UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^d)$, para $1 \leqslant p \leqslant 2$"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Héctor Camacaro

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis.
Tutor: Dr. Ebner Pineda

Barquisimeto, Venezuela. Marzo de 2012

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"TRANSFORMADA DE FOURIER EN $L^p(\mathbb{R}^d)$, PARA $1 \leqslant p \leqslant 2$"

Presentado por el ciudadano BR. HÉCTOR CAMACARO titular de la Cédula de Identidad Nº 20.016.769. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

Dedicado a mi Padre Celestial y a la mujer que robó mi corazón, mi Mamá

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios como mi padre celestial, a Jesús mi amigo fiel, al Espitutu Santo como mi guia y a la mujer que más amo y amaré por siempre, a mi mamá, ya que su amor, constancia y dedicación me impulsaron a seguir adelante. Gracias por estar siempre conmigo ma, que sin importarte nada siempre estuviste para mí.

A mi tutor, el profesor Ebner Pineda, por ayudarme en la realización de esta tesis, por tenerme paciencia en todo este tiempo que estuve bajo su tutoría, y por todo lo que aprendí en este trayecto.

A mi familia, que siempre me apoyo, a mis hermanos, tíos, primos, sobrinos los cuales considero como un tesoro, a Heibert, el más tremendo de la casa, y a Herith, el bebe que me robó el corazón, las Gre y el Gre, a todos, y a ti abuelita.

A mis verdaderos amigos, los de toda mi vida, los que siempre estan allí, los que nunca me abandonan, gracias por existir Yngrid B, Eduar P, María José E, Ana D, Sughey C, J David Chirinos y muy especialmente a Yliana Pacheco, virtuosa entre todas y que siempre estuvo allí para mí. A mis amigos de la iglesia, los que me enseñaron valores, principios y que siempre me apoyaron.

A ti J.D.C.R. que aunque llevo poco tiempo conociendote, los momentos vividos a tu lado me han ayudado a ver la vida de otro modo, tus buenas palabras, tus buenas intensiones inspiran a cualquiera, eres la persona que amo y por eso quiero colocar tu nombre en mi trabajo donde te recordare por siempre, como ya sabes ocupas un gran lugar en mi corazón.

A mis amigos de clase, los que día a día me acompañaron en este viaje lleno de obstáculos que con la ayuda de Dios los superamos, a Mayarin L, Carlos S, Silmaris, Karla, Evelin, Diego, Ricardo, Aldemar, Ruth, Maria F, Yésica, Andreina, Yogeidi, María H, Dayana, Maria L.

Y por último y no menos importante quiero mencionar a la organización que me impulsaba cada dia a ser mejor y que por ellos me esforzaba en alcanzar mis objetivos, y aunque no esten orita en mi vida, siempre los tendre presentes E.R.V. gracias por creer en mi, muy especialmente la rama Pionero.

A los profesores que me dieron clase, que contribuyeron en mi formación académica ya que sin ellos fuese sido imposible lograr el objetivo. A la Ucla-Dcyt, y a todos aquellos que siempre están allí, gracias.

"Transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^d)$, para $1 \leqslant p \leqslant 2$"

Resumen

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, llamaremos Transformada de Fourier de f a la función

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

donde $x \cdot \xi$ es el producto interno en $\mathbb{R}^d$.
Por otro lado, $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$, así dada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ existe (f_n) en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Por la identidad de Plancherel, sabemos que $\|\widehat{g}\|_2 = \|g\|_2$, para $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, por lo que $(\widehat{f_n})$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$(el cual es Completo). Llamaremos Transformada de Fourier de f en $L^2(\mathbb{R}^d)$, denotada también $\widehat{f}$ al lím $\widehat{f}_n$, se puede probar que este límite es independiente de la sucesión f_n, luego $\widehat{f}$ está bien definida.
Finalmente dada $f \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leqslant p \leqslant 2$, existen $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $f = f_1 + f_2$, la transformada de Fourier de f en $L^p(\mathbb{R}^d)$ se define por $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ y en este caso $\widehat{f}$ también es independiente de f_1 y f_2.

En este trabajo estudiaremos las propiedades de la transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^d)$, para $1 \leqslant p \leqslant 2$, desarrollando detalladamente los resultados principales de los capítulos 11 y 12 del artículo Duoandikoetxea, J.*Lecciones sobre las Series y Transformadas de Fourier*, Notas de Clase,UNAN-Managua. (2003) pero en $\mathbb{R}^d$ no sólo en $\mathbb{R}$.

Índice

Capítulo 1

Preliminares.

§1.1. Conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^d$

Este capítulo además de establecer alguna terminología referente a la teoría a desarrollar, tiene por objeto estudiar los conceptos de medida e integración de Lebesgue junto con sus propiedades elementales, algunos teoremas de convergencia y otros resultados, que son la base sobre la cual está sustentado este trabajo. Para la demostración de los teoremas planteados en este capítulo ver [5], [6].

Consideraremos $\mathbb{R}^d$, como el espacio vectorial de las d-uplas de números reales. Para x, $y \in \mathbb{R}^d$ $x \cdot y = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$, define el producto interno en $\mathbb{R}^d$, la norma en este espacio viene dada por, $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.
$\mathbb{R}^d$, es un espacio métrico, cuya métrica proviene del producto interno descrito anteriormente.
Llamaremos bola abierta y bola cerrada de centro a y radio r a los conjuntos $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| < r\}$, $B[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| \leqslant r\}$ respectivamente donde $a \in \mathbb{R}^d$ y $r \in \mathbb{R}^+$.

Denotaremos al conjunto de los números reales extendidos como $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Propiedades de las operaciones en $\overline{\mathbb{R}}$

- Si a es un número real, $a + \infty = \infty$ y $a - \infty = -\infty$
- Si a es un número real, $a > 0$, entonces $a \cdot \infty = \infty$

- Si a es un número real, $a < 0$, entonces $a \cdot \infty = -\infty$
- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, $-\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ $0 \cdot \infty = 0$.
- $\infty - \infty$ esta indeterminado.

Definición 1.1. Medida exterior de un conjunto.
Sea A un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^d$. Se define la medida exterior de A como

$$m^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} v(B_n), A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_n \textit{ bolas abiertas}\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las familias numerables de bolas abiertas que cubren a A.

Definición 1.2. Conjuntos medibles en $\mathbb{R}^d$
Un conjunto A de $\mathbb{R}^d$ se dice medible, si verifica la siguiente propiedad:
Para todo conjunto E de $\mathbb{R}^d$

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

Denotamos $\mathcal{M}$ a la familia de los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ que son medibles.

Definición 1.3. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$
Se define la medida de Lebesgue como la restricción de la medida exterior a $\mathcal{M}$, la denotaremos por m, así, $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$

$$m(E) := m^*(E), \forall\ E\ \in\ \mathcal{M}$$

.

Teorema 1.1. Propiedades de los conjuntos medibles - Lebesgue.

1. *Si A es medible, entonces A^c es medible.*
2. *Si A y B son medibles, entonces $A \cap B$ es medible, y por tanto $A - B$ es medible.*
3. *Si A y B son medibles, entonces $A \cup B$ es medible, y si además $A \cap B$ tiene medida finita, $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$*

4. *Si* $A_1, \cdots, A_k$ *es una familia finita de conjuntos medibles, entonces* $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ *es medible y* $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ *es medible.*

5. *Si* $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *es una familia numerable de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos, entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *es medible. Además,* $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

6. *Si* $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *es una familia numerable de conjuntos medibles, entonces*
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ y } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \text{ son medibles.}$$

7. *Todo conjunto* A *con* $m^*(A) = 0$ *es medible.*

8. *Si* A *es medible, para todo* $x \in \mathbb{R}^d$, $x + A$ *es medible y* $m(x + A) = m(A)$.

Observación 1.1. $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$, *por lo anterior siempre se cumple que*
$$m^*(E) \leqslant m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

TEOREMA 1.2. *La colección* $\mathcal{M}$ *de todos los subconjuntos medibles de* $\mathbb{R}^d$ *es una* σ*-álgebra de conjuntos.*

DEFINICIÓN 1.4. *Diremos que una propiedad se verifica casi siempre, lo denotaremos como a.e. si el conjunto de puntos donde no se verifica tiene medida cero.*

§1.2. Funciones medibles Lebesgue

DEFINICIÓN 1.5. *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función, diremos que* f *es medible si* $D = dom(f)$ *es medible y para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *el conjunto* $\{x \in D : f(x) > \alpha\}$ *es medible.*

Observación 1.2. *Las funciones continuas son medibles.*

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles con dominio común* D *(medible), entonces son medibles las siguientes funciones:* $\max\{f_1, \cdots, f_n\}$, $\min\{f_1, \cdots, f_n\}$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{lim} f_n$, $\underline{lim} f_n$.

Proposición 1.2. *Si f es una función medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.*

Definición 1.6. Función Característica
Si A es cualquier conjunto de $\mathbb{R}^d$, definiremos la función característica χ_A del conjunto A como la función dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Definición 1.7. Función Simple
Sean $A \subset \mathbb{R}^d$, medible; y $\varphi : A \to \mathbb{R}$, diremos que φ es simple si es medible y alcanza sólo una cantidad finita de valores, es decir, $\varphi(A) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ es finito y llamando $A_j = \varphi^{-1}(\alpha_j) = \{x \in A : \varphi(x) = \alpha_j\}$, estos conjuntos son medibles por ser φ medible y se puede escribir a φ de la forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}, \tag{1.1}$$

. A (1.1) la llamaremos la representación canónica de φ

Observación 1.3. *La suma, diferencia y el producto de dos funciones simples es simple.*

Definición 1.8. Función Escalonada
Sea I un cubo compacto en $\mathbb{R}^d$,

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$$

donde cada I_k, son intervalos compactos de $\mathbb{R}$. Si P_k es una partición de I_k, el producto $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_d$, se llama partición de I. Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$, diremos que φ es escalonada si existe una partición P de I tal que, φ es constante en los cubos que forman la particion P.

Ejemplo 1.1.

1. *Una función constante con dominio medible es medible*
2. *La función característica de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ es medible, siempre que A lo sea.*
3. *Toda función escalonada es medible.*

§1.3. Integral de Lebesgue

DEFINICIÓN 1.9. Integración de funciones simples
Si φ es una función simple, $\varphi = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_A$, entonces $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = \sum_{j=1}^{k} \alpha_i m(A_j)$

DEFINICIÓN 1.10. Integración de funciones no negativas
Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ medible, y $f : A \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa, se define

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi : \varphi \text{ es simple y } \varphi \leqslant f \right\}$$

DEFINICIÓN 1.11. Funciones integrables
Si f es una función medible, escribiremos $f^+ = \text{máx}(f, 0)$ y $f^- = \text{máx}(-f, 0)$ de modo que f^+ y f^- son no negativas y $f = f^+ - f^-$; si f^+ y f^- tienen integrales finitas, se dice que f es integrable y se define

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^d} f^+ - \int_{\mathbb{R}^d} f^-$$

DEFINICIÓN 1.12. Integral sobre un conjunto medible
Si f es una función medible, positiva y A es un conjunto medible de $\mathbb{R}^d$, la integral de f sobre A se define como

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^d} f \chi_A$$

PROPOSICIÓN 1.3. Propiedades de la integral de Lebesgue
Sean f y g funciones integrables sobre $A \subset \mathbb{R}^d$. Entonces:

- *La función cf es integrable sobre A, y $\int_A cf = c \int_A f$.*
- *La función $f + g$ es integrable sobre A y*

$$\int_A f + g = \int_A f + \int_A g.$$

- *Si $f \leqslant g$ a.e., entonces $\int_A f \leqslant \int_A g$.*
- *Si A y B son conjuntos disjuntos y medibles contenidos en $\mathbb{R}^d$, entonces*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

- *Si* $m(A) = 0$, *entonces* $\displaystyle\int_A f = 0$.
- *Si* $f \geqslant 0$ *y* $\displaystyle\int_A f = 0$, *entonces* $f(x) = 0$ *a.e.* $x \in A$.
- $\displaystyle\left|\int_A f\right| \leqslant \int_A |f|$.

