

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“ESTUDIO DEL MÉTODO DE SUMA PONDERADA EN
PROBLEMAS CLÁSICOS DE OPTIMIZACIÓN
MULTIOBJETIVO”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. KISSY JOSEFINA ÁLVAREZ GONZALEZ

COMO REQUISITO FINAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA

EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: OPTIMIZACIÓN.

TUTOR: LIC. MSC. CLAVEL QUINTANA

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2012



Universidad Centroccidental
 “Lisandro Alvarado”
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“ESTUDIO DEL MÉTODO DE SUMA PONDERADA EN PROBLEMAS CLÁSICOS DE OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO”

Presentado por la ciudadana BR. KISSY JOSEFINA ÁLVAREZ GONZALEZ titular de la Cédula de Identidad No. 17.156.431, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

A mi Dios.

A mis Padres.

A los Mackediches.

A mi Tutora.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a mi Dios Todopoderoso por darme la vida y estar conmigo en todo momento...

A mis padres Belkys y José Antonio por todo su amor, comprensión, apoyo y formación. Todo lo que soy se los debo a ustedes... A mi hermano Antonio José por ser mi confidente. Los Amo...

A Javier Montes, por ser en un principio mi compañero de clase, pero que al poco tiempo se convirtió en el mejor amigo incondicional que te he tenido, eres mi mano derecha, mi refugio, mi todo, no tengo palabras para describir cuan importante eres para mí, siempre te llevaré en mi corazón...

A Francisco López, por alegrar mis días con tu inigualable sentido de humor, por hacer mi vida más llevadera durante la carrera, por darme ánimo, me has enseñado a no desmayar y siempre seras mi bruji bruji...

A Camacho Emelyn, por ser una amiga inserapable, por mostrar fidelidad, de ti aprendí a tener fortaleza y superar cualquier obstáculo en la vida... Gracias nuevamente Dios por haberme dado la oportunidad de pertenecer al grupo Los MACKEDICHES.

A Rodríguez Domingo, por haber estado en la buenas y en las malas, por sus buenos consejos...

A la Sra Eva Bravo, Nicole Gonzalez, Osirys Gonzalez, Dannymar Gonzalez por su apoyo, comprensión, consejos...

A mi tutora Clavel Quintana, por su grandiosa colaboración en la elaboración de este trabajo, mis respeto y admiración para usted.

Resumen

En este trabajo se estudiará de manera detallada, el método de suma ponderada [5] en problemas clásicos de optimización multiobjetivo [2] estudiando el comportamiento del método en dichos problemas y determinando si es adecuado o no para encontrar soluciones en el frente de Pareto.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
Resumen	ii
Introducción	1
1. Teoría de Optimización Multiobjetivo	3
1.1. Categorías de Funciones	6
1.2. Métodos Clásicos de Optimización multiobjetivo	19
1.2.1. Método de la Suma Ponderada	20
1.2.2. Método de ϵ -Restricción	21
1.2.3. Métodos Ponderados Métricas	22
1.2.4. Método de Benson	22
1.2.5. Método Función Valor	23
1.2.6. Métodos de Programación de Metas	24
1.2.7. Los Métodos Interactivos	24
2. Método de Suma Ponderada.	26
2.1. SUMA PONDERADA ESCALARIZADA Y EFICIENTE (DÉBIL) .	28
3. Experimentación Numérica	35
3.1. Problemas sin Restricciones	35
3.2. Problema con Restricciones	39
Conclusiones	42
Referencias	43

Índice de figuras

1.1. Frente de Pareto	5
1.2. Sin Conflicto	7
1.3. Totalmente en Conflicto	7
1.4. Parcialmente en Conflicto	8
1.5. Cono	9
1.6. Cono Negativo	10
1.7. Conjuntos convexos	10
1.8. Función Convexa	11
1.9. Función Concava	11
1.10. Imagen de pto eficiente	12
1.11. Conjunto factible	13
1.12. Conjunto factible modificado	13
1.13. Solución debilmente eficiente	16
1.14. Puntos dominados y debilmente no dominados	16
1.15. \hat{y} es un punto propiamente no dominado	17
2.1. Un conjunto $S(\lambda, \mathcal{Y})$	27
2.2. Y es $\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p$	28
3.1. \mathcal{Y}_N de Shaffer Calculado	36
3.2. \mathcal{Y}_N de Shaffer con el método de suma ponderada	36
3.3. \mathcal{Y}_N de Kursawe Calculado	37
3.4. \mathcal{Y}_N de Kursawe con el método de suma ponderada	37
3.5. \mathcal{Y}_N de ZDT1 Calculado	39
3.6. \mathcal{Y}_N de ZDT1 con el método de suma ponderada	39
3.7. \mathcal{Y}_N de VNT2 Calculado	40

3.8. \mathcal{Y}_N de VNT2 con el método de suma ponderada	40
3.9. \mathcal{Y}_N calculado	41
3.10. \mathcal{Y}_N de Osyczka con el método de suma ponderada	41

Introducción

La programación continua ha sido de gran aporte y utilidad, mayormente en los campos de la ingeniería y de la ciencia, así como también de la economía, gracias a su versatilidad y adaptabilidad. No obstante, ciertas clases de problemas requieren tener en cuenta varios objetivos a la vez. Esta necesidad ha conducido a estudiar tantos los aspectos teóricos como computacionales de los problemas de optimización multiobjetivo. A continuación un problema de optimización multiobjetivo (POM) se define como:

$$\begin{aligned} \text{Optimizar} \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \quad (POM) \\ \text{sujeto a :} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1 \dots n \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots p \\ & x_k^{(L)} \leq x_k \leq x_k^{(U)} \end{aligned}$$

Para resolver (POM) se utilizan varias estrategias, una de ellas es el método de suma ponderada, que aplicada a un (POM) se define como:

$$\begin{aligned} \text{Optimizar} \quad & \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \\ \text{sujeto a :} \quad & g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & h_m(x) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \\ & x_k^{(L)} \leq x_k \leq x_k^{(U)} \end{aligned} \quad (1)$$

Este método permite encontrar una solución del problema multiobjetivo para un vector de pesos determinado.

El objetivo general de éste trabajo es estudiar el método de suma ponderada en problemas clásicos [2] de optimización multiobjetivo, es decir, definir optimización multiobjetivo, caracterizar puntos paretos [1],[6],[3], describir el método de suma ponderada [5], [1] y por último realizar pruebas computacionales con problemas clásicos de optimización multiobjetivo.

El trabajo consta de tres capítulos, en el primer capítulo se desarrolla la teoría de optimización multiobjetivo. Seguidamente, en el segundo capítulo con sus definiciones, teoremas y proposiciones todo lo referente al método de suma ponderada y finalmente en el tercer capítulo la experimentación numérica.

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

La optimización clásica continua trabaja con problemas donde se requiere decidir en base a un objetivo bien sea lineal o no lineal, pero en las aplicaciones es común ver casos en donde es necesario optimizar más de un objetivo, como por ejemplo: Supongamos que tenemos una fabrica donde nos encontramos con dos objetivos: minimizar el costo de un producto y el de reducir al mínimo la cantidad de material perdido en el proceso de fabricación de dicho producto. Claramente podemos ver que éste problema posee más de un objetivo.

Definiremos a continuación un problema de optimización multiobjetivo (POM).

Definición 1.0.1. (ver [2])

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \quad (POM) \\ \text{sujeto a :} & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1 \dots n \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots p \\ & x_k^{(L)} \leq x_k \leq x_k^{(U)} \end{array}$$

Una solución x es un vector de n variables de decisión $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ que satisface las restricciones, donde cada x_i toma valores entre x_i^L y x_i^U cotas inferior y superior respectivamente.

Si una solución x satisface todas las restricciones se dice que es factible y en caso contrario se dice que no es factible.

El conjunto de todas las soluciones factibles es llamado *Región Factible* y se denota por \mathcal{X} y esta ubicado en el Espacio de Decisión.

En optimización multiobjetivo las funciones constituyen un espacio multidimensional en adición al espacio de decisión. Éste espacio adicional es llamado *Espacio objetivo* y se denota por \mathcal{Y} .

Ejemplo 1. (Shaffer, 1984) Supongamos que se requiere minimizar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = (x^2 - 2)^2 \end{cases}$$

$$\text{con } -2 \leq x \leq 4$$

Cuál es el valor de x que minimiza ambas funciones?. En el resto del trabajo mostraremos una forma adecuada de dar respuesta a está pregunta.

