

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“ESTUDIO DE UN PROCEDIMIENTO DE REDONDEO
FUERTEMENTE POLINOMIAL QUE PRODUCE UNA
SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA MAXIMAL, PARA
PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIEDAD LINEAL TIPO
 $P_*(\kappa)$ ”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

JEFERSON TORREALBA

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
ÁREA DE CONOCIMIENTO: OPTIMIZACIÓN.
TUTOR: MSC. ALÍ DUIN



Universidad Centrocidental
 “Lisandro Alvarado”
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centrocidental “Lisandro Alvarado”, para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“ESTUDIO DE UN PROCEDIMIENTO DE REDONDEO FUERTEMENTE POLINOMIAL QUE PRODUCE UNA SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA MAXIMAL, PARA PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIEDAD LINEAL TIPO $P_*(\kappa)$ ”

Presentado por el ciudadano JEFERSON TORREALBA titular de la Cédula de Identidad N° 18.356.821. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

*A mi padre, compañero y amigo Fidel
Torrealba...*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar le quiero agradecer a Dios y a la Divina Pastora por darme vida, salud y sabiduría para poder lograr esta pequeña meta que estoy cerca de alcanzar. Además por darme fortaleza en los momentos difíciles de mi vida y así poder vencer los obstáculos.

También le quiero agradecer a mis padres por haberme dado la vida, guiarme por el buen camino y darme tantos momentos de felicidad. A mi padre Fidel Torrealba por ser mi amigo y compañero. A mi madre Mirian Pargas por ser única y tan especial conmigo.

A mi hermana Jefferlin por ser la alegría de la casa. Como no quererte si eres mi única hermana y hemos compartido tantas cosas juntos.

Siempre he pensado que la familia es la columna vertebral de la sociedad y que gran parte de nuestra personalidad depende de esta. Hoy les quiero agradecer todo lo que han hecho por mi y espero algún día poder retribuirles de alguna forma todo lo que me han dado. A mis abuelos: Rosa y Pedro. A mis tios: Liliana, Janeth, Nancy, Cecilia, Norys, Nelson, Luis, Maria, Leonardo y especialmente a mi tía Leyda que desde donde este espero que se sienta orgullosa de mi.

Además le quiero agradecer a mis primos por todo que hemos compartido y decirles humildemente que espero ser un buen ejemplo para ellos: Harnis, jairo, jairismar, Dario, Nelson, Liliana, Paola, Gissbel, Jaiglimar, Cruz Mario, Angel, Steffany. Especialmente a mis primas Luissiana, Milagros y Gissel.

A mi tutor por haber creído en mí y guiarme para poder hacer mi tesis.

Por último pero no por eso menos importante, les quiero agradecer a mis amigos por tantos buenos momentos vividos y por ser testigos y pieza fundamental en mi crecimiento y evolución como persona desde que comencé la carrera hasta culminarla: Lina, Willennys, Eleiny, Nicolas, José, Alexander, Fernando, Liseth, Luis, Jesús, Leo, Rona y Joan. De verdad gracias

“ESTUDIO DE UN PROCEDIMIENTO DE REDONDEO
FUERTEMENTE POLINOMIAL QUE PRODUCE UNA
SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA MAXIMAL, PARA
PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIEDAD LINEAL TIPO
 $P_*(\kappa)$ ”

RESUMEN

Se pretende estudiar un método el cual permite determinar en que iterado "saltar", desde un punto sobre la trayectoria central o desde un punto cercano a dicha trayectoria central, hacia la solución del problema de complementariedad lineal clásico; además se da un procedimiento para dar el salto. El estudio supone que la matriz M que define el (LCP) es de clase $P_*(\kappa)$ y concluye que la solución que se obtiene es maximal y se logra en a lo mas $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones aritméticas. Este estudio se basa en el trabajo desarrollado por [Illés, Peng, Roos y Terlaky]

ÍNDICE

Agradecimientos	i
Resumen	ii
1. Preliminares.	4
1.1. Algoritmo afín	10
1.1.1. Algoritmo afín-escala primal	11
2. La partición óptima y los dos números de condición.	13
2.1. Partición Óptima.	13
2.2. El primer número de condición para (<i>LCP</i>).	17
2.3. El segundo número de condición para (<i>LCP</i>).	21
2.4. Encontrar la partición óptima.	32
3. Identificación de partición óptima de centros aproximados.	34
3.1. Encontrar la partición óptima de los centros aproximados.	34
3.2. Complejidad de encontrar la partición óptima.	40
4. Redondeo para una solución complementaria estricta.	42
4.1. Procedimiento de redondeo.	42
4.2. Complejidad de encontrar una solución exacta	46
Referencias bibliográficas.	48

Introducción.

El problema que se enfrenta en este estudio, es el de redondear una solución aproximada del problema de complementariedad lineal (1) - (3) a una solución exacta de dicho problema, dado que el problema (1) - (3) ha sido resuelto mediante un método de punto interior, basado en trayectoria central.

El problema de complementariedad lineal, consiste en encontrar un vector $x \in \mathbb{R}^n$ (si existe) que cumpla con las siguientes condiciones

$$s = Mx + q, \tag{1}$$

$$x, s \geq 0, \tag{2}$$

$$x_i s_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{3}$$

donde M es una matriz de orden $n \times n$ y q es un vector en \mathbb{R}^n .

El problema se presenta debido a que para los problemas de tipo (1) - (3) las soluciones tienen componentes nulas, tanto la x como s , sin embargo los métodos de punto interior solamente generan iterados $(x^k, s^k(x^k))$ con todas sus componentes distintas de cero, esto es, $x_i^k > 0$, $s_i^k > 0$; por lo tanto las sucesiones de puntos (x^k, s^k) se aproximan a alguna solución de (1) - (3) sin alcanzarla exactamente. Como el propósito es alcanzar dicha solución, hay que dar un "salto" que usualmente se llama redondeo. El redondeo no puede ser arbitrario, pues puede conducir a soluciones infactibles, por lo tanto se requiere de un procedimiento sistemático para llevarlo a cabo. El procedimiento sistemático propuesto en este trabajo para llevar a cabo el redondeo, comienza por "descubrir" una partición del conjunto de índices (posiciones de las componentes de los vectores x y s) para el conjunto de soluciones de (1) - (3). El propósito de la partición es el de descubrir las componentes de x y de s que se anulan en la (o en alguna) solución. Para descubrir dicha partición se definen y utilizan varios números de condición, los cuales permiten determinar cuando una componente del vector x^k es suficientemente pequeña como para asegurar que en la solución, la misma componente debe ser cero, y cuando una componente del vector s^k es igualmente suficientemente pequeña, como para estar seguros que el

proceso se aproxima a una solución con dicha componente igual a cero. El segundo paso del procedimiento consiste, una vez determinada la partición, en construir un sistema de ecuaciones que al ser resuelto alcance una solución exacta de (1) - (3). La construcción de dicho sistema se basa en la partición previamente determinada. El procedimiento realizado conduce a una solución complementaria maximal debido a la naturaleza misma del procedimiento. La amplitud del estudio lleva a problemas con matrices del tipo $P_*(\kappa)$ el cual contiene al conjunto de las matrices positivas semidefinidas, que fueron durante décadas, el conjunto de matrices para el estudio de los problemas (LCP).

Los problemas de complementariedad lineal (LCP) son una generalización de los problemas de programación lineal (LP) y los problemas de programación cuadráticos (QP), ello se observa debido a que estos dos tipos problemas se pueden transformar en modelos de problemas de complementariedad lineal. A continuación se da de forma general un problema de programación lineal y un problema de programación cuadrático para luego buscar su problema dual y transformarlo a un problema de complementariedad lineal.

Para problemas de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T z \\ \text{s.a} & Az \geq b \\ & z \geq 0 \end{array}$$

El dual asociado a este problema es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & b^T u \\ \text{s.a} & A^T u \leq c \\ & u \geq 0 \end{array}$$

El problema de complementariedad lineal asociado al modelo de (LP) está definido como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}$$

De forma análoga, para el problema de programación cuadrático

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2}z^T Qz + c^T z \\ \text{s.a} & Az \geq b \\ & z \geq 0 \end{array}$$

El dual asociado a este problema es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & -\frac{1}{2}z^T Qz + b^T u \\ \text{s.a} & -Qz + A^T u \leq c \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Así el problema de complementariedad lineal asociado al modelo de (QP) se define mediante:

$$M = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}$$

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera:

Capítulo II: Preliminares.

En este capítulo se enuncian algunas definiciones básicas, lemas, teoremas y corolarios, los cuales servirán de base a los capítulos posteriores.

Capítulo III: Partición óptima y los dos números de condición.

En este capítulo se definirán dos números de condición los cuales son usados para hallar la partición óptima cuando se comienza el algoritmo con un punto en la trayectoria central. Además se exponen algunos lemas, teoremas y corolarios, con sus respectivas demostraciones necesarias para encontrar la partición óptima.

Capítulo IV: Identificación de la partición óptima de centros aproximados.

En este capítulo se encontrará la partición óptima cuando el punto iterado dado por el algoritmo no está exactamente en la trayectoria central sino en una vecindad de esta. También se encontrará el número de iteraciones necesarias para hallar la partición óptima.

Capítulo V: Redondeo para una solución complementaria estricta.

En este capítulo se realizará el procedimiento de redondeo, el cual consiste en saltar desde un punto de la trayectoria central o cercana a la misma a la solución cuando la distancia entre ellos sea lo suficientemente pequeña. Este paso se realiza mediante la resolución de un sistema de ecuaciones. Además se calculará el número de iteraciones necesarias para que el procedimiento de redondeo produzca una solución complementaria maximal.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES.

Se usará $\|\cdot\|_p$ ($p \in [1, \infty]$) para denotar la p -norma sobre \mathbb{R}^n , con $\|\cdot\|$ se denotará la norma euclidiana. E denota la matriz identidad, e se usará para denotar el vector que tiene todas sus componentes iguales a 1. Dado un vector n -dimensional x , se denotará por X la matriz diagonal $n \times n$ cuya entrada diagonal son las coordenadas x_j de x . Si $x, s \in \mathbb{R}^n$, entonces $x^T s$ denota el producto escalar de los dos vectores, esto es, $x^T s = \sum_{i=1}^n x_i s_i$. Además, $xs = (x_1 s_1, x_2 s_2, \dots, x_n s_n)$. Para alguna matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, A_i , $A_{.j}$ son la i -ésima fila y la j -ésima columna de A , respectivamente. Además,

$$\pi(A) = \prod_{j=1}^n \|A_{.j}\|$$

Para cualquier conjunto de índices $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $|J|$ denota la cardinalidad de J y $A_J \in \mathbb{R}^{|J| \times n}$ la submatriz de A cuyas filas son indexados por elementos en J . Por otra parte, si $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $A_{JK} \in \mathbb{R}^{|J| \times |K|}$ denota la submatriz de A_J cuyas columnas son indexadas por elementos en K .

A continuación se enunciarán algunas definiciones y teoremas clásicos del álgebra lineal los cuales sirven de base matemática para el desarrollo del trabajo.

DEFINICIÓN 1.1. (*Permutación*). Sea $S = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de enteros de 1 a n , ordenados en forma ascendente. Un reordenamiento $j_1 j_2 \cdots j_n$ de los elementos de S es una permutación de S .

Se dice que una permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$ de $S = \{1, 2, \dots, n\}$ tiene una inversión si un entero mayor j_r procede a uno menor j_s . Una permutación se denomina par o impar si el número total de inversiones en ella es par o impar, respectivamente.

DEFINICIÓN 1.2. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times n$. Se define el determinante por permutación de A (que se escribe $\det(A)$ o $|A|$) como

$$\det(A) = |A| = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

donde la suma varía sobre todas las permutaciones $j_1 j_2 \cdots j_n$ del conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. El signo se toma como $+$ o como $-$ si la permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$ es par o impar, respectivamente.

DEFINICIÓN 1.3. (*Determinante por cofactores*). Si A es una matriz cuadrada entonces el menor del elemento a_{ij} se denota por M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz que queda después de quitar la i -ésima fila y la j -ésima columna de A . El número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ se denomina cofactor del elemento a_{ij} .

TEOREMA 1.1. (*Regla de Cramer*). Si $Ax = b$ es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$, entonces la solución del sistema es única. Esta solución es

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al sustituir los elementos de la j -ésima columna de A por los elementos de la matriz

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

TEOREMA 1.2. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*). Si $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ son vectores en \mathbb{R}^n , entonces

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

TEOREMA 1.3. (*Desigualdad triangular*). Si $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ son vectores en \mathbb{R}^n , entonces

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

TEOREMA 1.4. (*Desigualdad de Hadamard*). Sea M una matriz de orden $n \times n$. Se denota la j -ésima columna de M por $M_{.j}$, entonces

$$\det(M) \leq \prod_{j=1}^n \|M_{.j}\|$$

DEFINICIÓN 1.4. (*Conjunto soporte*). Sea D una matriz entera no nula de orden $m \times n$. El soporte de x son los índices de las columnas de la matriz D tales que las componentes del vector x son no nulas y se denota por J , es decir, $J = \{j : x_j \neq 0\}$.

