UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Aritmética Difusa: Fundamentos y Ejemplos De Aplicaciones”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Migdalia J. Giménez C.

como requisito final
para obtener el título de Licenciada
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Teoría De Conjuntos Difusos.
Tutor: Dra. Maria Luisa Capodiecci

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2012

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"ARITMÉTICA DIFUSA: FUNDAMENTOS Y EJEMPLOS DE APLICACIONES"

Presentado por la ciudadana BR. MIGDALIA J. GIMÉNEZ C. titular de la Cédula de Identidad Nº 17.132.268. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

Dedicado a Dios Todopoderoso, al amor de mi vida mi hijo Adrián Ernesto, mis Padres Juana y Aniceto, a mis Hermanas(os), y a mi esposo Néstor.

AGRADECIMIENTOS

A **Dios, todopoderoso**, por ser mi guía, mi proveedor, y darme la fortaleza para alcanzar esta meta.

A **mi madre**, serás siempre mi inspiración para lograr mis objetivos. Gracias por darme fuerzas cuando la necesité, por enseñarme que de todo se aprende, gracias por tus sabios consejos.

A **mi papá**, por todo el cariño y apoyo brindado. Por ser un excelente padre y ayudarme en todos los momentos de mi vida.

A mis **hermanos(as)**,Gregoria, Enrique, Edgar,Maria H, Jose A y Elizabeth por su apoyo, comprensión, y porque siempre he contado con ellos en los momentos más difíciles, por orientarme siempre a lo largo de mi carrera y ser siempre ejemplos e inspiración para mi, los quiero.

A **mi esposo**, Nestor, por su apoyo constante e incondicional. Gracias por tu paciencia, por brindarme ese cariño tan grande todos los días desde que estás conmigo.

A mis **sobrinos(as)** Jesús A, Maria G, Janna Sophia, Gabriela S, quien han formado parte de mi vida y me inspiran a seguir adelante, espero les sirva de ejemplo.

A mi **abuela, tios, tias, primos(as)** gracias a todos por confiar ciegamente en mí.

A la familia **Arroyo Rodriguez** por su gran apoyo y comprensión, sinceramente gracias.

A la señor(a) **Adriana, Argenis ,Fanny,Carlos** por todo su apoyo moral, colaboración y comprensión.

A la señora **Nidea Olivero** Gracias por darme fuerzas cuando la necesité, confiar en mi, siempre la tendré presente.

A mi tutora, **Maria Luisa Capodiecci**, por su asesoría y dirección en el cumplimiento de este proyecto.

A mi Profesor, **Carlos Lameda**, Su gran colaboración fue esencial en la culminación de este trabajo... Todas tus ideas están plasmada en esta tesis, gracias por su tiempo, dedicación y confianza.

A **mi amiga**, hermana, compañera, Katherina quien me han acompañado durante toda mi vida como estudiante, compartiendo grandes y pequeños momentos y brindándome todo su apoyo,eres lo máximo.

A **mis mejores amigos(as)** Leisa, Johela, Jeferson, Claimar, Reivy, José M,quienes han sido como unos hermanos para mí desde que llegue a la universidad y por compartir todos aquellos buenos y malos momentos, que siempre nos dieron dolores de cabeza. Gracias por su amistad sincera e incondicional.

A **mis compañeros**,Rangely, Maria Ines, Jhoan, Marcos, Yenny, Luisa, Glenny, Datsy, Dannymar, Eleiny, Elvis, El Gocho quienes me han acompañado durante toda mi carrera universitaria, compartiendo grandes y pequeños momentos y brindándome todo su apoyo, gracias por hacer esos días de estudios más divertidos.

A **mis amigos(as) de familia**,Milangela, Francelys, Lesbia, Flia Sequera, Flia Pérez, Flia Cuaro Gimenez, por todos esos momentos inolvidables que me permitieron vivir a su lado. Les estaré agradecido desde lo más profundo de mi Corazón.

A cada uno de los **profesores** que participaron en mi desarrollo profesional e integral, sin su ayuda y conocimientos no estaría donde me encuentro ahora, con especial agradecimiento a las profesoras Belkis de Lameda, María Luisa Capodieci, Jurancy Ereú, Luz y a los profesores José Luis Linarez, , Rómulo Castillo, Miguel Vivas, Mario Rodríguez, Eibar Hernández, Javier Hernández.

Simplemente, Gracias a todos aquellos que de alguna u otra forma contribuyeron al desarrollo de mi carrera y crecimiento personal.

“Aritmética Difusa: Fundamentos y Ejemplos De Aplicaciones”

Resumen

Dentro de los diversos tipos de conjuntos difusos, los números difusos tienen una significación especial cuantitativa. Ellos pueden representar nuestra concepción intuitiva de números o intervalos aproximados, y son importantes al caracterizar variables difusas. Las propiedades de los números difusos permiten definir operaciones que configuren una aritmética difusa. La aritmética difusa puede jugar un papel importante en muchas aplicaciones en áreas tales como el control automático, tomas de decisión, optimización y estadística. A través de este trabajo se presentarán los fundamentos sobre aritmética difusa, entre ellos cómo aplicar las operaciones elementales sobre los números difusos, tomando en cuenta los diversos tipos de números difusos tales como Triangular, Trapezoidal y Gaussiano. Así mismo, se mostrará la utilidad del desarrollo teórico a través su aplicación en problemas prácticos.

Palabras clave: conjuntos difusos, aritmética difusa, lógica difusa.

Índice

Capítulo 1

Introducción.

El concepto de conjuntos difusos fue publicado por Lotfi Zadeh en 1965 [1]. A partir de este concepto se han generado importantes investigaciones y desarrollos en diferentes áreas del saber tales cómo matemáticas, ingeniería, ciencias sociales y económicas, entre otras.

El propósito inicial de Zadeh en introducir los conjuntos difusos era proveer una herramienta para ayudar al modelado de sistemas complejos, especialmente, pero no restringido a aquellos que involucraban agentes humanos. Un tipo particular de conjunto difuso, es el denominado número difuso, cuya definición ha sido planteada por diversos autores, entre ellos Klir y Yuan [3].

Los conjuntos difusos, propuestos por Lotfi Zadeh en 1965 [1], son una clase de objetos con un continuo de grados de pertenencia. Entre los distintos tipos de conjuntos difusos, los que se definen en el conjunto universal R de los números reales son de particular importancia. Ellos pueden, bajo ciertas condiciones, ser vistos como números difusos, que reflejan la percepción humana de cuantificación numérica incierta. La teoría de conjuntos difusos ha provisto un conjunto de conceptos y operaciones que han permitido desarrollar la aritmética difusa.

A nivel mundial, varios investigadores se han dedicado ha construir los fundamentos para la aritmética difusa y plantear formas en que puede ser aplicada. La aritmética difusa se perfila como una herramienta matemática poderosa para ayudar a resolver diversos problemas científicos y tecnológicos. Sin embargo, existe escasa literatura, especialmente en castellano, que presente el tema de la aritmética difusa en forma didáctica. Con el presente trabajo se pretende alcanzar los objetivos siguientes:

1. Revisar aspectos fundamentales sobre conjuntos difusos y números difusos.
2. Analizar las operaciones aritméticas con números difusos.
3. Estudiar la aplicación de la aritmética difusa en problemas prácticos.
4. Redactar la monografía en la que se explique aspectos relevantes sobre los fundamentos de la aritmética difusa y
se describan ejemplos de aplicación.

Capítulo 2

Preliminares

En este capitulo introduciremos algunos conceptos básicos que se usarán en el desarrollo de el trabajo.

§2.1. Conceptos Básicos

Definición 2.1. *Conjunto Difuso*
Sea X el conjunto de elemento genérico x, el universo a considerar. Un conjunto difuso A de X es formado por el par $(A, \mu_A(x))$, donde x es una variable de A y μ_A es una función cuya imagen pertenece al intervalo cerrado $[0,1]$. La función μ_A recibe el nombre de función intensidad de pertenencia y el valor $\mu_A(x)$ representa el grado de pertenencia de x al subconjunto A.
Cuando $\mu_A(x)$ toma el valor de 1 se tiene una pertenencia absoluta de x en A, mientras que si $\mu_A(x)$ toma el valor de 0 se tiene la no pertenencia absoluta de x en A. Un valor de $\mu_A(x)$ cercano a 1 significa que el grado de pertenencia de x en A es alto, y si $\mu_A(x)$ es cercano a 0 significa que el grado de pertenencia de x en A es bajo.

Definición 2.2. *α-cortadura*
Dado α en $[0,1]$. Una α-cortadura de un conjunto difuso A es un conjunto nítido A^α constituido por todos los puntos del conjunto de discurso X, que tienen un grado de pertenencia mayor o igual a α.
Hay dos clases importantes de α-cortadura:

$$A^{\geqslant\alpha} = \{x \in X / \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$$

$$A^{>\alpha} = \{x \in X/\mu_A(x) > \alpha\}$$

La primera es llamada α-cortadura fuerte y la segunda simplemente α-cortadura.

Definición 2.3. *Soporte de un Conjunto Difuso*
El soporte de un conjunto difuso A en el universo de discurso X es el conjunto que contiene todos los elementos de X que tienen un valor de pertenencia distinto de cero en A, esto es,

$$sop(x) = \{x \in X/\mu_A(x) > \alpha\} \tag{2.1}$$

Definición 2.4. *El núcleo de un conjunto difuso A se define como sigue*

$$Núcleo\ de\ A = \{x \in X/\mu_A(x) = 1\}$$

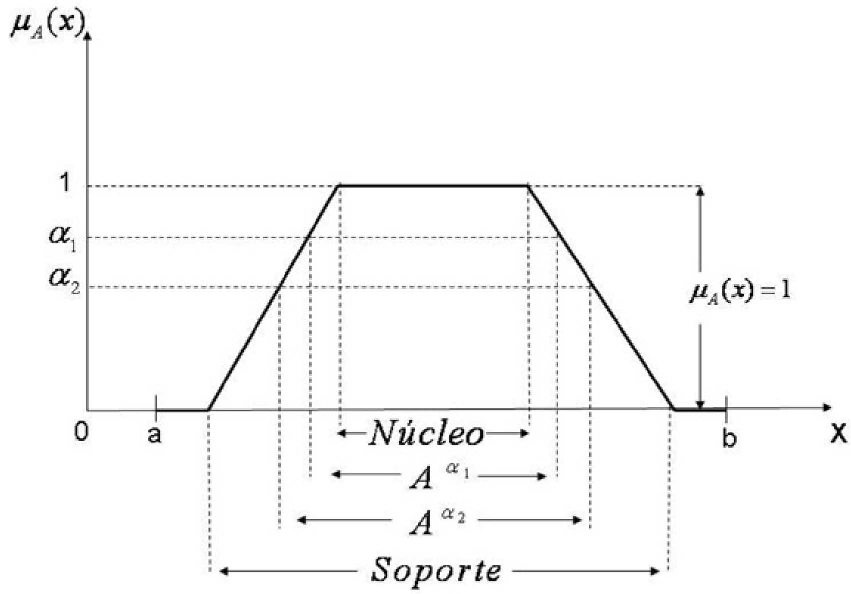


Figura 2.1: Soporte, Núcleo y Altura de un conjunto difuso.

Definición 2.5. *Un Conjunto Difuso es Normal,si existe algún elemento $x \in X$, tal que pertenece al conjunto difuso totalmente, es decir, con grado 1. O también, que:*

$$Altura(A) = 1.$$

Cuando el núcleo de un conjunto difuso A es no vacío, entonces el conjunto es normal.

