 3.1.** Sea  $G$  un grafo 3-conexo simple no dirigido libre de garra en  $n$  vértices con  $\delta \geq (n + 5)/5$ . Entonces  $G$  es hamiltoniano.

*Demostración.* Supongamos que el teorema no es cierto, es decir no existe un ciclo que visite todos los vértices una única vez. Sea  $C$  el ciclo de mayor longitud en  $G$ , y  $C = (c_1 c_2 \dots c_i \dots c_j \dots c_l \dots c_m c_1)$  (donde  $m = |V(C)| \leq n$ , los subíndices de los  $c_t$ 's deben ser considerados modulo  $m$  lo que nos asegura la orientación de  $C$ ). Consideremos la componente  $H = G - C$ .

Como  $G$  es 3-conexo ocurre que:

- (i) Existen al menos 3 caminos distintos entre dos vértices cualesquiera. Del hecho que  $c_i, c_j, c_l$  ( $i < j < l$ ) están en  $C$ , establecemos un camino de conexión entre ellos en  $C$  en el sentido de su orientación, y un segundo camino dentro de  $C$  distinto al anterior se obtiene en sentido contrario a su orientación. Por lo tanto, el tercer camino tiene que estar en  $H = G - C$ , lo que nos asegura la existencia de tres vértices distintos  $r_1, r_2, r_3 \in V(H)$  tal que  $c_i r_1, c_j r_2, c_l r_3 \in E(G)$  ( $i < j < l$ ) y un camino entre ellos en  $H$  (por lema 2.6). Ver la siguiente figura.

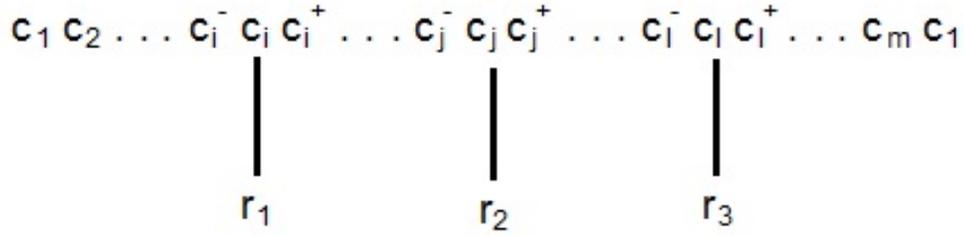


FIGURA 3.1: CICLO  $c_1c_2\dots c_i^-c_ic_i^+\dots c_j^-c_jc_j^+\dots c_l^-c_lc_l^+\dots c_m c_1$

(ii) El grado de cada vértice de  $G$  es al menos 3 ( $d_G(v) \geq 3$ ) lo que generaría una garra ( $K_{1,3}$ ). Digamos gráficamente

$K_{1,3}$ :

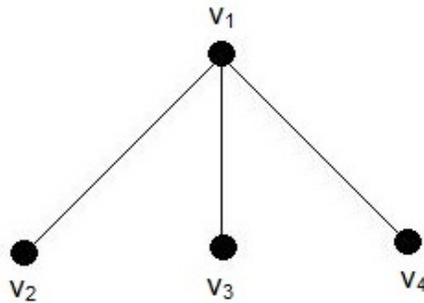


FIGURA 3.2: GRAFO GARRA

pero por hipótesis  $G$  es libre de garra. Por lo tanto, existe al menos una adyacencia entre dos de los tres vértices  $v_2, v_3, v_4$ .

Sea  $|V(H)| = h$ ,  $A = \{c_i, c_j, c_l\}$ ,  $S_1 = C(c_i^+, c_j^-)$ ,  $S_2 = C(c_j^+, c_l^-)$ ,  $S_3 = C(c_l^+, c_i^-)$ . Entonces, por lema 2.6,  $H$  es hamiltoniana conectada, luego, para cualesquiera dos vértices en  $H$  existe al menos un camino hamiltoniano de longitud  $h-1$  cumpliéndose así, las hipótesis del lema 2.2 por tanto, se cumple que

$$|S_t| \geq (h-1) + 2 \geq (h-2) + 2 = h$$

con  $t = \{1, 2, 3\}$ .

Es claro que;  $N_C(c_i) - \{c_i^+, c_i^-, c_j, c_l\} \neq \emptyset \vee N_C(c_i) - \{c_i^+, c_i^-, c_j, c_l\} = \emptyset$ .