Definición 1.0.2. (ver [1])

Una solución $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es llamado *Eficiente o Pareto Optimal*, si no hay otro $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$ (es decir, no hay otro que lo mejore). Si \hat{x} es eficiente, $f(\hat{x})$ es llamado *Punto No Dominado*. Si $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ y $f(x^1) \leq f(x^2)$ decimos que x^1 domina a x^2 y $f(x^1)$ domina a $f(x^2)$.

Observación 1.0.1. :

- El conjunto de todas las soluciones eficientes $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es denotado por \mathcal{X}_E y es llamado *Conjunto Eficiente*.
- El conjunto de todos los puntos no dominados $\hat{y} = f(\hat{x}) \in \mathcal{Y}$, donde $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$, se denota \mathcal{Y}_N y es llamado *Conjunto No Dominado*.

Al concepto de solución eficiente se le conoce como no dominado, no inferior, Pareto optimal.

Seguidamente se definirá problema escalarizado.

Definición 1.0.3. (ver[5])

Definiremos un problema escalarizado como:

$$\text{MAX} \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x) \quad \text{sujeto a} \quad x \in \mathcal{X} \quad (P_\lambda)$$

donde los λ_i son parámetros no negativos frecuentemente normalizado, ajustado

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

.

Definición 1.0.4. (ver [2])

Una solución x^1 se dice que *Domina* a otra solución x^2 si ambas condiciones son verdaderas

- La solución x^1 no es peor que x^2 en todos los objetivos o $f_j(x^1) \not\leq f_j(x^2)$ para todo $j = 1, 2, \dots, M$.
- La solución x^1 es estrictamente mejor que x^2 en al menos un objetivo o $f_j(x^1) < f_j(x^2)$, $j \in 1, 2, \dots, M$. Si cualquiera de las condiciones es violada se dice que la solución x^1 no domina a la solución x^2 .

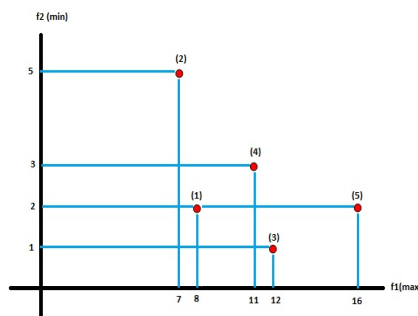


Figura 1.1: Frente de Pareto

Observar en la grafica 1.1 que al comparar los objetivos la solución 5 domina a las soluciones 1, 2 y 4, sin embargo no domina a 3 y esta no domina a 5 de esta forma el conjunto de puntos no dominados está representado por $\{3, 5\}$.

1.1. Categorías de Funciones

En problemas de optimización multiobjetivo, las funciones objetivos pueden ser categorizadas como sin conflicto, parcialmente en conflicto y totalmente en conflicto.

Definición 1.1.1. (ver [6])

Las funciones objetivos se dicen que están *Sin Conflicto* entre si, cuando cualquier par de funciones \vec{x}_a y \vec{x}_b en un conjunto S satisfacen $f(\vec{x}_a) \triangleleft f(\vec{x}_b) \vee f(\vec{x}_b) \triangleleft f(\vec{x}_a)$.

Ejemplo 2. Deseamos encontrar un número real x que sea mínimo en el problema de optimización multiobjetivo siguiente:

Minimizar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = x^2 + 2 \end{cases}$$

$$\text{con } -2 \leq x \leq 2$$

En la figura 1.2 se observa que el minimizador de ambas funciones es un punto de esta forma es el único punto no dominado.

Definición 1.1.2. (ver [6])

En un conjunto de soluciones S dado un conjunto de vectores $F = \{f_1, \dots, f_k\}$, se dice que está *Totalmente en Conflicto* si no existen dos soluciones \vec{x}_a y \vec{x}_b en un conjunto S tal que $F(\vec{x}_a) \triangleleft F(\vec{x}_b) \vee F(\vec{x}_b) \triangleleft F(\vec{x}_a)$

Ejemplo 3.

Deseamos encontrar un número real x que sea mínimo en el problema de optimización

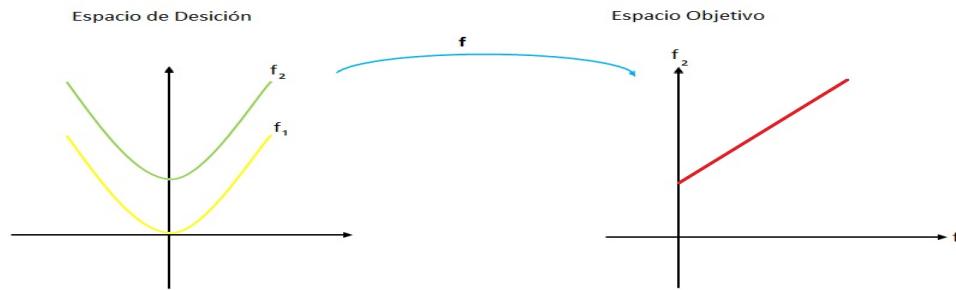


Figura 1.2: Sin Conflicto

multiobjetivo.

Minimizar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = -x \end{cases}$$

$$\text{con } -2 \leq x \leq 2$$

La figura 1.3 nos muestra que todos los puntos son no dominados, en este caso todo

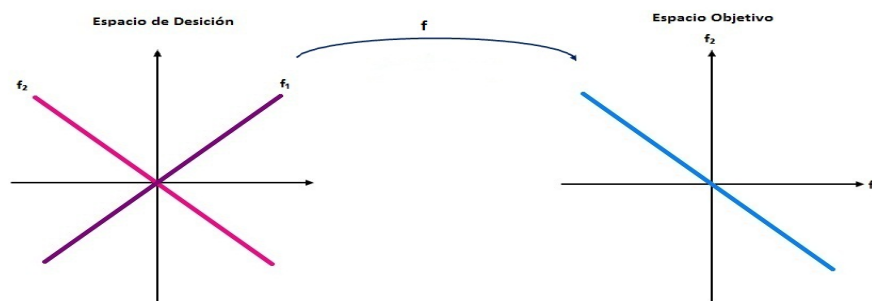


Figura 1.3: Totalmente en Conflicto

el espacio de decisión es el conjunto de no dominancia

Definición 1.1.3. (ver [6])

Un vector de funciones objetivos $F = \{f_1, \dots, f_k\}$, se dice tener funciones *Parcialmente en Conflicto* si existen dos conjuntos de soluciones P_a y P_b , los cuales cuentan con al menos un elemento cada uno $\vec{x}_a \in P_a$, $\vec{x}_b \in P_b$ que cumplen con $f(\vec{x}_a) \triangleleft f(\vec{x}_b) \vee f(\vec{x}_b) \triangleleft f(\vec{x}_a)$.

Ejemplo 4.

Deseamos encontrar un número real x que sea mínimo en el problema de optimización multiobjetivo planteado por Shaffer.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = (x^2 - 2)^2 \end{cases}$$

$$\text{con } -2 \leq x \leq 4$$

Notar en la figura 1.4 que en las regiones de $[0, 2]$ las funciones están totalmente en

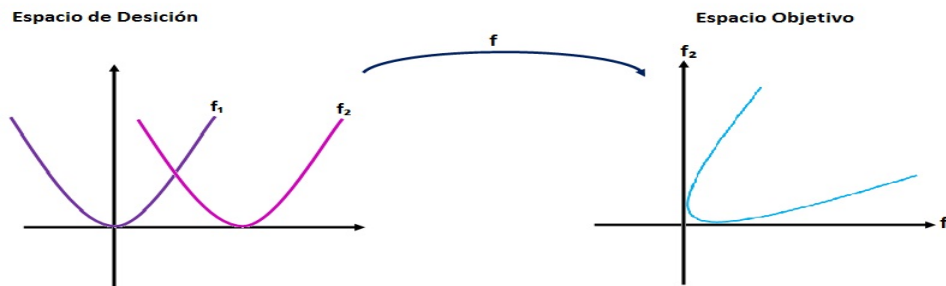


Figura 1.4: Parcialmente en Conflicto

conflicto pero en la región de $[2, 4]$ no se presenta conflicto.

En optimización multiobjetivo también se puede usar teoría de Análisis Convexo para definir lo que es una solución eficiente. Para ello se presentará unos conceptos previos.