Una matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz $P_*(\kappa)$ si

$$(1 + 4\kappa) \sum_{i \in I_+(x)} x_i [Mx]_i + \sum_{i \in I_-(x)} x_i [Mx]_i \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

donde

$$I_+(x) = \{1 \leq i \leq n : x_i [Mx]_i > 0\}$$

$$I_-(x) = \{1 \leq i \leq n : x_i [Mx]_i < 0\}$$

y κ es un número real no negativo. Note que el conjunto de índices $I_+(x)$ y $I_-(x)$ no solo depende de x sino también de la matriz M . Si se aplica la propiedad distributiva en (1.1) se obtiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I_+(x)} x_i [Mx]_i + 4\kappa \sum_{i \in I_+(x)} x_i [Mx]_i + \sum_{i \in I_-(x)} x_i [Mx]_i \geq 0 \\ \implies & \sum_{i \in I_-(x)} x_i [Mx]_i + \sum_{i \in I_-(x)} x_i [Mx]_i \geq -4\kappa \sum_{i \in I_+(x)} x_i [Mx]_i \end{aligned}$$

Así (1.1) es equivalente a

$$x^T Mx \geq -4\kappa \sum_{i \in I_+(x)} x_i [Mx]_i \quad (1.2)$$

La matriz M es una matriz P_* si es una matriz $P_*(\kappa)$ para algún κ no negativo:

$$P_* = \bigcup_{\kappa \geq 0} P_*(\kappa)$$

En el caso en que $\kappa = 0$, al sustituir este valor en (1.2) se tiene

$$x^T Mx \geq -4(0) \sum_{i \in I_+(x)} x_i [Mx]_i$$

$$\implies x^T Mx \geq 0$$

Por tanto M es una matriz $P_*(0)$ si y solo si M es semidefinida positiva. Además, si M es una matriz $P_*(\bar{\kappa})$ para algún $\bar{\kappa} \geq 0$, entonces M es una matriz $P_*(\kappa)$ para todo $\kappa \geq \bar{\kappa}$.

Una matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es suficiente por columna si para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$X(Mx) \leq 0 \implies X(Mx) = 0$$

y es suficiente por fila si M^T es suficiente por columna. La matriz M es suficiente si es a la vez suficiente por fila y por columna. Se tiene que $P_* = SU$.

El conjunto de vectores factibles y vectores factibles positivos (estrictamente factibles) son denotados, respectivamente por

$$\Gamma = \{x : x \geq 0, s(x) \geq 0\},$$

$$\Gamma^0 = \{x : x > 0, s(x) > 0\}$$

y el conjunto de soluciones de (LCP) por

$$\Gamma^* = \{x : x \geq 0, s(x) \geq 0, xs(x) = 0\}$$

Se sabe (confróntese [Kojima, Megiddo, Noma y Yoshise]) que si $M \in P_*$ y $\Gamma \neq \emptyset$, entonces $\Gamma^* \neq \emptyset$. Además, si $\Gamma^0 \neq \emptyset$, entonces Γ^* es compacto, por otra parte para todo $\mu > 0$ existe un único $x \in \Gamma^0$ tal que $xs(x) = \mu e$

En otras palabras, asumiendo que Γ^0 es no vacío el camino central

$$C = \{x \in \Gamma^0 : xs(x) = \mu e \text{ para algún } \mu > 0\}$$

existe. Se demostró que la suposición $\Gamma^0 \neq \emptyset$ se puede hacer sin pérdida de generalidad. Por lo tanto, se puede suponer que el camino central C existe. El camino central C es una curva suave 1-dimensional que llega a una solución de (LCP) cuando μ tiende a 0.

Se añadira el siguiente lema sobre sistema de inecuaciones lineales.

LEMA 1.1. *Sea x una una solución de la ecuación $Dx = d$, donde D es una matriz entera no nula de orden $m \times n$ y d es un vector en \mathbb{R}^n . Si J denota el soporte de x y las columnas de $D_{\cdot j}$ son linealmente independientes, entonces*

$$\frac{1}{\Delta(D)} \leq x_j \leq \Delta(D) \|d\|_1, \quad j \in J$$

donde $\Delta(D)$ denota el mayor valor absoluto de los determinantes de la submatriz cuadrada de D . La desigualdad derecha también es cierta si d no es un vector entero.

Demostración.

Por hipótesis se sabe que:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1} & D_{m2} & \dots & D_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Sea el conjunto de índices K tal que D_{KJ} es una submatriz cuadrada no singular de D ; tal K existe porque las columnas de D_J son linealmente independientes. Ahora se tiene que $D_{KJ}x_J = d_K$, esto es,

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1|J|} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2|J|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{|K|1} & D_{|K|2} & \dots & D_{|K||J|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{|J|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{|J|} \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula x_j por la regla de cramer

$$x_j = \frac{\det(D_{KJ}^{(j)})}{\det(D_{KJ})} \quad \forall j \in J$$

donde $D_{KJ}^{(j)}$ denota la matriz que se obtiene cuando se sustituye la j -ésima columna en D_{KJ} por d_k . Como la matriz D_{KJ} es no singular entonces $\det(D_{KJ}) \neq 0$, más aún, como D_{KJ} es una matriz formada por números enteros y por la definición de determinante por permutación

$$\det(D_{KJ}) = \sum (\pm) D_{1J_1} D_{2J_2} \dots D_{KJ_K}$$

la multiplicación de números enteros da como resultado otro número entero, así se puede asegurar que $|\det(D_{KJ})| \geq 1 \implies |x_j| \leq |\det(D_{KJ}^{(j)})|$.

Sustituyendo en la j -ésima columna de D_{KJ} por d_k se obtiene que

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & d_1 & \dots & D_{1|J|} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & d_2 & \dots & D_{2|J|} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_{|K|1} & D_{|K|2} & \dots & d_{|K|} & \dots & D_{|K||J|} \end{bmatrix}$$

Por definición de determinantes por cofactores se obtiene que

$$\begin{aligned} x_j &= (-1)^{1+j} d_1 M_{1j} + (-1)^{2+j} d_2 M_{2j} + \dots + (-1)^{K+j} d_K M_{Kj} \\ |x_j| &\leq |d_1| |M_{1j}| + |d_2| |M_{2j}| + \dots + |d_K| |M_{Kj}| \\ |x_j| &\leq |d_1| \Delta(D) + |d_2| \Delta(D) + \dots + |d_k| \Delta(D) \end{aligned}$$

La primera desigualdad es cierta porque se cumple la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy Schwarz, mientras que la segunda es cierta ya que cada determinante de la submatriz cuadrada es menor o igual al mayor valor absoluto de los

determinantes de las submatrices cuadradas de D , el cual se ha denotado por $\Delta(D)$. Así,

$$\begin{aligned} |x_j| &\leq \sum_{i=1}^K |d_i| \Delta(D) \\ &= \|d\|_1 \Delta(D) \end{aligned}$$

donde el vector d no tiene que ser un vector entero, por lo que se obtiene la desigualdad del lado derecho. Para obtener la desigualdad del lado izquierdo, se usa que d es entero

$$x_j = \frac{\det(D_{KJ}^{(j)})}{\det(D_{KJ})}$$

pero x_j es soporte y por tanto distinto de cero, por lo que se puede asegurar que $\det(D_{KJ}^{(j)}) \neq 0$. Como la definición de determinantes por permutación es el producto de números enteros su valor es entero, por tanto se puede asegurar que $|\det(D_{KJ}^{(j)})| \geq 1$, por tanto $|x_j| \geq \frac{1}{\det(D_{KJ})}$ pero $|\det(D_{KJ})| \leq \Delta(D)$ por definición de $\Delta(D)$, luego $\frac{1}{\det(D_{KJ})} \geq \frac{1}{\Delta(D)}$, por tanto $|x_j| \geq \frac{1}{\det(D_{KJ})} \geq \frac{1}{\Delta(D)}$

Por lo que se prueba la desigualdad de la izquierda. ■

COROLARIO 1.1. Si D es entera y las columnas de D son no todas nulas, entonces bajo la suposición del lema 1.1

$$\frac{1}{\pi(D)} \leq |x_j| \leq \pi(D) \|d\|, \quad j \in J$$

Demostración.

Si las columnas de D son todas no nulas la desigualdad de la izquierda en el lema 1.1 también es válida si se reemplaza $\Delta(D)$ por $\pi(D)$. Esto es cierto, ya que por definición se sabe que

$$\Delta(D) = \max\{|\det(D_{IJ})| : D_{IJ} \text{ es una submatriz cuadrada de } D\} \text{ y } \pi(D) = \prod_{j=1}^n \|D_{\cdot j}\|.$$

Además por la conocida desigualdad de Hadamard se sabe que,

$$|\det(D_{IJ})| \leq \prod_{k=1}^{|J|} \|D_{IJ}^k\|$$

luego

$$\begin{aligned} |\det(D_{IJ})| &\leq \prod_{k=1}^{|J|} \|D_{IJ}^k\| \\ &\leq \prod_{k=1}^{|J|} \|D_{\cdot J}^k\| \\ &\leq \prod_{k=1}^n \|D^k\| \end{aligned}$$

donde D_{IJ}^k se refiere a la columna k -ésima de la matriz D_{IJ} la cual es una submatriz de D . Por lo tanto,

$$\Delta(D) = \max |\det(D_{IJ})| \leq \prod_{k=1}^n \|D^k\| = \pi(D)$$

así se obtiene que

$$\Delta(D) \leq \pi(D) \implies \frac{1}{\pi(D)} \leq \frac{1}{\Delta(D)}$$

por lo que se obtiene la desigualdad del lado izquierdo $\frac{1}{\pi(D)} \leq \frac{1}{\Delta(D)} \leq |x_j|$.

Por el procedimiento realizado en el lema 1.1 se obtiene que como $|x_j| \leq |\det(D_{KJ}^{(j)})|$ implica que $|x_j| \leq \Delta(D)\|d\|_1$ y por lo demostrado anteriormente se tiene que $\Delta(D) \leq \pi(D)$ se puede concluir que,

$$|x_j| \leq \Delta(D)\|d\|_1 \leq \pi(D)\|d\|_1$$

donde el vector d no tiene porque ser entero. Así queda probado el corolario. ■

§1.1. Algoritmo afín

A continuación se inicia la presentación de algoritmos para solucionar problemas de programación lineal (LP).

Por convenio se llaman algoritmos afines a los algoritmos que generan puntos en el conjunto factible S , en contraste con el algoritmo de Karmakar, que genera puntos en una región mayor (cono generado por S).

Todos los algoritmos utilizarán cambios de escala, que es equivalente a usar regiones de confianza elipsoidal y buscar en direcciones de máximo descenso sobre el conjunto

factible S . Esto es, todos los algoritmos seguirán el modelo siguiente:

Considere una función $f : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Se va a construir un modelo de algoritmo para el problema generalizado abajo, con las mismas restricciones que (LP) .

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeto a} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

Se supone siempre que el conjunto factible es limitado.

§1.1.1. Algoritmo afín-escala primal

Este es el más simple de los algoritmos de punto interior. Fue publicado en Rusia por Dikin y pasó desapercibido hasta recientemente, cuando el algoritmo fue descubierto por varias personas independientemente. Un hecho importante es que la demostración de convergencia asintótica publicada por Dikin en 1974 es mejor que las posteriores, pues tiene menos hipótesis.

A continuación se escribirá el algoritmo completo, como de costumbre se supone que un punto inicial es "disponible"

Algoritmo afín-escala primal primal: dado $x^0 > 0$ factible, $\delta \in (0, 1)$.

$k = 0$

Repita

Cambio de escala:

$$X_k = \text{diag}(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \quad , \quad A_k = AX_k \quad , \quad c^k = X_k c$$

$$\text{Proyección: } P = I - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k \quad , \quad c_p = P c^k$$

La dirección de búsqueda: $h = -c_p$

Busqueda unidireccional: tesis de la razón:

$$\lambda = \min_{i=1, \dots, n} \{1/h_i | h_i < 0\}$$

El paso: $\bar{y} = e + \delta \lambda h$

El nuevo punto: $x^{k+1} = X_k \bar{y}$

$k = k + 1$

Algunos detalles del algoritmo merecen comentarios.

Busqueda unidireccional: Inicialmente se mide la máxima longitud de paso a partir del punto e , hasta que alguna variable se anule. Esa longitud es dada por la tesis de

la razón. Se observa que la tesis de la razón siempre tiene solución para un conjunto factible limitado. En implementación es necesario introducir una "tesis" que pueda constar que el problema es ilimitado y parar.

El paso: Para poder repetir el procedimiento en la próxima iteración se tiene que mantener el próximo punto en el interior del octante: por eso este método es llamado "método de punto interior".

Parada del algoritmo: No se especifico ningún criterio de parada. Como está escrito (falta: el ahora que, repita) itera indefinidamente. Como es normal en algoritmos, la parada depende del problema y de algún criterio escogido para estipular la precisión deseada.

CAPÍTULO 2

LA PARTICIÓN ÓPTIMA Y LOS DOS NÚMEROS DE CONDICIÓN.

El propósito final de la investigación consiste en diseñar un procedimiento el cual permita redondear la solución aproximada que suministra un algoritmo tipo trayectoria central hacia una solución exacta del modelo de complementariedad lineal. Esto lleva a pensar en una especie de proyección desde un punto aproximado hacia el conjunto de soluciones del modelo. El mecanismo ideado por [Illés, Peng, Roos y Terlaky] consiste en determinar los índices B para los cuales las variables x_i son estrictamente positivas en el punto solución más cercano al punto de la trayectoria central dada por el algoritmo. De manera formal se establece la partición para las $s_i > 0$ y se determina el conjunto de índices N . Los índices restantes se agrupan en un conjunto T

§2.1. Partición Óptima.

En lo que sigue de tesis se supone que $M \in P_*(\kappa)$ para algún $\kappa \geq 0$. Esto implica que la matriz M es suficiente.

DEFINICIÓN 2.1. *Se denota el conjunto de índices $\{1, 2, \dots, n\}$ por I y se definen los conjuntos*

$$B = \{i \in I : x_i > 0 \text{ para algún } x \in \Gamma^*\}$$

$$N = \{i \in I : s_i(x) > 0 \text{ para algún } x \in \Gamma^*\}$$

$$T = \{i \in I : x_i = s_i(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma^*\}$$

Se Mostrará que estos conjuntos de índices son disjuntos y $B \cup N \cup T = I$, es decir, que ellos forman una partición del conjunto de índices I basada en el conjunto de soluciones óptimas del (LCP).

LEMA 2.1. *El conjunto de índices B, N y T da una partición del conjunto de índices I .*

Demostración.