**Observación 3.1.** Es obvio que  $\{c_i^+, c_i^-, c_j, c_l\} \neq (\{c_i^+, c_i^-\} \cup \{c_i, c_j, c_l\})$  pero  $N_C(c_i) - \{c_i^+, c_i^-, c_j, c_l\} = N_C(c_i) - (\{c_i^+, c_i^-\} \cup A)$  pues  $c_i \notin N_C(c_i)$  y definición de diferencia entre conjuntos.

Lo que nos permite dividir la prueba en dos casos.

**Caso 1.** Existe al menos un vértice en A digamos  $c_i$  tal que:

$$N_C(c_i) - \{c_i^+, c_i^-, c_j, c_l\} \neq \emptyset.$$

En efecto, si  $c_p \in S_2$  por el lema 2.2 item (c) tenemos  $a = |C(c_j^+, c_p)| \geq h$  y  $b = |C(c_p, c_l^-)| \geq h$ . En consecuencia como  $C = (c_1 c_2 \dots c_i^- c_i c_i^+ \dots c_j^- c_j c_j^+ \dots c_p \dots c_l^- c_l c_l^+ \dots c_m c_1)$  entonces

$$\begin{aligned} |V(C)| &\geq a + b + |S_1| + |S_3| + |\{c_i^-, c_i, c_i^+, c_j^-, c_j, c_i^+, c_l^-, c_l, c_l^+, c_p\}| \\ &\geq h + h + h + h + |\{c_i^-, c_i, c_i^+, c_j^-, c_j, c_i^+, c_l^-, c_l, c_l^+, c_p\}| \\ &\geq 4\delta + 2 \end{aligned}$$

puesto que:

- $a \geq h \geq \delta - 2$  por lema 2.7.
- $b \geq h \geq \delta - 2$  por lema 2.7.
- $|S_1| \geq h \geq \delta - 2$
- $|S_3| \geq h \geq \delta - 2$
- $|\{c_i^-, c_i, c_i^+, c_j^-, c_j, c_i^+, c_l^-, c_l, c_l^+, c_p\}| = 10$

y así  $n \geq 5\delta$  ya que

$$\begin{aligned} n = |V(C)| + |V(H)| &\geq 4\delta + 2 + h \\ &\geq 4\delta + 2 + \delta - 2 \\ &= 5\delta \end{aligned}$$

lo que es una contradicción pues  $n \leq 5\delta - 5$ . Asumamos sin pérdida de generalidad que  $i + 1 < p < j - 1$  por lema 2.2 y ( $c_p$  es el vecino de  $c_i$  mas cercano a  $c_j^-$  en  $S_1$ )(\*) en consecuencia por lema 2.2 item (c) tenemos  $|C(c_p, c_j^-)| \geq h$ . Dado que  $H$  es hamiltoniana conectada, existe un camino de longitud  $h - 1$ . Lo que nos permite considerar un camino de longitud  $h - 2$  y así obtener  $|C(c_p, c_j^-)| \geq (h - 2) + 2 = h$ .

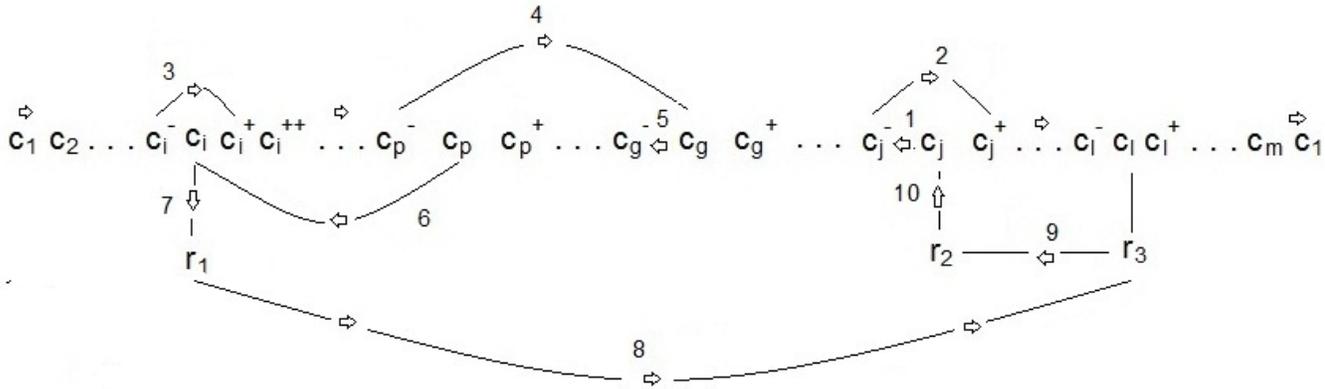
Antes de probar el teorema en este caso, verifiquemos primeramente los siguientes cuatro hechos. Consideremos el vértice  $c_p^-$ .