Definición 1.1.4. (ver [4])

$\mathcal{R}_{\geq} \mathbb{R}^p$, es un *Cono* si, y sólo si, para todo $y \in \mathcal{R}_{\geq}$, $y \geq 0$.

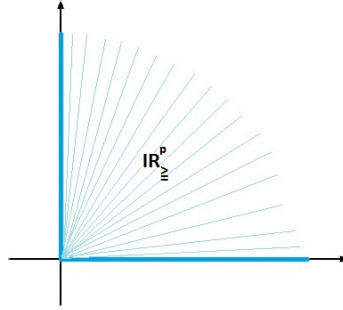


Figura 1.5: Cono

Definición 1.1.5. (ver [4])

$-\mathcal{R}_{\geq} \subset \mathbb{R}^p$, es un *Cono Negativo* si, y sólo si, para todo $y \in \mathcal{R}_{\geq}$, $y \leq 0$.

Definición 1.1.6. (ver [4])

Un conjunto C es *Convexo* si, y sólo si, se cumple que:

$$\text{Para todo } x_1, x_2 \in C, \quad \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C, \quad \lambda \in [0, 1]$$

es decir, que dados dos puntos cualquiera del conjunto, el segmento lineal cerrado que une los dos puntos está totalmente contenido en el conjunto.

Ahora, definamos lo que es una función convexa y concava.

Definición 1.1.7. (ver [4])

La función $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, siendo C convexo y no vacío, es *Convexa* si satisface:

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2) \quad \text{Para todo } \alpha \in [0, 1]$$

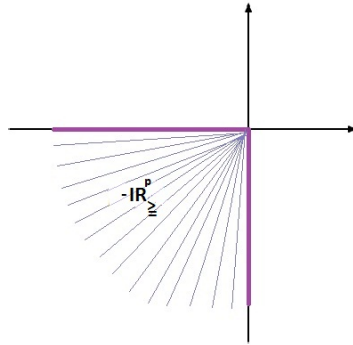


Figura 1.6: Cono Negativo



Figura 1.7: Conjuntos convexos

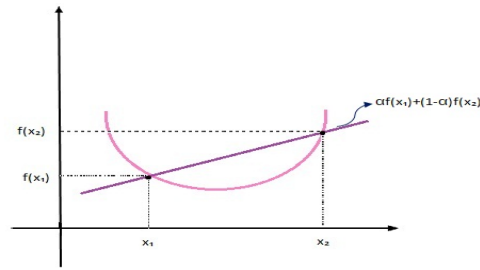


Figura 1.8: Función Convexa

Definición 1.1.8. (ver [4])

La función $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, siendo C convexo y no vacío, es *Concava* si satisface:

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \geq \alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2) \quad \text{Para todo} \quad \alpha \in [0, 1]$$

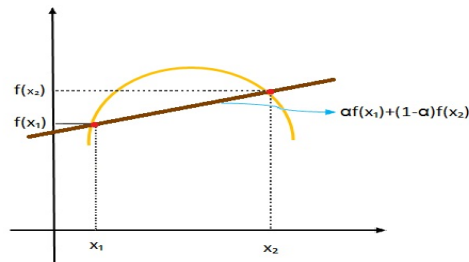


Figura 1.9: Función Concava

En este orden de ideas mostraremos una definición equivalente de solución eficiente.

Definición 1.1.9. (ver [1])

Si $\hat{x} \in \mathcal{X}$ diremos que, \hat{x} es *Eficiente* si $f(\mathcal{X}) \cap (f(\hat{x}) - \mathbb{R}_{\geq}^p) = \{f(\hat{x})\}$.

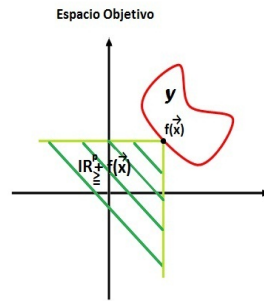


Figura 1.10: Imagen de pto eficiente

En la figura 1.10 podemos observar que para determinar las soluciones eficientes se debe hacer el estudio en el espacio objetivo.

Ejemplo 5. Consideremos un problema de optimización biobjetivo con el siguiente conjunto factible:

$$\mathcal{X} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -\sqrt{-x_1^2 - 1} < x_2 \leq 0, \quad \text{si } -1 \leq x_1 \leq 0 \\ -\sqrt{-x_1^2 - 1} \leq x_2 \leq 0, \quad \text{si } 0 < x_1 \leq 1 \end{array} \right\}$$

con función objetivo y la función objetivo

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

Al hacer uso de la definición, podemos ver que $\mathcal{Y}_N = \mathcal{X}_E = \emptyset$, ya que el conjunto es abierto.

Ahora si modificamos el conjunto, es decir,

$$\mathcal{X} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ x_2 = 0 \quad \text{si } x_1 = -1 \\ -\sqrt{-x_1^2 - 1} < x_2 \leq 0, \quad \text{si } -1 \leq x_1 < 0 \\ -\sqrt{-x_1^2 - 1} \leq x_2 \leq 0, \quad \text{si } 0 < x_1 \leq 1 \end{array} \right\}$$

Al hacer uso de la definición (1.0.17) vemos que $\mathcal{X}_E = \{(-1, 0), (0, -1)\} = \mathcal{Y}_N$.

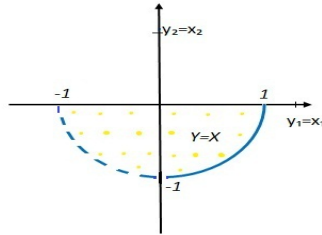


Figura 1.11: Conjunto factible

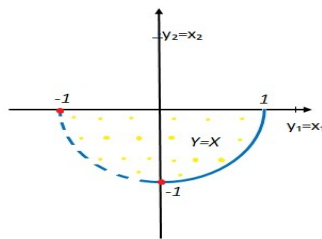


Figura 1.12: Conjunto factible modificado

Proposición 1.1.1. (ver [1])

$$\mathcal{Y}_N = (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N$$

Demostración:

Debemos probar:

$$(a) \mathcal{Y}_N \subset (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N$$

$$(b) (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N \subset \mathcal{Y}_N$$

El resultado es trivial si, $\mathcal{Y} = \emptyset$, porque $\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p = \mathbb{R}_{\leq}^p$ y los subconjuntos no dominados de ambos están vacíos también.

Probemos a

Así que $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Primeramente, asumimos que $y \in (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N$, pero $y \notin \mathcal{Y}_N$. Hay dos posibilidades. Si $y \notin \mathcal{Y}_N$, hay $y' \in Y$ y $0 \neq d \in \mathbb{R}_{\leq}^p$ tal que $y = y' + d$. Desde $y' = y' + 0 \in \mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p$ obtenemos $y \in (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N$, lo que resulta una contradicción.

Si $y \in \mathcal{Y}$ hay $y' \in \mathcal{Y}$ tal que $y' \leq y$. Sea $d = y - y'$, el cual esta en $\mathbb{R}_{\leq}^p \setminus \{0\}$. Por esto, $y = y' + d$ y $y \notin (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N$, de nuevo contradice la suposición. por lo tanto, en ambos casos $y \in \mathcal{Y}_N$.

Probemos b

En segundo lugar, asumimos que $y \in \mathcal{Y}_N$, pero $y \notin (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N$. Entonces, hay algún $y' \in \mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p$ con $y - y' = d' \in \mathbb{R}_{\leq}^p \setminus \{0\}$. Sea $y' = y'' + d'$ con $y'' \in Y, d' \in \mathbb{R}_{\leq}^p$ y por lo tanto, $y = y' + d' = (y'' + d') + d' = y'' + (d' + d') = y'' + d$, con $d = d' + d' \in \mathbb{R}_{\leq}^p \setminus \{0\}$. Esto implica que $y \in \mathcal{Y}_N$, contradice la suposición. Por lo tanto, $y \in (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N$.

Finalmente, concluimos de 1 y 2 que $\mathcal{Y}_N = (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\leq}^p)_N$.

A continuación tenemos una proposición que nos afirma que el conjunto de los puntos no dominados se encuentran en el borde del conjunto.

Proposición 1.1.2. (ver [1])

$\mathcal{Y}_N \subset bd(\mathcal{Y})$.

