UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Postgrado en Ciencias Matemáticas

"Controlabilidad de Sistemas Estocásticos. "

Trabajo Especial de Grado presentado por

Lic.Rosmary Josefina Suárez.

como requisito final
para obtener el título de Magister
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento:Ecuaciones diferenciales.
Tutor:Dr. Alexander Carrasco

Resumen.

En este trabajo se estudia y desarrolla en detalle la teoría de Controlabilidad de sistemas estocásticos semilineales, ver [7]. En particular la aproximación tipo Picard es usada para derivar condiciones suficientes para la controlabilidad exacta y aproximada del sistema:

$$\begin{cases} dx(t) &= [Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t), u(t))]dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t); \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Todo este estudio se realizará bajo la hipótesis de que el sistema lineal asociado es aproximadamente controlable

Agradecimiento.

Primeramente a nuestro Señor por iluminarme siempre en todos mis caminos, por darme la capacidad de poder desarrollar este trabajo, por dotarme de sabiduría, constancia y dedicación en toda mi carrera. A mis padres quienes en todo momento me dieron su apoyo y estimulo, a ustedes mil gracias. A mis compañeros, por haberme permitido compartir junto a ellos momentos inolvidables. A mi esposo Eduard por haberme brindado todo su apoyo y comprensión, por estar conmigo en los momentos mas difíciles de mi carrera. A una persona muy especial como lo es mi tutor: Alexander Carrasco quien con su valiosa colaboración me guió en el desarrollo de este trabajo, orientándome en todo momento, de igual forma agradezco al profesor Miguel Narvaez ya que gracias a su valiosa colaboración se logro culminar este trabajo.

Dedicatoria.

Primeramente al Señor que todo lo puede, mi Dios, por darme la capacidad de desarrollar este trabajo y por dotarme de constancia y dedicación en el transcurso de mi carrera, por enseñarme que el éxito se logra derribando obstáculos y batallando en los senderos de la vida, que no todo en la vida es fácil, por haberme permitido ingresar un día a la Universidad y hoy culminar satisfactoriamente esta meta. A la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, porque gracias a esta casa de estudio he podido adquirir nuevos conocimientos. A mis padres quienes con su valioso esfuerzo me guiaron en todo momento dándome fuerzas para seguir adelante y motivándome a la superación.

Introducción.

Los conceptos de controlabilidad juegan importantes roles en análisis y en el diseño de sistemas de control. Un sistema de control es llamado controlable si cada estado correspondiente al proceso puede ser afectado ó controlado en respectivos tiempos por algún control señal. En varios sistemas dinamicos es posible dirigir un estado inicial arbitrario a un estado final arbitrario usando el conjunto de controles admisibles; esto es, existen sistemas que son exactamente controlables.

Si el sistema no puede ser exactamente controlable entonces diversos tipos de controlabilidad pueden ser definidos tales como: aproximada, nula, nula local, controlabilidad local aproximada nula, etc.

El proposito de este trabajo es el estudio de la controlabilidad aproximada y exacta del siguiente sistema estocástico semilineal:

$$\begin{cases} dx(t) &= [Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t), u(t))]dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t); \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

donde A y B son matrices de dimensiones $n \times n$, $n \times m$ respectivamente,
$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $\sigma_1 : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$
y W es un proceso Wiener n-dimensional, usando aproximación tipo Picard.

Iniciamos dando algunos conceptos y resultados de la teoría de probabilidad y estadística que nos permitiran familiarizarnos con el ambiente estocástico, así como la definición de integral estocástica de $It\hat{o}$ y la definición de ecuaciones diferenciales estocásticas, posteriormente desarrollaremos la teoría de controlabilidad para sistemas determinísticos en dimención finita, la cual generalizaremos al caso del sistema lineal estocástico:

$$\begin{cases} dx(t) &= [Ax(t) + Bu(t)]dt + \sigma_1(t)dW(t); \\ x(0) &= x(0), t \in [0, \mathrm{T}] \end{cases} \tag{2}$$

Bajo algunas condiciones naturales probaremos la controlabilidad aproximada del sistema (1) vía iteraciones del tipo Picard, de igual manera se estudia la controlabilidad exacta del mismo sistema (1) bajo las condiciones que el operador A es no-negativo y auto-adjunto y el operador BB^* es positivo.
Finalmente estudiaremos la controlabilidad exacta del sistema (2)

Índice

Capítulo 1

Preliminares.

Para el desarrollo del presente trabajo es necesario algunas definiciones, resultados y notaciones que serán utilizadas para su mejor comprención , por el cual se da inicio con este capítulo. Para mayor información puede consultarse los textos [1], [4] y [5] .