**a1)** Si  $N(c_p^-) \cap C(c_p, c_j^-) \neq \emptyset$  entonces existe al menos un vértice digamos  $c_g$  en  $N(c_p^-) \cap C(c_p, c_j^-)$  tal que  $|C(c_g, c_j^-)| \geq h$ .

En efecto, si  $|C(c_g, c_j^-)| < |V(H = G - C)| = h$  entonces  $|E(C(c_g, c_j^-))| < |E(H)|$ . Como  $H = G - C$  es hamiltoniana conectada por el lema 2.6, podemos construir un camino hamiltoniano entre  $c_i$  y  $c_j$  a saber  $c_i r_1 \dots r_3 \dots r_2 c_j$  el cual notaremos por  $c_i H c_j$  cuya longitud es obviamente  $h+1$ . Por otro lado:

1.  $c_p$  es el vecino de  $c_i$  mas cercano a  $c_j^-$  en  $S_1$  por \*.
2.  $N_C(c_i^+) = \{c_i, c_i^{++}\}$  y, si  $c_r \in A$  con  $c_r \neq c_i$ ,  $c_r \notin N_C(c_i^+)$  entonces podemos decir que  $N_C(c_i^+) \subset V(C) - A$ . Es claro que  $c_i^+$  y  $c_i$  no poseen otro vecino mas que  $c_i^-$  puesto que  $r_1 c_i^+$  y  $r_1 c_i^- \notin E(G)$  pues de lo contrario crearíamos los ciclos  $C_1 : c_1 c_2 \dots c_i^- r_1 c_i c_i^+ \dots c_j \dots c_l \dots c_m c_1$  y  $C_2 : c_1 c_2 \dots c_i^- c_i c_i^+ r_1 \dots c_j \dots c_l \dots c_m c_1$  donde sus longitudes son iguales a la longitud de  $C$  mas 1 (el lado  $c_i^- r_1$  y el lado  $c_i^+ r_1$ ) lo que es contradictorio. Como  $G$  es libre de garra entonces el lado  $c_i^- c_i^+$  esta en  $G$ .
3.  $c_p^- c_g \in E(G)$  por hipótesis y el camino simple de  $c_g$  a  $c_j^-$  en la orientación natural de  $C$  no se tomara en cuenta.

Por lo tanto de lo anterior dicho podemos construir un ciclo  $C' = (c_j c_j^- c_j^+ \dots c_l^- c_l c_l^+ \dots c_m c_1 c_2 \dots c_i^- c_i^+ c_i^{++} \dots c_p^- c_g c_g^- \dots c_p^+ c_p c_i H c_j)$  el cual posee mayor longitud que  $C$ . (Ver figura 3.3)

FIGURA 3.3: CICLO  $C'$ 

**a2)** Podemos asegurar que los lados  $c_i^+ c_p$ ,  $c_i^- c_p \in E(G)$ . Ciertamente, si  $c_i^+ c_p \notin E(G)$  entonces  $r_1 c_p \in E(G)$  puesto que el inducido  $G[c_i, c_p, r_1, c_i^+] \neq K_{1,3}$  ( $G$  es libre de garra). Por otro lado tenemos que  $d_H(c_i) \geq 2$ ; de lo contrario  $d_H(c_i) = 1$  y  $d_C(c_i) \geq \delta - 1$  obteniendo  $N_C(c_i) \subseteq (S_1 = C(c_i^+, c_j^-)) \cup (S_3 = C(c_l^+, c_i^-)) \cup \{c_i^+, c_i^-\}$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} n &= |V(C)| + |V(H)| \\ &\geq d_C(c_i) + 4h + 7 \\ &\geq 5\delta - 3 \end{aligned}$$

lo que genera una contradicción a  $n \leq 5\delta - 5$  puesto que por hipótesis  $\delta \geq (n + 5)/5$ .

Ahora bien como  $d_H(c_i) \geq 2$  y tenemos que  $|C(c_i^+, c_p^-)| \geq h$ , entonces

$n \geq 5|V(H)| + 12 \geq 5\delta + 2$  lo que nos asegura que los lados  $c_i^+ c_p$ ,  $c_i^- c_p \in E(G)$ .