Demostración:

Sea $y \in \mathcal{Y}_N$ y supongamos que $y \notin bd(\mathcal{Y})$. Por esto, $y \in int\mathcal{Y}$ y existe una ϵ -vencidad $B(y, \epsilon)$ de y (con $B(y, \epsilon) := y + B(0, \epsilon) \subset \mathcal{Y}$, $B(0, \epsilon)$ es una bola abierta de radio ϵ y centrada en el origen). Sea $d \neq 0$, $d \in \mathbb{R}_{\geq}^p$. Entonces podemos escoger algún $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \epsilon$ tal que $\alpha d \in B(0, \epsilon)$.

Ahora, $y - \alpha d \in \mathcal{Y}$ con $\alpha d \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$, es decir, $y \notin \mathcal{Y}_N$.

Definición 1.1.10. (ver [2],[1])

Una solución $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es llamada *Debilmente Eficiente* (Debilmente Pareto optimal), si no hay otro $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) < f(\hat{x})$, es decir, $f_k(x) < f_k(\hat{x})$, para todo $k = 1, \dots, p$. El punto $\hat{y} = f(\hat{x})$ es llamado *Debilmente No Dominado*.

Una solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es llamado *Estrictamente Eficiente* (Estrictamente Pareto optimal) si no hay $x \in \mathcal{X}$, $x \neq \hat{x}$ tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$. Los conjuntos debilmente (estrictamente) eficiente y no dominados son denotados por \mathcal{X}_{wE} (\mathcal{X}_{sE}) y \mathcal{Y}_{wE} .

De la definición anterior, tenemos que:

- (a) $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_{wN}$
- (b) $\mathcal{X}_{sE} \subset \mathcal{X}_E \subset \mathcal{X}_{wE}$

Observación 1.1.1. (ver [1])

Una solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es debilmente eficiente si y sólo si $(f(\hat{x}) - \mathbb{R}_{>}^p) \cap \mathcal{Y} = \emptyset$. ver figura 1.13

- $\mathcal{Y}_N = \emptyset$, ya que al intersectar el cono $(-\mathbb{R}_{\geq}^p) + (0, 0)$ con el conjunto \mathcal{Y} , el resultado es vacío.

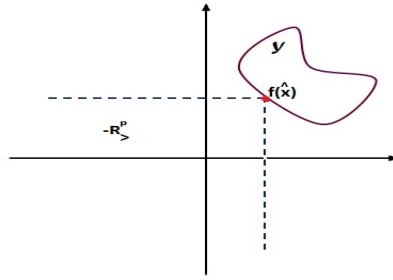


Figura 1.13: Solución debilmente eficiente

- $\mathcal{Y}_{wN} = (0, 1) \times \{0\}$.

Ahora veamos el siguiente conjunto

$$\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y_i \leq 1\}$$

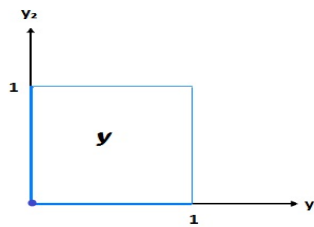


Figura 1.14: Puntos dominados y debilmente no dominados

notemos que en la figura 1.14, los conjuntos de no dominancia y debilmente dominados son:

- $\mathcal{Y}_N = \{0\}$.

$$\blacksquare \mathcal{Y}_{wN} = \{(y_1, y_2) \in Y : y_1 = 0 \text{ o } y_2 = 0\}.$$

Definición 1.1.11. (ver [5](Geoffrion(1968))).

Una solución $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es llamado *Solución Propiamente Eficiente* de (POM) si es eficiente y si hay un número real $M > 0$ tal que, para todo i y $x \in \mathcal{X}$, satisfaciendo $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ existe un índice j tal que $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ tal que

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^0)}{f_j(x^0) - f_j(x)} \leq M$$

El correspondiente punto $\hat{y} = f(\hat{x})$ es llamado *Propiamente Eficiente*.

Note que esta definición dice que la pendiente de la recta tangente en el espacio objetivo debe ser finita. Diremos que un punto es llamado *Impropiamente Eficiente* si no es propiamente eficiente .

Ejemplo 6. . Sea el conjunto factible en el espacio de decisión y el espacio objetivo (considerando una transformación lineal) dado por:

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{(x_1, x_1) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1, 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$$

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

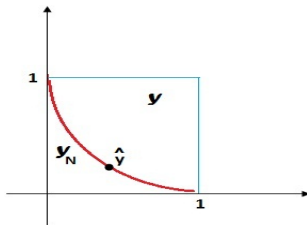


Figura 1.15: \hat{y} es un punto propiamente no dominado

$$\text{Vemos que, } \mathcal{Y}_N = \{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y} : (y_1 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = 1\}$$

Ejemplo 7. : En el ejemplo anterior consideremos la solución $\hat{x} = (1, 0)$. Mostraremos que \hat{x} no es propiamente eficiente. Para ello, debemos probar que \hat{x} es eficiente y para todo número real $M > 0$ tal que existe índice $i \in \{1, 2\}$ y algún $x \in \mathcal{X}$ con $f_i(x) < f_i(\hat{x})$, para todo índice j tal que $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ tal que

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^0)}{f_j(x^0) - f_j(x)} > M$$

Así

$\mathcal{Y}_N = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1, 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ Tomemos $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 0) \in \mathcal{Y}_N$.

En efecto,

$$\begin{aligned} ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2) &= (1 - 1)^2 + (0 - 1)^2 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es eficiente.

Y escogemos,

$$x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon), \text{ con } x_1^\varepsilon = 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1 \text{ y } x_2^\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

$$\begin{aligned} (x_1^\varepsilon - 1)^2 + (x_2^\varepsilon - 1)^2 &= (1 - \varepsilon - 1)^2 + (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} - 1)^2 \\ &= \varepsilon^2 + 1 - \varepsilon^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto x^ε es eficiente.

Puesto que, $x^\varepsilon \in X$, $x_1^\varepsilon < \hat{x}_1$ y $x_2^\varepsilon > \hat{x}_2$, tenemos que $i = 1, j = 2$. Así,

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x^\varepsilon)}{f_j(x^\varepsilon) - f_j(\hat{x})} = \frac{1 - (1 - \varepsilon)}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

Definición 1.1.12. (ver [1])

Dado $(s, \Omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, s \neq 0$. Se define un *Hiperplano* como el conjunto,

$$H_{s,\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle s, x \rangle = \Omega\}.$$

Definición 1.1.13. (ver [4])

Se define una *Combinación Afin* a toda expresión de la forma

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

El conjunto de todas las combinaciones afines se llama *Cápsula Affin*.

Definición 1.1.14. (ver[4]) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. El *Interior Relativo* de C , (riC) se define por:

$$x \in riC \quad \text{si, y sólo si,} \quad x \in affC \wedge \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad (affC) \cap B(x, \delta) \subset C$$

1.2. Métodos Clásicos de Optimización multiobjetivo

Se describen algunos métodos clásicos utilizados para el manejo de problemas de optimización multiobjetivo. Nos referimos a estos métodos como los métodos clásicos, principalmente para distinguirlos de los método evolutivos.

Los métodos clásicos de optimización multiobjetivo han existido por lo menos en las últimas cuatro décadas. Muchos investigadores han tratado de clasificar los algoritmos de acuerdo a diversas consideraciones. Coho (1985) los clasifica en los siguientes tipos:

- Método de Generación.
- Métodos basado en Preferencia.

En los métodos de generación, algunas soluciones no dominadas se generan para la toma de desiciones, que a continuación elige una solución de las soluciones obtenidas

no dominadas. Por otra parte, en los métodos basados en preferencias, cierta preferencia conocida para cada objetivo se utiliza en el proceso de optimización. Hwang y Masud (1979) y más tarde Miettinen (1999) ajustado a la clasificación anterior, y siguió las cuatro clases siguientes:

- Método de No-preferencia.
- Métodos Posteriori.
- a Priori.
- Iterativos.

Los métodos de no-preferencia, no asume ninguna información acerca de la importancia de los objetivos, pero una heurística se utiliza para encontrar una solución óptima. Mientras que los métodos posteriori usan información sobre las preferencias de cada objetivo y de forma iterativa generar un conjunto de soluciones Pareto óptima. Por otro lado, los métodos a priori usan más información acerca de la preferencia de los objetivos y suelen encontrar una solución Pareto óptima. Finalmente, los métodos iterativos utilizan la información de preferencia progresivamente durante el proceso de optimización.