Definición 2.6. *Puntos de cruce,son los puntos del conjunto difuso para los cuales $\mu_A(x) = 0{,}5$. Esto es,*

$$Cruce(A) = \{\mu_A(x) = 0,5\}$$

Definición 2.7. *Conjunto difuso simple, es el conjunto difuso para el cual el soporte es solamente un punto,en el cual el valor de la función de pertenencia es 1.*

Definición 2.8. *Dado un subconjunto A en $\mathbb{R}^n$, A es un conjunto convexo si y solo si para todo par (r, s) de A y $\forall\alpha$ en $[0, 1]$,$t = \alpha.r + (1 - alpha).s$ pertenece a A. También se dice que un conjunto A en $\mathbb{R}^n$ es convexo si para cada par de puntos r y s en A, todo punto localizado en el segmentas de rectas cuyos extremos son r y s están también en A.*

Definición 2.9. *Un conjunto difuso A de $\mathbb{R}$ se dice convexo si y solo si cada una de las α-cortaduras es también un conjunto difuso convexo.*

Teorema 2.1. *Un conjunto difuso A de $\mathbb{R}$ es convexo si y solo si se cumple que $\forall r, s$ en $\mathbb{R}$,$\forall\alpha$ en $[0, 1]$ se tiene*

$$\mu_A[\alpha.r + (1 - \alpha).s] \geqslant \text{mín}[\mu_A(r), \mu_A(s)] \tag{2.2}$$

Demostración.$\Rightarrow$ *Supongamos que A satisface (2.2)es convexo y $\beta = \mu_A(r) \leqslant \mu_A(s)$ Ahora bien, para r y s en $A^{\geqslant\beta}$, se tiene $[\alpha.r + (1 - \alpha).s]$ pertenece a $A^{\geqslant\beta}$ con α en $[0, 1]$, por definición de convexidad en A, Por lo tanto*

$$\mu_A[\alpha.r + (1 - \alpha)s] \geqslant min[\mu_A(r), \mu_A(s)]$$

$\Longleftarrow$ *Asuma ahora que A satisface (**??**). Necesitamos probar que $\forall\beta$ en $(0, 1]$, la α-cortadura $A^{\geqslant\beta}$ es convexa.*

Para cualquier r y s en $A^{\geqslant\beta}$ (donde $\mu_A(r) \geqslant \beta, \mu_A(s) \geqslant \beta$) y para un α en $[0, 1]$ por (4) se cumple que:

$$\mu_A[\alpha.r + (1 - \alpha).s] \geqslant \text{mín}[\mu_A(r), \mu_A(s)] \geqslant min(\beta, \beta) = \beta$$

Luego, $[\alpha.r + (1 - \alpha).s] \quad \in A^{\geqslant}\beta$.

Por lo anterior, A es un conjunto difuso convexo por definición.
Es bueno resaltar que la noción de convexidad de un conjunto difuso A no significa que su función de pertenencia μ_A sea una función convexa, es decir, no se cumple que, $\mu_A(\alpha.r + (1-\alpha).s) \geqslant \alpha\mu_A(r) + (1-\alpha)\mu_A(s)$ ■

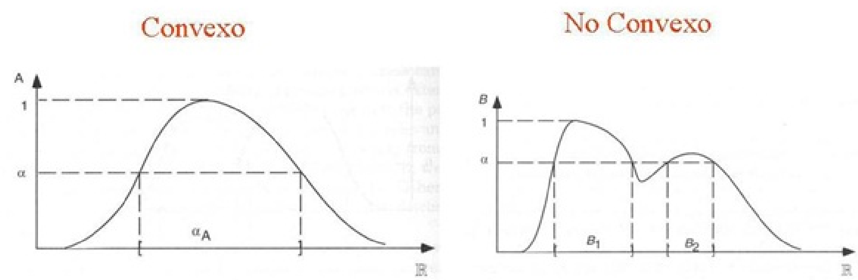


FIGURA 2.2: GRÁFICAS DE UN CONJUNTO DIFUSO CONVEXO Y UNO NO CONVEXO.

§2.1.1. Números Difusos

Los números difusos son conjuntos difusos usados en relación con aplicaciones donde una representación explícita de la ambigüedad o incertidumbre encontradas en datos numéricos es deseable. En un sentido intuitivo,ellos son conjuntos difusos que representan el significado de declaraciones tales, como próximo a 3 *o cercano a* 5 *y medio. En otras palabras,los números difusos toman en cuenta el aproximado,casi y no casi, cualidades de etiquetas numéricas.*
Las operaciones con conjuntos difusos tales como la unión y la intersección, así como también las nociones de las α-cortaduras resolución y el principio de extensión son todas aplicables a los números difusos. Además, un conjunto de operaciones muy similar a la familia de operaciones aritméticas adición,sustracción,multiplicación y división también pueden ser definida para los números difusos.
Los números difusos han sido exitosamente aplicados en sistemas expertos,regresión difusa y metodología de análisis de datos difusos. Han sido también usados en relación con ecuaciones difusa y operaciones alternativas de aritmética difusa las cuales han sido introducidas con el propósito de reducir la difusidad en los cálculos sucesivos.

DEFINICIÓN 2.10. *Un número difuso es un conjunto difuso convexo y normal,* *definido sobre la recta real.*

Los números difusos también pueden ser definidos en un universo de discurso multidimensional, es decir, un producto cartesiano. Tales números difusos son usados por ejemplo, en relación con análisis de escenas y robótica para definir el sentido de una región en el espacio o un dominio en el plano x-y, y también sumar ,restar y multiplicar regiones.

Los números difusos pueden tener diferentes formas, tales como: triangular, trapezoidal, gaussiana, campana generalizada, entre otras; las cuales se visualizan en la (Fig. 2.3)

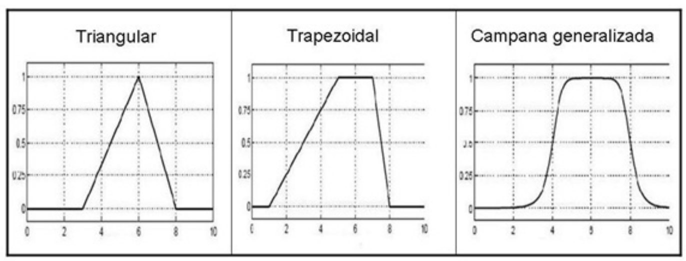


Figura 2.3: Ejemplos de números difusos triangular, trapezoidal y campana generalizada.

§2.1.2. Números Difusos Triangular y su Representación

Un número difuso triangular puede definirse por la terna $(a; b; c)$ *con* $a < b < c$ *Otra forma de definir un número difuso triangular es mediante un intervalo de confianza de nivel, entendiendo por intervalo de confianza como el intervalo limitado entre los dos valores de X asociados al valor de la función de pertenencia. Este intervalo de confianza va a depender de su amplitud; cuanto menor sea la amplitud de intervalo mayor será la confianza de los datos; de manera análoga, cuanto mayor sea la amplitud del intervalo menor será la confianza de los datos.*

DEFINICIÓN 2.11. *Un número difuso en $\mathbb{R}$, se llama triangular si su función de pertenencia está especificada por tres parámetros a, b y c como sigue:*

$$\Delta(x;a;b;c) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x \leqslant a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & \textit{para } a \leqslant x \leqslant b \\ \frac{(c-b)}{(c-x)} & \textit{para } b \leqslant x \leqslant c \\ 0 & \textit{para } c \leqslant x \end{cases}$$

Otra manera de definir un conjunto difuso triangular es usando min y max:

$$\Delta(x;a;b;c) = \text{máx}(\text{mín}((x-a)/(b-a);(c-x)/(c-b);0))$$

con $a < b < c$; estos parámetros determinan las coordenadas de las tres esquinas de la función de pertenencia descrita. Una representación gráfica de un número difuso triangular se puede ver en la (Fig. 2.4)

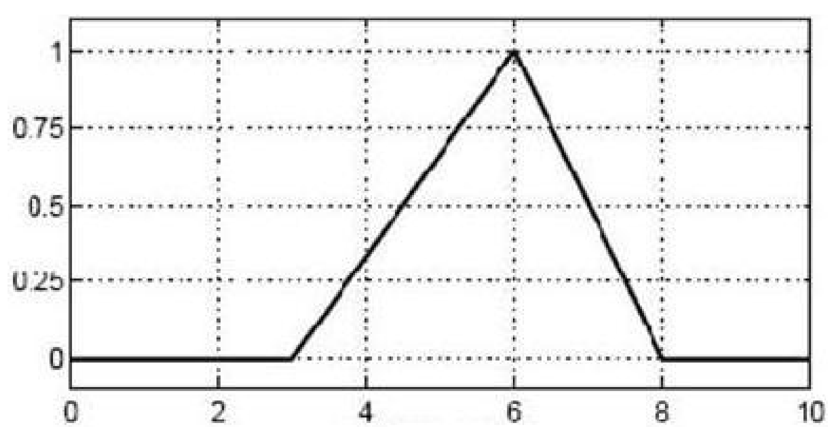


FIGURA 2.4: REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO DIFUSO TRIANGULAR.

§2.1.3. Números Difusos Trapezoidal y su Representación

Un número difuso es Trapezoidal cuando su función de pertenencia está especificada por cuatro parámetros a, b, c y d como sigue:

$$\Pi(x;a;b;c;d) = \begin{cases} 0 & para\ x \leqslant a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & para\ a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & para\ b \leqslant x \leqslant c \\ \frac{(d-x)}{(d-c)} & para\ c \leqslant x \leqslant d \\ 0 & para\ d \leqslant x \end{cases}$$

También puede definirse usando max y min de la siguiente manera:

$$\Pi(x;a;b;c;d) = \text{máx}(\text{mín}((x-a)/(b-a);1;(d-x)/(d-c));0)$$

con $a < b \leqslant c < d$*; estos parámetros determinan las cuatro esquinas de la función de pertenencia descrita. Una representación gráfica de un número difuso trapezoidal se puede ver en la (Fig. 2.5)*

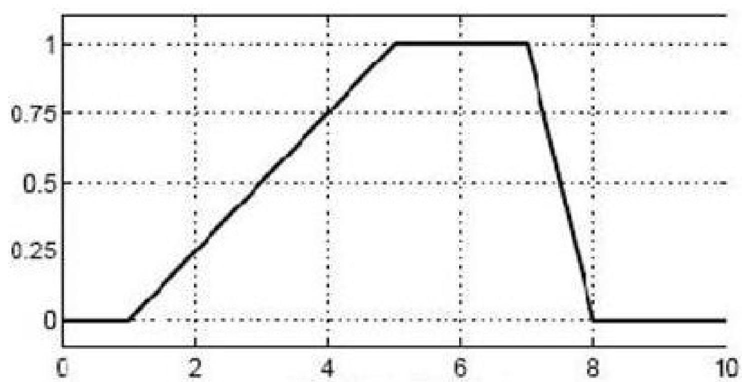


Figura 2.5: Representación de un número difuso trapezoidal.