De la definición de los conjuntos B, N y T es obvio que $B \cap T = \emptyset$, ya que no puede existir un índice i tal que para ese $i \in I$, $x_i > 0$ para algún $x \in \Gamma^*$ y al mismo tiempo ese $i \in I$ cumpla que $x_i = 0$ para toda $x \in \Gamma^*$ por tanto $B \cap T = \emptyset$. Además, también es obvio que $N \cap T = \emptyset$, ahora se mostrará que $I = B \cup N \cup T$. Razonando por absurdo, suponga que $B \cap N \neq \emptyset$ por lo que existe $j \in B \cap N$ tal que para $j \in B$, existe $x' \in \Gamma^*$ tal que $x'_j > 0$, $s_j(x') = 0$ y $j \in N$, existe $x'' \in \Gamma^*$ tal que $x''_j = 0$, $s_j(x'') > 0$. Obsérvese que $j \in B \cap N$ no implica que para el mismo x se toma $x_i > 0$ y $s_i(x) > 0$ puesto que según las definiciones de B y N solamente se requiere que exista algún x para cada caso, no tiene porque ser el mismo. Si se tuviese que $x_i > 0$ y $s_i(x) > 0$, el par $(x, s(x))$ no sería una solución para el modelo matemático LCP.

Sea $x = x' - x''$, $s' = s(x')$, $s'' = s(x'')$, $s = s' - s''$ y $X = \text{diag}(x)$. Luego tomando en cuenta que la expresión Xs representa un vector en \mathbb{R}^n cuyas componentes son el producto $x_i s_i$ se tiene

$$\begin{aligned} Xs &= X(s(x') - s(x'')) \\ &= X(Mx' + q - (Mx'' + q)) \\ &= X(Mx' - Mx'') \\ &= XMx \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Xs &= (X' - X'')(s(x') - s(x'')) \\ &= X's(x') - X's(x'') - X''(x') + X''s(x'') \\ &= -X's(x'') - X''s(x') \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

La expresión anterior se refiere a todas las componentes del vector Xs . Ahora en particular para la componente $j \in B \cap N$ se tiene, $Xs = XMx \leq 0$, además

$$\begin{aligned} x_j s_j &= x_j (s_j(x') - s_j(x'')) \\ &= x_j ((Mx')_j + q - (Mx'')_j - q) \\ &= x_j ((Mx')_j - (Mx'')_j) \\ &= x_j (Mx)_j \end{aligned}$$

de lo anterior también se tiene

$$\begin{aligned}
x_j s_j &= (x'_j - x''_j)(s_j(x') - s_j(x'')) \\
&= x'_j s_j(x') - x'_j s_j(x'') - x''_j s_j(x') + x''_j s_j(x'') \\
&= -x'_j s_j(x'') \\
&< 0
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
x_j s_j &= x_j (Mx)_j \\
&= (x'_j - x''_j)(s_j(x') - s_j(x'')) \\
&= -x'_j s_j(x'') \\
&< 0
\end{aligned}$$

Lo que contradice la definición de matrices suficiente ya que se tiene $XMx \leq 0$ y $XMx < 0$

Así $B \cap N = \emptyset$, y se cumple que $I = B \cup N \cup T$

■

A continuación se prueba un resultado que dice que si un vector \tilde{x} es solución del *LCP* entonces el es complementario a todos los \tilde{s} , esto es, correspondientes a cualquier \tilde{x} solución del *LCP*. Este resultado se sustenta fuertemente en el lema anterior.

COROLARIO 2.1. *Sea x' y x'' solución de (LCP) así $x', x'' \in \Gamma^*$. Entonces $x' s(x'') = 0$ y $x'' s(x') = 0$*

Demostración.

La definición de los conjunto de índices B y N implica que $\{i \in I : x'_i > 0\} \subset B$ y $\{i \in I : s_i(x'') > 0\} \subset N$. Ahora se razona por absurdo, supóngase que

$$\begin{aligned}
x'_i s_i(x'') > 0 &\implies x'_i > 0 \quad \wedge \quad s_i(x'') > 0 \\
&\implies i \in B \quad \wedge \quad i \in N \\
&\implies B \cap N \neq \emptyset
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción ya que en el lema anterior se probó que $B \cap N = \emptyset$. Así $x' s(x'') = 0$. De forma análoga se prueba que $x'' s(x') = 0$. Razonando por absurdo, suponga que

$$\begin{aligned}
x''_i s_i(x') > 0 &\implies x''_i > 0 \quad \wedge \quad s_i(x') > 0 \\
&\implies i \in B \quad \wedge \quad i \in N \\
&\implies B \cap N \neq \emptyset
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción ya que en el lema anterior se probó que $B \cap N = \emptyset$, por tanto $x''_i s_i(x') = 0$

■

COROLARIO 2.2. *El conjunto solución Γ^* es convexo.*

Demostración.

Sea $x', x'' \in \Gamma^*$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ entonces $x \geq 0$ ya que $x', x'' \in \Gamma^*$ y por como esta definido este conjunto $x', x'' \geq 0$, además como $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $x \geq 0$. También

$$\begin{aligned} s(x) &= Mx + q \\ &= M(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') + q \\ &= M(\lambda x') + M(1 - \lambda)x'' + q \\ &= \lambda Mx' + \lambda q + (1 - \lambda)Mx'' + (1 - \lambda)q \\ &= \lambda(Mx' + q) + (1 - \lambda)(Mx'' + q) \\ &= \lambda s(x') + (1 - \lambda)s(x'') \end{aligned}$$

Como $\lambda \in [0, 1]$ y por definición de $s(x')$, $s(x'')$ se tiene que $s(x) \geq 0$. Por lo tanto $x \in \Gamma$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} xs(x) &= (\lambda x' + (1 - \lambda)x'')(\lambda s(x') + (1 - \lambda)s(x'')) \\ &= \lambda^2 x's(x') + \lambda(1 - \lambda)x's(x'') + \lambda(1 - \lambda)x''s(x') + (1 - \lambda)^2 x''s(x'') \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que por hipótesis $x', x'' \in \Gamma^*$ por tanto $x's(x') = 0$ y $x''s(x'') = 0$. Además, por corolario 2.1 como $x', x'' \in \Gamma^*$ se tiene que $x's(x'') = 0$ y $x''s(x') = 0$.

■

Una solución $x \in \Gamma^*$ es llamada complementaria maximal si $x_B > 0$ y $s_N > 0$. Debido a que Γ^* es convexo (y poliédrico) queda garantizado que existe una solución complementaria maximal.

A partir de ahora se supone que $\Gamma^0 \neq \emptyset$. La condición $\Gamma^0 \neq \emptyset$ es conocida como condición de Slater una de las condiciones de regularidad usada mas frecuentemente. Si la i -ésima columna de M es cero, entonces la propiedad P_* implica que la i -ésima fila es también cero. Por lo tanto, en este caso $s_i(x) = q_i$ para toda x . De aquí, si $q_i < 0$, entonces (LCP) es infactible. Si $q_i \geq 0$ entonces la restricción $s_i(x)$ es siempre satisfecha y podemos reducir el problema mediante la eliminación de la i -ésima fila y columna de M . Así se va a suponer que todas las columnas de M son no nulas, cuando $q = 0$, entonces el (LCP) tiene una solución trivial ($x = 0$). Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, se supone además que $q \neq 0$.

La meta es encontrar la partición óptima del conjunto de índices y finalmente, re-

dondear a una solución complementaria maximal. De hecho, se mostrará que dada $x(\mu)$ se puede encontrar la partición óptima siempre que μ sea suficientemente pequeña. En este sentido, se tienen que dar las cotas para el tamaño de las variables a lo largo del camino central. En las próximas dos secciones se obtendrá tal cota en términos de dos números de condición para (*LCP*).

§2.2. El primer número de condición para (*LCP*).

Dado que $\Gamma^0 \neq \emptyset$, Γ^* es no vacío y compacto, se pueden definir los dos números de condición siguientes:

$$\sigma_{LCP}^x = \min_{i \in B} \max_{x \in \Gamma^*} \{x_i\} \quad , \quad \sigma_{LCP}^s = \min_{i \in N} \max_{x \in \Gamma^*} \{s_i(x)\}$$

La expresión $\min_{i \in B} \max_{x \in \Gamma^*} \{x_i\}$ se interpreta de la siguiente manera: tómesese un índice $i \in B$, luego y para ese índice i , busque entre todos los $x \in \Gamma^*$ el que tenga la mayor componente en el índice i , de esta forma tomando todos los $i \in B$ se forma un vector con tantas componentes como el cardinal de B , de ese vector se toma la menor componente y ese número será el valor para σ_{LCP}^x . La condición Γ^* no vacío evita la situación $\min_{i \in B} \emptyset$ ya que al no tener elementos en Γ^* el $\max_{x \in \Gamma^*} \{x_i\} = \emptyset$, por otra parte la condición Γ^* compacto nos permite hablar de $\max_{x \in \Gamma^*} \{x_i\}$ en lugar de $\sup_{x \in \Gamma^*} \{x_i\}$. Esta condición es importante ya que se quiere deducir las cotas a partir de los puntos de la trayectoria central, no a partir de alguna de sus cotas. Por convenio se toma $\sigma_{LCP}^x = +\infty$ si B es vacío y $\sigma_{LCP}^s = +\infty$ si N es vacío; así ambos σ_{LCP}^x y σ_{LCP}^s son positivos. Si B es no vacío, entonces σ_{LCP}^x es finito y si N es no vacío, entonces σ_{LCP}^s es finito. Dado que $q \neq 0$ no puede ocurrir que ambos B y N sean vacíos; por lo tanto bajo la condición de punto interior ($\Gamma^0 \neq \emptyset$) por lo menos uno de los dos números de condición es finito. Como consecuencia, el número

$$\sigma_{LCP} = \min\{\sigma_{LCP}^x, \sigma_{LCP}^s\}$$

es positivo y finito. Se puede fácilmente verificar que σ_{LCP} puede también escribirse como

$$\sigma_{LCP} = \min_{i \in B \cup N} \max_{x \in \Gamma^*} \{x_i + s_i(x)\}$$

En general, se tiene que resolver un problema sin conocer su número de condición σ_{LCP} . En tales casos se tiene una forma económica de obtener una cota inferior para σ_{LCP} si los datos del problema (M, q) son enteros. Se procede a la derivación de una de tales cotas inferiores.

La primera cota viene dada mediante el producto de los vectores columnas de M y se describen en el siguiente resultado.

LEMA 2.2. *Si M y q son enteros entonces $\sigma_{LCP} \geq \frac{1}{\pi(M)}$*

Demostración.

Para cualquier vector $x \in \Gamma$ (factible) se tiene que $s = s(x)$

$$\begin{pmatrix} s_B \\ s_N \\ s_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} & M_{BT} \\ M_{NB} & M_{NN} & M_{NT} \\ M_{TB} & M_{TN} & M_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \\ x_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_B \\ q_N \\ q_T \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Además, $x \in \Gamma^$ es factible y complementario si y solo si $x_N = 0, x_T = s_T = 0, s_B = 0$, esto es cierto por la definición de los conjuntos B, N, T ya que $xs(x) = 0$ entonces como $x_B \neq 0$ va a implicar que $s_B = 0$. De forma análoga si $s_N \neq 0$ va a implicar que $x_N = 0$ y $x_T = s_T = 0$ por como esta definido el conjunto T . Así*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ s_N \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} & M_{BT} \\ M_{NB} & M_{NN} & M_{NT} \\ M_{TB} & M_{TN} & M_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_B \\ q_N \\ q_T \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} M_{BB}x_B & 0 \\ M_{NB}x_B & -s_N \\ M_{TB}x_B & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -q_B \\ -q_N \\ -q_T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{pmatrix} M_{BB} & 0_{BN} \\ M_{NB} & -E_{NN} \\ M_{TB} & 0_{TN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ s_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_B \\ -q_N \\ -q_T \end{pmatrix}, \quad x_B \geq 0, s_N \geq 0 \quad (2.2)$$

En este sistema solamente faltan por determinar x_B de x y s_N de s . Debido a que $x \geq 0$ y $s \geq 0$, se tiene que $x_B \geq 0$ y $s_N \geq 0$ sin embargo en una solución

maximalmente complementaria todas las componentes de ambos vectores son positivos, esto es, $x_B > 0$ y $s_N > 0$. Con el fin de obtener una cota inferior de σ_{LCP} se tiene que derivar una cota inferior del valor máximo de cada coordenada del vector $z = (x_B, s_N)$ cuando este vector corre a través de todas las posibles soluciones de (2.2). Para cada i se sabe que existe una solución z con $z_i > 0$. Por lo tanto, existe una solución maximalmente complementaria de (2.2) con $z_i > 0$. Así, el corolario 1.1 produce la siguiente cota inferior de la coordenada mas grande de z

$$\max_{x \in \Gamma^*} z_i \geq \frac{1}{\pi(M.B)} \quad (*)$$

ya que las columnas de la matriz izquierda en (2.2) son no nulas porque si lo fuese por comentario anterior se elimina tanto las columnas que son cero como las filas. Además, se sabe que $\pi(M) \geq \pi(M.B) \implies \frac{1}{\pi(M.B)} \geq \frac{1}{\pi(M)}$ la desigualdad (*) la cumplen todas las componentes del vector que se forma mediante $\max_{x \in \Gamma^*} \{z_i\}$ con $i \in B \cup N$ en particular la componente con el menor valor y si minimizamos la solución $\max_{x \in \Gamma^*} z_i$ la desigualdad no se altera por lo que se obtiene que,

$$\begin{aligned} \min_{i \in B \cup N} \max_{x \in \Gamma^*} z_i &\geq \frac{1}{\pi(M.B)} \geq \frac{1}{\pi(M)} \\ \implies \sigma_{LCP} &\geq \frac{1}{\pi(M)} \end{aligned}$$

■

Ahora se está listo para estimar el tamaño de las variables $x_i, s_i(x)$ cuando x se encuentra sobre el camino central, es decir, $xs(x) = \mu e$, y $i \in B$ o $i \in N$. Se denotarán mediante $(x(\mu), s(\mu))$ los puntos sobre la trayectoria central y $s(\mu) = s(x(\mu))$

TEOREMA 2.1. *Para cualquier positivo μ se tiene que:*

$$\begin{aligned} x_i(\mu) &\geq \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)}, i \in B & x_i(\mu) &\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}}, i \in N \\ s_i(\mu) &\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}}, i \in B & s_i(\mu) &\geq \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)}, i \in N \end{aligned}$$

Demostración.