1.2.1. Método de la Suma Ponderada

El método de la suma ponderada, como su nombre lo indica, escalariza un conjunto de objetivos puesto en un solo objetivo por el pre-multiplicado de cada objetivo con el peso. Este método es el más sencillo y probablemente el método clásico más ampliamente utilizado.

Ventajas

Es la forma más simple de resolver POM. El concepto es intuitivo. Para problemas que tengan frente de Pareto óptimo convexo, este método garantiza encontrar soluciones en el contorno del conjunto Pareto óptimo.

Desventajas

Sin embargo, son un número de dificultades con este enfoque. En el tratamiento de problemas mixtos de optimización, tal como son con algunos objetivos de tipo de maximización y algunos del tipo de minimización, todo objetivo ha de ser convertido solo en un tipo.

A pesar de la conversión diferente producida se puede adoptar, el principio de la dualidad es conveniente y no introduce cualquier complejidad adicional.

En un POM no lineal, un conjunto de distribución uniforme de vectores de peso no se encuentra un conjunto de distribución de solución óptima de Pareto.

1.2.2. Método de ϵ -Restricción

Con el fin de aliviar las dificultades enfrentadas por el método de suma ponderada para resolver los problemas objetivos que tiene el espacio no convexo, el método de restricción se utiliza. Haimes (1971) sugirió reformular el POM sólo por mantener uno de los objetivos y la restricción del resto de los objetivos dentro de los valores especificados por el usuario.

Ventajas

Diferentes soluciones óptimo de Pareto se pueden encontrar mediante el uso de diferentes valores ϵ_m . El mismo método también se puede utilizar para los problemas convexos o para los espacios objetivos no convexos por igual.

En cuanto a la información necesaria por parte del usuario, este algoritmo es similar al método de suma ponderada. En este último enfoque, un vector de pesos que representa la importancia relativa de cada objetivo que se necesita. En este enfoque, un vector ϵ de valores que representa, en cierto sentido, la ubicación del óptimo de Pareto es necesario. Sin embargo, la ventaja de este método es que puede ser utilizado para cualquier problema arbitrario convexo o no convexo del espacio objetivo.

Desventajas

La solución de un problema depende en gran medida el vector ϵ elegido. Debe ser elegido de modo que dentro de valores mínimos y máximos de la función objetivo sea individual.

1.2.3. Métodos Ponderados Métricas

En lugar de utilizar una suma ponderada de los objetivos, otros medios de la combinación de objetivos múltiples en un solo también puede ser utilizado. Para ello, los indicadores ponderados como l_p , y l_∞ las métricas de distancia se utilizan con frecuencia.

Ventajas

El promedio ponderado de las garantías métricas Tchebycheff de encontrar todas y cada una solución Pareto-óptima cuando z^* es un vector objetivo utópico (Miettinen, 1999). Aunque en los debates anteriores sólo l_p , métricas, se sugieren, la distancia métrica también se utilizan otros.

Desventajas

Desde distintos objetivos puede tomar valores de los diferentes órdenes de magnitud, es aconsejable para normalizar las funciones objetivo. Esto requiere un conocimiento de los valores mínimos y máximos de la función de cada objetivo.

Cabe agregar que, este método también requiere la solución ideal z^* . Por lo tanto, todos los objetivos M deben ser optimizados de forma independiente antes de la optimización de la l_p métrica.

1.2.4. Método de Benson

Este procedimiento es similar al enfoque de medición ponderada, excepto que la solución de referencia se toma como una posible solución Pareto no optima. Una solución z^0 es elegido al azar de la región factible.

Ventajas

Para evitar problemas de escala, las diferencias individuales pueden ser normalizados antes de la suma. Para obtener diferentes soluciones Pareto-óptimo, las diferencias pueden ser ponderados antes de la suma. A partir de entonces, al cambiar el vector de pesos, diferentes soluciones óptimas de Pareto se puede obtener. En tal escenario, el uso del punto nadir, z^{nad} , ya que el punto escogido puede ser considerado adecuado. Si z^0 se elige adecuadamente, este método puede ser utilizado para encontrar en la región soluciones óptimo de Pareto no convexo.

Desventajas

El problema de optimización formulado anteriormente tiene un número adicional de las restricciones necesarias para la restricción de búsqueda en la región que domina la solución elegida z^0 . Por otra parte, la función objetivo es no diferenciable, lo que causa dificultades a los métodos basados en el gradiente de resolver el problema anterior. A pesar de una fórmula modificada se sugiere en Ehrgott (2000) para las funciones diferenciables objetivo, el problema de optimización resultante tiene restricciones de igualdad son generalmente difíciles de manejar.

1.2.5. Método Función Valor

En el método función valor (o función de utilidad), el usuario proporciona un valor de la función matemática $U : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre todos los objetivos M . La función de valor debe ser válido en todo el espacio de búsqueda posible.

Ventajas

Esta idea es muy simple e ideal, si la información adecuada de la función de valor está disponible. Los métodos de función de valor se utilizan principalmente en la práctica a los problemas de atributos múltiples análisis de decisiones con un conjunto discreto de soluciones factibles (Keeney y Raiffa, 1976), aunque al principio también puede ser utilizado en espacios de búsqueda.

Desventajas

Como se desprende de los debates anteriores, la solución obtenida depende enteramente de la función del valor elegido. También requiere de los usuarios para llegar a una función de valor que es de aplicación global en el espacio de búsqueda completo. Por lo tanto, existe el peligro de utilizar una función de valor sobre-simplificado.

1.2.6. Métodos de Programación de Metas

La idea principal en la programación meta es encontrar soluciones que alcancen un objetivo predefinido para una o más funciones objetivo. Si no existe una solución que logre los objetivos pre-especificados en todas las funciones objetivo (el usuario está siendo optimista), la tarea de encontrar soluciones que reduzcan al mínimo las desviaciones de los objetivos. Por otro lado, si una solución con el objetivo deseado existe, la tarea de programación por metas es identificar que la solución particular. En cierto sentido, esta tarea es similar a la de satisfacer la toma de decisiones y la solución obtenida es satisfacer la solución, que puede ser diferente de una solución óptima.

1.2.7. Los Métodos Interactivos

Existen una serie de métodos interactivos, donde el conocimiento mínimo necesario entre otras cosas a priori. Por ejemplo, no hay necesidad de conocer una función de valor en relación con los objetivos incluso antes de empezar a resolver el problema. Como y cuando algunas de las soluciones Pareto óptimas se encuentran, su ubicación y se analizan las interacciones. El principal aspecto en este fabricante es responsable de proporcionar alguna información sobre la dirección de la búsqueda, los factores de vector de pesos, puntos de referencia, y otros. Desde la toma de decisiones está involucrado en el proceso de optimización, estos métodos pierden su sencillez. Algunos de los métodos más populares incluyen los siguientes:

- (a) Interactivo sustituto digno trade-off (ISWT) método (Chankong y Haimes, 1983).

- (b) Método de Paso (Benayoun et al., 1971).
- (c) Método de Punto Referencia (Wierzbicki, 1980).
- (d) Método Guess (Buchanan, 1997).
- (e) Diferenciable de sitios multi-objetivo basado en paquete de optimización del sistema (NIMBUS) enfoque (Miettinen y Mäkelä, 1995).
- (f) Haz de luz de búsqueda (Jaszkiewicz y Slowinsky, 1994).

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE SUMA PONDERADA.

En la teoría de Optimización Multiobjetivo existen muchos métodos para resolver problemas, en este capítulo se estudiará el método de suma ponderada, que consiste en escalarizar un conjunto de objetivos, esto es, multiplicar cada objetivo por un vector de peso y luego sumarlos de esta forma un problema multiobjetivo se transforma en un problema de un sólo objetivo.

$$\min_{x \in \mathcal{X}} (f_1(x), \dots, f_p(x)) \quad (2.1)$$

podemos resolver (es decir, encontrar soluciones eficientes) mediante la resolución de un problema de un único objetivo del problema de tipo

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \quad (2.2)$$

Sea $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ un punto fijo, denotaremos por:

$$S(\lambda, \mathcal{Y}) := \left\{ \hat{y} \in \mathcal{Y} : \langle \lambda, \hat{y} \rangle = \min_{y \in \mathcal{Y}} \langle \lambda, y \rangle \right\} \quad (2.3)$$

El conjunto de puntos optimal de \mathcal{Y} con respecto a λ .