§2.1.4. El Principio de Extensión y la Aritmética Difusa

Sea una aplicación f *definida de un universo de discurso* $\mathbb{X}$ *en otro universo* $\mathbb{Y}$ *. Dado un subconjunto borroso* $\mathbb{B}$ *en* $\mathbb{Y}$ *con función de pertenencia* $\mu_B(y)$*. La imagen recíproca* f^{-1} *induce un conjunto difuso* $A(f^{-1}(B) = A)$ *en* $\mathbb{X}$ *cuya función de pertenencia está definida por:*

$$\mu_A(x) = \mu_B(y), y \in Y$$

para todos los x de X tales que $f(x) = y$. El grado de pertenencia de los x $f^1(y) \neq \emptyset$; es constante e igual al de y en B. Ahora se considerará el problema inverso. Dado un conjunto difuso $\mathbb{A}$ de $\mathbb{X}$, la aplicación f induce un conjunto difuso $B(f(A) = B)$ en Y . Nos planteamos la pregunta: ¿Cuál es la función de pertenencia para el subconjunto difuso B inducido por la aplicación f? Si f es una aplicación biyectiva, basta considerar

$$\mu_B(y) = \mu_A(x), x \in X, f(x) = y$$

El problema aparece cuando f no es biyectiva. Suponiendo que existen dos puntos x_1 y x_2 distintos en X, con grados de pertenencia diferentes en A y con imágenes directas iguales a y. Nos preguntamos: ¿Qué grado de pertenencia debemos asignar a y? Se considerará el valor mayor entre esos dos valores. En general la función de pertenencia de B se define por:

$$\mu_B(y) = \sup_x \in f{-}1(y)\mu_A(x), y \in Y$$

donde $f_{-1}(y)$ es el conjunto de puntos x de X que tienen por imagen directa a y para $f_{-1}(y) \neq \emptyset$, y en caso de ser $f^{-1}(y) = 0$ se define $\mu_B(y) = 0$ De esta manera se ha inducido una aplicación f definida de $P(X)$ en $P(Y)$ tal que para todo subconjunto borroso $A = (A; \mu_A)$ se le asocia el subconjunto difuso $f(A) = (f(A); \mu_f(A))$, cuya función de pertenencia, para todo y en Y es:

$$\mu_f(A) = \begin{cases} \sup \mu A(x) & si\ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & si\ f^{-1}(y) = 0 \end{cases}$$

Capítulo 3

Operaciones Aritméticas de Números Difusos

Entre los diversos tipos de conjuntos difusos, son de significancia especial los conjuntos difusos que son definidos sobre el campo $\mathbb{R}$ de los numeros reales. Las funciones de membresia de estos conjuntos,tienen la forma,

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

Claramente tiene un significado cuantitativo y pueden, bajos ciertas condiciones, ser vistas como números difusos o intervalos difusos. En vista de que estos son fáciles, deberíamos capturar los conceptos intuitivos de aproximaciones de números o intervalos, tales son "Números que son cerrados para un número real dado" o "números que están alrededor de un intervalo de un número real dado de números reales".

Tales conceptos son esenciales para caracterizar estados de variables difusas y consecuentemente juegan un rol muy importante en muchas aplicaciones incluyendo, control difuso, toma de decisiones, razonamiento aproximado, optimización y probabilidades imprecisas con estadísticas. Para caracterizar a un número difuso, un conjunto difuso A sobre $\mathbb{R}$ es necesario por lo menos las siguientes propiedades:

1. *A debe ser un conjunto normal;*

2. ${}^{\alpha}A$ *debe ser un intervalo cerrado para cada* $\alpha \in (0,1]$;

3. *Sop(A),* A^{o+}; *debe ser acotado.*

Los conjuntos difusos deben ser normales ya que nuestra concepción de un conjunto D "números reales convergentes en $\mathbb{R}$" *es completamente satisfecha, por lo tanto el grado de membresia de r en cada conjunto difuso que intentan capturar esta concepción (es decir, un número difuso) debe ser 1.*
El soporte acotado de un número difuso y todas sus $\alpha-$*cortaduras para* $\alpha \neq 0$ *deben ser intervalos cerrados para permitir definir el significado de las operaciones aritméticas sobre los números difusos en términos de las operaciones aritméticas estándar sobre intervalos cerrados, bien establecidas en el análisis de intervalos clásicos; Ya que las* $\alpha-$ *cortaduras de cada número difuso se requiere que sean intervalos cerrados para cada* $\alpha \in (0,1]$, *cada números difuso es un conjunto difuso convexo, lo contrario sin embargo no es necesariamente verdadero ya que las* $\alpha-$ *cortaduras de algunos conjuntos difusos convexos pueden ser abiertos o semi-abiertos.*
Los casos especiales de números difusos que incluyen números reales ordinarios y intervalos de números reales se ilustran en la (figura 3.1)

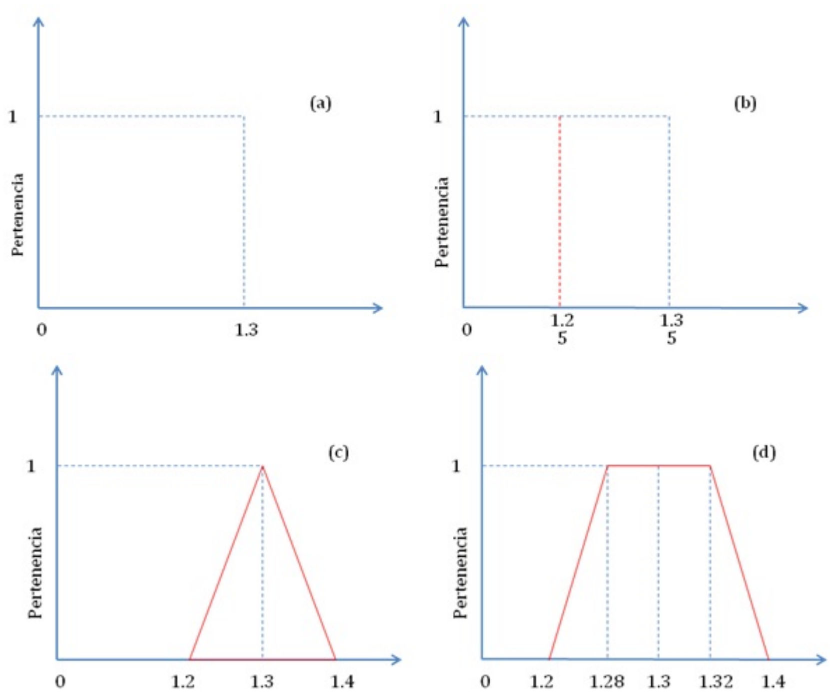


FIGURA 3.1: TIPOS BÁSICOS DE NÚMEROS DIFUSOS.

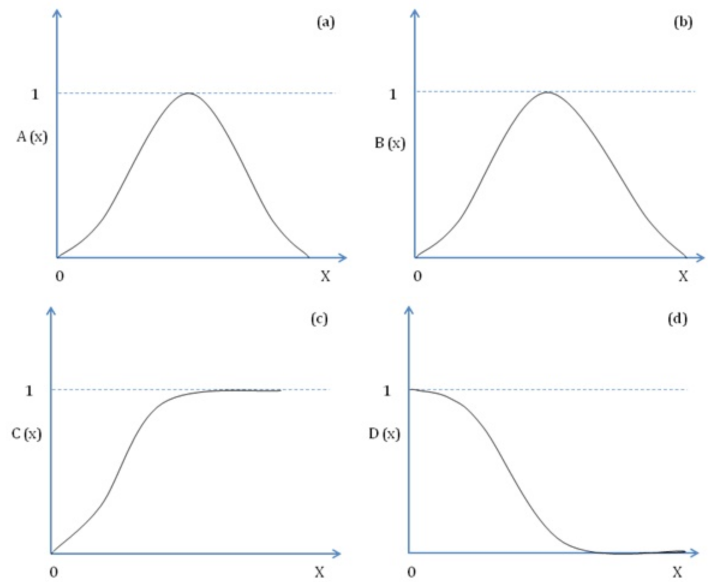


FIGURA 3.2: TIPOS BÁSICOS DE NÚMEROS DIFUSOS.

1. *un número real ordinario;*

2. *un intervalo cerrado (Crisp)* [1,25, 1,35];

3. *un número difuso expresando la proposición çerrado para 1.3";*

4. *un número difuso con una región plana (un intervalo difuso).*

Aunque las formas triangulares y trapezoidales de las funciones de pertenencia mostradas en la (fig 3.1)son muy utilizadas para representar números difusos, otras formas pueden ser preferibles en algunas aplicaciones. Mas aún, las funciones de pertenencia de números difusos no son necesariamente simétricas como son las dadas en la (fig 3.3). Bastante típicas son las llamadas "forma de campana"de las funciones de pertenencia, ejemplificadas por las funciones dadas en la (fig 3.3a) (simétrica) y en la (fig 3.3b)(antisimétrica). Observe que las funciones que únicamente crecen (fig 3.3c) o únicamente decrecen (fig 3.3d) además son calificadas como números difusos. Ellas capturan nuestra concepción de un número difuso grande o de un número difuso pequeño en el contexto de cada aplicación particular.El siguiente teorema muestra que las funciones de pertenencia de números difusos pueden ser en general, funciones definidas a trozos.

TEOREMA 3.1. *Sea* $A \in F(\mathbb{R})$. *Entonces* A *es un número difuso si y sólo si existe* *un intervalo cerrado* $[a, b] \neq \varnothing$ *tal que:*

$$A(x) = \begin{cases} 1 & para\ x \leqslant 1\ y\ x > 5 \\ l(x) & para\ x \in (-\infty, a) \\ r(x) & para\ x \in (b, \infty) \end{cases} \tag{3.1}$$

donde l *es una función definida en el intervalo* $(-\infty, a)$ *al intervalo* $[0, 1]$ *la cual es monótona creciente, continua a la derecha, y tal que* $l(x) = 0$ *para* $x \in (-\infty, w_1)$; r *es una función definida en el intervalo* (b, ∞) *al intervalo* $[0, 1]$ *la cual es monótona decreciente, continua a la izquierda y tal que* $r(x) = 0$ *para* $x \in (w_2, \infty)$.

Prueba: Necesidad. Ya que A *es un número difuso* ${}^{\alpha}A$ *es un intervalo cerrado para cada* $\alpha\varepsilon(0, 1]$. *Para* $\alpha = 1, {}^{1}A$ *es un intervalo cerrado no vacío ya que* A *es normal. Por lo tanto existe un par* $a, b\varepsilon\mathbb{R}$ *tales que* ${}^{1}A = [a, b]$, *donde* $a \leqslant b$. *Esto es* $A(x) = 1$ *para* $x\varepsilon[a, b]$ *y* $A(x) < 1$ *para* $x \ni [a, b]$. *Ahora sea* $l(x) = A(x)$ *para algún* $x \in (-\infty, a)$. *Entonces* $0 \leqslant l(x) < 1$ *ya que* $0 \leqslant A(x) < 1$ *para cada* $x \in (-\infty), a$. *Sea* $x \leqslant y < a$, *entonces*

$$A(y) \geqslant min[A(x), A(a)] = A(x)$$

por teorema 2.1 ya que A *es convexa y* $A(a) = 1$. *Desde* $l(y) \geqslant l(x)$; *esto es,* l *es monótona creciente. Supongamos ahora que* $l(x)$ *no es continua a la derecha. Esto significa que para cualquier* $x_0 \in (-\infty, a)$ *existe una sucesión de números* x_n *tal que* $x_n \geqslant x_0$ *para cualquier* n *y*

$$\lim_{n\to 0} x_n = x_0$$

pero

$$\lim_{n\to 0} l(x_n) = \lim A(x) = \alpha > l(x_0) = A(x_0).$$

Ahora, $x_n \in^{\alpha} A$ *para cualquier* n *como* ${}^{\alpha}A$ *es un intervalo cerrado y además* $x_0 \in^{\alpha} A$. *De esta manera* $l(x_0) = A(x_0) \geqslant \alpha$, *lo cual es una contradicción. Esto es* $l(x)$ *es continúa a la derecha. Para probar que la función* r *en (3.1) es monótona decreciente y continua a la izquierda se procede de manera similar. A partir que* A *es un número difuso,* $0+^{A}$ *es acotado. Desde, allí un par* $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ *de números finitos tales que* $A(x) = 0$ *para* $(x \in \infty, w_1) \bigcup (w_2, \infty)$. *Suficiencia: Cada conjunto difuso* A *definido por (3.1) es claramente normal, y su soporte,* ${}^{0} + A$, *es acotado, ya que*