§1.3.1. Teoremas de convergencia

TEOREMA 1.3. (Convergencia acotada)
Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ *medible y de medida finita, y* (f_n) *una sucesión de funciones medibles definidas sobre* A*, supongamos que existe un* $M > 0$ *tal que* $|f_n(x)| \leqslant M$*,* $\forall x \in A$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Si* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$*,* $\forall x \in A$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f.$$

TEOREMA 1.4. (Lema de Fatou)
Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ *medible, y* (f_n) *una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre* A*, tales que* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *a.e en* A*, entonces* f *es medible, no negativa a.e y*

$$\int_A f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

Demostración
Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ medible, y (f_n) una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre A, como $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *a.e* en A, entonces $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *a.e*, así f es medible.
$f_n(x) \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, $\liminf_{n\to\infty} f_n \geqslant 0$, $\forall x \in A$, por tanto $f(x) \geqslant 0$.
Caso 1. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.
Sea h medible, acotada, $h \leqslant f$ tal que, h se anula fuera de un conjunto A' medible y $m(A')$ es finita.

Afirmación 1. Dado $n \in \mathbb{N}$, hagamos $h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}$, entonces h_n es medible.
En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, h_n es el mínimo de dos funciones medibles, por tanto es medible.

Afirmación 2. Si $|h(x)| \leqslant M$, $\forall x \in A$, entonces $|h_n(x)| \leqslant M, \forall x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.
En efecto, $h_n(x) = h(x) \leqslant M \;\vee\; h_n(x) = f_n \leqslant h(x) \leqslant M \Rightarrow h_n(x) \leqslant M$

$h_n(x) = h(x) \geqslant -M \;\vee\; h_n(x) = f_n \geqslant 0 \geqslant -M \Rightarrow h_n(x) \geqslant -M$
Así, $|h_n(x)| \leqslant M$, $\forall x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 3. h_n se anula fuera de A', $\forall n \in \mathbb{N}$.
En efecto,

$$\begin{aligned} x \notin A' &\Rightarrow h(x) = 0 \\ &\Rightarrow h(x) \leqslant f(x) \\ &\Rightarrow h_n(x) = h(x) = 0 \end{aligned}$$

h_n se anula fuera de A'
Puesto que $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Afirmación 4. $h_n(x) \to h(x)$, $\forall x \in A'$
En efecto, por (1.2)
$|h_n(x) - h(x)| = |h(x) - h(x)| = 0 \vee |h_n(x) - h(x)| = |f_n(x) - h(x)|$

$\Rightarrow |h_n(x) - h(x)| = 0 < \varepsilon \vee |h_n(x) - h(x)| \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Así,

$$n \geqslant N \Rightarrow |h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$$

Esto es, $h_n(x) \to h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$
Por el teorema de la convergencia acotada

$$\int_{A'} h = \lim_{n\to\infty} \int_{A'} f_n$$

Así, $\displaystyle\int_A h = \int_{A'} h = \lim_{n\to\infty} \int_{A'} h_n = \lim_{n\to\infty} \int_A h_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n$

tomando supremo sobre h se tiene que $\int_A f \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \int_A f_n$

Caso 2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $a.e$ en A

Hagamos $A_1 = \{x \in A : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in A_1$, como $m(A - A_1) = 0$, entonces A_1 es medible.

Por el **caso 1**, $\int_{A_1} f \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \int_{A_1} f_n$

$\Rightarrow \int_A f = \int_{A_1} f \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \int_{A_1} f_n = \liminf\limits_{n\to\infty} \int_A f_n$

Así, por **caso 1** y **caso 2** se tiene $\int_A f \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \int_A f_n$ ■

TEOREMA 1.5. (Convergencia monótona)
Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ medible, y (f_n) una sucesión creciente de funciones medibles no negativas, tales que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x \in A$, entonces f es medible no negativa, y

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f.$$

Demostración
Dado $x \in A$, $(f_n(x))$ es creciente, así, $f_n(x) \to \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$

Como $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x \in A$, entonces f es medible, $f_n(x) \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in A$.

Por el lema de Fatou
$$\int_A f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n$$
Por otro lado, dado $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in A$

Por la monotonía de la integral $\int_A f_n(x) \leqslant \int_A f(x)$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n(x) \leqslant \int_A f(x)$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n(x) \leqslant \int_A f(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f \qquad \blacksquare$$

COROLARIO 1.1. *Si las funciones f_n son medibles no negativas, se tiene*

$$\int_A \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_A f_n$$

TEOREMA 1.6. (Convergencia dominada de Lebesgue)

Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ medible, y (f_n) una sucesión de funciones medibles, sea g una función integrable, tal que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, $\forall x \in A, n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. en A, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f.$$

Demostración

Puesto que $|f_n| \leqslant g$, $|f_n|$ es integrable, $\forall n \in \mathbb{N}$ y de esta manera f_n^+ y f_n^- son integrables, por tanto $f_n = f_n^+ - f_n^-$ es integrable.

Fijemos $x \in A$, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x)| \leqslant g(x)$ $a.e.$ en A

$\Rightarrow |f|$ es integrable sobre A

$\Rightarrow f$ es integrable sobre A

Dado $n \in \mathbb{N}$, $g - f_n \geqslant 0$ y $\lim_{n\to\infty} (g - f_n)(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$ $a.e.$ en A.

Por el lema de Fatou, y el hecho que g es integrable se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_A (f - g) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A (g - f_n) \\
\int_A g - \int_A f &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A g - \int_A f_n \\
\int_A g - \int_A f &\leqslant \int_A g - \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n \leqslant \int_A f$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, $f_n + g \geqslant 0$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) + g(x) = f(x) + g(x) \geqslant 0$ $a.e.$ en A.

Por el lema de Fatou, y el hecho que g es integrable se tiene,

$$\begin{aligned}\int_A (f+g) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A (g+f_n)\\ \int_A g + \int_A f &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A g + \int_A f_n\\ \int_A g + \int_A f &\leqslant \int_A g + \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_A f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n$$

Por tanto, $\displaystyle\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n$ ■

TEOREMA 1.7. (Versión continua del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)
Sean $(f_\lambda)_{\lambda\in K}$, una familia de funciones medibles sobre $E \subset \mathbb{R}^d$ medible y g una funcion integrable tal que, $|f_\lambda| \leqslant g$, $\forall\lambda \in K$, K un cubo en $\mathbb{R}^m$. Si $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(x) = f(x)$, a.e. en E, $\lambda_0 \in K$, entonces f es integrable sobre E y

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_E f_\lambda(x) = \int_E f(x)dx$$

TEOREMA 1.8. (Fubini)
Sea f una función medible definida en $A\times B$ donde A y B son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^d$. Si f es integrable en $A \times B$, se cumple

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy\right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx\right) dy$$

DEFINICIÓN 1.13. *Para $p > 0$, se define el espacio $L^p(\mathbb{R}^d)$, como el espacio de funciones medibles definidas en $\mathbb{R}^d$ tales que, $|f|^p$ es integrable. $L^p(\mathbb{R}^d)$ tiene estructura de espacio vectorial por la linealidad de la integral de Lebesgue.*
Si $1 \leqslant p < \infty$, la expresión

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

define una semi-norma en $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Observación 1.4. *Hay que identificar las funciones que coinciden en casi todo punto para que $\|f\|_p = 0$ implique $f = 0$ y así $\|\cdot\|_p$ sea una norma en $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

La sucesión (f_n) *converge a* f *en* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, *y es de Cauchy si* $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$

Teorema 1.9. *El espacio* $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$ *es un espacio de Banach.*

Teorema 1.10. *Si la sucesión* (f_n) *converge a* f *en* $L^p(\mathbb{R}^d)$, *entonces existe una subsucesión de* (f_n) *que converge a* f *en casi todo punto.*

Teorema 1.11. (Continuidad de la integral respecto a traslaciones)
Si f *está en* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *para* $1 \leqslant p < \infty$, *entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_p = 0$$

Teorema 1.12. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *para algún* $j \in \{1, \cdots, d\}$, *entonces* $\lim\limits_{x_j\to+\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x_j\to-\infty} f(x)$ *existen y además* $\lim\limits_{x_j\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x_j\to-\infty} f(x) = 0$

Definición 1.14. (Funciones esencialmente acotadas)
Se define el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *como el espacio de las funciones esencialmente acotadas, es decir,* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *si existe* $M > 0$ *tal que* $|f(x)| \leqslant M$ *a.e. en* $\mathbb{R}^d$. *El mínimo de los posibles valores* M *en la desigualdad anterior es la norma de* f *en* $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Esto es* $\|f\|_\infty = \inf\{M : |f(x)| \leqslant M \ \ a.e.\}$

El espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ es el único de los espacios $L^p(\mathbb{R}^d)$ que es de Hilbert; su producto interno viene dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f\overline{g}$$

Teorema 1.13. (Desigualdad de Hölder)
Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *y* $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *entonces* $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *y se cumple que*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$$

El caso $p = q = 2$ *se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwartz.*

Teorema 1.14. (Desigualdad integral de Minkowsky)
Sea f, *una función medible no negativa y* $A \subset \mathbb{R}^d$, $B \subset \mathbb{R}^d$ *y* $1 \leqslant p < \infty$, *entonces se tiene que:*

$$\left(\int_B \left(\int_A f(x,y)dx\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_A \left(\int_B (f(x,y))^p dy\right)^{\frac{1}{p}} dx$$

Teorema 1.15. *Sea* $0 < p_0 < p < p_1$ *y supongamos que* $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$. *Entonces* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Demostración Ver [6]

Teorema 1.16. *Sea* $0 < p_0 < p < p_1$ *y supongamos que* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. *Entonces existen funciones* $f_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ *y* $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ *tales que* $f = f_0 + f_1$

Demostración Ver [6]

Los dos teoremas anteriores pueden enunciarse de la siguiente manera

Teorema 1.17. *Sea* $0 < p_0 < p < p_1$, *entonces*

$$L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^{p_0}(\mathbb{R}^d) + L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$$

Demostración Ver [6]

Teorema 1.18. $|e^{i\theta} - 1| \leqslant |\theta|, \forall\theta \in \mathbb{R}$

Demostración

Sea $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |e^{i\theta} - 1|^2 &= (cos(\theta) - 1)^2 + sen^2(\theta) \\ &= cos^2(\theta) + sen^2(\theta) - 2cos(\theta) + 1 \\ &= 2 - 2cos(\theta) \\ &= 2(1 - cos(\theta)) \\ &= 4sen^2(\frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

$|e^{i\theta} - 1| = 2|sen(\frac{\theta}{2})| \leqslant 2\frac{|\theta|}{2} = |\theta|$

§1.4. Convolución de funciones

Definición 1.15. Convolución

Sean f, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *se define su convolución* $f * g$ *como*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

En vista de que $f,\, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y el teorema de Fubini, se prueba que $f * g$ está en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$$

en efecto:

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy|dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dx \right) dy \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}$$

Observación 1.5. *El resultado anterior nos muestra que la convolución de dos funciones $f,\, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, es una función en $L^1(\mathbb{R}^d)$. Si suponemos que ambas funciones f y g son positivas se cumple la igualdad $\|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.*

TEOREMA 1.19. (Aproximación de la identidad)
Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, con $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g(x) = 1$. Para $\lambda > 0$ sea $g_\lambda(x) = \lambda^{-d} g(\lambda^{-1}x)$.
Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces

$$\lim_{\lambda \to 0} \|g_\lambda * f - f\|_p = 0$$

Capítulo 2

Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$

§2.1. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$

Definición 2.1.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, se define la transformada de Fourier de f, la cual denotaremos $\widehat{f}$, por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \ \ , \forall\, \xi \ \in \ \mathbb{R}^d$$

Para x, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $x \cdot \xi$ denota el producto interno en $\mathbb{R}^d$.
Puesto que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, se tiene que, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty$
Así,

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty$$

por tanto $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, está bien definida.