1.1. Conceptos básicos de probabilidad y estadística

Definición 1.1.1 (σ Algebra)**.** *Sea Ω un conjunto no vacío.*
Una σ álgebra es una colección $\mathfrak{U}$ de subconjuntos de Ω con las siguientes propiedades:

i) $\phi, \Omega \in \mathfrak{U}$.

ii) *Si $A \in \mathfrak{U}$ entonces $A^c \in \mathfrak{U}$.*

iii) *Si $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{U}$ entonces: $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{U}$.*

$A^c = \Omega - A$ es el complemento de A.

Definición 1.1.2 (Medida de Probabilidad)**.** *Sea $\mathfrak{U}$ una Ω álgebra de subconjuntos de Ω.Llamaremos $P : \mathfrak{U} \longrightarrow [0, 1]$ una medida de probabilidad si satisface las siguientes condiciones:*

i) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

ii) *Si $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{U}$, entonces: $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.*

iii) *Si $A_1, A_2, ...$ son subconjuntos disjuntos en $\mathfrak{U}$, entonces: $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.*

Si $A, B \in \mathfrak{U}$*, entonces:* $A \subseteq B$ *implica* $P(A) \leq P(B)$.

Definición 1.1.3 (Sucesos Independientes)**.** *Sea* $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ *un espacio de probabilidad. Dos sucesos* $A_1, A_2 \in \mathfrak{U}$ *se llaman independientes si:*

$$P(A_1 \bigcap A_2) = P(A_1).P(A_2).$$

Definición 1.1.4 (Variable Aleatoria)**.** *Sea* $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ *un espacio de probabilidad. Una aplicación*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es llamada una variable aleatoria n-dimencional si para cada $B \in \beta$[1]*, tenemos:*

$$X^{-1}(B) \in \mathfrak{U}.$$

Equivalentemente decimos que X *es* $\mathfrak{U}$*-medible.*

Definición 1.1.5 (σ-Algebra Generada)**.** *Sea* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una variable aleatoria. Llamaremos* σ*-algebra generada por* X*, a la* σ*-algebra:*

$$\mathfrak{U}(X) = \{X^{-1}(B)/B \in \beta\}.$$

Esta σ*-algebra es la sub* σ*-algebra mas pequeña de* $\mathfrak{U}$ *respecto al cual* X *es medible.*

Definición 1.1.6 (Variables Aleatorias Independientes)**.** *Dos variables aleatorias reales* X, Y *definidas sobre el mismo espacio de probabilidad son independientes si* $\forall B_1, B_2 \in \beta(\mathbb{R})$ *los sucesos* $X^{-1}(B_1)$ *y* $Y^{-1}(B_2)$ *son sucesos independientes.*

Intuitivamente, esto significa que la observación de un suceso A a travéz de la variable aleatoria X no cambia la ley de probabilidad de Y. La definición es análoga para variables valuadas en cualquier espacio y para familias de variables aleatorias.

Definición 1.1.7 (Proceso Estocástico)**.** *Sea* T *un conjunto ordenado.*
Un proceso estocástico indexado por T *es una familia de variables aleatorias* $\{X_t, t \in \mathrm{T}\}$*, todas ellas definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.*

Definición 1.1.8 (Trayectorias)**.** *Para cada* ω *fijado, la función*

$$\begin{array}{rccc} X(\omega): & \mathrm{T} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longrightarrow & X_t(\omega) \end{array}$$

se llama trayectoria del proceso.

Este punto de vista nos permite pensar en un proceso estocástico como una variable aleatoria valuada en algún espacio E *de funciones*

$$\begin{array}{rl} X: & \Omega \longrightarrow E \\ & \omega \longrightarrow X(\omega) \end{array}$$

[1] β es la colección de subconjuntos de Borel.

Definición 1.1.9 (Proceso Estocástico Continuo). *Un proceso estocástico es continuo, si para cada $\omega \in \Omega$, la trayectoria $X(\omega)$ es una función continua.*

Definición 1.1.10 (Proceso Estocástico con Incrementos Independientes). *Diremos que un proceso estocástico tiene incrementos independientes del pasado si para todos $t, s \in \mathrm{T}$, $s < t$ la variable $X_t - X_s$ es independiente de la familia $\{X_r : r \in \mathrm{T}, r \leq s\}$.*

Definición 1.1.11 (Valores Esperados). *Sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una variable aleatoria, definimos la esperanza y la varianza de X respectivamente como :*

$$E(X) = \int_\Omega X dP, \qquad V(X) = \int_\Omega |X - E(X)| dP,$$

si es que existen.