$^0+A \subseteq [w_1, w_2]$. *Por último probemos que* $^\alpha A$ *es un intervalo cerrado para cada* $\alpha \in (o, 1]$. *Sea*

$$x_\alpha = \{\text{ínf}\, x/l(x) \geqslant \alpha, x < a\},$$

$$y_\alpha = \{\sup x/r(x) \geqslant \alpha, x > b\}$$

para cada $\alpha \in (o, 1]$.*Necesitamos probar que* $^\alpha A = [x_\alpha, y_\alpha]$ *para todo* $\alpha \in (o, 1]$ *Para cada* $x_0 \in^\alpha A$, *si* $x_0 < a$, *entonces* $l(x_0) = A(x_0) \geqslant \alpha$. *Esto es,* $x_0 \in \{x \mid l(x) \geqslant \alpha, x < a\}$ *y consecuentemente,*$x_0 \geqslant \{\text{ínf}\, x/l(x) \geqslant \alpha, x < a\} = x_\alpha$. *Si* $x_0 > b$, *entonces* $r(x_0) = A(x_0) \geqslant \alpha$; *esto es,*$x_0 \leqslant \{\sup x/r(x) \geqslant \alpha, x > b\} = y_\alpha$. *Obviamente,* $x_\alpha \leqslant a$ *y* $y_\alpha \geqslant b$;*esto es,* $[a, b] \subseteq [x_\alpha, y_\alpha]$. *En consecuencia,* $x_0 \in [x_\alpha, y_\alpha]$ *y por lo tanto,* $^\alpha A \subseteq [x_\alpha, y_\alpha]$. *Resta probar que* $x_\alpha, y_\alpha \in^\alpha A$. *Por la definición de* x_α, *debe existir una sucesión* $\{x_n\}$ *en* $\{x/l(x) \geqslant \alpha, x < a\}$ *tal que* $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x_\alpha$, *donde* $x_n \geqslant x_\alpha$ *para cualquier* n. *Ya que* l *es continúa por la derecha, tenemos*

$$l(x_\alpha) = l(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} l(x_n).$$

En consecuencia,$x_\alpha \in^\alpha A$ *y se prueba que* $y_\alpha \in^\alpha A$ *de una forma similar.* ■

La implicación del teorema (3.1) es que cada número difuso puede ser representado en la forma de (3.1). En general, esta forma nos permite definir números difusos en una forma por piezas o a trazos, como se ilustra en la figura (3.3).

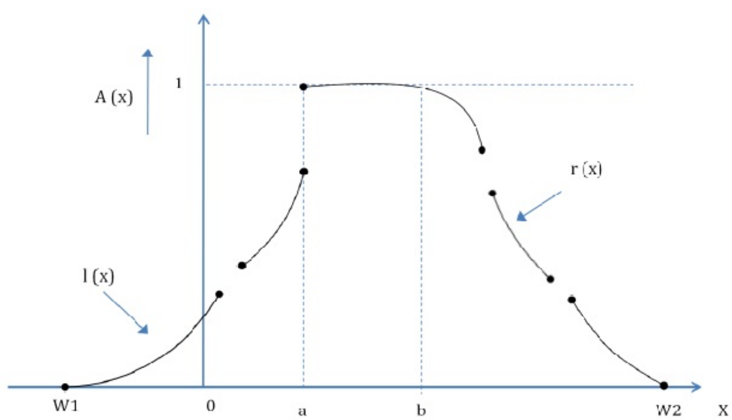


FIGURA 3.3: FORMA GENERAL DE UN NÚMERO DIFUSO EXPRESADO A TROZOS.

EJEMPLO 3.1. *Con un ejemplo, definimos los cuatro números difusos dados en la figura (3.1) en términos de (3.1):*

(a) $w_1 = a = b = w_2 = 1{,}3, l(x) = 0$ *para todo* $x \in (-\infty, 1{,}3), r(x) = 0$ *para todo* $x \in (1{,}3, \infty)$.
(b) $w_1 = a = 1{,}25, b = w_2 = 1{,}35, l(x) = 0$ *para todo* $x \in (-\infty, 1{,}25), r(x) = 0$*para todo* $x \in (1{,}35, \infty)$.
(c) $a = b = 1{,}3, w_1 = 1{,}2, w_2 = 1{,}4,$

$$l(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{para } x \in (-\infty, 1{,}2) \\ \textit{10(x-1.3)+1} & x \in [1{,}2, 1{,}3) \end{array} \right\}$$

$$r(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \textit{10(1.3-x)+1} & x \in (1{,}3, 1{,}4] \\ 0 & \textit{para } x \in (-\infty, 1{,}2) \\ \textit{10(x-1.3)+1} & x \in (1{,}4, \infty) \end{array} \right.$$

(d) $a = 1.28,\ b = 1.32,\ w_1 = 1{,}2, w_2 = 1{,}4,$

$$l(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{para } x \in (-\infty, 1{,}2) \\ \textit{12.5(x-1.28)+1} & x \in [1{,}2, 1{,}28) \end{array} \right\}$$

$$r(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \textit{12.5(1.32-x)+1} & x \in (1{,}32, 1{,}4] \\ 0 & x \in (1{,}4, \infty) \end{array} \right\}$$

Observe que (3.1) es además capaz de expresar números de los tipos mostrados en la figura (3.2c) y (3.2d). Por ejemplo, el número difuso por el cual expresamos el concepto lingüístico muy largo como se defino en la figura (3.4), esto es expresado en términos de (3.1) como sigue:
$a = 90,\ b = 100,\ w_1 = 77{,}5, w_2 = 100,$

$$l(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{para } x \in (-\infty, 77{,}5) \\ \textit{0.08(x-90)+1} & x \in [77{,}5, 90) \end{array} \right.$$

.

$r(x) = 0$ *para* $x \in (100, \infty)$

Usando números difusos, podemos definir el concepto de una cardinalidad para conjuntos difusos que son definidos sobre conjuntos universales finitos. Dado un conjunto difuso A sobre definido en un conjunto universal finito X, su cardinalidad difusa, $|\widetilde{A}|$, *el cual es número difuso definido sobre* $\mathbb{N}$ *por la fórmula*

$$|\widetilde{A}|(|^{\alpha}A|) = \alpha$$

para todo $\alpha \in \bigwedge(A)$.

§3.1. Variables Lingüísticas

El concepto de números difuso juega un rol fundamental en la formulación de dos variables difusas cuantitativas. Estas son variables de naturaleza difusa. Adicionalmente los números difusos representan conceptos lingüísticos, tales como muy pequeño, pequeño, mediano y así son interpretados en un contexto particular,la resultante construcción es llamada variable lingüística. Las variables lingüísticas de esta naturaleza son expresadas en términos lingüísticos interpretados como números difusos específicos los cuales son definidos en términos de una variable de base, los valores de estos números reales con un rango especifico. Una variable base es una variable en sentido clásico, ejemplificada por las variables físicas (edad, rendimiento, salario, probabilidad, rentabilidad, entre otros). En una variable lingüística, los términos lingüísticos representan valores aproximados.
Cada variable lingüística es totalmente caracterizada por una quintuple (v, T, X, g, m) en la cual v es el nombre de la variable, T es el conjunto de los términos lingüísticos de v que se refiere a una variable base con valores rango en un conjunto universal X, g es una regla sintáctica (o gramática) para generar los términos lingüísticos, y m es una regla semántica que asigna a cada termino lingüístico $t \in T$ *su significado m(t) el cual es un conjunto difuso sobre X (es decir* $m = T \longrightarrow f(x)$*).*

Ejemplo 3.2. *Supóngase que se tiene una variable lingüística, cuyo nombre es rendimiento. Esta variable expresa el rendimiento (La cual es la variable base en este ejemplo) de una area orientada (una persona, maquina,organización, método, entre otros)en un contexto dado por cinco términos lingüísticos básicos muy pequeño, pequeño, medio, grande, muy grande, como otros términos lingüísticos generados por una regla sintáctica (no específicamente mostrada en la (fig 3.4) tal como no muy pequeño,largo o muy largo, muy muy pequeño y así en adelante. A cada una de las variables lingüísticas básicas se le asigna uno de los cinco términos de los números difusos por una regla semántica, como se muestra en la figura. Los números difusos, donde las funciones de pertenencia tienen una usual forma trapezoidal, son definidos en el intervalo* $[0, 100]$*, el rango de la variable base. Cada uno de estos expresados como restricción difusa de su rango.*

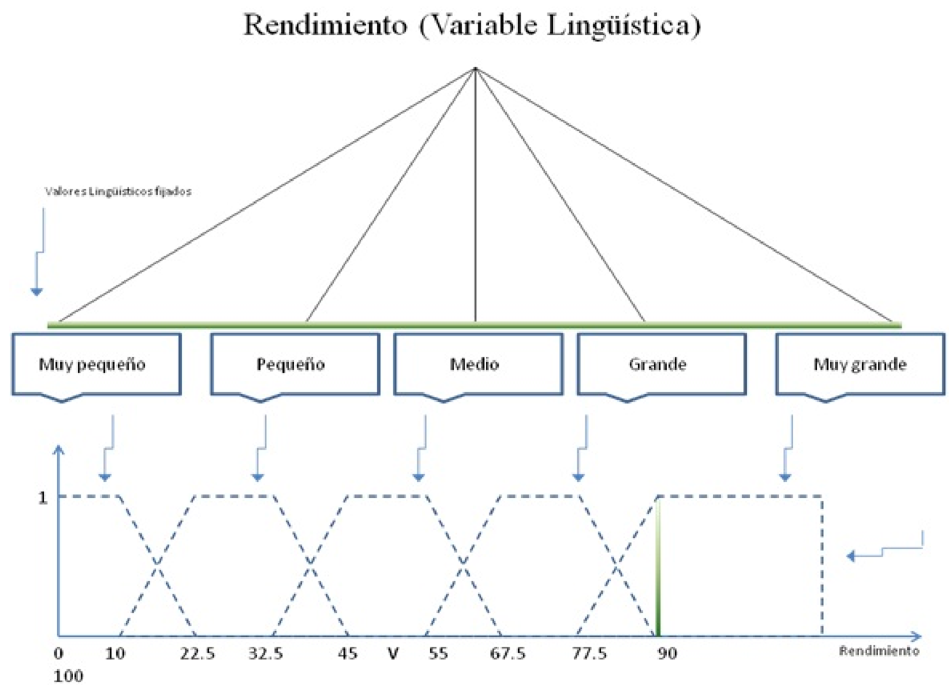


Figura 3.4: Variables Linguisticas.

§3.2. Operaciones aritméticas sobre intervalos

La aritmética difusa está basada en dos propiedades de números difusos:

1. *Cada conjunto y por lo tanto cada número difuso, puede completamente y únicamente ser representados por su $\alpha -$ cortaduras ;*
2. *Las $\alpha -$ cortaduras de cada número difuso son intervalos cerrados de números reales para todo $\alpha \in (0, 1]$.*

Estas propiedades nos permiten definir operaciones aritméticas sobre números difusos en términos de operaciones aritméticas sobre sus $\alpha -$ cortaduras (es decir, operaciones aritméticas sobre intervalos cerrados).Las últimas operaciones están sujetas al análisis de intervalos, una área bien establecida de las matemáticas clásicas: nuestra visión general en esta sección facilita nuestra presentación de aritmética en la siguiente sección.

Sea $*$ denota cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas sobre intervalos cerrados: adición $+$, sustracción $-$, multiplicación $\cdot$, y división $\div$. Entonces,

$$[a,b] \star [d,e] = \{f \star g \backslash \leqslant f \leqslant b, d \leqslant g \leqslant e\}. \tag{3.2}$$

Es una propiedad general de todas las operaciones aritmética dentro de los intervalos cerrados, excepto que $[a,b]/[d,e]$ *no es definido cuando* $0 \in [d,e]$ *esto es, lo que resulta de una operación aritmética dentro de los intervalos cerrados es otra vez un intervalo cerrado.*

Las cuatro operaciones aritméticas en intervalos cerrados son definidas como sigue:

$$[a,b] + [d,e] = [a+d, b+e], \tag{3.3}$$

$$[a,b] - [d,e] = [a-e, b-d], \tag{3.4}$$

$$[a,b] \cdot [d,e] = [\text{mín}(ad, ae, bd, be), \text{máx}(ad, ae, bd, be)], \tag{3.5}$$

y, probando que el $0 \not\ni [d,e]$

$$\begin{aligned} [a,b]/[d,e] &= [a,b] \cdot [1/e, 1/d] \\ &= [\text{mín}(a/d, a/e, b/d, b/e), \text{máx}(a/d, a/e, b/d, b/e) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Note que un número real r *también puede ser considerado como un intervalo especial(degenerado)*$[r,r]$.