Proposición 2.1. (Propiedades algebraicas)
Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y α, $\beta \in \mathbb{C}$, entonces

1. $(\alpha f + \beta g)\widehat{\ } = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$ *(Linealidad)*

2. $(\overline{f})\widehat{\ }(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$ *(Conjugación)*

3. *Si* $\tau_h f(x) = f(x+h)$, *entonces* $(\tau_h f)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i h \cdot \xi}$ *(Traslación)*

4. *Si* $g(x) = f(x) e^{2\pi i h \cdot x}$, *entonces* $\widehat{g}(\xi) = \tau_{-h} \widehat{f}(\xi)$ *(Modulación)*

5. *Si* $g(x) = \lambda^{-d} f(\lambda^{-1}x)$ *y* $\lambda > 0$, *entonces* $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi)$ *(Dilatación)*

Demostración

1. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y α, $\beta \in \mathbb{C}$.
   Para $\xi \in \mathbb{R}^d$, usando la linealidad de la integral de Lebesgue

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\alpha f + \beta g)(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \alpha f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx + \int_{\mathbb{R}^d} \beta g(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx + \beta \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \alpha\widehat{f}(\xi) + \beta\widehat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
   Para $\xi \in \mathbb{R}^d$, usando propiedades del conjugado

$$\begin{aligned}
(\overline{f})\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x) e^{2\pi i x\cdot\xi}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x) e^{-2\pi i x\cdot(-\xi)}} dx \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot(-\xi)} dx} \\
&= \overline{\widehat{f}(-\xi)}
\end{aligned}$$

3. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Para $\xi \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$ y haciendo el cambio de variable $u = x + h$ se tiene,

$$\begin{aligned}
(\tau_h f)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \tau_h f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+h) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-2\pi i (u-h)\cdot\xi} du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-2\pi i u\cdot\xi} e^{2\pi i h\cdot\xi} du \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-2\pi i u\cdot(\xi)} du\right) e^{2\pi i h\cdot\xi} \\
&= \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i h\cdot\xi}
\end{aligned}$$

4. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

   Para $\xi \in \mathbb{R}^d$ y $h \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
\tau_{-h}\widehat{f}(\xi) &= \widehat{f}(\xi - h) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot(\xi-h)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{2\pi i x\cdot h} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i x\cdot h} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \widehat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

5. Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

   Para $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$ y haciendo $u = \lambda^{-1}x$, $du = \lambda^{-d}dx$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{-d} f(\lambda^{-1}x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{-d} f(u) e^{-2\pi i \lambda u\cdot\xi} \lambda^d du \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi i u\cdot\lambda\xi} du \\
&= \widehat{f}(\lambda\xi)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

PROPOSICIÓN 2.2. (Propiedades analíticas)

1. *$\widehat{f}$ es una función uniformemente continua y $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^d$*
2. *Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall j \in \{1, \cdots, d\}$ entonces,*
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\widehat{\ }(\xi) = 2\pi i\xi_j \widehat{f}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ y } \forall j \in \{1, \cdots, d\}$$
3. *Si f y $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall j \in \{1, \cdots, d\}$ entonces, $\widehat{f}$ es derivable y*
$$\frac{\partial \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi_j} = (-2\pi i x_j f)\widehat{\ }(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ y } \forall j \in \{1, \cdots, d\}.$$
4. *Lema de Riemann-Lebesgue. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lim\limits_{\|\xi\| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$*
5. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g$*

Demostración

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y ξ, h, $\in \mathbb{R}^d$.

   Consideremos la diferencia:
$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi - 2\pi i x\cdot h}dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}e^{-2\pi i x\cdot h}dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}(e^{-2\pi i x\cdot h} - 1)dx
\end{aligned}$$
   Como $|e^{-2\pi i x\xi}| = 1$, se tiene $|\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)||e^{-2\pi i x h} - 1|dx$
   Veamos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)||e^{-2\pi i x h} - 1|dx \to 0$, cuando $h \to 0$
   Para cada $h \in \mathbb{R}^d$, $f(x)(e^{-2\pi i x\cdot h} - 1)$ es medible, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y
$$\begin{aligned}
|f(x)||e^{-2\pi i x\cdot h} - 1| &\leqslant |f(x)|(|e^{-2\pi i x\cdot h}| + |1|) \\
&= 2|f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}|f(x)||e^{-2\pi i x\cdot h}-1| &= |f(x)|\lim_{h\to 0}|e^{-2\pi i x\cdot h}-1|\\ &= |f(x)|0\\ &= 0 \qquad a.e.\end{aligned}$$

por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)||e^{-2\pi i x\cdot h}-1|dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\lim_{h\to 0}|f(x)||e^{-2\pi i x\cdot h}-1|dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}0dx\\ &= 0\end{aligned}$$

Así, Dado $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$: $\|h\|<\delta \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)||e^{-2\pi i x\cdot h}-1|dx<\varepsilon$

$\Rightarrow |\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)|\leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)||e^{-2\pi i x\cdot h}-1|dx<\varepsilon,\ \forall\ \xi\in\mathbb{R}^d$

Por tanto, $\widehat{f}$ es uniformemente continua.

Además se tiene que,

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &= |\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx|\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)||e^{-2\pi i x\cdot\xi}|dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx\\ &= \|f\|_1,\forall\xi\in\mathbb{R}^d\end{aligned}$$

Observación 2.1. *De este resultado se desprende que la transformada de Fourier es una transformacion lineal acotada. Es decir, si consideramos la aplicación $T:L^1(\mathbb{R}^d)\to L^\infty(\mathbb{R}^d)$ dada por $T(f)=\widehat{f}$, se tiene que T es lineal y acotada, más aún $\|\widehat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$.*

2. Sean f, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall j\in\{1,\cdots,d\}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)\widehat{}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \tag{2.1}$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}|dx < \infty$, por el Teorema 1.12, $\displaystyle\lim_{x_j \to +\infty} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x_j \to -\infty} f(x)$ existen y además $\displaystyle\lim_{x_j \to +\infty} f(x) = \lim_{x_j \to -\infty} f(x) = 0$, de manera que integrando (2.1) por partes se obtiene,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\widehat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \left(\prod_{j=1}^{d} e^{-2\pi i x_j.\xi_j}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \prod_{j=1}^{d} e^{-2\pi i x_j.\xi_j} dx_j\right) dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} e^{-2\pi i x_j.\xi_j} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} e^{-2\pi i x_k.\xi_k} dx_k\right) dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} e^{-2\pi i x_j.\xi_j} \left(f(x)e^{-2\pi i x_k.\xi_k}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i\xi_k \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x_k.\xi_k} dx_k\right) dx'
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\widehat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} e^{-2\pi i x_j.\xi_j} \left(2\pi i\xi_k \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x_k.\xi_k} dx_k\right) dx' \\
&= 2\pi i\xi_k \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \prod_{j=1}^{d} e^{-2\pi i x_j.\xi_j} dx \\
&= 2\pi i\xi_k \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= 2\pi i\xi_k \widehat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\widehat{}(\xi) = 2\pi i\xi_k \widehat{f}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ y } \forall j \in \{1, \cdots, d\}$$

3. Sean f y $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall\ j \in \{1, \cdots, d\}$.
   Fijemos $j \in \{1, \cdots, d\}$ y consideremos el cociente incrementado de $\widehat{f}$.

Para cada $h \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{f}(\xi + he_j) - \widehat{f}(\xi)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot(\xi+he_j)}dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}e^{-2\pi i x\cdot he_j}dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}(e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{(e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1)}{h}dx
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{\widehat{f}(\xi + he_j) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{(e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1)}{h}dx$$

Para cada $h \neq 0$ la función $f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\dfrac{(e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1)}{h}$ es medible. Usando el Teorema 1.18

$$\begin{aligned}
|f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{(e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1)}{h}| &= |f(x)||e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{(e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1)}{h}|\\
&\leqslant |f(x)||\frac{1}{h}||2\pi x h e_j|\\
&= 2\pi|x_j||f(x)|\ ,\ \forall\ h > 0
\end{aligned}$$

por tanto la función $f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\dfrac{(e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1)}{h}$ está acotada por $2\pi|x_j||f(x)|$, la cual está en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Luego,

$$\lim_{h\to 0} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1}{h} = (-2\pi i x_j)f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi},\ \ a.e.$$

ya que $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\frac{e^{-2\pi i x\cdot he_j} - 1}{h}dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}(-2\pi i x_j)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}(-2\pi i x_j f(x))e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx\\
&= (-2\pi i x_j f)\widehat{\ }(\xi)
\end{aligned}$$

Por tanto, $\widehat{f}$ es diferenciable y $\dfrac{\partial\widehat{f}(\xi)}{\partial\xi_j} = (-2\pi i x_j f)\widehat{\ }(\xi)$, $\forall\xi \in \mathbb{R}^d$ y $\forall j \in \{1, \cdots, d\}$.

4. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

   Dado $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$, existe $k \in \{1, \cdots, d\}$ tal que, $\xi_k \neq 0$. Consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned} -e^{\pi i}\widehat{f}(\xi) &= -e^{\pi i}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{\pi i-2\pi i x\cdot\xi}dx \end{aligned}$$

   Haciendo $u = x - \frac{1}{2\xi_k}e_k$, $du = dx$. Así,

$$\begin{aligned} -e^{\pi i}\widehat{f}(\xi) &= -\int_{\mathbb{R}^d} f\left(u+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)e^{\pi i-2\pi i\left(u+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)\cdot\xi}du \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f\left(u+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)e^{\pi i-2\pi i u\cdot\xi}e^{-2\pi i\frac{1}{2\xi_k}e_k\cdot\xi}du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -e^{\pi i}\widehat{f}(\xi) &= -\int_{\mathbb{R}^d} f\left(u+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)e^{\pi i-2\pi i u\cdot\xi}e^{-2\pi i\frac{1}{2\xi_k}\cdot\xi_k}du \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f\left(u+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)e^{\pi i-2\pi i u\cdot\xi}e^{-\pi i}du \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f\left(u+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)e^{-2\pi i u\cdot\xi}du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) - e^{\pi i}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx - \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\ (1-e^{\pi i})\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left[f(x) - f\left(x+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)\right]e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \end{aligned}$$

   Así, $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(x) - f\left(x+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)\right|dx$

   Haciendo $\|\xi\| \to \infty$, existe k $\in \{1, \cdots, d\}$ tal que, $\xi_k \to \infty$ y por tanto $\frac{1}{2\xi_k}e_k \to 0$ por Teorema 1.11 (continuidad de la integral respecto a traslaciones), se obtiene que:

$$\lim_{\|\xi\|\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(x) - f\left(x+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)\right|dx = 0$$

   En consecuencia,

$$\lim_{\|\xi\|\to\infty}|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\lim_{\|\xi\|\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(x) - f\left(x+\frac{1}{2\xi_k}e_k\right)\right|dx = 0$$

Esto es ,

$$\lim_{\|\xi\|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

5. Sean f, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Usando el teorema de Fubini se tiene que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi i x\cdot y}dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot y}dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\widehat{f}(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)g(y)dy
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.1. *Un resultado que usaremos adelante es el siguiente,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|s\|^2}ds = 1$$

En efecto, haciendo $u = \sqrt{\pi}s$, $du = (\sqrt{\pi})^d ds$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|s\|^2}ds &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|u\|^2}\frac{du}{(\pi)^{\frac{d}{2}}} \\
&= \frac{1}{(\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|u\|^2}du \\
&= \frac{(\pi)^{\frac{d}{2}}}{(\pi)^{\frac{d}{2}}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2. *Dada la función $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$, se tiene que $\widehat{f} = f$.*