Definición 1.1.12 (Funciones de Distribución). *Una variable aleatoria X induce una probabilidad P_X sobre $(\mathbb{R}^n, \beta)$ definida por:*

$$P_X(B) = P(X \in B).$$

Esta última medida P_X se denomina distribución de X.

Su importancia radica en que es una probabilidad definida sobre $\mathbb{R}^n$, que por lo general, es un espacio mucho mas concreto que Ω.

También suele denominarse función de distribución de X a $F_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ dada por:

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x).$$

La expresión $x \leq y$ debe interpretarse coordenada a coordenada.

Definición 1.1.13 (Esperanza Condicional). *Sea $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ un espacio de probabilidad y X e Y variables aleatorias definidas en él. Llamaremos $\mathrm{E}(X/Y)$ a cualquier variable aleatoria $\mathfrak{U}(Y)$-medible que cumpla*

$$\int_A X dP = \int_A \mathrm{E}(X/Y) dP,$$

para todo $A \in \mathfrak{U}(Y)$.

Por último, observemos que los valores que toma Y no influyen en esta definición, solo importa la σ-álgebra que genera, lo cual hace que sea más natural dar la siguiente definición:

Definición 1.1.14. *Sea* $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ *un espacio de probabilidad y sea* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{U}$*. Entonces* $\mathrm{E}(X/\mathfrak{F})$ *es cualquier variable aleatoria* $\mathfrak{F}$*-medible que cumpla:*

$$\int_A X dP = \int_A \mathrm{E}(X/\mathfrak{F}) dP,$$

para todo $A \in \mathfrak{F}$*.*

Observación 1.1. *La existencia y unicidad de* $\mathrm{E}(X/\mathfrak{F})$ *es una simple consecuencia del teorema de Radom-Nikodym:*

Sea μ *la medida en* $\mathfrak{F}$ *definida por:*

$$\mu(A) = \int_A X dP,$$

para $A \in \mathfrak{F}$*.*
Tenemos entonces que μ *es absolutamente continua con respecto a* P*, restringida a* $\mathfrak{F}$*, por lo tanto, existe una única función* F*,* $\mathfrak{F}$*-medible tal que:*

$$\mu(A) = \int_A F dP.$$

La función F *es la variable aleatoria que estamos buscando* $\mathrm{E}(X/\mathfrak{F}) = F$ *verifica lo pedido.*

Enunciaremos a continuación las principales propiedades de la esperanza condicional.

Teorema 1.1.1 (Propiedades de la Esperanza Condicional)**.** *Sea* $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *variables aleatorias integrables,*
$a, b \in \mathbb{R}$*. Tenemos entonces que:*

1. $\mathrm{E}[aX + bY] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y]$.

2. $\mathbf{E}[\mathrm{E}[X/\mathfrak{F}]] = \mathrm{E}[X]$.

3. $\mathrm{E}[X/\mathfrak{F}] = X$ *si* X *es* $\mathfrak{F}$*-medible.*

4. $\mathrm{E}[X/\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X]$ *si* X *es independiente de* $\mathfrak{F}$*(en particular si* $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$*).*

5. $\mathrm{E}[YX/\mathfrak{F}] = Y\mathrm{E}[X/\mathfrak{F}]$ *si* Y *es* $\mathfrak{F}$*-medible y* XY *es integrable.*

6. *Dadas dos* σ*-algebras* $\varphi \subset \mathfrak{F}$*, vale que*

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X/\mathfrak{F}]/\varphi] = \mathrm{E}[X/\varphi].$$

7. *Si* $X_1 \leq X_2$ *entonces* $\mathrm{E}[X_1/\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[X_2]$.

Demostración. Ver [4]. $\square$

Definición 1.1.15 (Filtración)**.** *Sea* T *un conjunto indixado.*
Una filtración es una familia creciente de σ*-álgebras* $(\mathfrak{F}_s : s \in \mathrm{T})$ *con* $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ *para* $s \leq t$.

Definición 1.1.16 (Proceso Adaptado)**.** *Un proceso* $\{X(t) : t \in \mathrm{T}\}$ *se dice adaptado a la filtración* $\mathfrak{F}_t$ *si X(t) es* $\mathfrak{F}_t$*-medible para cada* $t \in \mathrm{T}$.