Cuando uno de los intervalos en (3.3)-(3.6) es degenerado nosotros obtenemos una operación especial; cuando ambos de ellos son degenerados, nosotros obtenemos el estándar de aritmética en los números reales. Las operaciones aritméticas dentro de los intervalos cerrados satisfacen algunas propiedades útiles.Generarlas dejan $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2], C = [c_1, c_2], \mathbf{0} = [0,0], \mathbf{1} = [1,1]$. *Usando estos símbolos las propiedades son formuladas como sigue:*

1. $A + B = B + A$,
   $A \cdot B = B \cdot A$ *(Conmutativa).*

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
   $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ *(Asociativa).*

3. $A = 0 + A = A + 0$,
   $A = 1 \cdot A = A \cdot 1$ *(Identidad).*

4. $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot$ *(Subdistributiva).*

5. $Si b \cdot c \geqslant 0 \forall b \in B \quad y \quad c \in C, entonces A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(Distributiva).*
   De tal manera, si $A = [a, a], entonces a \cdot (B + C) = a \cdot B + a \cdot C$.

6. $0 \in A - Ay1 \in A/A$.

7. $Si \quad A \subseteq E \quad y \quad B \subseteq F, entonces:$

$$A + B \subseteq E + F,$$

$$A - B \subseteq E - F,$$

$$A \cdot B \subseteq E \cdot F,$$

$$A/B \subseteq E/F (Inclusin \quad Monotonocidad).$$

La mayoría de estas propiedades se deducen directamente de (3.3) a (3.6). Como un ejemplo, probemos solo las propiedades menos obvias de subdistributividad y distributividad. Primero, tenemos

$$\begin{aligned} A.(B + C) &= \{a.(b + c) | a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &= \{a.b + a.c | a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &\subseteq \{a.b + á.c | á \in A, b \in B, c \in C\} \\ &= A.B + A.C \end{aligned}$$

De acá,

$$A.(B + C) \subseteq A.B + A.C$$

Asumamos ahora, sin perdida de generalidad, que $b_1 \geqslant 0$ *y . Entonces, tenemos que considerar los siguientes tres casos:*

1. *Si* $a_1 \geqslant 0$, *entonces*

$$\begin{aligned} A.(B+C) &= [a_1.(b_1+c_1), a_2.(b_2+c_2)] \\ &= [a_1.b_1, a_2.b_2] + [a_1.c_1 + a_2.c_2] \\ &= A.B + A.C \end{aligned}$$

2. *Si* $a_1 < 0$ *y* $a_2 \leqslant 0$, *entonces* $-a_2 \geqslant 0, (-A) = [-a_2, -a_1]$, *y*

$$(-A).(B+C) = (-A).B + (-A).C$$

De acá, A.(B+C) = A.B + A.C.

3. *Si* $a_1 < 0$ *y* $a_2 > 0$, *entonces*

$$\begin{aligned} A.(B+C) &= [a_1.(b_2+c_2), a_2.(b_2+c_2)] \\ &= [a_1.b_2, a_2.b_2] + [a_1.c_2 + a_2.c_2] \\ &= A.B + A.C \end{aligned}$$

Para mostrar que la distributividad no se cumple en general,
Sea $A = [0,1], B = [1,2], C = [-2,-1]$.
Entonces, $A.B = [0,2], A.C = [-2,0], B+C = [-1,1]$, *y*

$$A.(B+C) = [-1,1] \subset [-2,2] = A.B + A.C$$

§3.3. Operaciones Aritméticas de Números Difusos

En esta sección, se presentan 2 métodos para desarrollar la aritmética difusa. Un método es basado en los intervalos aritméticos lo cual es explicado en la sección 3.2. El otro método emplea el principio de extensión, por lo cual las operaciones en los números reales son operaciones extendidas a los numeros difusos. Se asume en esta sección que los números difusos son representados por funciones continuas de números asociados. Sean A y B números difusos y sea $\star$ *alguna de las 4 operaciones aritméticas básicas. Entonces se definen un conjunto difuso en* $\mathbb{R}$, $A \star B$ *para definir su* $\alpha - cortadura$, ${}^{\alpha}(A \star B)$ *como*

$$^{\alpha}(A) =^{\alpha} A \star^{\alpha} B \tag{3.7}$$

para algún $\alpha \in (0,1]$.*(Cuando* $\star = /$*, claramente, nosotros tenemos que requerir que* $0 \ni^{\alpha} B$ *para todo* $\alpha \in (0,1]$*) Del teorema 2.5* $A \star B$ *puede ser expresado como*

$$A \star B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (A \star B) \tag{3.8}$$

Desde ${}^{\alpha}(A \star B)$ *es un intervalo cerrado para cada* $\alpha \in (0,1]$ *y A,B son números difusos,* $A \star B$ *es también un número difuso.*

EJEMPLO 3.3. *Un ejemplo empleando (3.7 y 3.8) considera 2 formas triangulares en los números difusos A y B definidas en lo siguiente:*

$$B(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & para\ x \leqslant 1\ y\ x > 5 \\ (x\text{-}1)/2 & para\ 1 < x \leqslant 3 \\ (5-x)/2 & para\ 3 < x \leqslant 5 \end{array} \right\}$$

$$A(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & para\ x \leqslant -1\ y\ x > 3 \\ (x+1)/2 & para\ -1 < x \leqslant 1 \\ (3-x)/2 & para\ 1 < x \leqslant 3 \end{array} \right\}$$

Sus α*-cortadura son:*

$${}^{\alpha}A = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$$

$${}^{\alpha}B = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$$

Usando (3.3) a (3.7) se obtiene:

${}^{\alpha}(A + B) = [4\alpha, 8 - 4\alpha]$ *para* $\alpha \in (0,1]$

${}^{\alpha}(A - B) = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha]$ *para* $\alpha \in (0,1]$

$${}^{\alpha}(A.B) = \left\{ \begin{array}{l} [-4\alpha^2 + 12\alpha - 5, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15]\ para\ \alpha \in (0,,5] \\ [4\alpha^2 - 1, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15] para \alpha \in (,5,1] \end{array} \right\}$$

$${}^{\alpha}(A/B) = \left\{ \begin{array}{l} [(2\alpha - 1)/(2\alpha + 1), /(3 - 2\alpha)/(2\alpha + 1)]\ para\ \alpha \in (0,,5] \\ [(2\alpha - 1)/(5 - 2\alpha), (3 - 2\alpha)/(2\alpha + 1)]\ para\ \alpha \in (,5,1] \end{array} \right\}$$

Los números difusos resultantes son entonces:

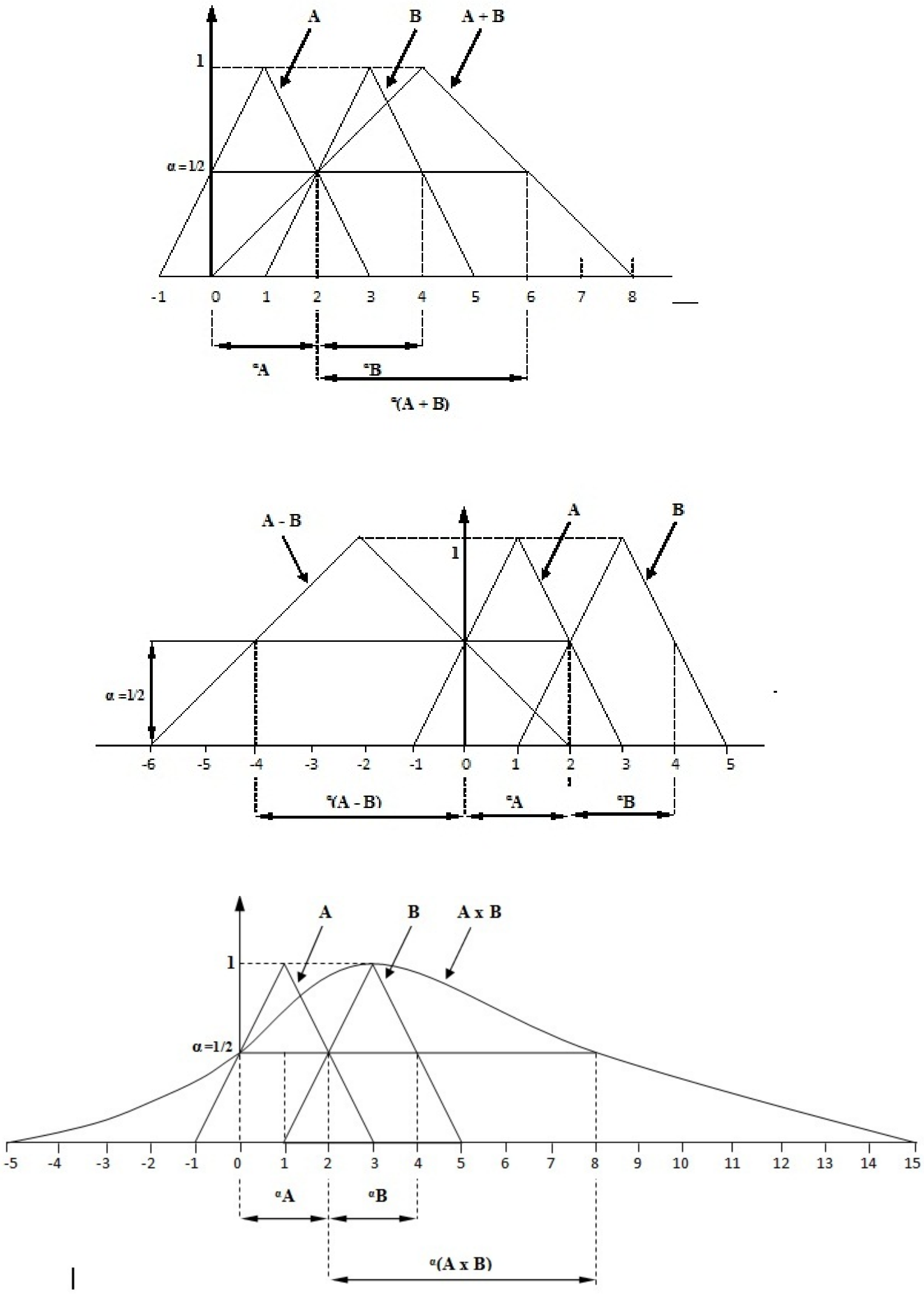
$$(A+B)(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & para\ x \leqslant 0\ y\ x > 8 \\ (x)/4 & para\ 0 < x \leqslant 4 \\ (8-x)/4 & para\ 4 < x \leqslant 8, \end{array} \right\}$$

$$(A-B)(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & para\ x \leqslant -6\ y\ x > 2 \\ (x+6)/4 & para\ -6 < x \leqslant -2 \\ (2-x)/4 & para\ -2 < x \leqslant 2, \end{array} \right\}$$

$$(A.B)(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & para\ x < -5\ y\ x \geqslant 15 \\ [3-(4-x)^{1/2}]/2 & para\ -5 \leqslant x < 0 \\ (1+x)^{1/2}/2 & para\ 0 \leqslant x < 3 \\ [4-(1+x)^{1/2}/2] & para\ 3 \leqslant x < 15, \end{array} \right\}$$

$$(A/B)(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & para\ x < -1\ y\ x \geqslant 3 \\ (x+1)/(2\text{-}2x) & para\ -1 \leqslant x < 0 \\ (5x+1)/(2x+2) & para\ 0 \leqslant x < 1/3 \\ (3-x)/(2x+2) & para\ 1/3 \leqslant x < 3. \end{array} \right\}$$

Las 4 operaciones aritméticas interpretadas en este ejemplo son ilustradas en la figura (3.5)



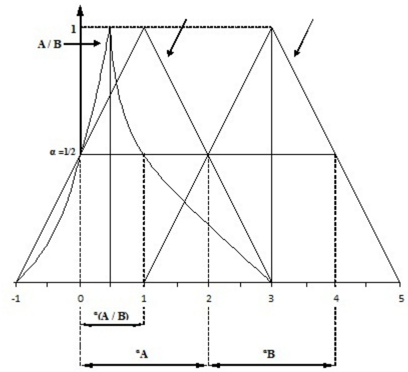


FIGURA 3.5:ILUSTRACION DE OPERACIONES ARITMÉTICAS DE NUMEROS DIFUSOS.