Para comenzar la prueba se debe pensar que se está en un punto de la trayectoria central $(x(\mu), s(\mu))$ y se quiere "dar un salto" hacia un punto solución (\bar{x}, \bar{y}) del LCP. Primero se considera el caso $i \in N$. Supongase que $\bar{x} \in \Gamma^*$ y $\bar{s} = s(\bar{x})$. Teniendo en consideración que $M \in P_*(\kappa)$ y $x(\mu), s(\mu), \bar{x}, \bar{s} \geq 0$

$$\begin{aligned}
(x(\mu) - \bar{x})^T(s(\mu) - \bar{s}) &= (x(\mu) - \bar{x})^T(Mx(\mu) + q - M\bar{x} - q) \\
&= (x(\mu) - \bar{x})^T M(x(\mu) - \bar{x}) \\
&\geq -4\kappa \sum_{i \in I_+(x(\mu) - \bar{x})} (x(\mu) - \bar{x})_i [M(x(\mu) - \bar{x})]_i \\
&= -4\kappa \sum_{i \in I_+(x(\mu) - \bar{x})} (x(\mu) - \bar{x})_i (s(\mu) - \bar{s})_i \\
&= -4\kappa \sum_{i \in I_+(x(\mu) - \bar{x})} [(x(\mu)s(\mu))_i - (x(\mu)\bar{s})_i - (\bar{x}s(\mu))_i + (\bar{x}\bar{s})_i] \\
&\geq -4\kappa \sum_{i \in I_+(x(\mu) - \bar{x})} (x(\mu)s(\mu))_i \\
&= -4\kappa \sum_{i \in I_+(x(\mu) - \bar{x})} \mu
\end{aligned}$$

Además,

$$-4\kappa \sum_{i \in I_+(x(\mu) - \bar{x})} \mu \geq -4\kappa n\mu \quad (2.3)$$

La penúltima desigualdad se obtiene ya que $x(\mu)s(\mu) = \mu e$ y $\bar{x} \in \Gamma^*$ por lo que $\bar{x}\bar{s} = 0$. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
(x(\mu) - \bar{x})^T(s(\mu) - \bar{s}) &= x^T(\mu)s(\mu) - x^T(\mu)\bar{s} - \bar{x}^T s(\mu) + \bar{x}^T \bar{s} \\
&= n\mu - x^T(\mu)\bar{s} - \bar{x}^T s(\mu)
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Combinando (2.3) y (2.4) se obtiene que

$$\begin{aligned}
(x(\mu) - \bar{x})^T(s(\mu) - \bar{s}) &= n\mu - x^T(\mu)\bar{s} - \bar{x}^T s(\mu) \geq -4\kappa n\mu \\
\implies -x^T(\mu)\bar{s} - \bar{x}^T s(\mu) &\geq -4\kappa n\mu - n\mu \\
\implies x^T(\mu)\bar{s} + \bar{x}^T s(\mu) &\leq n\mu(1 + 4\kappa)
\end{aligned} \quad (2.5)$$

En particular se cumple que:

$$x^T(\mu)\bar{s} \leq n\mu(1 + 4\kappa)$$

Además, $x_i(\mu)\bar{s}_i \leq x^T(\mu)\bar{s}$ porque la componente i -ésima de $x_i(\mu)\bar{s}_i$ siempre va a ser menor o igual a la suma de todas las componentes del producto de los vectores ya que $x(\mu), s(\mu), \bar{x}, \bar{s} \geq 0$. Por lo que se obtiene la siguiente desigualdad

$$x_i(\mu)\bar{s}_i \leq x^T(\mu)\bar{s} \leq n\mu(1 + 4\kappa) \quad \forall i \in I \quad (2.6)$$

Ahora si $i \in N$ y (\bar{x}, \bar{s}) es una solución complementaria maximal, entonces por definición $\bar{s}_i \geq \sigma_{LCP}$. Dividiendo (2.6) por \bar{s}_i se obtiene

$$\begin{aligned} x_i(\mu) &\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\bar{s}_i} \leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \\ \implies x_i(\mu) &\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ya que $\bar{s}_i \geq \sigma_{LCP} \implies \frac{1}{\bar{s}_i} \leq \frac{1}{\sigma_{LCP}}$

Dado que $x_i(\mu)s_i(\mu) = \mu \implies x_i(\mu) = \frac{\mu}{s_i(\mu)}$ y sustituyendo en (2.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{s_i(\mu)} &\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \implies \frac{s_i(\mu)}{\mu} \geq \frac{\sigma_{LCP}}{n\mu(1+4\kappa)} \\ \implies s_i(\mu) &\geq \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)} \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

Ahora se considera el caso $i \in B$. De (2.5) se considera la siguiente desigualdad $\bar{x}s^T(\mu) \leq n\mu(1+4\kappa)$. Por el argumento expuesto anteriormente se tiene que

$$\bar{x}_i s_i(\mu) \leq \bar{x}s^T(\mu) \leq n\mu(1+4\kappa) \quad \forall i \in I \quad (2.8)$$

Ahora si $i \in B$ y (\bar{x}, \bar{s}) es una solución complementaria maximal, entonces por definición $\bar{x}_i \geq \sigma_{LCP}$.

Dividiendo (2.8) por \bar{x}_i , se obtiene

$$\begin{aligned} s_i(\mu) &\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\bar{x}_i} \leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \\ \implies s_i(\mu) &\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dado que $x_i(\mu)s_i(\mu) = \mu \implies s_i(\mu) = \frac{\mu}{x_i(\mu)}$, sustituyendo en (2.9) se tiene que

$$\frac{\mu}{x_i(\mu)} \leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \implies \frac{x_i(\mu)}{\mu} \geq \frac{\sigma_{LCP}}{n\mu(1+4\kappa)} \implies x_i(\mu) \geq \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)}, \quad i \in B$$

■

El resultado anterior dice que conociendo los valores de κ, μ y σ_{LCP} se pueden determinar los elementos que pertenecen a B y los que pertenecen a N .

§2.3. El segundo número de condición para (LCP).

En esta sección se derivan cotas que ayudan a controlar las variables $x_i(\mu)$ y $s_i(\mu)$ si $i \in T$. Antes de tratar con los principales teoremas de esta sección se revisará

algunos resultados sobre sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ dos matrices reales. Para determinar $b \in \mathbb{R}^m$ y $d \in \mathbb{R}^k$, se considera el siguiente sistema de inecuaciones lineales.

$$Ax \leq b, \quad Cx = d \quad (2.10)$$

[Mangasarian y Shiau] estudiarón la continuidad de Lipschitz de la solución de (2.10) con respecto a las perturbaciones del lado derecho de (2.10). Se utilizará una variante de los resultados. Además, se supone que A y C no contienen filas nulas.

LEMA 2.3. *Supóngase que el sistema (2.10) tiene conjuntos factibles no vacíos Γ^1 y Γ^2 para el lado derecho (b^1, d^1) y (b^2, d^2) respectivamente. Para cada $x^1 \in \Gamma^1$ existe $x^2 \in \Gamma^2$, tal que*

$$\|x^1 - x^2\|_\infty \leq \nu(A, C) \left\| \begin{pmatrix} b^1 - b^2 \\ d^1 - d^2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (2.11)$$

donde

$$\nu(A, C) = \max_{u, v} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_1 \left| \begin{array}{l} A^T u + C^T v = z - y, e^T(z + y) = 1, u, y, z \geq 0 \\ \text{las columnas de } (A^T, C^T) \\ \text{correspondiente a los elementos no nulos} \\ \text{de } (u, v) \text{ son linealmente independientes} \end{array} \right. \right\}$$

Demostración.

Por hipótesis se sabe que:

$$\Gamma^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b^1, Cx = d^1\}$$

$$\Gamma^2 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b^2, Cx = d^2\}$$

Se pretende encontrar t tal que $t = \|x - x^1\|_\infty$, con $x \in \Gamma^2$ tal que t sea minimal. Esto equivale a solucionar el problema de minimización lineal

$$\min_x \{t : Ax \leq b^2, Cx = d^2, te + x \geq x^1, te - x \geq x^1\} \quad (2.12)$$

Note que el problema es factible, dado que $\Gamma^2 \neq \emptyset$ y acotado. Por lo tanto, el valor óptimo de t^* es igual al valor óptimo del problema dual de (2.12). Para encontrar ese problema dual, se escribirá (2.12) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & t \\
 & Ax \leq b^2 \quad \longrightarrow \quad u \\
 & Cx = d^2 \quad \longrightarrow \quad v \\
 & x + te \geq x^1 \quad \longrightarrow \quad y \\
 & -x + te \geq -x^1 \quad \longrightarrow \quad z
 \end{aligned}$$

Utilizando las reglas de construcción del dual de programación lineal, el problema dual de (2.12) es

$$t^* = \text{máx} \left\{ \begin{array}{l} A^T u + C^T v + y - z = 0 \\ u^T b^2 + v^T d^2 + y^T x^1 - z^T x^1 : \quad e^T y + e^T z = 1 \\ y, z \geq 0, u \leq 0 \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

Sea (u, v, y, z) una solución óptima de este problema. Recordando que $x^1 \in \Gamma^1$ y $u \leq 0$, de la definición de t^* se obtiene

$$\begin{aligned}
 t^* &= u^T b^2 + v^T d^2 + (y - z)^T x^1 \\
 &= u^T b^2 + v^T d^2 - (A^T u + C^T v)^T x^1 \\
 &= u^T b^2 + v^T d^2 - u^T A x^1 - v^T C x^1 \\
 &\leq u^T b^2 + v^T d^2 - u^T b^1 - v^T d^1 \\
 &= u^T (b^2 - b^1) + v^T (d^2 - d^1) \\
 &= u_1 (b_1^2 - b_1^1) + \dots + u_n (b_n^2 - b_n^1) + v_1 (d_1^2 - d_1^1) + \dots + v_k (d_k^2 - d_k^1) \\
 &\leq |u_1| |b_1^2 - b_1^1| + \dots + |u_n| |b_n^2 - b_n^1| + |v_1| |d_1^2 - d_1^1| + \dots + |v_k| |d_k^2 - d_k^1| \\
 &\leq |u_1| \left\| \begin{pmatrix} b^2 - b^1 \\ d^2 - d^1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} + \dots + |u_n| \left\| \begin{pmatrix} b^2 - b^1 \\ d^2 - d^1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} + \\
 &\quad + |v_1| \left\| \begin{pmatrix} b^2 - b^1 \\ d^2 - d^1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} + \dots + |v_k| \left\| \begin{pmatrix} b^2 - b^1 \\ d^2 - d^1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\
 &= (|u_1| + \dots + |u_n| + |v_1| + \dots + |v_k|) \left\| \begin{pmatrix} b^2 - b^1 \\ d^2 - d^1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\
 &= \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_1 \left\| \begin{pmatrix} b^2 - b^1 \\ d^2 - d^1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Así la prueba estará completa si se muestra que (2.13) tiene una solución óptima (u, v, y, z) tal que las columnas de (A^T, C^T) correspondientes a las componentes no nulas de (u, v) son linealmente independientes. Esto se puede demostrar de la siguiente manera. Supóngase lo contrario, que las columnas correspondientes a las coordenadas no nulas de (u, v) son linealmente dependientes; entonces existen vec-

tores no nulos \bar{u} , \bar{v} tal que $A^T\bar{u} + C^T\bar{v} = 0$ y $\bar{u}_i = 0$ si $u_i = 0$ y $\bar{v}_i = 0$ si $v_i = 0$. Se define $w(\lambda) = (u, v, y, z) + \lambda(\bar{u}, \bar{v}, 0, 0)$, entonces $w(\lambda)$ es factible en (2.13). En efecto, se verifica que $w(\lambda) = (u + \lambda\bar{u}, v + \lambda\bar{v}, y, z)$ satisface (2.13)

$$\begin{aligned} & A^T(u + \lambda\bar{u}) + C^T(v + \lambda\bar{v}) + y - z \\ &= A^T u + \lambda A^T \bar{u} + C^T v + \lambda C^T \bar{v} + y - z \\ &= A^T u + C^T v + y - z + \lambda(A^T \bar{u} + C^T \bar{v}) \\ &= \lambda(A^T \bar{u} + C^T \bar{v}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además, cumple que $e^T(z + y) = 1$, con λ que satisface $u + \lambda\bar{u} \leq 0$ y $y, z \geq 0$. De la definición de \bar{u} y \bar{v} se puede ver que existe un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ con $\alpha < 0 < \beta$ tal que $w(\lambda)$ es factible para cualquier $\lambda \in [\alpha, \beta]$, dado por

caso 1: $u_i < 0$ y $\bar{u}_i < 0$

$$u_i + \lambda\bar{u}_i \leq 0 \implies \lambda\bar{u}_i \leq -u_i \implies \lambda \geq \frac{-u_i}{\bar{u}_i}$$

$$\text{considerese } \alpha = \max \left\{ \frac{-u_i}{\bar{u}_i} \right\} < 0$$

caso 2: $u_i < 0$ y $\bar{u}_i > 0$

$$u_i + \lambda\bar{u}_i \leq 0 \implies \lambda\bar{u}_i \leq -u_i \implies \lambda \leq \frac{-u_i}{\bar{u}_i}$$

$$\text{considerese } \beta = \min \left\{ \frac{-u_i}{\bar{u}_i} \right\} > 0$$

Así, $\alpha < 0 < \beta$ (aquí se permite $\alpha = -\infty, \beta = \infty$) tal que $w(\lambda)$ es factible para algún $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Se verifica que $\bar{u}^T b^2 + \bar{v}^T d^2 = 0$. De (2.13) se tiene

$$\begin{aligned} & (u + \lambda\bar{u})^T b^2 + (v + \lambda\bar{v})^T d^2 + y^T x^1 - z^T x^1 \\ &= u^T b^2 + \lambda\bar{u}^T b^2 + v^T d^2 + \lambda\bar{v}^T d^2 + y^T x^1 - z^T x^1 \\ &= u^T b^2 + v^T d^2 + y^T x^1 - z^T x^1 + \lambda(\bar{u}^T b^2 + \bar{v}^T d^2) \\ &= t^* + \lambda(\bar{u}^T b^2 + \bar{v}^T d^2) \end{aligned}$$