Definición 1.1.17 (Proceso Medible)**.** *Denotamos por* β *a la* σ*-algebra de Borel en* $[0, \infty)$*, el proceso* $X(\cdot)$ *se dice medible si la aplicación* $(t, \omega) \longrightarrow X(t, \omega)$ *es* $\beta \otimes \mathfrak{F}$ *medible.*

Definición 1.1.18 (Espacio de Hilbert L^2)**.** *Denotaremos* $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *al espacio lineal* $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{U})$*, el cual consiste de todas las variables eleatorias* Y *que son* $\mathfrak{U}$*-medibles a valores reales y satisfacen que:*

$$\|Y\| = (\int_\Omega Y^2 dP)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Si $X, Y \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ *definimos su producto interno por:*

$$(X, Y) = \int_\Omega XY dP = \mathrm{E}(XY).$$

Definición 1.1.19 (Movimiento Browniano ó Proceso Wiener)**.** *Un proceso estocástico* $W(\cdot)$ *a valores reales, es llamado un movimiento Browniano ó proceso Wiener si*

i) $W(0) = 0$ *c.t.p.*

ii) $W(t) - W(s)$ *es* $N(0, t - s)$ *para todo* $t \geq s \geq 0$.

iii) *Para todo tiempo* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$*, las variables aleatorias* $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1), ...W(t_n) - W(t_{n-1})$ *son independientes (incrementos independientes).*

Además: $\mathrm{E}(W(t)) = 0$*,* $\mathrm{E}(W^2(t)) = t$ *para todo tiempo* $t \geq 0$.

Lema 1.1.1. *Supóngase* $W(\cdot)$ *es un movimiento Browniano uni-dimensional. Entonces:*

$$\mathrm{E}(W(t)W(s)) = t \wedge s = min\{s, t\} \quad para \quad t \geq 0, s \geq 0.$$

Demostración. Ver [4] $\square$

El Movimiento Browniano goza de infinidad de propiedades interesantes que hacen de él un objeto matemático muy rico, a continuación mensionamos solo algunas, pueden encontrarse muchas más; en [4].

Teorema 1.1.2. *Sea $W(\cdot)$ un movimiento Browniano unidimensinal definido en $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ entonces:*

1. ***Regularidad**. Para todo $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ existe un conjunto Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$ tal que para todo $\omega \in \Omega_0$ y para todo $T > 0$ la función $W(\omega, \cdot)$ es uniformemente Hölder γ en $[0, T]$.*

2. ***No diferenciabilidad**. Para todo $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ para casi todo $\omega \in \Omega$ la función $W(\cdot, \omega)$ no es Hölder γ en ningún punto. En particular, para casi todo $\omega \in \Omega$ la función $W(\cdot, \omega)$ no es derivable en ningún punto y no es de variación en ningún intervalo. Así que no podemos interpretar $\dot{W}(t) = \xi(t)$ como una derivada ordinaria, ya que no siempre existe.*

3. ***Variación cuadrática**. Sean $0 \leq a < b$ y supongamos que*

$$P^n = a = t_0^n < t_1^n < ... < t_{m_n}^n = b; n = 1, 2...$$

son particiones de $[a, b]$ tales que $|P^n| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{m_n - 1} [B(t_{k+1}^n) - B(t_k^n)]^2 \longrightarrow b - a$$

en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Ver [5] □

Definición 1.1.20 (Movimiento Browniano en $\mathbb{R}^n$)**.** *Un proceso estocástico $W(\cdot) = (W^1(\cdot), ..., W^n(\cdot))$ a valores en $\mathbb{R}^n$ es un proceso Wiener n-dimensional (ó movimiento Browniano) siempre que:*

i) *Para cada $k = 1, 2, ..., n$, $W^k(\cdot)$ es un proceso Wiener n-dimensional.*

ii) *Las σ-álgebras $W^k = \mathfrak{U}(W^k(t)/t \geq 0)$ son independientes, $k = 1, ...n$.*

1.2. Integral Estocástica de *Itô*.

Para entender la teoría de ecuaciones diferenciales estocástica de la forma:

$$\begin{cases} dX &= b(X,t)dt + B(X,t)dW; \\ X(0) &= X_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

necesitamos interpretar el significado de

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X,s)ds + \int_0^t B(X,s)dW \tag{1.2}$$

para todo tiempo $t \geq 0$, y para ello se hace indispensable definir

$$\int_0^T GdW \tag{1.3}$$

para una clase amplia de procesos estocásticos G.

Note que la integral (1.3) no es del todo obvia. En primer lugar, ya que la función $t \longrightarrow W(t,\omega)$ es de variación infinita para casi todo ω, es decir el conjunto $\{V_{[a,b]}(W) < \infty\}$[2] tiene probabilidad cero, así $\int_0^T GdW$ no puede ser definida simplemente como una integral ordinaria.