**a3)** Si  $N(c_p^-) \cap C(c_l^+, c_i^-) \neq \emptyset$  o  $N(c_p^-) \cap S_3 \neq \emptyset$  con  $c_y$  en  $N(c_p^-) \cap C(c_l^+, c_i^-)$  entonces  $|C(c_l^+, c_y)| \geq h$ . En efecto, si  $|C(c_l^+, c_y)| < h$  en forma análoga a como se mostró en **a1)** podemos construir un ciclo  $C' = (c_y c_p^- c_p^- \dots c_i^+ c_p c_p^+ \dots c_l^- c_l^+ c_l H c_i c_i^- \dots c_y)$  de longitud mayor que  $C$ , lo que que nos genera nuevamente una contradicción.

Por ultimo **a4)**  $(N(c_p^-) \cap S_2 = C(c_j^+, c_l^-)) = \emptyset$ . Dado que si  $(N(c_p^-) \cap S_2 = C(c_j^+, c_l^-)) \neq \emptyset$  y consideramos a  $c_g \in (N(c_p^-) \cap (S_2 = C(c_j^+, c_l^-)))$  entonces  $a = |C(c_g, c_l^-)| \geq h$  de lo contrario  $C' = (c_g c_g^- \dots c_p c_i H c_l c_l^- c_l^+ \dots c_i^- c_i^+ c_i^{++} \dots c_p^- c_g)$

es un ciclo en  $G$  de longitud mayor a  $C$ , lo que es una contradicción. Del mismo modo obtenemos que  $b = |C(c_j^+, c_g)| \geq h$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 n \geq |V(C)| + |V(H)| &\geq (a + b + |S_3| + |S_1| + 10) + |V(H)| \\
 &\geq 5h + 10 \\
 &\geq 5(\delta - 2) + 10 \\
 &\geq 5\delta \\
 &\geq 5\delta - 5
 \end{aligned}$$

lo que contradice la hipótesis del teorema debido a que  $\delta \geq (n + 5)/5$ .

Obviamente  $c_p^- c_j, c_p^- c_l \notin E(G)$  pues  $N(c_p^-) \cap C(c_j^+, c_l^-) = \emptyset$  y  $N(c_p^-) \subseteq C(c_l^+, c_i^-)$ . Ahora vamos a completar la demostración del teorema en este caso.

Sea  $c_a$  o el vecino de  $c_p^-$  mas cercano a  $c_l^+$  en  $S_3 = C(c_l^+, c_i^-)$  si  $(N(c_p^-) \cap S_3 = C(c_l^+, c_i^-)) \neq \emptyset$  o  $c_a = c_i^-$  si  $(N(c_p^-) \cap S_3 = C(c_l^+, c_i^-)) = \emptyset$ . Entonces por **a3**), nosotros tenemos que  $b = |C(c_l^+, c_y = c_a)| \geq h$ . Sea  $c_b$  el vecino de  $c_p^-$  mas cercano a  $c_j^-$  en  $S_1$  entonces en forma análoga nosotros tenemos que:

$$a = |C(c_b, c_j^-)| \geq h \text{ y } N(c_p^-) \subseteq C[c_a, c_b] = B.$$

$$\text{Así } C = (c_1 c_2 \dots c_i^- c_i \dots c_b \dots c_j^- c_j c_j^+ \dots c_l c_l^+ \dots c_a c_m c_1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 |V(C)| &= a + b + |C[c_a, c_b]| + |S_2| + \{c_j^-, c_j, c_j^+, c_l, c_l^+, c_m\} \\
 &= a + b + |B| + |S_2| + \{c_j^-, c_j, c_j^+, c_l, c_l^+, c_m\}
 \end{aligned}$$

pero;

- $a \geq h \geq \delta - 2$  por lema 2.7.
- $b \geq h \geq \delta - 2$  por lema 2.7.
- $|S_2| \geq h \geq \delta - 2$  por lema 2.7.
- $|B| \geq C(c_a, c_b) + \{c_a, c_b\} \geq h + 2$
- $|\{c_j^-, c_j, c_j^+, c_l, c_l^+, c_m\}| = 6$ .



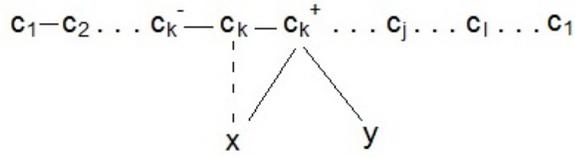


FIGURA 3.5: CICLO  $C1 : (c_1c_2\dots c_k^-c_kxc_k^+\dots c_j\dots c_l\dots c_1)$

2. Si  $c_k y \in E(G)$  entonces también tendríamos un ciclo  $C2 : (c_1c_2\dots c_k^-c_kyc_k^+\dots c_j\dots c_l\dots c_1)$  de mayor longitud que  $C$ .