Pero si $\bar{u}^T b^2 + \bar{v}^T d^2 > 0$ contradice la maximidad de t^* al tomar un $\lambda > 0$ en $[\alpha, \beta]$ y si $\bar{u}^T b^2 + \bar{v}^T d^2 < 0$, considerando $\lambda < 0$ se obtiene que $\bar{u}^T b^2 + \bar{v}^T d^2 > 0$ y ocurre lo mismo que en el caso anterior. Por lo tanto, necesariamente tenemos que $\bar{u}^T b^2 + \bar{v}^T d^2 = 0$ de otra manera se produciría una contradicción con la optimalidad de $w(0)$. Como consecuencia $w(\lambda)$ es óptimo para todo $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Claramente, para la elección de λ apropiado, se puede obtener una solución de (2.13) con menos coordenadas no nulas. Si al terminar este procedimiento las columnas correspondientes

a las coordenadas no nulas de (u, v) son dependientes se repite este proceso para hacer mas componentes nulas de $u_i + \lambda \bar{u}_i$ hasta lograr que (u, v) sean linealmente independientes. Repitiendo este proceso se obtiene una solución (u, v, y, z) de (2.13) para que las columnas de (A^T, C^T) correspondientes a las componentes no nulas de (u, v) sean linealmente independientes. Para tal solución por la definición de $\nu(A; C)$ se tiene

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max_{u,v} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_1 \left| \begin{array}{l} A^T u + C^T v = z - y, e^T(z + y) = 1, u, y, z \geq 0 \\ \text{las columnas de } (A^T, C^T) \text{ correspondiente} \\ \text{a los elementos no nulos de} \\ (u, v) \text{ son linealmente independientes} \end{array} \right. \right\}$$

$$= \nu(A; C)$$

De todo lo hecho anteriormente se tiene que

$$\|x^1 - x^2\| \leq \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_1 \left\| \begin{pmatrix} b^2 - b^1 \\ d^2 - d^1 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \nu(A; C) \left\| \begin{pmatrix} b^2 - b^1 \\ d^2 - d^1 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

■

El número $\nu(A; C)$ en general resulta bastante difícil de calcular pero se pueden calcular fácilmente cotas inferiores y cotas superiores. A continuación se presenta una cota inferior para este valor.

LEMA 2.4. *Se tiene*

$$\nu(A; C) \geq \frac{1}{\min_{i,j} (\|a_i\|_1, \|c_j\|_1)}$$

donde a_i pasa por las filas de A y c_j por las filas de C .

Demostración.

Se denotará por a la i -ésima fila de A . Entonces, si e^i denota el i -ésimo vector canónico, se tiene que $\|A^T e^i\|_1 = \|a\|_1$ ya que

$$A^T e^i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

que es la i -ésima fila de la matriz A . Por lo tanto, supóngase que $a \neq 0$ se toma

$u = \frac{e^i}{\|a\|_1}$, $v = 0$, $z_j = \frac{a_j}{\|a\|_1}$ si $a_j > 0$, $y_j = \frac{-a_j}{\|a\|_1}$ si $a_j < 0$ y todas las entradas restantes de y y z iguales a cero. La cuádruple (u, v, y, z) es factible para el problema de maximización definido por $v(A; C)$. En efecto, $A^T u + C^T v = z - y$ sustituyendo los valores de u, v, y, z dados anteriormente se tiene

$$A^T u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\|a\|_1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{i1}}{\|a\|_1} \\ \frac{a_{i2}}{\|a\|_1} \\ \frac{a_{i3}}{\|a\|_1} \\ \vdots \\ \frac{a_{in}}{\|a\|_1} \end{bmatrix}$$

que es la i -ésima fila de la matriz A dividida por $\|a\|_1$. $C^T v = 0$ ya que $v = 0$. Además, se define

$$z = \left(\frac{es(a_{i1})a_{i1}}{\|a\|_1}, \frac{es(a_{i2})a_{i2}}{\|a\|_1}, \dots, \frac{es(a_{in})a_{in}}{\|a\|_1} \right)$$

y

$$y = \left(\frac{-es(-a_{i1})a_{i1}}{\|a\|_1}, \frac{-es(-a_{i2})a_{i2}}{\|a\|_1}, \dots, \frac{-es(-a_{in})a_{in}}{\|a\|_1} \right)$$

donde

$$es(a_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{ij} \leq 0 \\ 1 & \text{si } a_{ij} > 0. \end{cases}$$

Si se realiza la operación $z_i - y_i$ se obtiene la i -ésima fila de A dividida por $\|a\|_1$. En efecto,

$$\begin{aligned} z_i - y_i &= \left(\frac{[es(a_{i1}) + es(-a_{i1})]a_{i1}}{\|a\|_1}, \dots, \frac{[es(a_{in}) + es(-a_{in})]a_{in}}{\|a\|_1} \right) \\ &= \left(\frac{a_{i1}}{\|a\|_1}, \dots, \frac{a_{in}}{\|a\|_1} \right) \end{aligned}$$

Así, $z_i - y_i$ es la i -ésima fila de A dividida por $\|a\|_1$. Por lo tanto, se concluye que $A^T u + C^T v = z - y$. Ahora se verifica que $e^T(z + y) = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} &e^T \left[\left(\frac{es(a_{i1}) - es(-a_{i1})}{\|a\|_1} \right) a_{i1}, \dots, \left(\frac{es(a_{in}) - es(-a_{in})}{\|a\|_1} \right) a_{in} \right] \\ &= e^T \left(\frac{a_{i1}}{\|a\|_1}, \dots, \frac{a_{in}}{\|a\|_1} \right) \\ &= \frac{a_{i1}}{\|a\|_1} + \frac{a_{i2}}{\|a\|_1} + \dots + \frac{a_{in}}{\|a\|_1} \\ &= \frac{a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}}{\|a\|_1} \\ &= \frac{\|a\|_1}{\|a\|_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Además, $u, y, z \geq 0$ por como están definidas cada una de ellas. Y por último las columnas de (A^T, C^T) correspondientes a los elementos no nulos de (u, v) son linealmente independientes. De aquí que $\nu(A; C) \geq \|u\|_1 = \frac{1}{\|a\|_1}$ por definición de $\nu(A; C)$. Ahora denótese por c la j -ésima fila de C . Si e^j denota el j -ésimo vector canónico, se tiene que $\|C^T e^j\|_1 = \|c\|_1$. Supóngase que $c \neq 0$, se toma $\hat{u} = 0$, $\hat{v} = \frac{e^j}{\|c\|_1}$, $\hat{z}_i = \frac{c_i}{\|c\|_1}$ si $c_i > 0$, $\hat{y}_i = \frac{-c_i}{\|c\|_1}$ si $c_i < 0$ y todas las entradas restantes de y y z iguales a cero. Por un argumento similar al expuesto anteriormente se prueba que la cuádruple $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{y}, \hat{z})$ es factible para el problema de maximización definido por $\nu(A; C)$. Por lo que se cumple que $\nu(A; C) \geq \|\hat{u}\| = \frac{1}{\|c\|_1}$. Por lo que se concluye que

$$\nu(A; C) \geq \frac{1}{\min_{i,j} (\|a_i\|_1, \|c_j\|_1)}$$

■

A continuación se obtiene una cota superior para $\nu(A; C)$ en términos de los datos A y C

LEMA 2.5. *Para enteros A, C se tiene*

$$\nu(A; C) \leq n\Delta(A^T, C^T) \leq n\pi(A^T, C^T)$$

Demostración.

Sea (u, v, y, z) una solución factible para el problema de maximización en la definición de $\nu(A; C)$. Sea $w^T = (u^T, v^T)$ y $\bar{A} = (A^T, C^T)$. Entonces

$$\bar{A}w = (A^T, C^T) \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} = A^T u + C^T v = z - y$$

Dado que las columnas de \bar{A} correspondiente a los elementos no nulos de w son linealmente independientes y además A y C son enteras, se aplica lema 1.1 por lo que se produce

$$\|w\|_\infty \leq \Delta(\bar{A})\|z - y\|_1 \leq \Delta(\bar{A}) \tag{2.14}$$

La última desigualdad se tiene dado que $\|z - y\|_1 \leq \|z + y\|_1 = 1$. Dado que $\|w\|_1 \leq n\|w\|_\infty$ y sustituyendo en (2.14), se tiene

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_1 = \|w\|_1 \leq n\|w\|_\infty \leq n\Delta(\bar{A}) = n\Delta(A^T, C^T) \tag{2.15}$$

Además, por la desigualdad de Hadamard se sabe que $\Delta(\bar{A}) \leq \pi(\bar{A})$. Sustituyendo en (2.15) se tiene que

$$\nu(A; C) \leq n\Delta(A^T, C^T) \leq n\pi(A^T, C^T)$$

■

Ahora se aplica el lema 2.5 a el segundo número de condición para (LCP), que permite acotar las variables a lo largo del camino central. El segundo número de condición, se denota por ν_{LCP} , depende de la matriz M y la partición óptima (B, N, T) . Es definido como sigue.

DEFINICIÓN 2.2. Sea I_1, I_2 una partición del conjunto de índices I tal que $B \subset I_1$ y $N \subseteq I_2$. Se define:

$$\nu_{LCP} = \max_{I_1 \cup I_2 = I} \nu \left[\begin{pmatrix} -E_{I_1} & 0 \\ 0 & -E_{I_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} M & -E \\ E_{I_2} & 0 \\ 0 & E_{I_1} \end{pmatrix} \right]$$

Si la matriz M es entera, entonces se puede dar una cota inferior y se puede fácilmente calcular una cota superior para ν_{LCP} . A continuación se describe tal cota.

LEMA 2.6. Si la matriz M es entera, entonces

$$1 \leq \nu_{LCP} \leq \max_{I_1 \cup I_2 = I} n \left[\Delta \begin{pmatrix} -E_{I_1} & 0 \\ 0 & -E_{I_2} \end{pmatrix}; \Delta \begin{pmatrix} M & -E \\ E_{I_2} & 0 \\ 0 & E_{I_1} \end{pmatrix} \right] = n\Delta(M) \leq n\pi(M)$$

Demostración.

La primera desigualdad es inmediata del lema 2.4 ya que

$\nu(A; C) \min_{i,j} (\|a_i\|_1, \|c_j\|_1) \geq 1$, la segunda desigualdad se tiene del lema 2.5 ya que $\nu(A; C) \leq n\Delta(A^T, C^T)$ y aplicando la función \max a ambos lados se tiene la desigualdad del lema. La igualdad es cierta ya que Δ es el mayor determinante de todas las submatrices cuadradas, que en este caso es M . La última desigualdad es cierta por la conocida desigualdad de Hadamard. Las cotas encontradas hasta este punto se refieren a las componentes de x y s subindizadas por B o por N . Falta establecer las cotas para las componentes de x y s subindizadas por T las cuales se presentan a continuación.

■

Ahora se expondrá el principal teorema de esta sección :

TEOREMA 2.2. *Si*

$$\mu < \frac{\sigma_{LCP}^2}{n^2(1+4\kappa)^2} \quad (2.16)$$

entonces

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \leq x_i(\mu), s_i(\mu) \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu} \quad , i \in T$$

Demostración.

Cuando se considera (2.16), se tiene que

$$\begin{aligned} x_i(\mu) &\geq \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)} = \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)} \frac{\sigma_{LCP}}{\sigma_{LCP}} = \frac{\sigma_{LCP}^2}{\sigma_{LCP}n(1+4\kappa)} \\ &= \frac{\frac{\sigma_{LCP}^2}{n(1+4\kappa)}}{\sigma_{LCP}} = \frac{\frac{n\sigma_{LCP}^2(1+4\kappa)}{n^2(1+4\kappa)^2}}{\sigma_{LCP}} > \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \geq s_i(\mu) \text{ para todo } i \in B \text{ y} \\ s_i(\mu) &\geq \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)} \frac{\sigma_{LCP}}{\sigma_{LCP}} = \frac{\sigma_{LCP}^2}{\sigma_{LCP}n(1+4\kappa)} = \frac{\frac{\sigma_{LCP}^2}{n(1+4\kappa)}}{\sigma_{LCP}} \\ &= \frac{\frac{n\sigma_{LCP}^2(1+4\kappa)}{n^2(1+4\kappa)^2}}{\sigma_{LCP}} > \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \geq x_i(\mu) \text{ para todo } i \in N \text{ por lo que} \end{aligned}$$

$$I_1 = \{i : x_i(\mu) \geq s_i(\mu)\} \quad , \quad I_2 = \{i : x_i(\mu) < s_i(\mu)\}$$

y además se tiene que $B \subset I_1$ y $N \subset I_2$ si se considera (2.16). De aquí se define

$$H(x) = \min\{x, s(x)\}$$

Por lo que se tiene que

$$H_i(x(\mu)) = \begin{cases} s_i(\mu) & \text{si } i \in I_1 \\ x_i(\mu) & \text{si } i \in I_2. \end{cases}$$

Por el hecho de que $H(x(\mu)) = \min(x(\mu), s(\mu))$ y $x_i(\mu)s_i(\mu) = \mu$ se concluye que