Ahora se procederá con el segundo método para desarrollar la aritmética difusa, el cual está es basado en el principio de extensión. Empleando estos principios, operaciones aritmética estándar en números reales son extendidas para números difusos. Sea $\star$ denota alguna de las 4 operaciones aritméticas básicas y sea A,B denota números difusos. Entonces definimos el conjunto difuso en $\mathbb{R}$, $A \star B$, por la ecuación

$$(A \star B)(z) = \sup_{z=x\star y} \min[A(x), B(y)] \tag{3.9}$$

para todo $z \in \mathbb{R}$. Más específicamente, lo definimos para todo $z \in \mathbb{R}$:

$$(A + B)(z) = \sup_{z=x+y} \min[A(x), B(y)] \tag{3.10}$$

$$(A - B)(z) = \sup_{z=x-y} \min[A(x), B(y)] \tag{3.11}$$

$$(A.B)(z) = \sup_{z=x.y} \min[A(x), B(y)] \tag{3.12}$$

$$(A/B)(z) = \sup_{z=x/y} \min[A(x), B(y)] \tag{3.13}$$

Aunque $A\star$ B definida por (3.9) es un conjunto difuso en $\mathbb{R}$, nosotros tenemos que mostrar que este es un número difuso para cada $\star \in \{+, -, ., /\}$. Esto es un subconjunto del teorema siguiente.

TEOREMA 3.2. *Sea $\star \in \{+, -, ., /\}$ y sea A,B números difusos continuos. Entonces el conjunto difuso $A \star B$ definido por (3.9) es un número difuso continúo.*

Prueba: Primero probemos (3.7) para mostrar que $^{\alpha}(A{\star}B)$ *es un intervalo cerrado para todo* $\alpha \in (0,1]$*. Para algún* $z \in^{\alpha} A \star^{\alpha} B$*,allí existe algún* $x_0 \in^{\alpha}$ *y* $y_0 \in^{\alpha}$ *tal que* $z = x_0 \star y_0$*. Esto es ,*

$$\begin{aligned}(A \star B)(z) &= \sup_{z=x\star y} \min[A(x), B(y)] \\ &\geqslant \min[A(x_0), B(y_0)] \\ &\geqslant \alpha\end{aligned}$$

De acá, $z \in^{\alpha} (A \star B)$ *y consecuentemente,*

$$^{\alpha}A \star^{\alpha} B \subseteq^{\alpha} (A \star B)$$

para algún $z \in^{\alpha} (A \star B)$ *, nosotros tenemos*

$$(A \star B)(z) = \sup_{z=x*y} \min[A(x), B(y)] \geqslant \alpha.$$

Además de algún $n > [1/\alpha] + 1$ *donde* $[1/\alpha]$ *denota el número más grandes que es menor o igual que* $1/\alpha$*,allí existen* x_n *y* y_n *tales que* $z = x_n \star y_n$ *y*

$$\min[A(x_n), B(y_n)] > \alpha - \frac{1}{n}$$

Esto es, $x_n \in^{\alpha-1/n} A, y_n \in^{\alpha-1/n} B$ *y nosotros quizás consideremos 2 sucesiones* x_n *y* y_n*. A partir de*

$$\alpha - \frac{1}{n} \leqslant \alpha - \frac{1}{n+1},$$

tenemos

$$^{\alpha-\frac{1}{n+1}}A \subseteq^{\alpha-\frac{1}{n}} A,^{\alpha-\frac{1}{n+1}B} \subseteq^{\alpha-\frac{1}{n}B} .$$

De acá x_n *y* y_n *caen dentro de algunos* $^{\alpha-1/n}A$ *y* $^{\alpha-1/n}B$ *respectivamente. Dado que estos los últimos son intervalos cerrados* x_n *y* y_n *son sucesiones acotadas. Además allí existe una subsucesión convergente* $x_{n,i}$ *tal que* $x_{n,i} \to x_0$*. Para la correspondiente subsucesión* $y_{n,i}$ *también existe una subsucesión* $y_{n,i}$ *tal que* $y_{n,i,j} \to y_0$*. Si tenemos la siguiente subsucesión* $x_{n,i,j}$*, desde* $x_{n,i}$*, entonces* $x_{n,i,j} \to x_0$*. Por lo tanto tenemos 2 subcesiones* $x_{n,i,j}$ *y* $y_{n,i,j}$*, tal que* $x_{n,i,j} \to x_0$*,* $y_{n,i,j} \to y_0$ *y* $x_{n,i,j} \star y_{n,i,j} = z$*. Ahora*

,como $*$ es continúa,

$$\begin{aligned} z &= \lim_{j\to\infty} x_{n,i,j} \star y_{n,i,j} \\ &= (\lim_{j\to\infty} x_{n,i,j}) \star (\lim_{j\to\infty} y_{n,i,j}) \\ &= x_0 \star y_0. \end{aligned}$$

Además, como $A(x_{n,i,j}) > \alpha - \frac{1}{n_{i,j}}$ *y* $B(y_{n,i,j}) > \alpha - \frac{1}{n_{i,j}}$,

$$A(x_0) = A(\lim_{j\to\infty} x_{n,i,j}) = \lim_{j\to\infty} A(x_{n,i,j}) \geqslant \lim_{j\to\infty}(\alpha - \frac{1}{n_{i,j}}) = \alpha$$

y

$$B(y_0) = A(\lim_{j\to\infty} y_{n,i,j}) = \lim_{j\to\infty} B(y_{n,i,j}) \geqslant \lim_{j\to\infty}(\alpha - \frac{1}{n_{i,j}}) = \alpha$$

No obstante, allí existe $x_0 \in^\alpha A, y_0 \in^\alpha B$ *tal que* $z = x_0 \star y_0$. *Esto es* $z \in^\alpha A \star^\alpha B$. *Por lo tanto,*

$$^\alpha(A \star B) \subseteq^\alpha A \star^\alpha B$$

y consecuentemente,

$$^\alpha(A \star B) =^\alpha A \star^\alpha B$$

Ahora probemos que $A \star B$ *es continúa Por teorema 1, La función de membresia de* $A\star B$ *debe ser la forma general de la figura (3.3) Asumamos que* $A\star B$ *no es continúa en* z_0*; Esto es,*

$$(A \star B)(z_0) = \sup_{z_0 = x\star y} \text{mín}[A(x), B(y)]$$

Entonces allí existe x_0 *y* y_0 *tal que* $z_0 = x_0 \star y_0$ *y*

$$\lim_{z\to z_{0-}} (A \star B)(z) < \text{mín}[A(x_0), B(y_0)]. \tag{3.14}$$

Como la operación $\star \in \{+, -, ., /\}$ *es monótona con respecto a el primero y segundo argumento, respectivamente, tenemos podemos encontrar 2 sucesiones* x_n *y* y_n *tal que* $x_n \to x_0$ *y* $y_n \to y_0$ *como* $n \to \infty$ *y* $x_n \star y_n < z_0$ *para algún n.Sea* $zn = x_n \star y_n$*; entonces* $z_n \to z_0$ *cuando* $n \to \infty$. *Además*

$$\lim_{z\to z_{0-}} (A \star B)(z) = \lim_{n\to\infty} (A \star B)(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{z_n = x\star y} \text{mín}[A(x_0), B(y_0)]$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \min[A(x_n), B(y_n)] = \min[A(\lim_{n\to\infty} x_n, B(\lim_{n\to\infty} y_n)] = \min[A(x_0), B(y_0)]$$

Esto contradice (3.14) y, Por lo tanto $A \star B$ debe ser un número difuso continuo. Esto completa la prueba. ■

Capítulo 4

Reticulado y Ecuaciones Difusas

§4.1. Reticulado de Números Difusos

También es conocido, como el conjunto $\mathbb{R}$ *de los números reales linealmente ordenado. Para cada par de números reales,* x *y* y*, cualesquiera* $x \leqslant y$ *o* $y \leqslant x$*. El par* $(\mathbb{R}, \leqslant)$ *es un reticulado, lo cual es también expresado en términos de 2 operaciones,*

$$\text{mín}(x,y) = \begin{cases} x & \textit{para } x \leqslant y \\ y & \textit{para } y \leqslant x \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\text{máx}(x,y) = \begin{cases} y & \textit{para } x \leqslant y \\ x & \textit{para } y \leqslant x \end{cases} \tag{4.2}$$

Para cada $x, y \in \mathbb{R}$*. El orden lineal de números reales no es extendido para números difusos, pero nos muestran en esta sección que los números difusos pueden ser parcialmente ordenado en un natural y que estas particiones ordenada forman un reticulado distributivo. Para presentar un orden coherente de números difusos, primero extendemos las operaciones reticuladas* mín *y* máx *en números reales, también definida por (4.1) y (4.2) para las correspondientes operaciones de números difusos, MIN y MAX.*

Para cualquiera de los 2 números difusos A y B, lo definimos

$$MIN(A,B)(z) = \sup_{z=\text{mín}(x,y)} \text{mín}[A(x), B(y)] \tag{4.3}$$

$$MAX(A,B)(z) = \sup_{z=\text{máx}(x,y)} \text{mín}[A(x), B(y)] \tag{4.4}$$

para todo $z \in \mathbb{R}$*. Observe que los símbolos MIN y MAX, la cual denota las operaciones presentada en los números difuso,de deben distinguir de los símbolos* mín *y* máx *lo cual denota las operaciones usual de mínimo y máximo en número reales, respectivamente.Como el* mín *y* máx *son operaciones continúas, esto implica de (4.3), (4.4) y la prueba de el teorema 2.1 que MIN(A,B) y MAX(A,B) son números difusos. Esto es importante para realizar las operaciones MIN y MAX que son totalmente diferente de la intersección y unión difusa estándar.Esta diferencia es ilustrada en la (figura 4.1), donde*

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x < -2 \textit{ y } x > 3 \\ (x+2)/3 & \textit{para } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ (4-x)/3 & \textit{para } 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x < 1 \textit{ y } x > 3 \\ x-1 & \textit{para } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3-x & \textit{para } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

$$MIN(A,B)(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x < -2 \textit{ y } x > 3 \\ (x+2)/3 & \textit{para } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ (4-x)/3 & \textit{para } 1 < x \leqslant 2{,}5 \\ 3-x & \textit{para } 2{,}5 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

$$MAX(A,B)(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{para } x < 1 \textit{ y } x > 4 \\ x-1 & \textit{para } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3-x & \textit{para } 2 < x \leqslant 2{,}5 \\ (4-x)/3 & \textit{para } 2{,}5 < x \leqslant 4 \end{array} \right\}$$