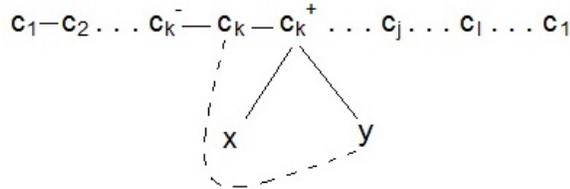


FIGURA 3.6: CICLO  $C2 : (c_1c_2\dots c_k^-c_kyc_k^+\dots c_j\dots c_l\dots c_1)$

3. Y por ultimo si  $xy \in E(G)$  no tendríamos ningún ciclo mayor que  $C$ .

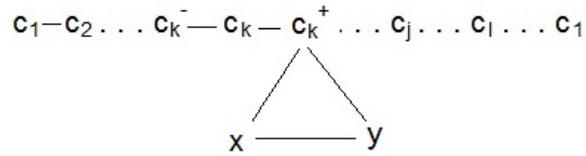


FIGURA 3.7: CICLO  $C$

De esta ultimo gráfica, concluimos que  $G[N_C(c_k^+) - \{c_k^-, c_k\}]$  es un grafo completo.

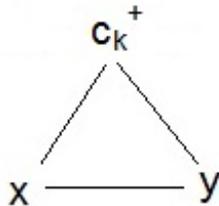


FIGURA 3.8: GRAFO  $G[N_C(c_k^+) - \{c_k^-, c_k\}]$

**Observación 3.2.** Es de notar, que cualquier otro caso construirle es combinación de los casos simples estudiados.

Similarmente,  $G[N_C(c_k^-) - \{c_k^+, c_k\}]$ .

Con el fin de demostrar el teorema en este caso, aun se necesitan establecer seis hechos útiles y considerar el vértice  $c_i^+$  a saber.

**b1)** Si  $c_i^+ c_p \in E(G)$  y  $c_p \in S_3 = C(c_l^+, c_i)$ , entonces  $b = |C(c_l^+, c_p)| \geq h$ . Pues de lo contrario análogamente al caso **a1)**  $G$  tendría el ciclo  $C' = (c_p c_i^+ c_i^{++} \dots c_l^- c_l^+ c_l H c_i c_i^- \dots c_p)$  de mayor longitud que  $C$ , lo que es una contradicción.

**b2)**  $N(c_i^+) \cap (S_2 = C(c_j^+, c_l^-)) = \emptyset$ . Asumiendo que  $N(c_i^+) \cap S_2 \neq \emptyset$ , luego existe al menos un vértice  $c$  común a ambos. Pudiendo suceder que  $c = c_d \in N(c_i^+)$  sobre  $S_2$  mas cercano a  $c_j^+$ , entonces  $|C(c_j^+, c_d)| \geq h$ ; de lo contrario nosotros construiríamos un nuevo ciclo  $C' = (c_d c_d^+ \dots c_i H c_j c_j^+ c_j^- c_j^{--} \dots c_i^+ c_d)$  en  $G$  de mayor longitud que  $C$ , llegando nuevamente a una contradicción.

Considerando la posibilidad que exista mas de un elemento común por lo menos dos  $c_a$  y  $c_b$  tal que: sin perdida de generalidad,  $c_a$  sea el vecino de  $c_i^+$  mas cercano a  $c_l^-$  en  $S_2 = C(c_j^+, c_l^-)$ , y  $c_b$  el vecino de  $c_i^+$  mas cercano a  $c_j^-$  en  $S_1 = C(c_i^+, c_j^-)$ . Sea  $c_p \in N(c_i^+)$  el vértice mas cercano a  $c_l^+$  sobre  $S_3 = C(c_l^+, c_i^-)$  si  $(N(c_i^+) \cap S_3 = C(c_l^+, c_i^-)) \neq \emptyset \vee c_p = c_i^-$  si  $(N(c_i^+) \cap S_3 = C(c_l^+, c_i^-)) = \emptyset$  (Notar que  $\{S_1, S_2, S_3\}$  es una partición de  $C - \{c_i, c_j, c_l\}$ ). Luego,  $c_a c_b \in E(G)$ . Caso contrario determinaríamos ciclos de mayor longitud a  $C$  y

$N(c_i^+) \subseteq B = C[c_p, c_b] \cup C[c_d, c_a]$  con  $|C[c_p, c_b] \cap C[c_d, c_a]| = \emptyset$ , obteniendo que  $|B| \geq \delta$  puesto que:

$$\begin{aligned}
 |B| &= |C[c_p, c_b] \cup C[c_d, c_a]| \\
 &= |C[c_p, c_b]| + |C[c_d, c_a]| \\
 &\geq (h+2) + (h+2) \\
 &\geq ((\delta-2)+2) + ((\delta-2)+2) \quad (\text{por lema 2,7}) \\
 &\geq 2\delta \geq \delta.
 \end{aligned}$$