La figura 2.1 muestra un ejemplo de un conjunto $S(\lambda, \mathcal{Y})$ consistiendo en dos puntos y^1 y y^2 . Estos puntos son las intersección de puntos de una línea $\{y \in \mathbb{R}^p : \langle \lambda, y \rangle = \hat{c}\}$. Obviamente, y^1 y y^2 son no dominados. Considerando c como un parámetro, y la familia de líneas $\{y \in \mathbb{R}^p : \langle \lambda, y \rangle = c\}$, vemos que en la figura 2.1 \hat{c} es elegido como el valor más pequeño de c tal que la intersección de la línea con \mathcal{Y} es no vacío. Note que para la definición de puntos no dominados tenemos que considerar vectores de suma no negativo único $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$. No obstante, la distinción entre sumas no negativas

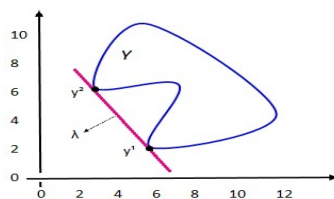


Figura 2.1: Un conjunto $S(\lambda, \mathcal{Y})$

y positivas es esencial. Por lo tanto, distinguimos puntos optimal de Y con respecto a sumas no negativas y estrictamente positivas, y define

$$S(\mathcal{Y}) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_{>}^p} S(\lambda, \mathcal{Y}) = \bigcup_{\left\{ \lambda > 0: \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}} S(\lambda, \mathcal{Y}) \quad (2.4)$$

y

$$S_o(\mathcal{Y}) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p} S(\lambda, \mathcal{Y}) = \bigcup_{\left\{ \lambda \geq 0: \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}} S(\lambda, \mathcal{Y}) \quad (2.5)$$

Claramente, la suposición $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ se hace siempre. Simplemente se normaliza el peso, pero no cambia $S(\lambda, \mathcal{Y})$.

Así, es conveniente para tener la siguiente notación

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p : \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}$$

$$\Lambda_o := \text{ri}\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_{>}^p : \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}$$

Finalmente,

$$S(\mathcal{Y}) \subset S_o(\mathcal{Y}) \quad (2.6)$$

En cuanto a los resultados de éste capítulo tendremos la necesidad de suponer convexidad. No obstante, requiriendo que \mathcal{Y} es convexo es usualmente un requerimiento restrictivo.

Definición 2.0.1. (ver [1])

Un conjunto $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$ es llamado \mathbb{R}_{\geq}^p -convexo, si $\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ es convexo.



Figura 2.2: Y es $\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\geq}^p$

Todo conjunto convexo \mathcal{Y} es claramente \mathbb{R}_{\geq}^p -convexo. El conjunto de la figura 2.2 es convexo y por tanto es \mathbb{R}_{\geq}^p -convexo.

2.1. SUMA PONDERADA ESCALARIZADA Y EFICIENTE (DÉBIL)

En ésta sección, mostraremos que las soluciones optimales del problema de suma ponderada (2.2) con pesos positivos (no negativos) son siempre (debilmente) eficiente y que bajo la suposición de convexidad todas las soluciones eficientes (debilmente) son soluciones optimal de problemas escalarizados con pesos positivos (no negativos).

Teorema 2.1.1.

Para cualquier conjunto $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$, tenemos $S_o(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{wN}$

Demostración:

Sea $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ y $\hat{y} \in S(\lambda, \mathcal{Y})$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k y_k$$

para todo $y \in \mathcal{Y}$

Supongamos que $\hat{y} \notin \mathcal{Y}_{wN}$. Entonces, para algún $y' \in \mathcal{Y}$ con $y'_k < \hat{y}_k, k = 1, \dots, p$. Así,

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k y'_k < \sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k$$

Porque el mínimo de los pesos λ_k es positivo. Esta contradicción implica el resultado.

Con los teoremas anteriores, tenemos la siguiente extensión de la inclusión 2.6 A saber,

$$S(\mathcal{Y}) \subset S(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{wN} \quad (2.7)$$

y en general

$$S(\mathcal{Y}) \subset S_o(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{wN} \quad (2.8)$$

Para conjuntos \mathbb{R}_{\geq} – convexos.

Proximamente veremos la relación de $S(\mathcal{Y})$ y $S(\mathcal{Y})$ para \mathcal{Y}_N .

Teorema 2.1.2.

Sea $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$, entonces $S(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N$.

Demostración:

Sea $\hat{y} \in S(\mathcal{Y})$, entonces hay algún $\lambda \in \mathbb{R}_{>}^p$, satisfaciendo $\sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k y_k$ para todo $y \in \mathcal{Y}$.

Supongamos que $\hat{y} \notin \mathcal{Y}_N$. De aquí, hay algún $y' \in \mathcal{Y}$ con $y'_k \leq \hat{y}_k$. Multiplicando componente a componente por los pesos dados $\lambda_k y'_k \leq \lambda_k \hat{y}_k$, para todo $k = 1, \dots, p$ y

desigualdad estricta para un k . Ésta desigualdad estricta juntamente con el hecho de que todos los λ_k son positivos implica que,

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k y'_k \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k$$

Contradiciendo que $\hat{y} \in S(\mathcal{Y})$.

Corolario 2.1.1.

$\mathcal{Y}_N \subset S(\mathcal{Y})$ si \mathcal{Y} es un conjunto \mathbb{R}_{\geq}^p – convexo

Del teorema y corolario anterior, tenemos

$$S(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N$$

,

$$S(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{wN} \quad (2,10)$$

y en general

$$S(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N \subset S(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}_{wN} \quad (2,11)$$

para conjuntos \mathbb{R}_{\geq}^p – convexos.

Del teorema anterior se puede extender para la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1.

Si \hat{y} es el único elemento de $S(\lambda, \mathcal{Y})$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$, entonces $\hat{y} \in \mathcal{Y}_N$.

Proposición 2.1.2.

Supongamos que \hat{x} es una solución optimal del problema de optimización de suma ponderada

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \quad (2,12)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$, entonces tenemos la siguiente relación:

(a) Si $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$, entonces $\hat{x} \in \mathcal{X}_{wE}$.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}_{>}^p$, entonces $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$

(c) Si $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ y \hat{x} es una única solución óptimal de (2.12), entonces $\hat{x} \in \mathcal{X}_{sE}$

Proposición 2.1.3.

Sea \mathcal{X} un conjunto convexo, y sea f_k funciones convexas, $k = 1, \dots, p$. Si $\hat{x} \in \mathcal{X}_{wE}$ hay algún $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ tal que \hat{x} es una solución óptimal de (2.12).

Teorema 2.1.3. (ver [5])

Sea $\lambda_i > 0$ ($i=1, \dots, p$) fijo. Si x^0 es óptimal en (P_λ) , entonces x^0 es propiamente eficiente en (POM) .

Demostración:

Queremos probar que x^0 es propiamente eficiente, es decir,

(a) x^0 es eficiente

(b) $\exists M > 0$ tal que para cada i tenemos, $\frac{f_i(x) - f_i(x^0)}{f_j(x^0) - f_j(x)} \leq M$

para algún j tal que $f_j(x) < f_j(x^0)$ siempre que $x \in \mathcal{X}$ y $f_i(x) > f_i(x^0)$.

Probemos a

Como x^0 es óptimo para P_λ , es eficiente.

Probemos b

Consideremos $M = (p-1) \frac{\lambda'_j}{\lambda'_i}$, donde $\frac{\lambda'_j}{\lambda'_i} = \text{Max}\{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\}$, $\lambda_i \neq 0$ (por hipótesis, $\lambda_i > 0$, además asumimos que $p \geq 2$, porque en otro caso estamos en función de un objetivo.