$H_i(x(\mu)) \leq \sqrt{\mu}$ ya que $H_i(x(\mu)) \leq x_i(\mu)$ y $H_i(x(\mu)) \leq s_i(\mu)$, así

$$x_i(\mu)s_i(\mu) = \mu \implies H_i(x(\mu))H_i(x(\mu)) < \mu$$

$$\implies H_i^2(x(\mu)) < \mu$$

$$\implies H_i(x(\mu)) < \sqrt{\mu}$$

Consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} Mx - s &= -q \\ x_{I_2} &= 0 & -x_{I_1} &\leq 0 \\ s_{I_1} &= 0 & -s_{I_2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Es claro que el conjunto factible del sistema (2.17) es el conjunto solución Γ^* de (LCP) ya que este último cumple que $x \geq 0$, $s(x) = Mx + q \geq 0$ y $xs(x) = 0$ que son las restricciones de (2.17). Este conjunto juega el rol de Γ^2 en el lema 2.3. Además, llámese Γ^1 al conjunto solución del siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} Mx - s &= -q \\ x_{I_2} &= H_{I_2}x(\mu) & -x_{I_1} &\leq 0 \\ s_{I_1} &= H_{I_1}x(\mu) & -s_{I_2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Claramente Γ^1 es no vacío, porque $x(\mu)$ satisface (2.18). Ahora se tiene por lema 2.3 que existe una solución x^* de (2.17), es decir, $x^* \in \Gamma^*$ tal que

$$\left\| \begin{pmatrix} x^* - x(\mu) \\ s^* - s(\mu) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \nu \left[\begin{pmatrix} -E_{I_1} & 0 \\ 0 & -E_{I_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} M & -E \\ E_{I_2} & 0 \\ 0 & E_{I_1} \end{pmatrix} \right] \|H(x(\mu))\|_{\infty}$$

Usando la definición de ν_{LCP} y que $H_i(x(\mu)) \leq \sqrt{\mu}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x^* - x(\mu) \\ s^* - s(\mu) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} &\leq \nu \left[\begin{pmatrix} -E_{I_1} & 0 \\ 0 & -E_{I_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} M & -E \\ E_{I_2} & 0 \\ 0 & E_{I_1} \end{pmatrix} \right] \|H(x(\mu))\|_{\infty} \\ &\leq \max_{I_1 \cup I_2 = I} \nu \left[\begin{pmatrix} -E_{I_1} & 0 \\ 0 & -E_{I_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} M & -E \\ E_{I_2} & 0 \\ 0 & E_{I_1} \end{pmatrix} \right] \|H(x(\mu))\|_{\infty} \\ &\leq \nu_{LCP} \sqrt{\mu} \end{aligned}$$

Dado que $x_i^* = 0$ para $i \in T$, se concluye que para todo $i \in T \cap I_1$ se tiene

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \leq s_i(\mu) \leq \sqrt{\mu} \leq x_i(\mu) \leq \nu_{LCP} \sqrt{\mu}$$

en efecto, se puede verificar que se cumplen estas cuatro desigualdades

$$I_1 = \{i : x_i(\mu) \geq s_i(\mu)\} \quad , \quad I_2 = \{i : x_i(\mu) < s_i(\mu)\}$$

$$i \in T \cap I_1 \implies i \in T \quad \wedge \quad i \in I_1$$

$$|x_i^* - x_i(\mu)| \leq \left\| \begin{pmatrix} x^* - x(\mu) \\ s^* - s(\mu) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$$

$$\implies |x_i^* - x_i(\mu)| \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$$

$$\implies x_i(\mu) \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$$

Por otro lado, como $i \in I_1 \implies x_i(\mu) \geq s_i(\mu)$

$$x_i(\mu)s_i(\mu) = \mu$$

$$x_i(\mu)x_i(\mu) \geq \mu$$

$$x_i^2(\mu) \geq \mu$$

$$x_i(\mu) \geq \sqrt{\mu}$$

$$\sqrt{\mu} \leq x_i(\mu)$$

Si se realizan cálculos parecidos se obtiene que $s_i(\mu) \leq \sqrt{\mu}$

Además,

$$s_i(\mu) \leq x_i(\mu) \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu} \wedge x_i(\mu)s_i(\mu) = \mu$$

$$\implies s_i(\mu)\nu_{LCP}\sqrt{\mu} \geq \mu$$

$$\implies s_i(\mu) \geq \frac{\mu}{\nu_{LCP}\sqrt{\mu}}$$

$$\implies s_i(\mu) \geq \frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}}$$

$$\implies \frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \leq s_i(\mu)$$

Por lo que se prueban las cuatro desigualdades.

Similarmente, para toda $i \in T \cap I_2$, se tiene que

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \leq x_i(\mu) \leq \sqrt{\mu} \leq s_i(\mu) \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$$

En efecto, se puede verificar que se cumplen estas cuatro desigualdades

Para $i \in T \cap I_2 \implies i \in T \wedge i \in I_2$

Como $i \in T \implies s_i^* = 0$

$$|s_i^* - s_i(\mu)| \leq \left\| \begin{pmatrix} x^* - x(\mu) \\ s^* - s(\mu) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$$

$$\implies |s_i^* - s_i(\mu)| \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$$

$$\implies s_i(\mu) \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$$

Ahora, como $i \in I_2 \implies x_i(\mu) < s_i$

$$\begin{aligned}
 x_i(\mu)s_i(\mu) &= \mu \\
 s_i(\mu)s_i(\mu) &\geq \mu \\
 s_i^2(\mu) &\geq \mu \\
 s_i(\mu) &\geq \sqrt{\mu} \\
 \sqrt{\mu} &\leq s_i(\mu)
 \end{aligned}$$

Si se realizan cálculos parecidos se obtiene que $x_i(\mu) \leq \sqrt{\mu}$

Además, se sabe que

$$\begin{aligned}
 s_i(\mu) \leq x_i(\mu) \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu} \quad \wedge \quad x_i(\mu)s_i(\mu) = \mu \\
 \implies x_i(\mu)\nu_{LCP}\sqrt{\mu} \geq \mu \\
 \implies x_i(\mu) \geq \frac{\mu}{\nu_{LCP}\sqrt{\mu}} \\
 \implies x_i(\mu) \geq \frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \\
 \implies \frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \leq x_i(\mu)
 \end{aligned}$$

Así se demostraron las cuatro desigualdades y por tanto se obtiene el teorema. ■

En la siguiente sección se resumen en una tabla los resultados de los teoremas anteriores.

§2.4. Encontrar la partición óptima.

En la siguiente tabla se mostrará los resultados de los teoremas anteriores (teorema 2.1 y teorema 2.2)

	$i \in B$	$i \in N$	$i \in T$
$x_i(\mu)$	$\geq \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)}$	$\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}}$	$\frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \leq x_i(\mu) \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$
$s_i(\mu)$	$\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}}$	$\geq \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)}$	$\frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \leq s_i(\mu) \leq \nu_{LCP}\sqrt{\mu}$

Estos resultados tienen una consecuencia importante. Si μ es tan pequeño que

$$\frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} < \frac{\sqrt{\mu}}{\nu_{LCP}} \tag{2.19}$$

y

$$\nu_{LCP}\sqrt{\mu} < \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)} \tag{2.20}$$

Entonces se tiene una separación completa de las variables. Ambas desigualdades dan la misma cota sobre μ , a saber

$$\mu < \frac{\sigma_{LCP}^2}{\nu_{LCP}^2 n^2 (1 + 4\kappa)} \quad (2.21)$$

En efecto, de (2.19) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{n\mu(1+4\kappa)\nu_{LCP}}{\sigma_{LCP}} < \sqrt{\mu} &\implies \frac{n(1+4\kappa)\nu_{LCP}}{\sigma_{LCP}} < \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \\ &\implies \frac{n(1+4\kappa)\nu_{LCP}}{\sigma_{LCP}} < \frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ &\implies \frac{\sigma_{LCP}}{n(1+4\kappa)\nu_{LCP}} > \sqrt{\mu} \end{aligned}$$

y de (2.20) se tiene que

$$\sqrt{\mu} < \frac{\sigma_{LCP}}{\nu_{LCP} n (1 + 4\kappa)} \implies \mu < \frac{\sigma_{LCP}^2}{\nu_{LCP}^2 n^2 (1 + 4\kappa)}$$

Esto significa que si un punto sobre el camino central cumple (2.21), entonces se puede determinar la partición óptima (B, N, T) de (LCP) .

Por desgracia, en la práctica no se puede suponer que se puede calcular los puntos exactamente en el camino central. Algoritmos prácticos generan puntos en la vecindad del camino central. Por lo tanto, en la proxima sección se tratará con la situación en que un punto x se da de manera adecuada en la vecindad del camino central. Se mostrará que si x está lo suficientemente cerca de $x(\mu)$, con μ suficientemente pequeño, también tenemos una separación completa de las variables en las tres clases disjuntas B, N y T . Esto implica que todo seguimiento de camino del método de punto interior (*IPM*) eventualmente produce iterado que son adecuados para identificar la partición óptima de (LCP) .

CAPÍTULO 3

IDENTIFICACIÓN DE PARTICIÓN ÓPTIMA DE CENTROS APROXIMADOS.

En este capítulo se generaliza los resultados del capítulo previo para el caso donde un punto x está dado en una vecindad específica del camino central. Sobre el camino central todas las coordenadas del vector $xs(x)$ son iguales. Esto sugiere que una buena medida de la centralidad podría ser la razón entre mayor y la menor coordenada. Si se acota esta razón, entonces se obtiene una vecindad del camino central. Por lo tanto se usa la medida de centralidad

$$\sigma_c(x) = \frac{\text{máx}(xs(x))}{\text{mín}(xs(x))}$$

donde $\text{máx}(xs(x))$ denota la mayor coordenada de $xs(x)$ y $\text{mín}(xs(x))$ denota la menor coordenada.

§3.1. Encontrar la partición óptima de los centros aproximados.

A continuación se generaliza el resultado de los teoremas 2.1 y 2.2 para el caso donde x no está sobre el camino central C .

TEOREMA 3.1. *Sea $x \in \Gamma^0$ y $s = s(x)$. Si $\sigma_c(x) \leq \tau$ para algún $\tau > 1$, y $\mu = \frac{x^T s(x)}{n}$*

entonces se tiene

$$x_i \geq \frac{\sigma_{LCP}}{\tau n(1 + 4\kappa)}, i \in B$$

$$x_i \leq \frac{n\mu(1 + 4\kappa)}{\sigma_{LCP}}, i \in N$$

$$s_i \leq \frac{n\mu(1 + 4\kappa)}{\sigma_{LCP}}, i \in B$$

$$s_i \geq \frac{\sigma_{LCP}}{\tau n(1 + 4\kappa)}, i \in N$$

Si además,

$$\mu \leq \frac{\sigma_{LCP}^2}{\tau n^2(1 + 4\kappa)^2}$$

entonces

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \leq x_i, s_i \leq \sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu} \quad i \in T$$

Demostración.

La prueba usa esencialmente los mismos argumentos de la prueba de los teoremas 2.1 y 2.2. Los argumentos que conducen a (2.7) en la prueba del teorema 2.1 son válidos, así

$$x_i \leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} = \frac{nx^T s(x)(1+4\kappa)}{n\sigma_{LCP}} = \frac{(1+4\kappa)x^T s(x)}{\sigma_{LCP}} \quad \text{para } i \in N \quad (3.1)$$

El resto de la prueba es un poco complicada debido a que x , no está sobre el camino central sino en una cierta vecindad del camino central. Si $\sigma_c(x) \leq \tau$, entonces existen $(\alpha, \beta) \in (0, \infty)$ tal que

$$\alpha e \leq xs \leq \beta e \quad \text{con} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \tau \quad (3.2)$$

Estas desigualdades reemplaza la identidad $x_i(\mu)s_i(\mu) = \mu$ usada en la prueba del teorema 2.1. Debido a la desigualdad izquierda de (3.2) se tiene que

$x_i s_i \geq \alpha \forall i$. Así $s_i \geq \frac{\alpha}{x_i}$ y usando (3.1) se tiene que

$$s_i \geq \frac{\alpha}{\frac{(1+4\kappa)x^T s}{\sigma_{LCP}}}$$

$$\implies s_i \geq \frac{\alpha\sigma_{LCP}}{(1+4\kappa)x^T s}$$

Por la desigualdad derecha en (3.2) se tiene

$$x_i s_i \leq \beta \implies x^T s \leq n\beta \implies \frac{1}{x^T s} \geq \frac{1}{n\beta}$$

$$s_i \geq \frac{\alpha\sigma_{LCP}}{(1+4\kappa)x^T s} \geq \frac{\alpha\sigma_{LCP}}{(1+4\kappa)n\beta} = \frac{\sigma_{LCP}}{\tau(1+4\kappa)n}$$

por lo tanto,

$$x_i \leq \frac{(1+4\kappa)n\mu}{\sigma_{LCP}} \quad \text{y} \quad s_i \geq \frac{\sigma_{LCP}}{n\tau(1+4\kappa)}$$

para $i \in N$. Esto prueba la segunda y cuarta desigualdad del teorema. La prueba de la primera y tercera desigualdad se hace de forma similar. En efecto, se considera

$$s_i \leq \frac{x^T s(x)(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} = \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \quad \text{para } i \in B$$

ya que son válidos los mismos argumentos usados en el teorema 2.1. Si $\sigma_c(x) \leq \tau$, entonces existen $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ tal que se cumple (3.2). Debido a la desigualdad

izquierda en (3.2) se tiene que $x_i s_i \geq \alpha \forall i$. Así $x_i \geq \frac{\alpha}{s_i}$ y usando (3.1) se tiene

$$x_i \geq \frac{\alpha}{\frac{x^T s(x)(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}}} \implies x_i \geq \frac{\alpha \sigma_{LCP}}{x^T s(x)(1+4\kappa)}$$

Por la desigualdad izquierda en (3.2) se tiene

$$x^T s \leq n\beta \implies \frac{1}{x^T s} \geq \frac{1}{n\beta}$$

$$x_i \geq \frac{\alpha \sigma_{LCP}}{x^T s(x)(1+4\kappa)} \geq \frac{\alpha \sigma_{LCP}}{n\beta(1+4\kappa)} = \frac{\sigma_{LCP}}{\tau n(1+4\kappa)}$$

por lo tanto,

$$s_i(x) \leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}} \quad y \quad x_i \geq \frac{\sigma_{LCP}}{\tau n(1+4\kappa)}$$

para $i \in B$.