Además,  $a = |C(c_a, c_l^-)| + |C(c_b, c_j^-)| \geq h$  dado que  $G$  contiene el ciclo

$(c_j^+ c_j^{++} c_j^{+++} \dots c_a c_b c_b^- \dots c_l^+ c_l^- c_l H c_j c_j^- c_j^+)$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} n &\geq |V(C)| + |V(H)| \\ &\geq |B| + a + b + |C(c_j^+, c_d)| + h + 6 \\ &\geq 5\delta - 2 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

**b3)**  $N(c_i^+) \cap (S_3 = C(c_l^+, c_i^-)) = \emptyset$ .

Supongamos que  $(N(c_i^+) \cap S_3 = C(c_l^+, c_i^-)) \neq \emptyset$ , entonces consideremos a  $c_p$  el vecino de  $c_i^+$  en  $S_3$  mas cercano a  $c_l^-$ . Sea  $c_a$  el vecino de  $c_i^+$  mas cercano a  $c_j^-$  en  $S_1 = C(c_i^+, c_j^-)$  y  $c_b \in N(c_i^+)$  el vértice mas cercano a  $c_i^-$  en  $S_3$ . Entonces  $N(c_i^+) \subset B = [c_p, c_b] \cup [c_i^-, c_a]$  y  $d = |(c_b, c_i^-)| + |C(c_a, c_j^-)| \geq h$  ya que de otra forma  $C' = (c_j^+ c_j^{++} \dots c_b c_a c_a^- \dots c_i^+ c_i^- c_i H c_j c_j^- c_j^+)$  sería un ciclo en  $G$  de mayor longitud que  $C$ . Sabemos que  $n \geq |V(C)| + |V(H)|$  pero;

$$\begin{aligned} |V(C)| + |V(H)| &\geq b + d + |B| + |S_2| + |V(H)| + 6 \\ &\geq 4h + |N(c_i^+)| + 6 \\ &\geq 5\delta - 2 \end{aligned}$$

luego por transitividad  $n \geq 5\delta - 2$  contrario a nuestra hipótesis.

Ahora bien de **(b2)** y **(b3)** nosotros tenemos que  $N_C(c_i^+) - \{c_i^-, c_i\} \subseteq S_1$ , además,  $N_H(c_i^+) = \emptyset$ .

Similarmente, nosotros obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{b4)} \quad &(N_C(c_j^-) - \{c_j^+, c_j\}) \cup (N_C(c_i^+) - \{c_i^-, c_i\}) \subseteq S_1 = C(c_i^+, c_j^-) \\ &(N_C(c_j^+) - \{c_j^-, c_j\}) \cup (N_C(c_l^-) - \{c_l^+, c_l\}) \subseteq S_2 = C(c_j^+, c_l^-) \\ &(N_C(c_i^-) - \{c_i^+, c_i\}) \cup (N_C(c_l^+) - \{c_l^-, c_l\}) \subseteq S_3 = C(c_l^+, c_i^-). \end{aligned}$$

**b5)**  $|S_1 = C(c_i^+, c_j^-)|$  o  $|S_2 = C(c_j^+, c_l^-)|$  o  $|S_3 = C(c_l^+, c_i^-)|$  es menor que  $\delta + (\delta/3) - 3$ .

De lo contrario tendríamos

$|V(C)| \geq 3(\delta + (\delta/3) - 3) + 9 \geq 4\delta$  y así  $n \geq 5\delta - 2$ . Luego, sin perdida de generalidad

podemos suponer que

$$|S_1| < \delta + (\delta/3) - 3 \quad (3.1)$$

**b6)**  $N_C(H) = A = \{c_i, c_j, c_l\}$ .

Asumamos que  $N_C(H) \neq A$ , al considerar a  $c_p \in V(C) - A$  y  $r \in V(H)$  de manera que  $c_p$  y  $r$  son adyacentes. Entonces,  $c_p \in (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$  y suponiendo sin perdida de generalidad que  $c_p \in S_1$ . Como  $N_C(c_i) \subseteq A \cup \{c_i^+, c_i^-\}$ , tenemos que  $c_p c_i \in E(G)$ . Si  $r = r_1$ , sea  $u$  un vecino de  $r$  en  $H$ . Como  $G[\{r, u, c_i, c_p\}] \neq K_{1,3}$ , o  $c_i$  o  $c_p$  es adyacente a  $u$ . Por consiguiente  $c_i$  y  $c_p$  son en cualquier caso adyacentes a dos vértices distintos de  $H$ , por lo tanto  $|C(c_i^+, c_p^-)| \geq h$ . Análogamente se puede demostrar que  $|C(c_p^+, c_j^-)| \geq h$ . Así, se obtiene que  $n \geq 5h + 12 \geq 5\delta + 4$ , lo que es una contradicción y por lo tanto se cumple **b6)**.