Procedamos por reducción al absurdo, es decir, x^0 es propiamente eficiente, esto es,

$$f_i(x) - f_i(x^0) > M(f_j(x^0) - f_j(x)) \quad \text{para todo } j$$

tal que $f_j(x) > f_j(x^0)$

Sustituyendo M , tenemos

$$f_i(x) - f_i(x^0) > \frac{(p-1)\lambda'_j}{\lambda'_i} (f_j(x^0) - f_j(x)) \quad \text{para todo } j \neq i$$

Multipliquemos por $\frac{\lambda'_i}{(p-1)}$

$$\frac{\lambda'_i}{(p-1)}(f_i(x) - f_i(x^0)) > \frac{(p-1)\lambda'_j}{\lambda'_i} \frac{\lambda'_i}{(p-1)}(f_j(x^0) - f_j(x))$$

$$\frac{\lambda'_i}{(p-1)}(f_i(x) - f_i(x^0)) > \lambda'_j(f_j(x^0) - f_j(x))$$

Como $p \geq 2$, entonces $p-1 \geq 1$, tenemos

$$\lambda'_i(f_i(x) - f_i(x^0)) > \lambda'_j(f_j(x^0) - f_j(x))$$

Sumamos sobre $j \neq i$

$$\sum_{j \neq i} \lambda'_i(f_i(x) - f_i(x^0)) > \sum_{j \neq i} \lambda'_j(f_j(x^0) - f_j(x))$$

$$\lambda'_i(f_i(x) - f_i(x^0)) > \sum_{j \neq i} \lambda'_j(f_j(x^0) - f_j(x))$$

$$0 > \sum_{j \neq i} \lambda'_j(f_j(x^0) - f_j(x)) - \lambda'_i(f_i(x) - f_i(x^0))$$

$$0 > \sum_{j \neq i} \lambda'_j f_j(x^0) - \sum_{j \neq i} \lambda'_j f_j(x) - \lambda'_i f_i(x) + \lambda'_i f_i(x^0)$$

$$0 > \left(\sum_{j \neq i} \lambda'_j f_j(x^0) + \lambda'_i f_i(x^0) \right) - \left(\sum_{j \neq i} \lambda'_j f_j(x) + \lambda'_i f_i(x) \right)$$

$$\sum_{j \neq i} \lambda'_j f_j(x) + \lambda'_i f_i(x) > \sum_{j \neq i} \lambda'_j f_j(x^0) + \lambda'_i f_i(x^0)$$

Ésto contradice la optimalidad de x^0 en (P_λ) .

Teorema 2.1.4. (ver [5])

Sea \mathcal{X} un conjunto convexo, y sea f_i concavo sobre \mathcal{X} . Entonces, x^0 es propiamente eficiente en (POM), si y sólo si, x^0 es optimal en (P_λ) para algún λ con componentes estrictamente positivas.

Demostración:

(\rightarrow) Queremos probar que x^0 es optimal, es decir, para todo $x \in \mathcal{X}$, se cumple que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x^0) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x)$$

Como x^0 es propiamente eficiente, es decir, existe un escalar $M > 0$, tal que para cada i ($i = 1, \dots, p$) tenemos,

$$f_i(x) - f_i(x^0) \leq M(f_j(x^0) - f_j(x))$$

para algún j tal que $f_j(x) < f_j(x^0)$ en $x \in \mathcal{X}$ y $f_i(x) > f_i(x^0)$

Así,

$$f_i(x) - f_i(x^0) \leq M f_j(x^0) - M f_j(x) \quad (1)$$

$$f_i(x) + M f_j(x) \leq f_i(x^0) + M f_j(x^0) \quad (2)$$

Como f_i es concava para todo $i = 1, \dots, p$ se tiene que existe $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, p$ tal que $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$ es concava, con $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$

Seguidamente, multiplicamos por $\lambda_j > 0$ a (2)

$$\lambda_j(f_i(x) + M f_j(x)) \leq \lambda_j(f_i(x^0) + M f_j(x^0))$$

$$\sum_{j \neq i}^p \lambda_j(f_i(x) + M f_j(x)) \leq \sum_{j \neq i}^p \lambda_j(f_i(x^0) + M f_j(x^0))$$

Agregamos el i -ésimo término p

$$\lambda_i f_i(x) + \sum_{j \neq i}^p \lambda_j (f_i(x) + M f_j(x)) \leq \lambda_i f_i(x^0) + \sum_{j \neq i}^p \lambda_j (f_i(x^0) + M f_j(x^0))$$

$$\lambda_i f_i(x) + \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_i(x) + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x) \leq \lambda_i f_i(x^0) + \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_i(x^0) + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x^0)$$

Puesto que $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1 - \lambda_i$, se tiene

$$\lambda_i f_i(x) + (1 - \lambda_i) f_i(x) + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x) \leq \lambda_i f_i(x^0) + (1 - \lambda_i) f_i(x^0) + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x^0)$$

$$\lambda_i f_i(x) + f_i(x) - \lambda_i f_i(x) + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x) \leq \lambda_i f_i(x^0) + f_i(x^0) - \lambda_i f_i(x^0) + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x^0)$$

$$f_i(x) + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x) \leq f_i(x^0) + \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x^0)$$

Sumamos sobre i , tenemos,

$$\sum_{j=1}^p (f_j(x) + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x)) \leq \sum_{j=1}^p (f_j(x^0) + \sum_{j \neq i}^p \lambda_j f_j(x^0))$$

$$\sum_{j=1}^p (1 + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j) f_j(x) \leq \sum_{j=1}^p (1 + \sum_{j \neq i}^p \lambda_j) f_j(x^0)$$

Consideremos $\hat{\lambda}_j = 1 + M \sum_{j \neq i}^p \lambda_j > 0$

$$\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j f_j(x) \leq \sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j f_j(x^0) \quad \text{para todo } x \in \mathcal{X}$$

Por lo tanto, x^0 es optimal.

(←) se tiene por teorema anterior.

CAPÍTULO 3

EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

Los problemas que estudiamos tienen algunas características específicas, como el tipo de función bien sea lineal o no lineal y el número de variables. El objetivo es estudiar el frente de Pareto cuando aplicamos el método de la suma ponderada. Debido a la cantidad de cálculos necesarios, se optó por realizar la búsqueda de las soluciones utilizando MATGAMS, el cual es un complemento de GAMS (General Algebraic Modeling System) que permite enlazar a éste con MATLAB (MATrix LABoratory) .

A continuación se presentan algunos ejemplos clásicos de POM para el cual se conoce el frente de Pareto.

3.1. Problemas sin Restricciones

Problema de Shaffer (1984)

El problema de Shaffer tiene frente de Pareto convexo y está determinado por $f_2^* = (\sqrt{f_1^*} - 2)^2$ en el rango $0 \leq f_1^* \leq 4$. Este problema tiene frente de Pareto continuo y diferenciable.

Minimizar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = (x^2 - 2)^2 \end{cases}$$

$$\text{con } -2 \leq x \leq 4$$

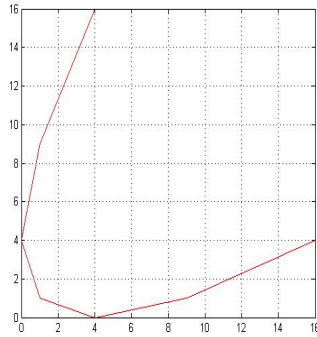


Figura 3.1: \mathcal{Y}_N de Shaffer Calculado

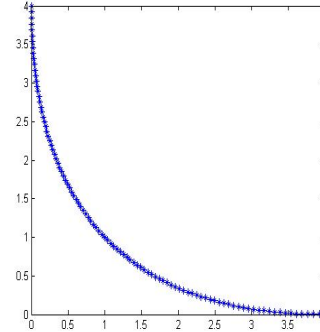


Figura 3.2: \mathcal{Y}_N de Shaffer con el método de suma ponderada

Observe que debido a la naturaleza de éste problema, el método de suma ponderada arrojó una excelente aproximación del frente de Pareto calculado (ver figuras 3.1 y 3.2).

Problema de Kursawe (1990)

Usa un problema de optimización bi-objetivo más complicado, tiene 3 variables en el rango $[-5, 5]$. Presenta un frente de Pareto no convexo y esta determinado por $x_i^* = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y presenta discontinuidad en este caso.

Minimizar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (-10 \exp(-0,2 * \sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2})) \\ f_2(x) = \sum_{i=1}^n (|x_i|^a + 5 \sin(x_i)^b) \end{cases}$$

con $-5 \leq x_i \leq 5$

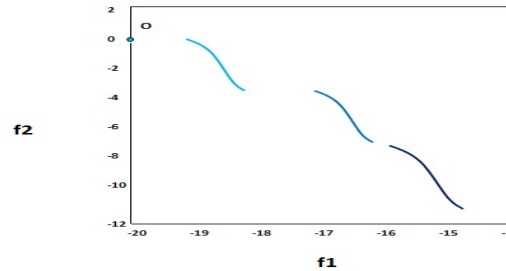


Figura 3.3: \mathcal{Y}_N de Kursawe Calculado

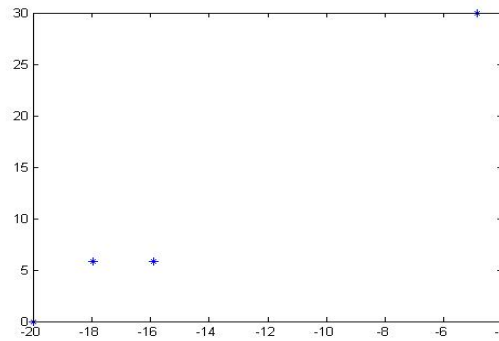


Figura 3.4: \mathcal{Y}_N de Kursawe con el método de suma ponderada

Debido a las características que presenta el problema de Kursawe, se observa en la figura 3.4 que usando el método de suma ponderada arrojó sólo 4 soluciones del frente Pareto calculado (figura 3.3), es decir, no obtuvo una buena aproximación.