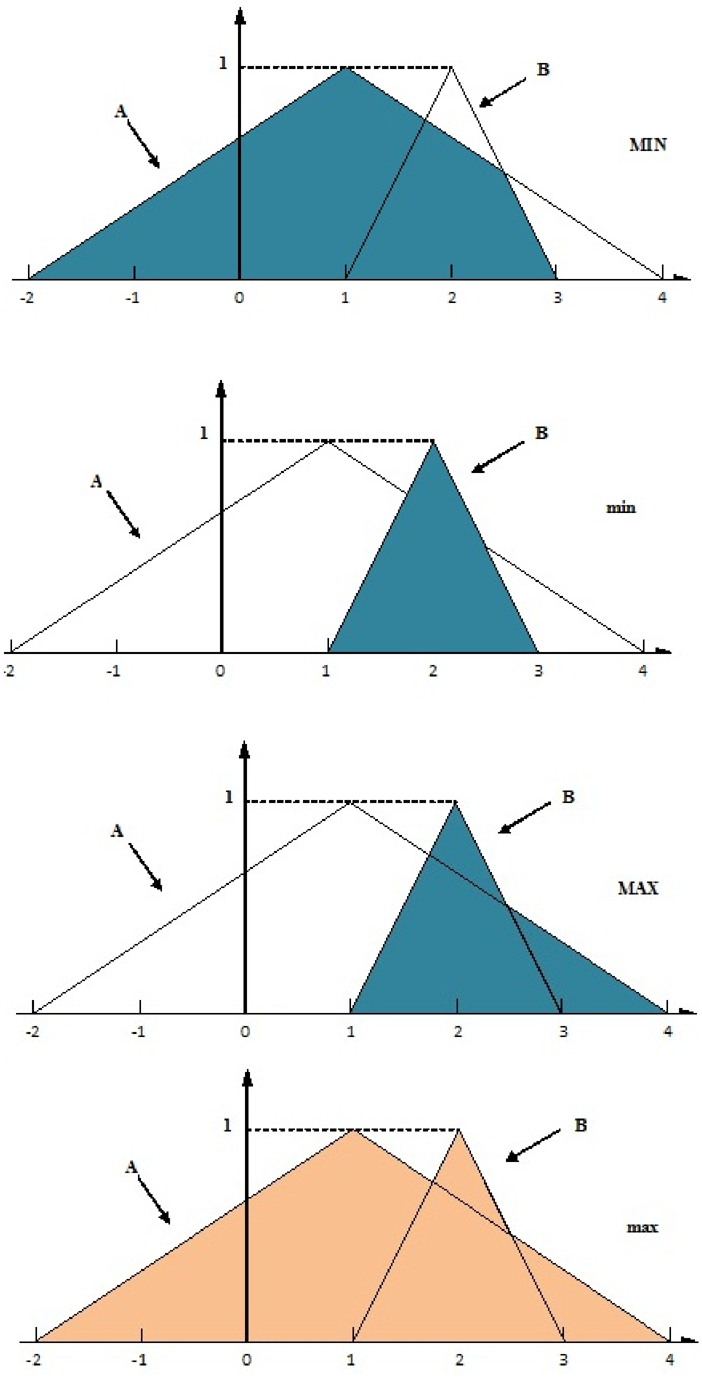


FIGURA 4.1:COMPARACION DE LAS OPERACIONES MIN,min,MAX,min.

Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todos los números difusos. Entonces, operaciones MIN y MAX claramente son funciones de la forma $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$. El siguiente teorema, establece operaciones básicas de estas operaciones, garantizando que la tripleta $\langle \mathcal{R}.MIN, MAX \rangle$ es un reticulado distributivo en la cual MIN y MAX representan el encuentro y la unión, respectivamente.

Teorema 4.1. *Sea MIN y MAX operaciones binarias en $\mathcal{R}$ definidas por (4.3) y (4.4), respectivamente. Entonces para cualquier $A, B, C \in \mathcal{R}$ se tiene las siguientes propiedades:*

a) $MIN(A, B) = MIN(B, A)$,
$MAX(A, B) = MAX(B, A)$ *(conmutativa)*

b) $MIN[MIN(A, B), C] = MIN[A, MIN(B, C)]$,
$MAX[MAX(A, B), C] = MAX[A, MAX(B, C)]$ *(asociativa)*

c) $MIN(A, A) = A$,
$MAX(A, A) = A$*(idempotencia)*

d) $MIN[A, MAX(A, B) = A$,
$MAX[A, MIN(A, B)] = A$ *(absorción)*

e) $MIN[A, MAX(B, C)] = MAX[MIN(A, B), MIN(A, C)]$,
$MAX[A, MIN(B, C)] = MIN[MAX(A, B), MAX(A, C)]$ *(distributiva)*

Prueba: b)Para todo $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
MIN[A, MIN(B,C)](z) &= \sup_{z=\text{mín}(x,y)} [A(x), MIN(B,C)(y)] \\
&= \sup_{z=\text{mín}(x,y)} \text{mín}[A(x), \sup_{y=\text{mín}(u,v)} \text{mín}[B(u), C(v))]] \\
&= \sup_{z=\text{mín}(x,y)} \sup_{y=\text{mín}(u,v)} \text{mín}[A(x), B(u), C(v))] \\
&= \sup_{z=\text{mín}(x,u,v)} \text{mín}[A(x), B(u), C(v))] \\
&= \sup_{z=\text{mín}(s,v)} \sup_{s=\text{mín}(x,u)} \text{mín}[A(x), B(u), C(v))] \\
&= \sup_{z=\text{mín}(s,v)} \text{mín}[\sup_{s=\text{mín}(x,u)} \text{mín}[A(x), B(u), C(v)] \\
&= \sup_{z=\text{mín}(s,v)} \text{mín}[(A,B)(s), C(v))] \\
&= MIN[MIN(A,B), C](z)
\end{aligned}$$

La prueba de la asociatividad de MAX es análoga.
d)Para todo $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
MIN[A, MAX(A,B)](z) &= \sup_{z=\text{mín}(x,y)} [A(x), MAX(A,B)(y)] \\
&= \sup_{z=\text{mín}(x,y)} \text{mín}[A(x), \sup_{y=\text{máx}(u,v)} \text{mín}[A(u), B(v))]] \\
&= \sup_{z=\text{mín}(x,\text{máx}(u,v)} \text{mín}[A(x), A(u), B(v))]
\end{aligned}$$

Sea M el lado derecho de la ecuación. Como B es un número difuso, allí existe $v_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $B(v_0) = 1$. *Por* $z = \text{mín}[z, \text{máx}(z, v_0)]$, *tenemos*

$$M \geqslant \text{mín}[A(z), A(z), B(v_0)] = A(z)$$

Por otra parte como $z = \text{mín}[x, \text{máx}(u,v)]$, *tenemos*

$$\text{mín}(x,u) \leqslant z \leqslant x \leqslant \text{máx}(x,u).$$

Por la convexidad de números difusos,

$$\begin{aligned} A(z) &\geqslant \text{mín}[A[\text{mín}(x,u)], A[\text{máx}(x,u)]] \\ &= \text{mín}[A(x), A(u)] \\ &\geqslant \text{mín}[A(x), A(u), B(v)]. \end{aligned}$$

Por tanto, $M = A(z)$ y, consecuentemente $MIN[A, MAX(A,B)] = A$
La prueba para la propiedad de absorción es similar
Para cualquier $z \in \mathbb{R}$ este fácilmente es visto:

$$IN[A, MAX(B,C)](z) = \sup_{z=\text{mín}(x,\text{máx}(u,v))} [A(x), (B(u), C(v)] \tag{4.5}$$

$$MAX[MIN(A,B), MIN(A,C)](z) = \sup_{z=\text{máx}[\text{mín}(m,n),\text{mín}(s,t)]} \text{mín}[A(m), B(n), C(t)] \tag{4.6}$$

Para probar que (4.5) y (4.6) son iguales,primero mostremos que $E \subseteq F$, donde

$$\begin{aligned} E &= \{\text{mín}[A(x), B(u), C(v)] | \text{mín}[x, \text{máx}(u,v)] = z\}, \\ F &= \{\text{mín}[A(m), B(n), A(s), C(t)] | \text{máx}[\text{mín}(m,n), \text{mín}(s,t)] = z\}. \end{aligned}$$

Para todo $a = \text{mín}[A(x), B(u), C(v)]$ tal que $\text{mín}[x, \text{máx}(u,v)] = z$ es decir, $a \in E$, allí existe $m = s = x, n = u,$ y $t = v$ tal que

$$\begin{aligned} \text{máx}[\text{mín}(m,n), \text{mín}(s,t)] &= \text{máx}[\text{mín}(x,u), \text{mín}(x,v)] \\ &= \text{mín}[x, \text{máx}(u,v)] = z; \end{aligned}$$

De acá, $a = \text{mín}[A(x), B(u), A(x), C(v)] = \text{mín}[A(m), B(n), A(s), C(t)]$. Esto es, $a \in F$ y consecuentemente, $E \subseteq F$. Esto significa que (4.6) siendo más grande es igual a (4.5). Ahora mostremos que estas 2 funciones son iguales para cualquier $b \in F$, allí existe un $a \in F$ tal que $b \leqslant a$.

Para algún $b \in F$, allí existe m,n,s y t tal que

$$\text{máx}[\text{mín}(m,n), \text{mín}(s,t)] = z,$$
$$b = \text{mín}[A(m), B(n), A(s), C(t)].$$

De acá, tenemos

$$z = \text{mín}[\text{máx}(s,m), \text{máx}(s,n), \text{máx}(t,m), \text{máx}(t,n)]$$

Sea $x = \text{mín}[\text{máx}(s,m), \text{máx}(s,n), \text{máx}(t,m)]$, *u=n y v=t. Entonces tenemos que* $z = \text{mín}[x, \text{máx}(u,v)]$. *Por otra parte, esto es visto*

$$\text{mín}(s,m) \leqslant x \leqslant \text{máx}(s,m).$$

Por la convexidad de A,

$$\begin{aligned} A(x) &\geqslant \text{mín}[A(\text{mín}(s,m)), A(\text{máx}(s,m))] \\ &= \text{mín}[A(s), A(m)]. \end{aligned}$$

De acá, existe $a = \text{mín}[A(x), B(u), C(v)]$ *con* $z = \text{mín}[x, \text{máx}(u,v)]$
Es decir, $a \in E$, *y*

$$a = \text{mín}[A(x), B(u), C(v)] \geqslant \text{mín}[A(s), A(m), B(n), C(t)] = b.$$

Esto es para algún $b \in F$ *allí existe* $a \in E$ *tal que* $b \leqslant a$. *Esto implica que*

$$\sup F \leqslant \sup E.$$

Esta desigualdad, junto con el resultado previo, garantiza que (4.5) y (4.6) son iguales. Esto concluye la prueba de la primera ley distributiva.
La prueba de la segunda ley es análoga.
El reticulado $\langle \mathcal{R}, MIN, MAX \rangle$ *también puede ser expresado como el par* $\langle \mathcal{R} \preceq \rangle$, *donde* $\preceq$ *es un orden parcial definido como:*

$A \preceq B$ *sii MIN(A,B)=A o, alternativamente*
$A \preceq B$ *sii MAX(A,B)=B*

Para algún $A, B \in \mathcal{R}$*.También podemos definir el orden parcial en términos de la relevante* α*-cortadura:*

$A \preceq B$ *sii* $\text{mín}({}^{\alpha}A,{}^{\alpha}B) ={}^{\alpha} A$ *o, alternativamente*
$A \preceq B$ *sii* $\text{máx}({}^{\alpha}A,{}^{\alpha}B) ={}^{\alpha} B$

Para algún $A, B \in \mathcal{R}$ *y para todo* $\alpha \in (0, 1]$ *donde* ${}^{\alpha}A$ *y* ${}^{\alpha}B$ *son intervalos cerrados (digamos,* ${}^{\alpha}A = [a_1, a_2],{}^{\alpha} B = [b_1, b_2]$*.) Entonces,*

$$\text{mín}({}^{\alpha}A,{}^{\alpha}B) = [\text{mín}(a_1, b_1), \text{mín}(a_2, b_2)],$$

$$\text{máx}({}^{\alpha}A,{}^{\alpha}B) = [\text{máx}(a_1, b_1), \text{máx}(a_2, b_2)].$$