Dado que  $G$  es 3-conexo,  $N(S_1) \cap [S_3 \cup S_2] \neq \emptyset$ , entonces  $N(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$  o  $N(S_1) \cap S_3 \neq \emptyset$ . Luego, sin perdida de generalidad supongamos que  $N(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$ . Sea  $c_u \in N(S_1) \cap S_2$ ,  $c_a \in S_1$  y  $c_a c_u \in E(G)$ .

Ahora, para completar nuestra demostración. Consideremos o que  $N(S_1) \cap S_3 = \emptyset$  o  $N(S_1) \cap S_3 \neq \emptyset$ .

**Subcaso 1.**  $[N(S_1 = C(c_i^+, c_j^-)) \cap S_3 = C(c_l^+, c_i^-)] \neq \emptyset$ .

En efecto, sea  $c_v \in N(S_1) \cap S_3$ ,  $c_b \in S_1$ ,  $c_v c_b \in E(G)$ . Por **b4)** y la ecuación (3.1) obtenemos  $|N(c_i^+) \cap N(c_j^-)| \geq 2$ . Sea  $w \in N(c_i^+)$  tal que  $C(w, c_j^-) \cap N(c_i^+) = \emptyset$  y  $u \in N(c_j^-)$  tal que  $C(c_i^+, u) \cap N(c_j^-) = \emptyset$ . Entonces  $u \neq w$ ,  $u \in C(c_i^+, w)$ , y así  $c_b$  debe pertenecer o a  $C(c_i^+, w)$  o a  $C(u, c_j^-)$ . Luego por lema 2.9 hay dos caminos  $P$  y  $Q$  en  $G[S_1 \cup \{c_i^+, c_j^-\}]$  que contienen al menos  $\delta - 1$  vértices tal que  $P$  conecta a  $c_b$  con  $c_i^+$  y  $Q$  conecta a  $c_b$  con  $c_j^-$ . Por lo tanto tenemos que:

$$a = |C(c_i^+, c_v)| \geq h - |S_1| + \delta - 3 \text{ y}$$

$$q = |C(c_v, c_i^-)| \geq h - |S_1| + \delta - 3$$

pues de lo contrario podemos formar dos ciclos  $C'$  y  $C''$  de mayor longitud que  $C$  de la siguiente manera:

$$C' = (c_i c_i^- \dots c_v Q c_j^- c_j \dots c_l^- c_l^+ c_l H c_i),$$

$$C'' = (c_v P c_i^+ c_i^- c_i H c_j c_j^+ \dots c_l^- c_l \dots c_v).$$

Similarmente podemos obtener que:

$$\begin{aligned} d &= |C(c_j^+, c_u)| \geq h - |S_1| + \delta - 3 \text{ y} \\ f &= |C(c_u, c_l^-)| \geq h - |S_1| + \delta - 3. \end{aligned}$$

De lo que nos queda la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |V(C)| &\geq |S_1| + a + q + d + f + 9 \\ &\geq 4h - 3|S_1| + 4(\delta - 3) + 9 \\ &\geq 4(\delta - 2) + 4(\delta - 3) - 3(\delta + \delta/3 - 4) + 9 \geq 4\delta + 1 \end{aligned}$$

En consecuencia  $n \geq 5\delta - 1$  lo que es una contradicción. Y de esta manera queda probado el **subcaso 1**.

**Subcaso 2.**  $(N(S_1 = C(c_i^+, c_j^-)) \cap S_3 = C(c_i^+, c_i^-)) = \emptyset$ .

Luego  $N(S_1) \subseteq S_2 \cup S_1$ . Sea  $d_{S_2}(c_a) = \max\{|N(c_f) \cap S_2| : c_f \in S_1\}$ . Entonces  $d_{S_2}(c_a) > \delta/3$ .