Problema de Zitzler-Deb-Thiele's (ZDT)(2000):

Zitzler (2000) son seis problemas (ZDT1 a ZDT6) basados en procesos de construc-

ción. Después de éste estudio se informa que éste test de problemas tienen estudios en otras investigaciones. Es un problema de dos objetivos por minimizar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) = g(x)h(f_1(x), g(x)) \end{cases}$$

Los seis problemas varían en el modo de las tres funciones $f_1(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son definidas. En todos los problemas excepto ZDT5, el frente de Pareto óptimo es formado por $g(x) = 1$. Aunque estos problemas usan f_1 como función de una sola variable, el problema puede presentar dificultad decreciente por usar función multivariable f_1 o una estrategia de variable. A continuación se estudiará solamente ZDT1.

ZDT1

Este es un problema de 30-variables que se encuentran en el rango $[0, 1]$. Su frente de Pareto corresponde a $0 \leq x_1^* \leq 1$ y $x_i^* = 0$ para $i = 2, \dots, 30$ y además es convexo y continuo, su complejidad está dada por el gran número de sus variables.

Minimizar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x_1 \\ f_2(x) = g(x)[1 - \sqrt{x_1/g(x)}] \\ g(x) = 1 + 9\left(\sum_{i=2}^n x_i\right)/(n-1) \end{cases}$$

$con 0 \leq x_i \leq 1$

Observe que a pesar que el frente de Pareto calculado figura 3.6 es convexo, la distribución de los pesos no cubrió adecuadamente el frente de Pareto arrojando sólo una solución (ver figura 3.5).

Problemas de Viennet Viennet presenta un conjunto de problemas con tres funciones objetivos de los cuales en este trabajo se considera sólo uno.

VNT2

Es un problema que posee dos variables que se encuentran en el rango $[-4, 4]$. Su frente de Pareto es no convexo y además presenta discontinuidad.

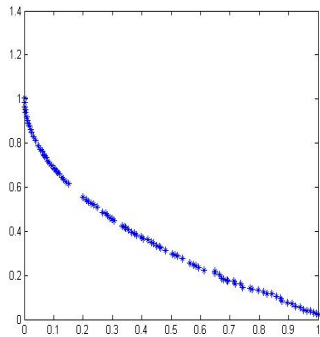


Figura 3.5: \mathcal{Y}_N de ZDT1 Calculado

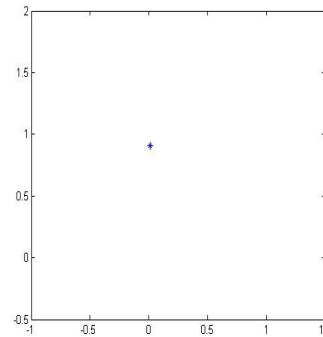


Figura 3.6: \mathcal{Y}_N de ZDT1 con el método de suma ponderada

Al aplicar el método de suma ponderada al problema de VNT2, tomando en cuenta las características que éste presenta. Se observa en la figura 3.8 que acá tampoco hubo una buena distribución de pesos arrojando sólo dos soluciones del frente de Pareto calculado (figura 3.7).

3.2. Problema con Restricciones

Osyczka2 (Osyczka y Kundu (1995)) Osyczka2 usa un problema con seis variables con seis restricciones, donde cuatro son lineales. Su frente de Pareto es una concatenación de cinco regiones.

Minimizar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -(25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 1)^2(x_4 - 4)^2 + (x_5 - 1)^2) \\ f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \end{cases}$$

sujeito a:

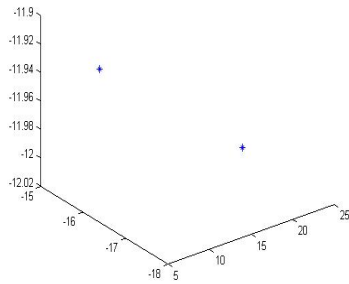


Figura 3.7: \mathcal{Y}_N de VNT2 Calculado

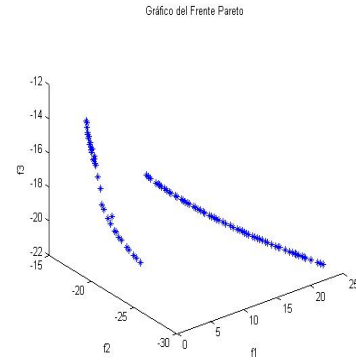
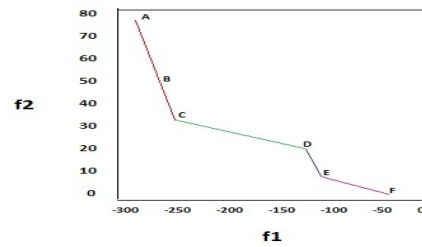
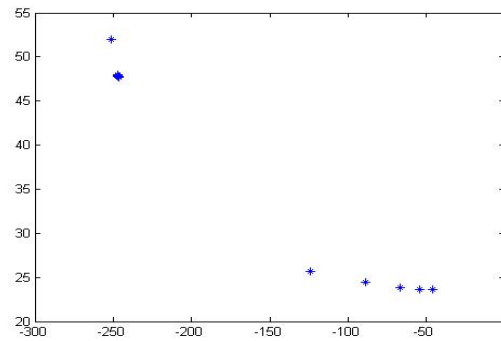


Figura 3.8: \mathcal{Y}_N de VNT2 con el método de suma ponderada

- (a) $C_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \geq 0$
- (b) $C_2(x) = 6 - x_1 - x_2 \geq 0$
- (c) $C_3(x) = 2 - x_2 + x_1 \geq 0$
- (d) $C_4(x) = 2 - x_1 + 3x_2 \geq 0$
- (e) $C_5(x) = 4 - (x_3 - 3)^2 - x_4 \geq 0$
- (f) $C_6(x) = (x_5 - 3)^2 - x_6 - 4 \geq 0$
- (g) $0 \leq x_1, x_2, x_6 \leq 10, 1 \leq x_3, x_5 \leq 5, 0 \leq x_4 \leq 6$

Se observa en la figura 3.10 que con una distribución del vector pesos uniforme no es posible cubrir todo el frente pareto el cual es no convexo (figura 3.9), sin embargo se obtiene una cantidad considerable de óptimos de pareto.

Figura 3.9: \mathcal{Y}_N calculadoFigura 3.10: \mathcal{Y}_N de Osyczka con el método de suma ponderada

Conclusiones

Primeramente se definió optimización multiobjetivo, se caracterizó puntos paretos y se describió el método de suma ponderada, resultando ser una herramienta simple para resolver problemas multiobjetivos, y finalmente se realizó una experimentación numérica para ver el comportamiento del método donde se observó que al hacer variar el vector de peso en problemas con frentes de Pareto no convexos, no muestra una buena aproximación al frente de pareto calculado, sin embargo, siempre es posible obtener por lo menos una solución eficiente. Cabe destacar, que para frentes convexos podría no portarse bien el método como en el ejemplo de ZDT1 debido a la complejidad del mismo.

REFERENCIAS

- [1] Ergoth M. *Milticriteria Optimization*.vol.2, Springer, New York,(2005).

- [2] Deb K. *Multi-objctive Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, (2001).

- [3] Dennis I. and J.E. *A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems*, Structural Optimization 14 (1997), 63-69.

- [4] Urruty H. and Baptiste J. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer-Verlag, Berlin, (1993).

- [5] Geoffrion A. *Proper Efficiency and Theory of Vector Maximization*. Journal of Mathematical Analysis and Applications vol.22,(1968).

- [6] K. C. Tan, E. F. Khor, and T. H. Lee. *Multiobjective Evolutionary algorithms and applications*. Springer Verlag, (2004).