En efecto,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|x\|^2}e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(\pi\|x\|^2+2\pi i x\cdot\xi)}dx
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}-(\pi\|x\|^2+2\pi i x\cdot\xi) &= -(\pi\sum_{j=1}^{d}x_j^2+2\pi i\sum_{j=1}^{d}x_j\xi_j)\\ &= -\sum_{j=1}^{d}(\pi x_j^2+2\pi i x_j\xi_j)\end{aligned}$$

usando propiedades de la exponencial se tiene,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}e^{-(\pi x_j^2+2\pi i x_j\xi_j)}dx\\ &= \prod_{j=1}^{d}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-(\pi x_j^2+2\pi i x_j\xi_j)}\right)dx_j\\ &= \prod_{j=1}^{d}\widehat{g}(\xi_j)\end{aligned}$$

donde $g(x)=e^{-\pi|x|^2}, x\in\mathbb{R}$. Calcularemos la transformada para el caso $d=1$, es decir, $\widehat{g}(\xi),\xi\in\mathbb{R}$.
Para ello derivemos la función

$$g'(x)=-2\pi x e^{-2\pi x^2}=-2\pi x g(x). \tag{2.2}$$

Como g, $xg(x)=xe^{-\pi x^2}\in L^1(\mathbb{R})$, usando la propiedad analítica 2 y 3 Proposición 2.2, deducimos que $-i(\widehat{g})'(\xi)=2\pi\xi\widehat{g}(\xi)$, en efecto
Sustituyendo (2.2) en la propiedad analítica 2, se tiene la siguiente ecuación

$$(-2\pi x g)\widehat{\ }(\xi)=2\pi i\xi\widehat{g}(\xi). \tag{2.3}$$

de la propiedad analítica 3 como la transformada es lineal obtenemos
$i\,(-2\pi x g)\widehat{\ }(\xi)=(\widehat{g})'(\xi)$, y por la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned}(\widehat{g})'(\xi) &= i\,(-2\pi x g)\widehat{\ }(\xi)\\ &= i(2\pi i\xi\widehat{g}(\xi))\\ &= -2\pi\xi\widehat{g}(\xi)\end{aligned}$$

Por tanto, $-i(\widehat{g})'(\xi)=2\pi\xi\widehat{g}(\xi)$. Así, g y $\widehat{g}$ son solución de la misma ecuación diferencial lineal de primer orden, por tanto, son linealmente dependiente, es decir,

existe $C \in \mathbb{R}$ tal que, $\widehat{g} = Cg$.
Para determinar el valor de la constante C hagamos $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \widehat{g}(0) &= Cg(0) \\ &= C1 \\ &= C \end{aligned}$$

Por tanto, $C = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$.
Así, $\forall\ j \in \{1, \cdots, d\}$, $\widehat{g}(\xi_j) = e^{-\pi\xi_j^2}$
Luego

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= e^{-\pi\xi_1^2}e^{-\pi\xi_2^2}\cdots e^{-\pi\xi_d^2} \\ &= e^{-\pi\|\xi\|^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\widehat{f} = f$$

Ejemplo 2.3. *Sea $f(x) = e^{-2\pi\|x\|}$, calculemos $\widehat{f}$.*

Usando la fórmula de la subordinación de Bochner

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{\frac{-\lambda^2}{4u}}, \quad \lambda > 0$$

el teorema de Fubini, y haciendo los cambios de variable $y = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}}x$, $dy = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}}\right)^d dx$; $w = (1 + \|\xi\|^2)u$, $dw = (1 + \|\xi\|^2)^d du$ se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi\|x\|}e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{\frac{-(2\pi\|x\|)^2}{4u}}du\right)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{\frac{-\pi^2\|x\|^2}{u}}e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx\right)du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\|\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}}x\|^2}e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx\right)du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\|y\|^2}e^{-2\pi i(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}})y\cdot\xi}(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}})^d dy\right)du \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} (\sqrt{u})^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|y\|^2} e^{-2\pi i y \cdot (\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\xi)} dy \right) du \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d+1}} \int_0^\infty e^{-u} (\sqrt{u})^{d-1} \left(e^{-\pi\|\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\xi\|^2} \right) du \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d+1}} \int_0^\infty e^{-u} (\sqrt{u})^{d-1} e^{-u\|\xi\|^2} du \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d+1}} \int_0^\infty e^{-(1+\|\xi\|^2)u} u^{\frac{d-1}{2}} du \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d+1}} \int_0^\infty e^{-w} \left(\frac{w}{1+\|\xi\|^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{1}{1+\|\xi\|^2} \right) dw
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d+1}} \int_0^\infty e^{-w} w^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{1}{1+\|\xi\|^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} dw \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d+1}} \left(\frac{1}{1+\|\xi\|^2} \right)^{\frac{d-1}{2}} \int_0^\infty e^{-w} w^{\frac{d-1}{2}} dw \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d+1}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(1+\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(1+\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(1+\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

Para $d = 1$, se tiene la siguiente ecuación

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi(1+\xi^2)}$$

Ejemplo 2.4. *Usando el ejemplo anterior se puede calcular la transformada de Fourier de $h(x) = e^{-\lambda\|x\|}$ para $\lambda > 0$. En efecto*

Sea

$$h(x) = e^{-\lambda\|x\|} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^d g(x),$$

donde $g(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^d e^{-\lambda\|x\|}$ y $e^{-\lambda\|x\|} = e^{-\|\lambda x\|} = e^{-2\pi\|\frac{\lambda x}{2\pi}\|} = f\left(\frac{\lambda x}{2\pi}\right)$, f es la función del Ejemplo 2.2.

Así, $g(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^d e^{-\lambda\|x\|} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^d f\left(\frac{\lambda x}{2\pi}\right)$, por la propiedad de dilatación Proposición 2.1 se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right) &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}\left(1+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\|\xi\|^2\right)^{\frac{d+1}{2}}}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}\left(\frac{\lambda^2+4\pi^2\|\xi\|^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{d+1}{2}}}\\ &= \frac{\lambda^{d+1}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}(\lambda^2+4\pi^2\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}\end{aligned}$$

y usando la linealidad de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\xi) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^d \widehat{g}(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^d \frac{\lambda^{d+1}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}(\lambda^2+4\pi^2\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}\\ &= \frac{2^d\pi^d}{\lambda^d}\frac{\lambda^{d+1}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}(\lambda^2+4\pi^2\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}\\ &= \frac{2^d\lambda\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(\lambda^2+4\pi^2\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}\end{aligned}$$

Por tanto

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{2^d\lambda\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(\lambda^2+4\pi^2\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

Para $d = 1$ se tiene la siguiente ecuación

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2\xi^2} \tag{2.4}$$

LEMA 2.1. *Si $\lambda > 0$ y $g(x) = \frac{1}{\lambda^d}e^{-\pi\frac{\|x\|^2}{\lambda^2}}$, entonces $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi\lambda^2\|\xi\|^2}$*

Demostración

Sea $g(x) = \frac{1}{\lambda^d}e^{-\pi\frac{\|x\|^2}{\lambda^2}}$, escribiremos $g(x) = \lambda^{-d}e^{-\pi\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right)^2} = \lambda^{-d}f\left(\lambda^{-1}x\right)$, donde f es la función del Ejemplo 2.2. Luego por la propiedad de dilatación Proposición 2.1, tenemos que $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi) = e^{-\pi\lambda^2\|\xi\|^2}$.

Así,

$$\left(\lambda^{-d}e^{-\pi\frac{\|\cdot\|^2}{\lambda^2}}\right)\widehat{\ }(\xi) = e^{-\pi\lambda^2\|\xi\|^2}$$

■

§2.1.1. Fórmula de inversión en $L^1(\mathbb{R}^d)$

TEOREMA 2.1. *Si f y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi \qquad a.e.$$

Además, el término de la derecha es una función continua en x, de modo que f coincide en casi todo punto con una función continua y se da la igualdad en los puntos de continuidad de f.

Demostración

Sean f y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Utilizando el Lema 2.1, la propiedad analítica 5 Proposición 2.2 y propiedad algebraica 3 Proposición 2.1, se deduce que, para $t > 0$

$$\frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)e^{-\pi\frac{\|y\|^2}{t^2}}dy = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)e^{-\pi\frac{\|y\|^2}{t^2}}dy &= \frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)(t^d e^{-\pi t^2\|\cdot\|^2})\widehat{\ }(y)dy \\
&= \frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d} \tau_x f(y)(t^d e^{-\pi t^2\|\cdot\|^2})\widehat{\ }(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_x f)\widehat{\ }(\xi)e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}d\xi
\end{aligned}$$

$\forall t > 0$, $\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}$ es medible y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

$$|\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}e^{-\pi\|\xi\|^2t^2}| = |\widehat{f}(\xi)e^{-\pi\|\xi\|^2t^2}| = e^{-\pi\|\xi\|^2t^2}|\widehat{f}(\xi)| \leqslant |\widehat{f}(\xi)|\ ,\forall\ t > 0$$

Luego,

$$\lim_{t\to 0}|\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}| = \lim_{t\to 0} e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}|\widehat{f}(\xi)| = |\widehat{f}(\xi)|, a.e.$$

ya que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)e^{-\pi\frac{\|y\|^2}{t^2}}dy &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{t\to 0} e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi
\end{aligned}$$

Ahora para $\dfrac{1}{t^d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)e^{-\pi\frac{\|y\|^2}{t^2}}dy$ hacemos el cambio de variable $y = ts$, lo que implica que $dy = t^d ds$

De esta manera se tiene que, $\dfrac{1}{t^d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)e^{-\pi\frac{\|y\|^2}{t^2}}dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+ts)e^{-\pi\|s\|^2}ds$

Como

$$\frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)e^{-\pi\frac{\|y\|^2}{t^2}}dy = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}d\xi$$

y

$$\frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)e^{-\pi\frac{\|y\|^2}{t^2}}dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+ts)e^{-\pi\|s\|^2}ds$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}e^{-\pi t^2\|\xi\|^2}d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+ts)e^{-\pi\|s\|^2}ds$$

Veamos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(\cdot+ts)e^{-\pi\|s\|^2}ds \to f$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$, cuando $t \to 0$.
Usando el teorema de Fubini y el hecho que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|x\|^2}ds = 1$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\mathbb{R}^d} f(\cdot+ts^d)e^{-\pi\|s\|^2}ds - f\right\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x+ts)e^{-\pi\|s\|^2}ds - f(x)\right|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} (f(x+ts)-f(x))e^{-\pi\|s\|^2}ds\right|dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+ts)-f(x)|\, e^{-\pi\|s\|^2}dsdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+ts)-f(x)|dx\right)ds
\end{aligned}$$

por otro lado, haciendo $u = x + ts$

$$\begin{aligned}
e^{-\pi\|s\|^2}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+ts)-f(x)|dx &\leqslant e^{-\pi\|s\|^2}\int_{\mathbb{R}^d} (|f(x+ts)|+|f(x)|)\,dx \\
&= e^{-\pi\|s\|^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+ts)|dx + \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx\right) \\
&= e^{-\pi\|s\|^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|du + \|f\|_1\right) \\
&= 2e^{-\pi\|s\|^2}\|f\|_1\,, \forall\, t > 0,\ s\ \in\ \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

y $2e^{-\pi\|s\|^2}\|f\|_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Además, se tiene por continuidad de la integral respecto a traslaciones Teorema 1.11,

que

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+ts)-f(x)|dx=0$$

Por teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\|s\|^2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+ts)-f(x)|dx\right)ds\\
=&\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\|s\|^2}\left(\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+ts)-f(x)|dx\right)ds\\
=&\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\|s\|^2}(0)ds\\
=&\ 0
\end{aligned}$$

por tanto, $\left\|\int_{\mathbb{R}^d}f(\cdot+ts)e^{-\pi\|s\|^2}ds-f\right\|_1\to 0, t\to 0$

Consideremos (t_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que, $t_n\to 0$, $n\to\infty$.
Así,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi t_n^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i(\cdot)\cdot\xi}d\xi-f\right\|_1=0$$

Definamos $g_n(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi t_n^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$, (g_n) converge a f en $L^1(\mathbb{R}^d)$, por Teorema 1.10 existe una subsucesión (g_{n_k}) de (g_n) tal que,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi t_{n_k}^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi=f(x)\ a.e.$$

(g_{n_k}) es medible, $\forall k\in\mathbb{N}$ y $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^d)$. Así,

$$\begin{aligned}
\forall\ k\ \in\ \mathbb{N}\ ,\left|e^{-\pi t_{n_k}^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\right| &= \left|e^{-\pi t_{n_k}^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)\right|\\
&= e^{-\pi t_{n_k}^2\|\xi\|^2}\left|\widehat{f}(\xi)\right|\\
&\leqslant \left|\widehat{f}(\xi)\right|
\end{aligned}$$

y $\lim\limits_{k\to\infty}e^{-\pi t_{n_k}^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}=\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}$ $a.e.$
por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se concluye que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi t_{n_k}^2\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi=f(x)\qquad a.e.$$

Por tanto,

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi,\ a.e.$$

■

Corolario 2.1. *Si* $f,\, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *y*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi \ \ a.e.$$

entonces $\widehat{g}(x) = f(x)$ *a.e.*.