La prueba de la pasada afirmación del teorema, notifica que para el último punto (x, s) es obvio que se tiene que

$$\frac{x_i s_i}{\mu} = \frac{n x_i s_i}{x^T s} \geq \frac{n \min(xs)}{n \max(xs)} \geq \frac{1}{\tau} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

ya que $x_i s_i \geq \min(xs)$

$$x^T s \leq n \max(xs) \implies \frac{1}{x^T s} \geq \frac{1}{n \max(xs)} \quad y$$

$$\frac{\max(xs)}{\min(xs)} \leq \tau \implies \frac{\min(xs)}{\max(xs)} \geq \frac{1}{\tau}$$

además,

$$\frac{x_i s_i}{\mu} = \frac{n x_i s_i}{x^T s} \leq \frac{n \max(xs)}{n \min(xs)} \leq \tau \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Definiendo $H(x) = \min(x, s)$ la última desigualdad da

$$[H(x)]_i \leq \sqrt{\tau} \sqrt{\mu} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

en efecto,

$$\frac{[H(x)]_i [H(x)]_i}{\mu} \leq \frac{x_i s_i}{\mu} \leq \tau \implies [H(x)]_i^2 \leq \tau \mu \implies [H(x)]_i \leq \sqrt{\tau} \sqrt{\mu}.$$

Se debería probar que $\frac{\sqrt{\mu}}{\tau \sqrt{\tau} \nu_{LCP}} \leq x_i \leq \sqrt{\tau} \nu_{LCP} \sqrt{\mu}$ para $i \in T$.

Seguendo los pasos del teorema 2.2 se tiene que

$$\begin{aligned} Mx - s &= -q \\ x_{I_2} &= 0 & -x_{I_1} &\leq 0 \\ s_{I_1} &= 0 & -s_{I_2} &\leq 0 \end{aligned}$$

Este conjunto juega el rol de Γ^2 en el lema 2.3, además el conjunto solución del siguiente sistema lineal juega el rol de Γ^1

$$\begin{aligned} Mx - s &= -q \\ x_{I_2} &= H_{I_2}(x) & -x_{I_1} &\leq 0 \\ s_{I_1} &= H_{I_1}(x) & -s_{I_2} &\leq 0 \end{aligned}$$

Se tiene del lema 2.3 que existe una solución x de (2.17), es decir, $x \in \Gamma^*$, tal que

$$\left\| \begin{pmatrix} x^* - x \\ s^* - s \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \nu \left[\begin{pmatrix} -E_{I_1} & 0 \\ 0 & -E_{I_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} M & -E \\ E_{I_2} & 0 \\ 0 & E_{I_1} \end{pmatrix} \right] \|H(x(\mu))\|_{\infty}$$

Usando la definición de ν_{LCP} y que $H_i(x) \leq \|H(x)\|_{\infty} \leq \sqrt{\tau}\sqrt{\mu}$, se tiene

$$\left\| \begin{pmatrix} x^* - x \\ s^* - s \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \nu_{LCP}\sqrt{\tau}\sqrt{\mu}.$$

Dado que $x_i^* = 0$ para $i \in T$, se tiene que

$$x_i \leq |x^* - x_i| \leq \left\| \begin{pmatrix} x^* - x \\ s^* - s \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \nu_{LCP}\sqrt{\tau}\sqrt{\mu}.$$

Por lo tanto,

$$x_i \leq \nu_{LCP}\sqrt{\tau}\sqrt{\mu} \tag{3.3}$$

Además, $i \in I_1 \cap T \implies i \in I_1$

$B \subset I_1 \implies x_i \geq s_i$

$$s_i \leq x_i \leq \nu_{LCP}\sqrt{\tau}\sqrt{\mu} \implies \frac{1}{s_i} \geq \frac{1}{\nu_{LCP}\sqrt{\tau}\sqrt{\mu}}$$

De lo expuesto anteriormente, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &\leq \frac{x_i s_i}{\mu} \leq \tau \\ \implies x_i &\geq \frac{\mu}{\tau s_i} \geq \frac{\mu}{\tau \nu_{LCP}\sqrt{\tau}\sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau}\nu_{LCP}} \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau}\nu_{LCP}} \leq x_i \tag{3.4}$$

De (3.3) y (3.4) se puede concluir que

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \leq x_i \leq \sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu} \quad \text{para } i \in T$$

Ahora se probará que $\frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \leq s_i \leq \sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu}$

en efecto, para $i \in T \cap I_2$ se tiene que

$s_i^* = 0$ para $i \in T$, por tanto

$$s_i \leq |s^* - s_i| \leq \left\| \begin{pmatrix} x^* - x \\ s^* - s \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \nu_{LCP}\sqrt{\tau}\sqrt{\mu}$$

Lo que implica que,

$$s_i \leq \nu_{LCP}\sqrt{\tau}\sqrt{\mu} \quad (3.5)$$

Para $i \in I_2$, $N \subset I_2 \implies s_i > x_i$; $s_i = 0$

$$x_i < s_i < \sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu} \implies \frac{1}{x_i} > \frac{1}{\sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu}}$$

Por lo dicho anteriormente, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &\leq \frac{x_i s_i}{\mu} \leq \tau \\ s_i &\geq \frac{\mu}{\tau x_i} \geq \frac{\mu}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \end{aligned}$$

así,

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \leq s_i \quad (3.6)$$

De (3.5) y (3.6) se cumple que

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \leq s_i \leq \sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu} \quad \text{para } i \in T$$

■

En la siguiente tabla se muestran los resultados del lema

$\mu = \frac{x^T s(x)}{n}$	$i \in B$	$i \in N$	$i \in T$
x_i	$\geq \frac{\sigma_{LCP}}{\tau n(1+4\kappa)}$	$\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}}$	$\frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \leq x_i \leq \sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu}$
$s_i(x)$	$\leq \frac{n\mu(1+4\kappa)}{\sigma_{LCP}}$	$\geq \frac{\sigma_{LCP}}{\tau n(1+4\kappa)}$	$\frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \leq s_i \leq \sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu}$

Se concluye que la partición (B, N, T) puede ser identificada si $x^T s(x)$ es lo suficientemente pequeño tal que

$$\frac{(1 + 4\kappa)n\mu}{\sigma_{LCP}} < \frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \quad y$$

$$\sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu} < \frac{\sigma_{LCP}}{\tau n(1 + 4\kappa)}$$

Es fácil comprobar que ambas desigualdades dan la misma cota para μ ; así para completar la separación de las variables se necesita que

$$\mu < \frac{\sigma_{LCP}^2}{n^2\tau^3\nu_{LCP}^2(1 + 4\kappa)^2} \quad (3.7)$$

En efecto, de la primera desigualdad se tiene que

$$\frac{(1 + 4\kappa)n\mu\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}}{\sigma_{LCP}} < \sqrt{\mu} \implies \frac{(1 + 4\kappa)n\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}}{\sigma_{LCP}} < \frac{\sqrt{\mu}}{\mu}$$

$$\implies \frac{(1 + 4\kappa)n\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}}{\sigma_{LCP}} < \frac{1}{\sqrt{\mu}} \implies \mu < \frac{\sigma_{LCP}^2}{(1 + 4\kappa)^2 n^2 \tau^3 \nu_{LCP}^2}$$

de la segunda desigualdad se tiene que

$$\sqrt{\mu} < \frac{\sigma_{LCP}}{\tau\sqrt{\tau}n(1 + 4\kappa)\nu_{LCP}} \implies \mu < \frac{\sigma_{LCP}^2}{\tau^3 n^2 (1 + 4\kappa)^2 \nu_{LCP}^2}$$

Por lo tanto, se puede afirmar, sin una prueba más el resultado principal:

TEOREMA 3.2. *Sea $x \in \Gamma^0$ tal que $\sigma_c(x) \leq \tau$ para algún $\tau > 1$ y $\mu = \frac{x^T s(x)}{n}$. Si (3.7) se cumple, entonces con $s = s(x)$, la partición óptima de (LCP) es como sigue*

$$T = \left\{ i : \frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau\nu_{LCP}}} \leq x_i, s_i \leq \sqrt{\tau\nu_{LCP}}\sqrt{\mu} \right\}$$

$$B = \{i \notin T : x_i > s_i\} \quad y \quad N = \{i \notin T : x_i < s_i\}$$

■

Aunque la teoría diga como encontrar las cotas que permita hacer la partición que permita dar el "salto" desde una solución aproximada hasta una solución exacta, se debe probar que el trabajo para hacerle es razonable. La siguiente sección trata este punto.

§3.2. Complejidad de encontrar la partición óptima.

El estudio que se presenta a continuación trata sobre el trabajo que se requiere para identificar la partición óptima. En esta sección se supone que se ha dado un punto cercano $x^0 \in \Gamma^0$ a el camino central (es decir, $\sigma_c(x^0) \leq \tau$ para algún $\tau > 1$). Se define μ^0 por $n\mu^0 = (x^0)^T s^0$. Comenzando en x^0 los métodos de punto interior para solucionar (LCP) necesita $\mathcal{O}(\sqrt{n} \log(n\mu^0/\varepsilon))$ iteraciones (ver [Ji, Potra y Sheng],[Kojima, Mizuno y Yoshise],[Kojima, Megiddo, Noma y Yoshise] y [Ye y Anstreicher]) o $\mathcal{O}(n \log(n\mu^0/\varepsilon))$ iteraciones (ver [Illés, Roos y Terlaky]) para generar un punto x tal que $\sigma_c(x) \leq \tau$ y $x^T s(x) \leq \varepsilon$. La primera cota se tiene para métodos con actualizaciones pequeñas del parámetro barrera, mientras que la segunda cota es típica para métodos que utilizan actualizaciones grandes, y también para métodos que usan una dirección tipo afín-escala de Dikin. Por lo tanto, por sustitución del valor de ε acordado en el teorema 3.1, se puede obtener cotas de iteraciones para identificar la partición óptima.

Lo anterior se ilustra a continuación para el algoritmo afín-escala de Dikin, presentado en [Illés, Roos y Terlaky]. Si $n \geq 4$ este algoritmo, con $\tau = 2$ requiere de a lo mas

$$3(1 + 4\kappa)n \log\left(\frac{n\mu^0}{\varepsilon}\right) \tag{3.8}$$

iteraciones para generar un punto x tal que $\sigma_c(x) \leq 2$ y $x^T s(x) \leq \varepsilon$

TEOREMA 3.3. *Se comienza con un punto $x^0 \in \Gamma^0$ con $\sigma_c(x) \leq 2$ y $n \geq 4$, el algoritmo afín-escala de Dikin revela la partición óptima despues de a lo mas*

$$3(1 + 4\kappa)n \log\left(\frac{8n^2(1 + 4\kappa)^2 \nu_{LCP}^2 \mu^0}{\sigma_{LCP}^2}\right) \leq 3(1 + 4\kappa)n \log(8n^4(1 + 4\kappa)^2 \pi^4(M)\mu^0)$$

iteraciones.

Demostración.

La expresión (3.8) da el número de iteraciones para llegar a alguna ε -solución. Con μ lo suficientemente pequeño como en el teorema 3.1 y $\varepsilon = n\mu$ se tiene que se necesitan a lo más el siguiente número de iteraciones para encontrar la partición óptima

$$\begin{aligned} & 3(1 + 4\kappa)n \log\left(\frac{\tau^3 n^2 \nu_{LCP}^2 (1 + 4\kappa)^2 \mu^0}{\sigma_{LCP}^2}\right) \\ = & 3(1 + 4\kappa)n \log\left(\frac{8n^2 \nu_{LCP}^2 (1 + 4\kappa)^2 \mu^0}{\sigma_{LCP}^2}\right) \quad \text{ya que } \tau = 2 \\ \leq & 3(1 + 4\kappa)n \log(8n^4(1 + 4\kappa)^2 \pi^4(M)\mu^0) \end{aligned}$$

En esta última desigualdad se utiliza la cota superior para ν_{LCP} , la cual es $\nu_{LCP} \leq n\pi(M)$ lema 2.6 y la cota inferior para σ_{LCP} lema 2.2 ya que

$$\sigma_{LCP} \geq \frac{1}{\pi(M)} \implies \frac{1}{\sigma_{LCP}} \leq \pi(M).$$

Resultados similares pueden ser derivados de otros métodos de punto interior (IPM) polinomial.

CAPÍTULO 4

REDONDEO PARA UNA SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA Estricta.

Se acaba de establecer que la partición óptima (LCP) se puede encontrar después de un número polinomial de iteraciones con cualquier método de punto interior siguiendo camino central para $P_*(\kappa)$ con (LCP). El número necesario de iteraciones depende del punto donde comienza $x^{(0)}$, el parámetro κ y los números de condición σ_{LCP} y ν_{LCP} . El último objetivo no es solo encontrar la partición óptima sino también encontrar una solución complementaria maximal exacta de (LCP). Se supone que la partición óptima (B, N, T) ha sido determinada con B no vacío, se describirá un procedimiento de redondeo que pueda ser aplicado para algún vector positivo suficientemente centrado x con $x^T s(x)$ lo suficientemente pequeño y el procedimiento de redondeo produce un vector \tilde{x} tal que (2.2) es satisfecho y $\tilde{x}_B > 0$, $s_N(\tilde{x}) > 0$. Como era de esperar, la exactitud que fue suficiente para encontrar la partición óptima no es suficiente para llevar a cabo el procedimiento de redondeo. El procedimiento de redondeo produce una solución complementaria maximal en tiempo fuertemente polinomial. Finalmente el número de iteraciones necesarios requeridos para llegar a la brecha complementaria pequeña esta acotada por el teorema 4.2.