Si nosotros definimos el orden parcial de intervalos de la manera usual,Esto es,

$$[a_1, a_2] \leqslant [b_1, b_2] \qquad sii \qquad a_1 \leqslant b_1 \qquad y \qquad a_2 \leqslant b_2$$

Entonces para algún $A, B \in \mathcal{R}$*, tenemos*

$$A \preceq B \qquad sii \qquad {}^{\alpha}A \leqslant{}^{\alpha} B$$

para todo $\alpha \in (0, 1]$*.*

EJEMPLO 4.1. *Los 2 números difusos, A y B en la (figura 3.4) no so comparable. Sin embargo, valores de las variables lingüísticas en mayores aplicaciones son definidas por números difusos que son comparable.*

EJEMPLO 4.2. *El valor de variable lingüística "función o representación.*^{en} *la (figura 3.4) forman una cadena:*

$$muypequeo \preceq pequeo \preceq mediano \preceq largo \preceq muylargo$$

Aunque el conjunto $\mathcal{R}$ *no es linealmente ordenado, contrario a el conjunto* $\mathbb{R}$*, allí son algunos subconjuntos de* $\mathcal{R}$ *que son linealmente ordenado.Como subconjuntos son las mayores prevalentes en aplicaciones comunes de teoría de conjuntos difuso.*

§4.2. Ecuaciones Difusas

Un area de la teoría de conjuntos difusos en la cual números difusos y operaciones aritméticas en números difusos juegan un rol fundamental son ecuaciones difusas. Estas son ecuaciones en la cual coeficientes y números desconocidos son difusos, y las formulas son construidas por operaciones de la aritmética difusa. Tales ecuaciones tienen un gran potencial de aplicabilidad. Desafortunadamente, sus teorías no han sido suficientemente desarrolladas, además de que algunos de los trabajos publicados en esta área son controversiales. Debido a la falta de una teoría bien establecida de ecuaciones difusas, solamente se presentarán algunas propiedades de ecuaciones difusas de dos clases muy sencillas

$A + X = B$ *y* $A.X = B$ *donde* A *y* B *son números difusos y* X *es un número difuso desconocido para el cual cualquiera de las ecuaciones vaya a ser satisfecha.*

§4.2.1. Ecuación $A + X = B$

La dificultad de solventar estas ecuaciones difusas es causada por el hecho que $X = B - A$ *no es la solución. Para ver esto consideraremos 2 intervalos cerrados* $A = [a_1, a_2]$ *y* $B = [b_1, b_2]$ *la cual pueden ser vista como un número especial difuso. Entonces* $B - A = [b_1 - a_2, b_2 - a_1]$ *y*

$$\begin{aligned} A + (B - A) &= [a_1, a_2] + [b_1 - a_2, b_2 - a_1] \\ &= [a_1 + b_1 - a_2, a_2 + b_2 - a_1] \\ &\neq [b_1, b_2] = B \end{aligned}$$

de donde $a_1 \neq a_2$. *De esta manera,* $X = B - A$ *no es solución de la ecuación . Sea* $X = [x_1, x_2]$. *Entonces,* $[a_1 + x_1, a_2 + x_2] = [b_1, b_2]$ *sigue inmediatamente de la ecuación. Esto resulta en 2 ecuaciones ordinarias de números reales,*

$$a_1 + x_1 = b_1,$$

$$a_2 + x_2 = b_2,$$

Cuya solución es $x_1 = b_1 - a_1$ *y* $x_2 = b_2 - a_2$. *Como* X *es un intervalo, se requiere que* $x_1 \leqslant x_2$. *Esto es, la ecuación tiene una solución sii* $b_1 - a_1 \leqslant b_2 - a_2$. *Si estas desigualdad se cumplen, la solución es* $X = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$. *Este numero difuso es una inecuación representada por su* α*-cortadura (teorema 2.5), las cuales son intervalos cerrados, el proceso descrito puede ser aplicado para* α*cortaduras de numeros difusos arbitrarios. La solución de nuestra ecuación difusa puede ser obtenida resolviendo un conjunto de ecuaciones asociadas a intervalos, uno de cada* α *distinto de cero en el conjunto nivel* $\Lambda_A \bigcup \Lambda_B$.
Para cualquier $\alpha \in (0,1]$, *sea* ${}^{\alpha}A = [{}^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}a_2]$, ${}^{\alpha}B = [{}^{\alpha}b_1, {}^{\alpha}b_2]$ *y* ${}^{\alpha}X = [{}^{\alpha}x_1, {}^{\alpha}x_2]$ *denota, respectivamente la* α*-cortadura de* A, B *y* X *en nuestra ecuación. Entonces la ecuación tiene una solución sii*

i) ${}^{\alpha}b_1 - {}^{\alpha}a_1 \leqslant {}^{\alpha}b_2 - {}^{\alpha}a_2 \quad$ *para cada* $\quad \alpha \in (0,1]$.

ii) $\alpha \leqslant \beta \quad$ *implica* $\quad {}^{\alpha}b_1 - {}^{\alpha}a_1 \leqslant {}^{\beta}b_1 - {}^{\beta}a_1 \leqslant {}^{\beta}b_2 - {}^{\beta}a_2 \leqslant {}^{\alpha}b_2 - {}^{\alpha}a_2$

La propiedad i) asegura que la ecuación intervalo

$${}^{\alpha}A + {}^{\alpha}X = {}^{\alpha}B$$

tiene una solución la cual es ${}^{\alpha}X = [{}^{\alpha}b_1 - {}^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}b_2 - {}^{\alpha}a_2]$
. *La propiedad ii) asegura que la solución de la ecuación intervalo para* α *y* β *son anidadas;*
esto es si $\alpha \leqslant \beta$ *entonces* ${}^{\beta}X \subseteq {}^{\alpha}X$. *Si una solución* ${}^{\alpha}X$ *existe para todo* $\alpha \in (0,1]$ *y la propiedad ii se satisface por teorema (2.5) la solución* X *de la ecuación difusa es dada por*

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}_{\alpha}X.$$

Para ilustrar la solución procedemos, sea A *y* B *en nuestra ecuación los siguientes números difusos:*
$A = ,2/[0,1) + ,6/[1,2) + ,8/[2,3) + ,9/[3,4) + 1/4 + ,5/(4,5] + ,1/(5,6]$,

$B = ,1/[0,1) + ,2/[1,2) + ,6/[2,3) + ,7/[3,4) + ,8/[4,5) + ,9/[5,6) + 1/6 + ,5/(6,7] + ,4/(7,8] + ,2/(8,9] + ,1/(9,10]$.

Toda relevante α*-cortadura de A,B y X son dadas en la tabla (4.1). La solución de*

α	${}^{\alpha}A$	${}^{\alpha}B$	${}^{\alpha}X$
1.0	[4,4]	[6,6]	[2,2]
0.9	[3,4]	[5,6]	[2,2]
0.8	[2,4]	[4,6]	[2,2]
0.7	[2,4]	[3,6]	[1,2]
0.6	[1,4]	[2,6]	[1,2]
0.5	[1,5]	[2,7]	[1,2]
0.4	[1,5]	[2,8]	[1,3]
0.3	[1,5]	[2,8]	[1,3]
0.2	[0,5]	[1,9]	[1,4]
0.1	[0,6]	[0,10]	[0,4]

TABLA 4.1: α-CORTADURA ASOCIADA A LA ECUACIÓN DIFUSA DEL TIPO $A+X=B$

la ecuación es el número difuso

$$X = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} {}_{\alpha}X. = ,1/[0,1) + ,7/[1,2) + 1/2 + ,4/(2,3] + ,2/(3,4].$$

§4.2.2. Ecuación $A.X = B$

Asumamos, por simplicidad, que A y B son números difusos en $\mathbb{R}^{+}$. Es fácil de mostrar que $X = B/A$ no es solución de la ecuación. Para cada $\alpha \in (0,1]$ obtenemos la ecuación intervalo

$${}^{\alpha}A.{}^{\alpha}X =^{\alpha} B$$

Nuestra ecuación difusa puede ser solucionada en estas ecuaciones de intervalos para todo $\alpha \in (0,1]$. Sea ${}^{\alpha}A = [{}^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}a_2]$, ${}^{\alpha}B = [{}^{\alpha}b_1, {}^{\alpha}b_2]$ y ${}^{\alpha}X = [{}^{\alpha}x_1, {}^{\alpha}x_2]$ denota, respectivamente la α-cortadura de A, B y X en nuestra ecuación. Entonces, la solución de la ecuación difusa existe sii

i) ${}^{\alpha}b_1/{}^{\alpha}a_1 \leqslant^{\alpha} b_2/{}^{\alpha}a_2$ *para cada* $\alpha \in (0,1]$ *y*
$\alpha \leqslant \beta$ *implica* ${}^{\alpha}b_1/{}^{\alpha}a_1 \leqslant^{\beta} b_1/{}^{\beta}a_1 \leqslant^{\beta} b_2/{}^{\beta}a_2 \leqslant^{\alpha} b_2/{}^{\alpha}a_2$.
Si la solución existe, tiene la forma

$$X = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} {}_{\alpha}X.$$

EJEMPLO 4.3. *. Sea A y B en nuestra ecuación los siguientes números difusos de forma triangular:*

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x \leqslant 3 \textit{ y } x > 5 \\ x - 3 & \textit{para } 3 < x \leqslant 4 \\ 5 - x & \textit{para } 4 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x \leqslant 12 \textit{ y } x > 32 \\ (x - 12)/8 & \textit{para } 12 < x \leqslant 20 \\ (32 - x)/12 & \textit{para } 20 < x \leqslant 32 \end{cases}$$

Entonces,${}^{\alpha}A = [\alpha + 3, 5 - \alpha]$ *y* ${}^{\alpha}B = [8\alpha + 12, 32 - 12\alpha]$*, Es fácil verificar que*

$$\frac{8\alpha + 12}{\alpha + 3} \leqslant \frac{32 - 12\alpha}{5 - \alpha};$$

Consecuentemente

$${}^{\alpha}X = \Big[\frac{8\alpha + 12}{\alpha + 3}, \frac{32 - 12\alpha}{5 - \alpha}\Big]$$

para cada $\alpha \in (0, 1]$.

Es fácil verificar que $\alpha \leqslant \beta$ *implica* ${}^{\beta}X \subseteq^{\alpha} X$ *para cada par* $\alpha, \beta \in (0, 1]$. *Por lo tanto, la solución de nuestra ecuación difusa es*

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}_{\alpha}X = \begin{cases} 0 & \textit{para } x \leqslant 4 \textit{ y } x > 32/5 \\ (12 - 3x)/x - 8 & \textit{para } 4 < x \leqslant 5 \\ (32 - 5x)/12 - x & \textit{para } 5 \leqslant x \leqslant 32/5 \end{cases}$$

Referencias

[1] Zadeh, L. (1965). "Fuzzy Sets". Information and Control, pp. 338-353.

[2] Dubois, D Prade, H. (1980). Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications. Academic Press.

[3] Klir, G. Yuan, B. (1995). Fuzzy Sets Theory. Theory and Applications. Prentice Hall.

[4] Michael Hanss (2005). Applied Fuzzy Arithmetic. Springer.

[5] Zimmermann, H-J. (2001). Fuzzy Set Theory and its Applications. Fourth Edition. Kluwer Academic Publishers.

[6] Andrzej Piegat (2005). Cardinality Approach to Fuzzy Number Arithmetic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 12, No. 2, April 2005, pp. 204-215.

[7] Michael Hanss (2002). The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters. Fuzzy Sets and Systems, 130 (2002), pp. 277-289.

[8] Patricia Victor, Annielis Vroman, Glad Deschrijver, and Etienne Kerre. Real-Time constrained Fuzzy Arithmetic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 17, No. 3, april 2009, pp. 630-640.