Demostración

Sean f y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Se tiene que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i x\cdot(-\xi)} dx = g(-\xi) \ \ a.e.$$

Como $g = \widehat{f}$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, usando la formula de inversión Teorema 2.1 y haciendo $u = -\xi$ se tiene

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} g(-\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-2\pi i x\cdot u} du = \widehat{g}(x) \ \ a.e.$$

Por tanto $f(x) = \widehat{g}(x)$ *a.e.* ■

Corolario 2.2. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *y* $\widehat{f} = 0$ *a.e., entonces* $f = 0$ *a.e.*.

Demostración

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, como $\widehat{f} = 0$ *a.e.* entonces, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por la formula de inversión Teorema 2.1, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi && a.e. \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 0 e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi && a.e. \\ &= 0 && a.e. \end{aligned}$$

Así, $f(x) = 0$ *a.e.* $x \in \mathbb{R}^d$. ■

§2.1.2. Transformada de Fourier de la convolución de dos funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Teorema 2.2. *Si* f *y* $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *entonces* $(f * g)\widehat{}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

Demostración

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y $\xi \in \mathbb{R}^d$. Usando el teorema de Fubini y haciendo el cambio de variable $u = x - y$.

$$\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) g(y) e^{-2\pi i (u+y) \cdot \xi} dy du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) g(y) e^{-2\pi i u \cdot \xi} e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-2\pi i u \cdot \xi} g(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-2\pi i u \cdot \xi} du \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

■

Cuando $g(x) = \overline{f(-x)}$, la convolución se llama correlación y se escribe $f \star f$, es decir, $f \star f(x) := f * g(x)$.

COROLARIO 2.3. $(f \star f)\widehat{\ }(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2$

Demostración

Sea $g(x) = \overline{h(x)}$, donde $h(x) = f(-x)$.

Así,

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(-x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \widehat{f}(-\xi)
\end{aligned}$$

por tanto $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$.

Por propiedad algebraica 3 Proposición 2.1, $\widehat{g}(\xi) = \widehat{\overline{h}}(\xi) = \overline{\widehat{h}(-\xi)} = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.

De esta manera por Teorema 2.2,

$$\begin{aligned}
(f \star f)\widehat{\ }(\xi) &= (f * g)\widehat{\ }(\xi) \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \\
&= \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)} \\
&= |\widehat{f}(\xi)|^2
\end{aligned}$$

■

§2.2. Resultados de sumabilidad

§2.2.1. Sumabilidad Cesáro

Consiste en hacer promedios de las sumas parciales de la serie de Fourier. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definamos σf por

$$\begin{aligned} \sigma f(x) &= \frac{1}{R}\int_0^R S_r f(x) dr \\ &= \frac{1}{R}\int_0^R \int_{-r}^{r} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi dr \end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma f(x) &= \frac{1}{R}\int_{-R}^R \int_{|\xi|}^{R} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} dr d\xi \\ &= \frac{1}{R}\int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} \left(R - |\xi|\right) d\xi \\ &= \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \end{aligned}$$

Probemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \chi_{(-R,R)}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \frac{1}{R}\left(\frac{sen(\pi R x)}{\pi x}\right)^2$$

En efecto, probaremos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (1-|u|)\chi_{(-1,1)} e^{2\pi i u x} du = \frac{sen^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$.

Haciendo $w = -u$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (1-|u|)\chi_{(-1,1)} e^{2\pi i u x} du &= \int_{-1}^1 (1-|u|) e^{2\pi i u x} du \\ &= \int_0^1 (1-u) e^{2\pi i u x} du + \int_{-1}^0 (1+u) e^{2\pi i u x} du \\ &= \int_0^1 (1-u) e^{2\pi i u x} du - \int_1^0 (1-w) e^{-2\pi i w x} dw \\ &= \int_0^1 ((1-u) e^{2\pi i u x} + (1-u) e^{-2\pi i u x}) du \\ &= \int_0^1 (1-u)(e^{2\pi i u x} + e^{-2\pi i u x}) du \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-|u|)e^{2\pi iux}du &= 2\int_0^1(1-u)cos(2\pi iux)du \\
&= 2\left[\frac{(1-u)sen(2\pi ux)}{2\pi x}\right]_0^1 + 2\frac{1}{2\pi x}\int_0^1 sen(2\pi ux)du \\
&= \frac{1}{\pi x}\int_0^1 sen(2\pi ux)du \\
&= \frac{1}{\pi x}\left(-\frac{cos(2\pi ux)}{2\pi x}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2(\pi x)^2}(-cos(2\pi x)+1) \\
&= \frac{1}{(\pi x)^2}(\frac{1-cos(2\pi x)}{2}) \\
&= \frac{sen^2(\pi x)}{(\pi x)^2}
\end{aligned}$$

denotaremos $F_1(x) = \dfrac{sen^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$.
Así, para $R > 0$,

$$F_1(Rx) = \frac{sen^2(\pi Rx)}{(\pi Rx)^2} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{sen(\pi Rx)}{\pi x}\right)^2$$

haciendo $F_R(x) = RF_1(Rx)$ entonces $F_R(x) = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{sen(\pi Rx)}{\pi x}\right)^2, R > 0$
llamaremos núcleo de Fejér a la función $F_R(x) = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{sen(\pi Rx)}{\pi x}\right)^2$.

F_R y $G_R(\xi) = \left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\chi_{(-R,R)}(\xi)$ son funciones en $L^1(\mathbb{R})$, y $F_R(x) = \int_{\mathbb{R}} G_R(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$ *a.e.*, entonces por el Corolario 2.1, $\widehat{F}_R(\xi) = G_R(\xi)$, *a.e.*, y como G_R es continua, $\widehat{F}_R(\xi) = G_R(\xi)$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$.

Además, por el Teorema 2.2 $(\sigma_R f\widehat{)}(\xi) = \widehat{F}_R(\xi)\widehat{f}(\xi)$ la cual está en $L^1(\mathbb{R})$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |(\sigma_R f)\widehat{\ }(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{F}_R(\xi)\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \chi_{(-R,R)}(\xi) \right| |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{(-R,R)} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leqslant \int_{(-R,R)} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \|f\|_1 d\xi \\
&= \|f\|_1 \int_{(-R,R)} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) d\xi \\
&= \|f\|_1 R
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$F_R * f(x) = \sigma f(x).$$

§2.2.2. Sumabilidad Abel-Poisson

Este método de sumabilidad consiste en hacer convergente la integral de la fórmula de inversión por la introducción del factor $e^{-2\pi t\|\xi\|}$ y hacer después tender t a cero. Es decir, estudiaremos

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi t\|\xi\|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi\|\xi\|} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \frac{1}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(1+\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

hagamos $P(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(1+\|x\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$

y para $t > 0$

$$\begin{aligned}
P_t(x) &= t^{-d} P\left(\frac{x}{t}\right) \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{t^{-d}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(1+\|\frac{x}{t}\|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \\
&= \frac{t^{-d}}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(1+\frac{\|x\|^2}{t^2})^{\frac{d+1}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{t}{(t^2+\|x\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}
\end{aligned}$$

Llamaremos núcleo de Poisson a la función $P_t(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \dfrac{t}{(t^2 + \|x\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$, $\forall t > 0$. P_t y $Q(\xi) = e^{-2\pi t\|\xi\|}$ son funciones en $L^1(\mathbb{R}^d)$, y $P_t(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} Q(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi$, *a.e.*, entonces por el Corolario 2.1, $\widehat{P_t}(\xi) = Q(\xi)$, *a.e.*, como Q es continua, $\widehat{P_t}(\xi) = Q(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

Para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $(P_t * f)\widehat{\ }(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(P_t * f)\widehat{\ }(\xi)|d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{P_t}(\xi)||\widehat{f}(\xi)|d\xi \\ &\leqslant \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi t\|\xi\|}d\xi \end{aligned}$$

donde $g(x) = e^{-2\pi t\|x\|}$ y por el Ejemplo 2.4, haciendo $\lambda = 2\pi t$, se tiene que

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{2^d(2\pi t)\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{((2\pi t)^2 + 4\pi^2\|\xi\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi t\|x\|}dx &= \widehat{g}(0) \\ &= \frac{2^d(2\pi t)\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{((2\pi t)^2)^{\frac{d+1}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}}t^d} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(P_t * f)\widehat{\ }(\xi)|d\xi &\leqslant \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi t\|\xi\|}d\xi \\ &= \|f\|_1 \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}}t^d} < \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widehat{P_t}(\xi)\widehat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y en consecuencia

$$P_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi t\|\xi\|}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi.$$

§2.2.3. Sumabilidad Gauss-Weierstrass

Este método consiste en hacer convergente la integral de la formula de inversión por la introducción de un factor $e^{-\pi t\|\xi\|^2}$ y hacer después tender t a cero. Es decir, estudiaremos

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t\|\xi\|^2}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

Probemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t\|\xi\|^2}e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi = \frac{1}{(\sqrt{t})^d}e^{-\pi\frac{\|x\|^2}{t}}$$

Haciendo $u=\sqrt{t}\xi$, $du=t^{\frac{d}{2}}d\xi$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t\|\xi\|^2}e^{2\pi i x\cdot\xi}s\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|\sqrt{t}\xi\|^2}e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi\\
&= \frac{1}{(\sqrt{t})^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|u\|^2}e^{2\pi i x\cdot\frac{u}{\sqrt{t}}}du\\
&= \frac{1}{(\sqrt{t})^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|u\|^2}e^{2\pi i\frac{x}{\sqrt{t}}\cdot u}du\\
&= \frac{1}{(\sqrt{t})^d}e^{-\pi\|\frac{x}{\sqrt{t}}\|^2}\\
&= \frac{1}{(\sqrt{t})^d}e^{-\pi\frac{\|x\|^2}{t}}
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t\|\xi\|^2}e^{2\pi i x\cdot\xi}s\xi = \frac{1}{(\sqrt{t})^d}e^{-\pi\frac{\|x\|^2}{t}} \tag{2.5}$$

Llamaremos núcleo de Gauss a la función $W_t(x)=\frac{1}{(\sqrt{t})^d}e^{-\pi\frac{\|x\|^2}{t}}$, $\forall t>0$
W_t y $H_t(\xi)=e^{-\pi t\|\xi\|^2}$ son funciones en $L^1(\mathbb{R}^d)$, y $W_t(x)=\int_{\mathbb{R}^d}H_t(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$ *a.e.*, entonces por el Corolario 2.1, $\widehat{W_t}(\xi)=H_t(\xi)$, *a.e.*; Como H_t es continua, $\widehat{W_t}(\xi)=H_t(\xi)$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$.