§4.1. Procedimiento de redondeo.

Sea $x \in \Gamma^0$, $s = s(x)$ dados y se supone que la partición óptima (B, N, T) es conocida. Ahora se quiere calcular Δx_B , Δs_N tal que

$$x_B + \Delta x_B > 0 \quad \text{y} \quad s_N + \Delta s_N > 0 \tag{4.1}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ s_N + \Delta s_N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} & M_{BT} \\ M_{NB} & M_{NN} & M_{NT} \\ M_{TB} & M_{TN} & M_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B + \Delta x_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_B \\ q_N \\ q_T \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

porque entonces $\tilde{x} = (x_B + \Delta x_B, 0, 0) \in \Gamma^*$ y esta solución es complementaria maximal. Dado que x y s satisfacen (2.1) se puede restar (4.2) con (2.1)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ s_N + \Delta s_N \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} & M_{BT} \\ M_{NB} & M_{NN} & M_{NT} \\ M_{TB} & M_{TN} & M_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B + \Delta x_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_B \\ q_N \\ q_T \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} s_B \\ s_N \\ s_T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} & M_{BT} \\ M_{NB} & M_{NN} & M_{NT} \\ M_{TB} & M_{TN} & M_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \\ x_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_B \\ q_N \\ q_T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lo que conduce al siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} -s_B \\ \Delta s_N \\ -s_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} & M_{BT} \\ M_{NB} & M_{NN} & M_{NT} \\ M_{TB} & M_{TN} & M_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ -x_N \\ -x_T \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Esto equivale a (4.2). Al realizar algunos cálculos

$$\begin{aligned} M_{BB}\Delta x_B &= M_{BN}x_N + M_{BT}x_T - s_B \\ M_{NB}\Delta x_B - \Delta s_N &= M_{NN}x_N + M_{NT}x_T \\ M_{TB}\Delta x_B &= M_{TN}x_N + M_{TT}x_T - s_T \end{aligned}$$

(4.3) se puede escribir como sigue

$$\begin{pmatrix} M_{BB} & 0_{BN} \\ M_{NB} & -E_{NN} \\ M_{TB} & 0_{TN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta s_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BN}x_N + M_{BT}x_T - s_B \\ M_{NN}x_N + M_{NT}x_T \\ M_{TN}x_N + M_{TT}x_T - s_T \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Se concluye que se puede redondear x a una solución complementaria maximal \tilde{x} si se puede encontrar una solución $(\Delta x_B, \Delta s_N)$ de (4.4) que satisfaga (4.1). Se mostrará mas adelante que si $x^T s(x) = n\mu$ es suficientemente pequeño y x esta lo suficientemente cerca al camino central, entonces $(\Delta x_B, \Delta s_N)$ se puede encontrar por eliminación Gaussiana.

Puede ser útil señalar que el análisis a continuación funciona bien porque las variables x_T, x_N, s_B y s_T que ocurren en el lado derecho de (4.4) son "pequeños" si μ

es suficientemente pequeño y x está suficientemente cerca del camino central. Estas variables son acotadas por encima en el teorema 3.1. Dado que x_B y s_N son "grandes" por el mismo teorema, no es sorprendente que (4.4) admita una solución tal que se cumpla (4.1).

TEOREMA 4.1. *Supongase que M es entera. Sea $x \in \Gamma^0$ tal que $\sigma_c(x) \leq \tau = 2$. Si*

$$\mu < \frac{\sigma_{lcp}^2}{8n^3(1+4\kappa)^2\nu_{LCP}^2\|M\|_\infty^2\pi^2(M)} \quad (4.5)$$

entonces el procedimiento de redondeo produce una solución complementaria maximal en a lo mas $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones aritméticas.

Demostración.

Para tener una expresión simple se introduce la siguiente notación

$$A = \begin{pmatrix} M_{BB} & 0_{BN} \\ M_{NB} & E_{NN} \\ M_{TB} & 0_{TN} \end{pmatrix}, \quad \Delta z = \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta s_N \end{pmatrix} \quad y \quad r = \begin{pmatrix} M_{BN}x_N + M_{BT}x_T - s_B \\ M_{NN}x_N + M_{NT}x_T \\ M_{TN}x_N + M_{TT}x_T - s_T \end{pmatrix}$$

entonces (4.4) se convierte en

$$A\Delta z = r \quad (4.6)$$

Cuando se soluciona (4.6) por eliminación Gaussiana, se necesitan $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones aritméticas, obteniendo una solución tal que las columnas de A correspondientes a su soporte son linealmente independientes ya que si las columnas correspondientes a el soporte son linealmente dependientes entonces no se tendría una sino infinitas soluciones y el computador no sabría que valor tomar. De aqui usando corolario 1.1

$$\|\Delta z\|_\infty \leq \pi(A)\|r\| = \pi(M_B)\|r\| \leq \pi(M)\|r\| \quad (4.7)$$

Se procede mediante la estimación de $\|r\|$. Se usa la desigualdad $\|r\| \leq \sqrt{n}\|r\|_\infty$ y

$$r = \begin{pmatrix} M_{BN}x_N + M_{BT}x_T - s_B \\ M_{NN}x_N + M_{NT}x_T \\ M_{TN}x_N + M_{TT}x_T - s_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BN} & M_{BT} & -E_B & 0 \\ M_{NN} & M_{NT} & 0 & 0 \\ M_{TN} & M_{TT} & 0 & -E_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_N \\ x_T \\ s_B \\ s_T \end{pmatrix}$$

$$\|r\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} M_{BN} & M_{BT} & -E_B & 0 \\ M_{NN} & M_{NT} & 0 & 0 \\ M_{TN} & M_{TT} & 0 & -E_T \end{pmatrix} \right\|_\infty \left\| \begin{pmatrix} x_N \\ x_T \\ s_B \\ s_T \end{pmatrix} \right\|_\infty \quad (4.8)$$

Se observa que el valor de μ dado por (4.5) satisface la hipotesis del teorema (3.1) ya que

$$\mu < \frac{\sigma_{LCP}^2}{8n^3(1+4\kappa)^2\nu_{LCP}^2\|M\|_\infty^2\pi^2(M)} < \frac{\sigma_{LCP}^2}{n^2\tau^3\nu_{LCP}^2(1+4\kappa)^2}$$

Por lo tanto se tiene una separación completa de las variables. Como consecuencia, toda entrada en el vector x_N, x_T, s_B y s_T son acotadas por encima por $\sqrt{\tau}\nu_{LCP}\sqrt{\mu}$. En efecto, del teorema 3.1 se tiene que $x_T, s_T \leq \sqrt{\tau}\nu_{LCP}\sqrt{\mu}$, tambien del teorema 3.1 se tiene

$$\begin{aligned} x_N &\leq \frac{(1+4\kappa)n\mu}{\sigma_{LCP}} \\ &= \frac{(1+4\kappa)n\sqrt{\mu}\sqrt{\mu}}{\sigma_{LCP}} \\ &< \frac{(1+4\kappa)n\sqrt{\mu}}{\sigma_{LCP}} \frac{\sigma_{LCP}}{n\tau\sqrt{\tau}\nu_{LCP}(1+4\kappa)} \\ &= \frac{\sqrt{\mu}}{\tau\sqrt{\tau}\nu_{LCP}} \\ &\leq \sqrt{\tau}\nu_{LCP}\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que $s_B \leq \sqrt{\mu}\nu_{LCP}\sqrt{\tau}$. Por lo tanto, la norma infinita de la concatenación de estos vectores, que aparece en el lado derecho de (4.8) esta acotado por encima por este número. La norma infinita de la matriz en (4.8) esta acotada por encima por la norma infinita de M , esto es

$$\left\| \begin{pmatrix} M_{BN} & M_{BT} & -E_B & 0 \\ M_{NN} & M_{NT} & 0 & 0 \\ M_{TN} & M_{TT} & 0 & -E_T \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} & M_{BT} \\ M_{NB} & M_{NN} & M_{NT} \\ M_{TB} & M_{TN} & M_{TT} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \|M\|_\infty$$

Así se puede encontrar

$$\|r\| \leq \sqrt{n}\sqrt{\mu}\nu_{LCP}\sqrt{\tau}\|M\|_\infty$$

sustituyendo en (4.7) se produce

$$\|\Delta z\|_\infty \leq \sqrt{n}\sqrt{\mu}\nu_{LCP}\sqrt{\tau}\|M\|_\infty\pi(M)$$

Usando la cota inferior del teorema 3.1 (con $\tau = 2$) para las entradas de x_B y s_N se concluye que el procedimiento de redondeo ciertamente produce una solución maximal complementaria si

$$\sqrt{2n}\nu_{LCP}\sqrt{\mu}\|M\|_{\infty}\pi(M) < \frac{\sigma_{LCP}}{2n(1+4\kappa)}$$

despejando $\sqrt{\mu}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} &< \frac{\sigma_{LCP}}{2\sqrt{2n}\sqrt{n}\nu_{LCP}(1+4\kappa)\|M\|_{\infty}\pi(M)} \\ \implies \mu &< \frac{\sigma_{LCP}^2}{8n^3\nu_{LCP}^2(1+4\kappa)^2\|M\|_{\infty}^2\pi^2(M)} \end{aligned}$$

que produce la cota para μ en el teorema. ■

§4.2. Complejidad de encontrar una solución exacta

Se aplican los resultados de la sección previa para estimar el número de iteraciones requeridos por el algoritmo afín-escala de Dikin para alcanzar el estado donde el procedimiento de redondeo produce una solución complementaria maximal.

TEOREMA 4.2. *A partir de un punto $x^{(0)} \in \Gamma^0$ con $\sigma_c(x^{(0)}) \leq 2$ y $n \geq 4$, el algoritmo afín-escala de Dikin requiere de a lo mas*

$$3(1+4\kappa)n \log \frac{8n^3(1+4\kappa)^2\nu_{LCP}^2\|M\|_{\infty}\pi^2(M)\mu^0}{\sigma_{LCP}^2}$$

iteraciones para generar un punto x para que el procedimiento de redondeo produzca una solución complementaria maximal.

Demostración.

La expresión (4.5) da el número de iteraciones para llegar a una solución complementaria maximal. Consideremos μ suficientemente pequeño como en el teorema 4.1 y $\varepsilon = n\mu$ se tiene que

$$\begin{aligned} 3(1+4\kappa)n \log \frac{n\mu^0}{\varepsilon} &= 3(1+4\kappa)n \log \frac{\mu^0}{\mu} \\ &< 3(1+4\kappa)n \log \frac{\mu}{8n^3(1+4\kappa)^2\nu_{LCP}^2\|M\|_{\infty}\pi^2(M)\mu^0} \end{aligned}$$

■

Conclusión.

El objetivo de este trabajo es mostrar que se puede determinar una solución complementaria maximal del problema de complementariedad lineal (*LCP*) en tiempo polinomial. Se supone que $\Gamma^0 \neq \emptyset$, $q \neq 0$ y que un punto de comenzar $x^{(0)} \in \Gamma^0$ es dado. Bajo estas suposiciones se puede obtener el resultado deseado.

Se definen dos números de condición los cuales fueron acotados por expresiones con los datos de entrada. Usando los Teoremas 2.2 y 3.1 se mostró que si $x \in \Gamma^0$ es suficientemente cercano a el camino central y $x^T s(x)$ es suficientemente pequeña entonces se puede identificar la partición óptima y calcular una solución complementaria maximal usando eliminación Gaussiana (Teorema 4.1).

El número de iteraciones para obtener la precisión necesaria para ejecutar el procedimiento de redondeo es calculado para algoritmos afín-escala de Dikin en el Teorema 4.2

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [*Illés, Peng, Roos y Terlaky*] T. ILLÉS, J. PENG, C. ROOS AND T. TERLAKY, A strongly polynomial rounding procedure yielding a maximally complementary solution for $P_*(\kappa)$. linear complementary problems, SIAM J. Optim. Vol. 11 N^o 2 (2000) pp. 320-340.
- [*Kojima, Megiddo, Noma y Yoshise*] M. KOJIMA, N. MEGIDDO, T. NOMA AND A. YOSHISE. A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems. Lectures Notes in Comput. Sci.538. Springer-Verlag, Berlin,1991
- [*Mangasarian y Shiau*] O. L. MANGASARIAN AND T.H SHIAU, Lipschitz continuity of solutions of linear inequalities programs and complementarity problems, SIAM J. Control Optim, 25 (1987). pp. 583-595
- [*Illés, Roos y Terlaky*] T. ILLÉS, C. ROOS, AND T. TERLAKY, Polynomial affine-scaling algorithms for $P_*(\kappa)$ linear complementarity problems, in Recent Advances i Optimization, Proceedings of the 8th French- German Conference on Optimization, Their, 1996, Lecture Notes in Econom. Math. systems 452, P. Gritzmann, R.Horst, E. Sachs, and R. Tichatschke, eds., Springer-Verlag, New York, (1997), pp. 119-137.
- [*Ji, Potra y Sheng*] J. JI, F. POTRA AND R. SHENG, A predictor-corrector method for the $P_*(\kappa)$ matrix *LCP* from infeasible starting points. Optim. Methods softw.. 6 (1995), pp. 109-126.
- [*Kojima, Mizuno y Yoshise*] M. KOJIMA, S. MIZUNO AND A. YOSHISE, An $\mathcal{O}(\sqrt{n}L)$ iteration potential reduction algorithm for linear complementarity problems. Math. Programming. 50 (1991), pp. 331-342.
- [*Ye y Anstreicher*] Y. YE AND K. ANSTREICHER, On quadratic and $\mathcal{O}(\sqrt{n}L)$ convergence of a predictor-corrector algorithm for *LCP*. Math. Programming, 62 (1993), pp 537-552

[Anton] H. ANTON. *Introducción al álgebra lineal, tercera edición*. Limusa Wiley. 1998.

[Kolman,Hill] B. KOLMAN. D. HILL. *Álgebra lineal Octava edición*. Pearson - Prentice Hall. 2000.