En efecto, sea  $d_{S_2}(c_a) \leq \delta/3$ ; entonces por la ecuación 3.4 tenemos  $d_{S_1}(c_a) \geq 2\delta/3 \geq |S_1|/2 + 1$  lo que implica  $d_{S_1}(c_f) \geq |S_1|/2 + 1$  para cualquier  $c_f$  en  $S_1$ . Por tanto  $G[S_1]$  es hamiltoniano conectado, así que por una prueba similar a las anteriores obtenemos que  $a = |C(c_u, c_l^-)| \geq h$  y  $p = |C(c_j^+, c_u)| \geq h$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} n &\geq |V(C)| + |V(H)| \\ &\geq a + p + |S_1| + |S_3| + |V(H)| + 9 \\ &\geq 5\delta - 1 \end{aligned}$$

contradictorio, así  $d_{S_2}(c_a) > \delta/3$ .

Supongamos que  $c_u$  y  $c_v$  son los vecinos de  $c_a^+$  mas cercanos a  $c_j^+$  y  $c_l$  en  $S_2$  respectivamente. Entonces  $C[c_u, c_v] \supseteq N_{S_2}(c_a)$ . Un argumento similar al subcaso 1 muestra que

$$\begin{aligned} a &= |C(c_j^+, c_u)| \geq |V(H)| - |S_1| + \delta - 3 \text{ y} \\ p &= |C(c_v, c_l^-)| \geq |V(H)| - |S_1| + \delta - 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 n &\geq |V(C)| + |V(H)| \\
 &\geq a + |C[c_u, c_v]| + p + |S_1| + |S_3| + 9 + |V(H)| \\
 &\geq 2(h - |S_1| + \delta - 3) + 2h + d_{S_2}(c_a) + |S_1| + 9 \\
 &\geq 2(2\delta - 5) - |S_1| + 2\delta - 4 + \delta/3 + 9 \\
 &\geq 5\delta - 2
 \end{aligned}$$

esto es una contradicción y la prueba del teorema esta completa. ■

Como consecuencia del teorema tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.** Sea  $G$  un grafo 3-conexo  $k$ -regular libre de garra con a lo sumo  $5k-5$  vértices. Entonces  $G$  es hamiltoniano.

*Demostración.* Sabemos que  $G$  es  $k$ -regular ( $d_G(x) = k$  para todo  $x \in V(G)$ ). Por otro lado tenemos que:

$$n \leq 5K - 5 \text{ (por hipótesis)}$$

$$\Rightarrow k \geq (n + 5)/5 \text{ (I)}$$

y como  $G$  cumple las hipótesis del teorema, solo basta hacer  $\delta = k$  en (I) y así obtener que  $G$  es hamiltoniano, debido a que  $\delta \geq (n + 5)/5$  (mínimo grado de  $G$ ). ■

**Ejemplo 3.1.** Un grafo 3-conexo libre de garra no hamiltoniano con mínimo grado  $\delta = 3$  en  $5\delta + 5 = 20$  vértices.

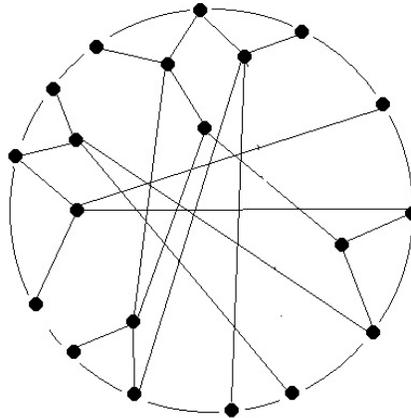


FIGURA 3.9: GRAFO 3-CONEXO

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] J. A. BONDY AND U.S. MURTY. Graph theory with applications. Macmillan, New York (1976).
- [2] H. A. JUNG. Longest cycles in 3-connected graphs. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 37, Finite and Infinite Sets, Eger, Hungary (1981) 403-438.
- [3] B. JACKSON, ZHU YONGJIN, AND LI HAO. Dominating cycles in regular 3-connected graphs. Preprint.
- [4] LI MINGCHU . Hamiltonian cycles in regular 2-connected claw-free graphs. Preprint (1990).
- [5] LIU ZHENHONG AND LI MINGCHU. Longest cycles in 3-connected claw-free graphs. Adv. Mathem. **Sinica** 1 (1989).
- [6] M. M. MATTHEWS AND D. P. SUMNER Longest paths and cycles in  $K_{1,3}$ -free graphs. J. Graph Theory 8 (1985).
- [7] M. M. MATTHEWS AND D.P. SUMNER. Hamiltonian results in  $K_{1,3}$ -free graphs. J. Graph Theory 3 (1984) 130-146.
- [8] C.Q. ZHANG. Hamiltonian cycles in claw-free graphs. J. Graph Theory, 12 (1988 209-216).