Además, para $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$(W_t * f)\widehat{\ } = \widehat{W_t}\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.6}$$

En efecto, haciendo $w = \sqrt{\pi t}\xi$, $dw = (\pi t)^{\frac{d}{2}} d\xi$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |(W_t * f)\widehat{\ }(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{W_t}(\xi)\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t\|\xi\|^2} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leqslant \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t\|\xi\|^2} d\xi \\
&= \frac{\|f\|_1}{(\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|w\|^2} dw \\
&= \frac{\|f\|_1}{(t)^{\frac{d}{2}}} < \infty
\end{aligned}$$

Así,

$$(W_t * f)\widehat{\ } = \widehat{W_t}\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

y en consecuencia

$$W_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t\|\xi\|^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi. \tag{2.7}$$

TEOREMA 2.3. Propiedades de los tres núcleos

1. *Los núcleos de Fejér, Poisson y Gauss son funciones pares no negativas.*

2. *Los tres núcleos tienen integral igual 1.*

TEOREMA 2.4. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y existen los limites laterales en un punto x, entonces*

$$\lim_{R\to\infty} \sigma_R f(x) = \lim_{t\to 0^+} P_t * f(x) = \lim_{t\to 0^+} W_t * f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

En particular el límite es f, en los puntos de continuidad.

Capítulo 3

Transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^d)$

§3.1. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$

Lema 3.1. *Si f, $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces su convolución define una función continua.*

Demostración
Sean f, $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, así $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 < \infty$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |g|^2 < \infty$

$$0 \leqslant (|f(x-y)| - |g(y)|)^2 = |f(x-y)|^2 - 2|f(x-y)g(y)| + |g(y)|^2 \ a.e.$$

$$\Rightarrow |f(x-y)g(y)| \leqslant \frac{1}{2}(|f(x-y)|^2 + |g(y)|^2) \ a.e.$$

Por la desigualdad de Hölder, haciendo el cambio $u = x - y$ y propiedades de la integral, se tiene

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\right| dy \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^2 dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^2 dy < \infty \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|^2 du + \frac{1}{2}\|g\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\|f\|_2^2 + \frac{1}{2}\|g\|_2^2, \ \forall\, x \in \ \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |f * g(x)| \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2) < \infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$.

Por tanto la convolución de f y g está bien definida.

Veamos que $f * g$ es continua. Usando la desigualdad de Hölder y el cambio de variable $z = x - y$.

$$\begin{aligned}
|f * g(x+h) - f * g(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^d} f(x+h-y)g(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^d} (f(x+h-y) - f(x-y))g(y)dy| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h-y) - f(x-y)||g(y)|dy \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h-y) - f(x-y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^2 dy\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z+h) - f(z)|^2 dz\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^2 dy\right)^{1/2} \\
&= \|f(\cdot + h) - f\|_2 \|g\|_2
\end{aligned}$$

Por continuidad de la integral a través de traslaciones , se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_2 = 0$$

y como $\|g\|_2 < \infty$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_2 \|g\|_2 = 0\|g\|_2 = 0$$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} |f * g(x+h) - f * g(x)| = 0$
Por tanto

$$\lim_{h\to 0} f * g(x+h) = f * g(x).$$

Así $f * g$ es continua. ■

PROPOSICIÓN 3.1. Igualdad de Plancherel en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$
Sea f una función en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ (es decir f y f^2 son integrables), entonces $\widehat{f}$ está en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y satisface

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Demostración

Si $f = 0, a.e.$, el resultado es inmediato. Sea f una función en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, tal que $f \neq 0, a.e.$, la correlación $f \star f$ es una función integrable por ser la convolución de dos funciones integrables, y es continua por el lema anterior.

Hagamos $F(w) = f \star f(w)$, F es integrable.

$$\begin{aligned} f \star f(0) &= f * g(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(w) g(0-w) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(w) g(-w) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(w) \overline{f(w)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(w)|^2 dt \end{aligned}$$

Usando el resultado de sumabilidad del Teorema 2.4 con el núcleo de Gauss, $\lim\limits_{t \to 0^+} W_t * F(x) = \frac{1}{2}[F(x^+) + F(x^-)] = F(x)$ en los puntos de continuidad de F. Como F es continua, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, en particular para $x = 0$ luego

$$\lim_{t \to 0^+} W_t * F(0) = F(0) = f \star f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 \tag{3.1}$$

Por la ecuación (2.7) y usando el Corolario 2.3 se verifica que

$$\begin{aligned} W_t * F(0) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t \|\xi\|^2} \widehat{F}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t \|\xi\|^2} (f \star f)\widehat{\ }(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t \|\xi\|^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Aplicando límite

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t \|\xi\|^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \lim_{t \to 0^+} W_t * F(0) = \|f\|_2^2 < 2\|f\|_2^2$$

Por tanto, existe $t_0 > 0$ *tal que*, $0 < t < t_0$ $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t \|\xi\|^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < 2\|f\|_2^2$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t \|\xi\|^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < 2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$$

Fijemos $R > 0$,

$$\begin{aligned} \|\xi\| < R &\Rightarrow \pi t \|\xi\|^2 < \pi t R^2, \forall t > 0 \\ &\Rightarrow -\pi t R^2 < -\pi t \|\xi\|^2, \forall t > 0 \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+} e^{-\pi t R^2} = 1 > \dfrac{1}{2}$, existe t_1, tal que, $0 < t < t_1$, implica $e^{-\pi t R^2} > \frac{1}{2}$.

Así, $0 < t < t_1 \Rightarrow e^{-\pi t\|\xi\|^2} > e^{-\pi t R^2} > \frac{1}{2}$

Sea $t_2 = \text{mín}\{t_0, t_1\}$, $0 < t < t_2$, entonces $0 < t < t_0$ y $0 < t < t_1$.

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{B(0,R)} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{\pi t\|\xi\|^2} e^{-\pi t\|\xi\|^2} d\xi \\
&\leqslant 2\int_{B(0,R)} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-\pi t\|\xi\|^2} d\xi \qquad 0 < t < t_1 \ y \ \|\xi\| < R \\
&\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-\pi t\|\xi\|^2} d\xi \\
&\leqslant 4\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \qquad\qquad 0 < t < t_0
\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{B(0,R)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leqslant 4\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx, \forall R > 0$

en particular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \chi_{B(0,n)}(\xi) d\xi \leqslant 4\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definamos $g_n(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2 \chi_{B(0,n)}(\xi)\ , \forall n \in \mathbb{N}$.

$$g_n(\xi) \leqslant g_{n+1}(\xi)\ , \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Así, por el teorema de la convergencia monótona

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} g_n(\xi) d\xi &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(\xi) d\xi \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \chi_{B(0,n)}(\xi) d\xi \\
&\leqslant 4\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

Para $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \chi_{(B0,n)}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2,\ a.e.$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leqslant 4\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty$$

$\Rightarrow \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$

De esta manera, para todo $t > 0$

$$||\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-\pi t\|\xi\|^2}| = |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-\pi t\|\xi\|^2} \leqslant |\widehat{f}(\xi)|^2, \quad |\widehat{f}|^2 \text{ integrable}$$

y $\lim\limits_{t\to 0} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-\pi t\|\xi\|^2} = |\widehat{f}(\xi)|^2$ $a.e.$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y la ecuación (3.1) se tiene que

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-\pi t\|\xi\|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$$

Por tanto $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$ ■

Lema 3.2. $\overline{L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)} = L^2(\mathbb{R}^d)$, *es decir,* $L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ *es denso en* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demostración

Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, veamos que existe una sucesión de funciones (f_n) en $L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que, $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Definamos

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad \|x\| < n \\ 0 & si \quad \|x\| \geqslant n \end{cases}$$

Afirmación. $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
En efecto, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|dx &= \int_{\|x\|<n} |f_n(x)|dx \\
&= \int_{\|x\|<n} |f(x)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\chi_{B(0,n)}(x)dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{B(0,n)}(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_2 \left(\int_{\|x\|<n} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_2 (m(B(0,n)))^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|^2 dx &= \int_{\|x\|<n} |f_n(x)|^2 dx \\
&= \int_{\|x\|<n} |f(x)|^2 dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \\
&= \|f\|_2^2 < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Así, $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

Sea, $A_n = (B(0,n))^c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, como $B(0,n) \subset B(0,n+1)$, entonces $A_{n+1} \subset A_n$.

Definamos $g_n(x) = |f(x)|^2 \chi_{A_n}(x)$, $g_n(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N}$

Dado $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
x \in A_{n+1} &\Rightarrow x \in A_n \\
&\Rightarrow g_n(x) = |f(x)|^2 \ \wedge\ g_{n+1}(x) = |f(x)|^2 \\
&\Rightarrow g_n(x) = g_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \notin A_{n+1} &\Rightarrow g_{n+1}(x) = 0 \\
&\Rightarrow g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)
\end{aligned}$$

Así, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^d$.

Veamos que $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \chi_{A_n}(x) dx \\
&= \int_{A_n} |f(x)|^2 dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty
\end{aligned}$$

$g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora, dado $x \in \mathbb{R}^d$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $x \in B(0,N)$,

$$\begin{aligned} n \geqslant N &\Rightarrow B(0,N) \subset B(0,n) \\ &\Rightarrow x \in \not\in A_n \\ &\Rightarrow g_n(x) = 0 \end{aligned}$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$,$\forall x \in \mathbb{R}^d$ y como $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} 0dx = 0,$$

por el teorema de la convergencia monótona.

Finalmente, probemos que $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^2 dx &= \int_{B(0,n)} |f_n(x) - f(x)|^2 dx + \int_{B(0,n)^c} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \\ &= \int_{A_n} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \chi_{A_n}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx \end{aligned}$$

De esta manera se tiene

$$\lim_{n\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \lim_{n\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx = 0.$$

esto es, $\lim_{n\to 0} \|f_n - f\|_2 = 0$.

Por tanto $\overline{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ■

Definición 3.1. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$

Por el lema anterior, dado $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, existe (f_n) en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que, $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$; (f_n) es una sucesion de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Por la identidad de Plancherel en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene que, $\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$, por lo que $(\widehat{f_n})$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$, como dicho espacio es completo $(\widehat{f_n})$ converge, de modo que, existe una función $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que, $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n} - h\|_2 = 0$.

La función h no depende de la sucesión (f_n) en $L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$. En efecto, sea (g_n) una sucesión en $L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$, tal que, $g_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, así, $g_n - f_n \to 0$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

De esta manera, usando la identidad de Plancherel en $L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ y linealidad de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|g_n - f_n\|_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\|(g_n - f_n)\widehat{\ }\|_2 = 0\\ &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\|\widehat{g_n} - \widehat{f_n}\|_2 = 0\end{aligned}$$

Como $\|\widehat{g_n} - h\|_2 \leqslant \|\widehat{g_n} - \widehat{f_n}\| + \|\widehat{f_n} - h\|_2$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\|\widehat{g_n} - h\|_2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\|\widehat{g_n} - \widehat{f_n}\| + \lim_{n\to\infty}\|\widehat{f_n} - h\|_2 = 0$$

de esta manera, se tiene que $\widehat{g_n} \to h$, por tanto h es independiente de la sucesión escogida.

Diremos que h es la transformada de Fourier de f, y la denotaremos como $\widehat{f}$. Asi, $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty}\widehat{f_n}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$

Teorema 3.1. *Sea f una función en $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

1. *Se tiene*
$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty}\int_{\|x\|<n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx,$$
entendiendo el límite en la norma de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

2. *f y $\widehat{f}$ satisfacen la igualdad de Plancherel en $L^2(\mathbb{R}^d)$*

3. *Si f y g estan en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces*
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi$$
y
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi$$

4. *Si $\tau_h f(x) = f(x+h)$, entonces $(\tau_h f)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$*

Demostración

1. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, definamos la función

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad \|x\| < n \\ 0 & si \quad \|x\| \geqslant n \end{cases} ,$$

sabemos que $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ y $f_n \to f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
Ahora:

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \widehat{f_n}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\ &= \int_{\|x\|<n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{\|x\|<n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \qquad en\ L^2(\mathbb{R}^d)$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\|x\|<n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx - \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = 0.$$

2. Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, sabemos que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Sea (f_n) sucesión de funciones en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que, $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces, $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Como $f_n \to f$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.
Se sabe que $|\|f_n\|_2 - \|f\|_2| \leqslant \|f_n - f\|_2$.
Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$, y como $\|\widehat{f_n}\|_2 = \|f_n\|_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por Teorema 3.1, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \|f\|_2$.
Además como $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 = 0$.
Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. De esta manera se tiene que, $\|f\|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.
Por tanto,

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

3. Sean f y $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y sean (f_n) y (g_n) sucesiones en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que, $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y $g_n \to g$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Dado $n \in \mathbb{N}$ y por la propiedad analítica 5 Proposición 2.2, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) \widehat{g_n}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_n}(\xi) g_n(\xi) d\xi \ \ , \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Veamos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\widehat{g_n}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)dx.$

En efecto:

$$\begin{aligned}
& |\int_{\mathbb{R}^d}(f_n(x)\widehat{g_n}(x) - f(x)\widehat{g}(x))dx| \\
\leqslant & \int_{\mathbb{R}^d}|f_n(x)\widehat{g_n}(x) - f(x)\widehat{g}(x)|dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^d}|f_n(x)\widehat{g_n}(x) - f(x)\widehat{g}(x) + \widehat{g_n}(x)f(x) - \widehat{g_n}(x)f(x)|dx \\
\leqslant & \int_{\mathbb{R}^d}|(f_n(x) - f(x)||\widehat{g_n}(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{g_n}(x) - \widehat{g}(x)||f(x)|dx
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}|(f_n(x) - f(x)||\widehat{g_n}(x)|dx &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d}|(f_n(x) - f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{g_n}(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f_n - f\|_2\|\widehat{g_n}\|_2 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{g_n}(x) - \widehat{g}(x)||f(x)|dx &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{g_n}(x) - \widehat{g}(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_2\|f\|_2 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Veamos que, cada término tiende a cero.

Como $\widehat{g_n} \to \widehat{g}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_2\|\widehat{g_n}\|_2 = 0 \lim_{n\to\infty}\|\widehat{g_n}\|_2 = 0.\|\widehat{g}\|_2 = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_2\|f\|_2 = 0\|f\|_2 = 0$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\widehat{g_n}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)dx$

Análogamente, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_n(\xi)\widehat{f_n}(\xi)dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi$

Por la ecuación (3.2)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\widehat{g_n}(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_n}(\xi)g_n(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

Para la demostración de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi$, consideremos la función $h = \overline{\widehat{g}}$. Como $\widehat{g_n} \to \widehat{g}$, entonces $\overline{\widehat{g_n}} \to \overline{\widehat{g}} = h$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Probemos que $\overline{\widehat{h}} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^d$

Sea (h_n) una sucesión en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, tal que $h_n \to h$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Para $x \in \mathbb{R}^d$ y usando Proposición 2.1, se tiene

$$\begin{aligned}
(\overline{\widehat{g_n}} - h_n)\widehat{\ }(x) &= (\overline{\widehat{g_n}})\widehat{\ }(x) - \widehat{h_n}(x) \\
&= \overline{(\widehat{g_n})\widehat{\ }(-x)} - \widehat{h_n}(x) \\
&= \overline{g_n(x)} - \widehat{h_n}(x)
\end{aligned}$$

Usando lo anterior e identidad de Plancherel en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\|g_n - \overline{\widehat{h_n}}\|_2 &= \|\overline{g_n - \overline{\widehat{h_n}}}\|_2 \\
&= \|\overline{g_n} - \widehat{h_n}\|_2 \\
&= \|(\overline{\widehat{g_n}} - h_n)\widehat{\ }\|_2 \\
&= \|\overline{\widehat{g_n}} - h_n\|_2
\end{aligned}$$

Como $\|g_n - \overline{\widehat{h}}\|_2 \leqslant \|g_n - \overline{\widehat{h_n}}\|_2 + \|\overline{\widehat{h_n}} - \overline{\widehat{h}}\|_2 = \|\overline{\widehat{g_n}} - h_n\|_2 + \|\overline{\widehat{h_n}} - \overline{\widehat{h}}\|_2$, y $\overline{\widehat{g_n}} - h_n \to \overline{\widehat{g}} - h = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - \overline{\widehat{h}}\|_2 = 0$.

Así, $g = \overline{\widehat{h}}$

Por lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{h}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)h(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

4. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que, $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$
   Fijemos $h \in \mathbb{R}^d$, haciendo el cambio de variable $u = x + h$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tau_h f_n(x) - \tau_h f(x)|\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x+h) - f(x+h)|\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(u) - f(u)|\right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= \|f_n - f\|_2\end{aligned}$$

   Como $\|f_n - f\|_2 \to 0,\ n \to \infty$, entonces $\tau_h f_n \to \tau_h f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$
   Así,

$$(\tau_h f_n)\widehat{\ }(\xi) \to (\tau_h f)\widehat{\ }(\xi) \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d) \tag{3.3}$$

   Ahora, $(\tau_h f_n)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f_n}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$

$$|\widehat{f_n}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi} - \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}| = |(\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi))e^{2\pi i h\cdot\xi}| = |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|$$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f_n}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi} - \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 \to 0,\ \ n \to \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(\tau_h f_n)\widehat{\ } - \widehat{f}e^{2\pi i h(\cdot)}\|_2 &= \|\widehat{f_n}e^{2\pi i h(\cdot)} - \widehat{f}e^{2\pi i h(\cdot)}\|_2 \\ &= \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 \to 0,\ \ n \to \infty\end{aligned}$$

   Por tanto,

$$(\tau_h f_n)\widehat{\ }(\xi) \to \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi} \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d) \tag{3.4}$$

   de (3.3) y (3.4), $(\tau_h f)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. ■

TEOREMA 3.2. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces $f * g$ está en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y se tiene que $(f * g)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.*

Demostración

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Veamos que $f*g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Usando la desigualdad integral de Minkowsky y el cambio de variable $w = x - y$.

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f*g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^2 |g(y)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(|g(y)|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(w)|^2 dw\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \|f\|_2 dy \\
&= \|f\|_2 \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| dy \\
&= \|f\|_2 \|g\|_1 < \infty
\end{aligned}
$$

Así, $f*g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y además se verifica,

$$\|f*g\|_2 \leqslant \|f\|_2 \|g\|_1 \tag{3.5}$$

Sea $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, tal que $f_n \to f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces de (3.5) $f_n * g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Como $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por Teorema 2.2 se tiene, $f_n * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Así, $f_n * g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Veamos que, $f_n * g \to f * g$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

En efecto, de (3.5) y propiedad distributiva de la convolución de funciones

$$\|f_n * g - f*g\|_2 = \|(f_n - f)*g\|_2 \leqslant \|f_n - f\|_2 \|g\|_1$$

como $f_n \to f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $f_n * g \to f * g$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

$f_n \to f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $\widehat{f_n} \to \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. f_n y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ por Teorema 2.2 se tiene que $(f_n * g)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f_n}(\xi)\widehat{g}(\xi)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ \xi \in \mathbb{R}^d$.

$f_n * g \to f * g$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $(f_n * g)\widehat{\ } \to (f * g)\widehat{\ }$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, pero $(f_n * g)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f_n}(\xi)\widehat{g}(\xi)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ \xi \in \mathbb{R}^d$. Ahora $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces $\widehat{f_n}(\xi)\widehat{g}(\xi) \to \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Así, $(f * g)\widehat{\ }(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n * g)\widehat{\ }(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty}\widehat{f_n}(\xi)\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ ■

§3.1.1. Fórmula de inversión en $L^2(\mathbb{R}^d)$

TEOREMA 3.3. *Si f está en $L^2(\mathbb{R}^d)$, se tiene $f(x) = (\widehat{f})\widehat{\ }(-x)$ como funciones de $L^2(\mathbb{R}^d)$ y, por tanto en casi todo punto. En particular,*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\|x\|<n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

con límite en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demostración

Sea f en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Probemos la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g_\lambda}(w - x) f(w) dw = \int_{\mathbb{R}^d} g_\lambda(\xi)\widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi, \forall\lambda > 0, x \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{3.6}$$

donde $g_\lambda(\xi) = e^{-\lambda\pi\|\xi\|^2}$.

En efecto, por la ecuación (2.5) sabemos que $\widehat{g_\lambda}(y) = \lambda^{-\frac{d}{2}} e^{-\pi\frac{\|y\|^2}{\lambda}}, \forall y \in \mathbb{R}^d$

Verifiquemos (3.6)

Haciendo $w = y + x$, y usando Teorema 3.1 parte 3 y 4

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} g_\lambda(\xi)\widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_x f)\widehat{\ }(\xi) g_\lambda(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \tau_x f(y)\widehat{g_\lambda}(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y + x)\widehat{g_\lambda}(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(w)\widehat{g_\lambda}(w - x) dw
\end{aligned}$$

Veamos que $\widehat{g}_\lambda * f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Consideremos $H_\lambda(x) = \lambda^{-d}h(\lambda^{-1}x)$, para $\lambda > 0$, donde $h(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$

$$\begin{aligned} H_\lambda(x) &= \lambda^{-d}h(\lambda^{-1}x) \\ &= \lambda^{-d}e^{-\pi\|\lambda^{-1}x\|^2} \\ &= \lambda^{-d}e^{-\frac{\pi}{\lambda^2}\|x\|^2} \end{aligned}$$

Así, $H_{\sqrt{\lambda}}(x) = \lambda^{-\frac{d}{2}}e^{-\pi\frac{\|x\|^2}{\lambda}} = \widehat{g}_\lambda(x)$

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx = 1$, por Teorema 1.19

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0}\|H_\lambda * f - f\|_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{\lambda\to 0}\|H_{\sqrt{\lambda}} * f - f\|_2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lim_{\lambda\to 0}\|\widehat{g}_\lambda * f - f\|_2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\widehat{g}_\lambda * f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Veamos que $g_\lambda \widehat{f} \to \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} |(g_\lambda(x)\widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| &= |(g_\lambda(x) - 1)||\widehat{f}(x)| \\ &\leqslant (|(g_\lambda(x)| + 1)|\widehat{f}(x)| \\ &\leqslant 2|\widehat{f}(x)| \end{aligned}$$

Así, $|(g_\lambda(x)\widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)|^2 \leqslant 4|\widehat{f}(x)|^2$ y $\lim_{\lambda\to 0}(g_\lambda(x) - 1)\widehat{f}(x) = 0$ $a.e.$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |(g_\lambda(x)\widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,\ \lambda \to 0$$

Por tanto $g_\lambda \widehat{f} \to \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$
Luego por la igualdad de Plancherel en $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\|\widehat{(g_\lambda \widehat{f})} - \widehat{(\widehat{f})}\|_2 = \|\widehat{(g_\lambda \widehat{f} - \widehat{f})}\|_2 = \|g_\lambda \widehat{f} - \widehat{f}\|_2 \to 0,\ \lambda \to 0$$

De esta manera $\|\widehat{(g_\lambda \widehat{f})} - \widehat{(\widehat{f})}\|_2 \to 0,\ \lambda \to 0$

Así, $(g_\lambda \widehat{f})\widehat{} \to (\widehat{f})\widehat{}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$

Por lo que, usando la ecuación (3.6)
$\widehat{g_\lambda} * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_\lambda(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi = (g_\lambda\widehat{f})\widehat{}(-x), \forall\lambda > 0, x \in \mathbb{R}^d.$
Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\lambda\to 0}(\widehat{g_\lambda} * f)(x) \\ &= \lim_{\lambda\to 0}(g_\lambda\widehat{f})\widehat{}(-x) \\ &= (\widehat{f})\widehat{}(-x) \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$f(x) = (\widehat{f})\widehat{}(-x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\|x\|<n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

con límite en $L^2(\mathbb{R}^d)$. ■

PROPOSICIÓN 3.2. *Si f y $\dfrac{\partial}{\partial x_j}f$ están en $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall j \in \{1,\cdots,d\}$, entonces $\xi_j\widehat{f}$ está en $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall j \in \{1,\cdots,d\}$ y $(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j})\widehat{}(\xi) = 2\pi i\xi_j\widehat{f}(\xi)$, $\forall j \in \{1,\cdots,d\}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración
Sean f y $\dfrac{\partial}{\partial x_j}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall j \in \{1,\cdots,d\}$, sea $\varphi \in C^1$ una función, tal que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ definida como,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad \|x\| < 1 \\ 0 & si \quad \|x\| > 2 \end{cases}$$

Sea $\varphi_n(x) = \varphi(\frac{x}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que, $\varphi_n f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.
En efecto,

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d}|\varphi_n(x)|^2dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2dx \\ &= \int_{\|\frac{x}{n}\|<2}\left|\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2dx \\ &\leqslant \int_{\|x\|<2n}|\varphi\left(\frac{x}{n}\right)|^2dx \\ &\leqslant \int_{\|x\|<2n}dx \\ &= m\left(B(0,2n)\right) < \infty \end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(x)f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(x)||f(x)|dx \leqslant \|\varphi_n\|_2\|f\|_2.$$

$\Rightarrow \varphi_n f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$|\varphi_n f(x)| = |\varphi(\frac{x}{n})f(x)| \leqslant |f(x)| \Rightarrow |\varphi_n f(x)|^2 \leqslant |f(x)|^2$,
así, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n f(x)|^2dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2dx < \infty$

$\Rightarrow \varphi_n f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$
Por otro lado

$$\begin{aligned}
|(\varphi_n f - f)(x)|^2 &= |\varphi_n(x)f(x) - f(x)|^2 \\
&= |(\varphi_n(x) - 1)|^2|f(x)|^2 \\
&\leqslant (\varphi\left(\frac{x}{n}\right) + 1)^2|f(x)|^2 \\
&\leqslant 2^2|f(x)|^2 \\
&= 4|f(x)|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\varphi_n(x)f(x)) &= \lim_{n\to\infty}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)f(x) \\
&= \varphi(0)f(x) \qquad \varphi \in C^1 \\
&= f(x) \quad a.e.
\end{aligned}$$

entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n(x)f(x) - f(x)|^2 = 0 \quad a.e.$

Así, por teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(x)f(x) - f(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x)f(x) - f(x)|^2dx = 0$$

Por tanto, $\varphi_n f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Por otro lado, $\forall j \in \{1, \cdots, d\}$, usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_n(x)f(x)) = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right)f(x) + \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\partial}{x_j}(f(x)) \tag{3.7}$$

Puesto que $\dfrac{\partial}{x_j}\varphi$ se anula fuera de la bola de radio 2 y es continua en la bola cerrada, existe $C_1 > 0$ tal que $\left|\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)\right| \leqslant C_1, \forall x \in \mathbb{R}^d$. Usando la ecuación (3.7) y el hecho que $\left|\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi_n\right| \leqslant C_1$, se prueba que $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d), \forall n \in \mathbb{N}$

Probemos que $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_n f) \to \dfrac{\partial}{\partial x_j} f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_n(x)f(x)) - \frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right| &= \left|\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right)f(x) + (\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - 1)\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right||f(x)| + 2\left|\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right| \\
&\leqslant C_1|f(x)| + 2\left|\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_n(x)f(x)) - \frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right|^2 &\leqslant \left(C_1|f(x)| + 2\left|\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right|\right)^2 \\
&\leqslant C_2|f(x)|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right|^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_n(x)f(x)) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right)f(x) + \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right) \\
&= \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\ a.e.
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\partial(\varphi_n(x)f(x))}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|^2 = 0,\ a.e.$$

por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\left(\frac{\partial(\varphi_n(x)f(x))}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\partial(\varphi_n(x)f(x))}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx = 0$$

y obtenemos que $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_n f) \to \dfrac{\partial}{\partial x_j} f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Con lo probado anteriormente se tiene que, $\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}(\varphi_n f)\right)^{\wedge} \to \left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)^{\wedge}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, así, por Teorema 1.10 existe una subsucesión de $\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_n f)\right)^{\wedge}\right)$, la cual denotaremos por comodidad de la misma forma tal que,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\varphi_n f)\right)^{\wedge}(\xi) \to \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)^{\wedge}(\xi),\ a.e. \tag{3.8}$$

por Proposición 2.2,

$$\left(\frac{\partial(\varphi_n f)}{\partial \xi_j}\right)\widehat{}(\xi) = 2\pi i \xi_j (\varphi_n f)\widehat{}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Por otro lado, $f\varphi_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $(f\varphi_n)\widehat{} \to (f)\widehat{}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, nuevamente por Teorema 1.10, existe una subsucesión de $((f\varphi_n)\widehat{})$ la cual denotaremos por comodidad de la misma manera, tal que, $(f\varphi_n)\widehat{}(\xi) \to (f)\widehat{}(\xi), a.e.$ Luego

$$2\pi i \xi_j (f\varphi_n)\widehat{}(\xi) \to 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi), a.e. \tag{3.10}$$

De las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10) se tiene

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)\widehat{}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi), \ a.e.$$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)\widehat{}(\xi) - 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) = 0, \ a.e.$.
Por tanto, $\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)\widehat{}(\xi) - 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y como $\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)\widehat{}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Así,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)\widehat{}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi), \ en \ \ L^2(\mathbb{R}^d).$$

$\blacksquare$

§3.2. Transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^d)$, para $1 \leqslant p \leqslant 2$

Teniendo definida la transformada de Fourier para funciones en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y funciones en $L^2(\mathbb{R}^d)$, podemos definir la transformada de Fourier sobre $L^1(\mathbb{R}^d)+L^2(\mathbb{R}^d)$, que consiste en todas las funciones $f = f_1 + f_2$ donde $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Definamos $\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$ donde $f = f_1 + f_2$, veamos que la transformada de Fourier sobre $L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$ está bien definida, es decir, $\widehat{f}$ es independiente de f_1 y f_2.

Si $f = g_1 + g_2$ donde $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g_2 \in L^2(\mathbb{R})$, entonces
$h = g_1 - f_1 = f_2 - g_2 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.
Asi, por teorema $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{h} = (g_1 - f_1)\widehat{\ } = (f_2 - g_2)\widehat{\ } = \widehat{g_1} - \widehat{f_1} = \widehat{f_2} - \widehat{g_2}$, de esta manera se tiene que $\widehat{f_1} + \widehat{f_2} = \widehat{g_1} + \widehat{g_2}$.

Una función de $L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leqslant p \leqslant 2$, se puede descomponer en suma de funciones $f_1 + f_2$ tal que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. En efecto, sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, hagamos $E = \{x : |f(x)| > 1\} = |f(x)|^{-1}(1, +\infty]$. Si $m(E) = \infty$, entonces
$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \geqslant \int_E |f(x)|^p dx \geqslant \int_E dx = m(E) = \infty$, implicando $f \notin L^p(\mathbb{R}^d)$, contrariando que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Por tanto $m(E) < \infty$

Definamos

$$f_1 = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases} \qquad f_2 = \begin{cases} f(x) & x \notin E \\ 0 & x \in E \end{cases}$$

Si $x \in E$, $f_1(x) = f(x)$ y $f_2(x) = 0$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Si $x \notin E$, $f_1(x) = 0$ y $f_2(x) = f(x)$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Por tanto $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $\forall\ x \in E$.

Además, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \chi_E(x) dx \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (m(E))^{\frac{1}{q}} < \infty \end{aligned}$$

con $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ por lo que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_2(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d - E} |f_2(x)|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d - E} |f_2(x)|^p dx < \infty.$$

Esto se debe a que $|f(x)| \leqslant 1$ en $\mathbb{R}^d - E$ y por tanto $|f(x)|^2 \leqslant |f(x)|^p$ ya que $1 \leqslant p \leqslant 2$. Asi, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Definimos $\widehat{f} = f_1 + f_2$ donde $\widehat{f_1} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y como la transformada de Fourier no depende de la descomposición, por tanto, está bien definida sobre $L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$.

Como se tiene que $L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leqslant p \leqslant 2$, se sigue que la transformada de Fourier está bien definida para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leqslant p \leqslant 2$.

El proceso visto nos dice que podemos definir la transformada de Fourier, para funciones en $L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$ y para funciones en $L^p(\mathbb{R}^d)$, donde $1 \leqslant p \leqslant 2$; pero no permite hacerlo en $L^p(\mathbb{R}^d)$ si $p > 2$. De hecho no a toda función en esos espacios $L^p(\mathbb{R}^d)$ se le puede asignar una transformada de Fourier que sea una función y, por tanto la definición trabaja con objetos más generales que las funciones, a ser las distribuciones.

Teorema 3.4. Interpolación de M Riesz-Thorin
Sean $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ *con* $0 < \theta < 1$ *y* p, q *tal que,*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Si T *es un operador lineal de* $L^{p_0} + L^{p_1}$ *en* $L^{q_0} + L^{q_1}$ *tal que:*

$\|Tf\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0}$, *para toda función* $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ *y* $\|Tf\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1}$, *para toda función* $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$.

Entonces,

$$\|Tf\|_q \leqslant M_0^{1-\theta} M_1 \|f\|_p, \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$$

Demostración Ver [4]

Teorema 3.5. Desigualdad de Hausdorff-Young
Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leqslant p \leqslant 2$, entonces $\widehat{f} \in L^q(\mathbb{R}^d)$ donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ y $\|\widehat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p$.

Demostración

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leqslant p \leqslant 2$. Por la observación 2.1, $Tf = \widehat{f}$, y $\|Tf\|_\infty = \|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$. Por la igualdad de Plancherel en $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\|Tf\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Usando el teorema anterior se tiene que, $p_0 = 1$, $q_0 = \infty$, $p_1 = q_1 = 2$.
Por lo anterior, definamos $T : L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$, como $T(f+g) = Tf + Tg$
Si $p \in [1,2]$, $\dfrac{1}{p} \in [\frac{1}{2}, 1]$ entonces, existe $\theta \in [0,1]$, tal que, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2}\theta + (1-\theta)1 = \dfrac{1}{p_0}(1-\theta) + \dfrac{1}{p_1}\theta$ donde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{p_0}(1-\theta) + \frac{1}{p_1}\theta + \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \\
&= (1-\theta)(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0}) + \theta(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}) \\
&= (1-\theta)1 + \theta(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \\
&= 1 - \theta + \theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por tanto, usando el teorema de Riesz-Thorim, se tiene que $\widehat{f} \in L^q(\mathbb{R}^d)$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ y $\|\widehat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p$. ■

Referencias bibliográficas.

[1] Duoandikoetxea, J. *Lecciones sobre las Series y Transformadas de Fourier*, Notas de Clase,UNAN-Managua. (2003)

[2] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, volume 29, AMS, Rhode Island(2001)

[3] Stein E. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey. (1970).

[4] Stein and Weiss. *Introduction analysis on euclidean spaces*, Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey. (1971).

[5] Royden, H. *Real Analysis*, 3rd ed., Stanford California. (1988)

[6] Mark A, Pinsky. *Introducción al análisis de Fourier y de las Ondoletas*, Editorial Thomson, Mexico. (2003).