Una primera definición fue hecha por Paley, Wiener y Zygmund, ver [4]. Supóngase una función $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable con $g(0) = g(1) = 0$.

Es claro que g es una función determinística y no un proceso estocástico. Entonces:

$$\int_0^1 gdW = -\int_0^1 g'Wdt. \tag{1.4}$$

La expresión (1.4) es una variable aleatoria y no un proceso estocástico.

Lema 1.2.1 (Propiedades de Paley-Wiener-Zygmund)**.**

i) E$(\int_0^1 gdW) = 0$.

ii) E$((\int_0^1 dW)^2) = \int_0^1 g^2 dt$.

Demostración. Ver [4] □

[2] $V_{[a,b]}(W) = \sup_{\pi} \sum_{t_i,t_{i+1}} |W(t_{i+1} - W(t_i)|$, donde π varia en el conjunto de las particiones de [a,b]

Ahora bien, necesitamos definir la integral estocástica cuando el integrando es un proceso estocástico.

Sea $W(\cdot)$ un movimiento Browniano uni-dimensional definido en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$, sea $\mathfrak{F}(\cdot) \subset \mathfrak{U}$ una filtración.

Definición 1.2.1 (Espacio $\mathrm{L}^2(0,T)$)**.** . *Denotamos* $\mathrm{L}^2(0,T)$ *el espacio de todos los procesos estocásticos a valores reales* $G(\cdot)$ *medibles y adaptados a* $\mathfrak{F}(\cdot)$ *tal que:*

$$\mathrm{E}(\int_0^T G^2 dt) < \infty.$$

Definición 1.2.2 (Proceso escalonado)**.** *Un proceso* $G \in \mathrm{L}^2(0,T)$ *es llamado un proceso escalonado si existe una partición* $P = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T\}$ *tal que:*

$$G(t) = G_k \ para \ t_k \leq t < t_{k+1} \ (k = 0, ..., m-1).$$

Cada G_k *es una variable aleatoria* $\mathfrak{F}_{t_k}$*-medible.*

Definición 1.2.3 (Integral de $It\hat{o}$)**.** *Sea* $G \in \mathrm{L}^2(0,T)$ *un proceso escalonado,entonces:*

$$\int_0^T G dW = \sum_{k=0}^{m-1} G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k)) \tag{1.5}$$

es la integral estocástica Itô de G en el intervalo (0,T).

Note que la integral (1.5) es una variable aleatoria.

Lema 1.2.2. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *y procesos escalonados* $G, H \in \mathrm{L}^2(0,T)$*. Entonces:*

i) $\displaystyle\int_0^T (aG + bH) dW = a \int_0^T G dW + b \int_0^T H dW.$

ii) $\displaystyle\mathrm{E}(\int_0^T G dW) = 0.$

iii) $\displaystyle\mathrm{E}((\int_0^T G dW)^2) = \mathrm{E}(\int_0^T G^2 dt).$

Demostración. Ver [4] □

El siguiente lema nos va a permitir posteriormente definir la integral de $It\hat{0}$ para cualquier clase de procesos estocásticos no necesariamente procesos pasos.

Lema 1.2.3 (Aproximación por procesos escalonados). *Si $G \in \mathrm{L}^2(0,T)$, existe una sucesión de procesos pasos acotada $G^n \in \mathrm{L}^2(0,T)$ tal que*

$$\mathrm{E}(\int_0^T |G - G^n|^2 dt) \longrightarrow 0.$$

Demostración. Ver [4] □

Definición 1.2.4. *Sea $G \in \mathrm{L}^2(0,T)$ y G^n una sucesión de procesos escalonados tal que $\mathrm{E}(\int_0^T |G - G^n|^2 dt) \longrightarrow 0$.*

Si $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T G^n dW$ existe, entonces:

$$\int_0^T GdW = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T G^n dW.$$

Definición 1.2.5. *Un proceso estocástico $G = (G^{ij})$ pertenece a $\mathrm{L}^2([0,T], \mathbb{R}^{n\times m})$ si:*

$$G^{ij} \in \mathrm{L}^2(0,T), \qquad i = 1, ..., n \qquad j = 1, ..., m.$$

Definición 1.2.6. *Si $G \in \mathrm{L}^2([0,T], \mathbb{R}^{n\times m})$, entonces:*

$$\int_0^T GdW$$

es una variable aleatoria n-dimensional, cuyas componentes son:

$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^T G^{ij} dW^j \qquad (i = 1, ..., n.)$$

1.3. Ecuaciones diferenciales Estocásticas

Sean $W(\cdot)$ un movimiento Browniano m-dimensional, X_0 una variable aleatoria n-dimensioal la cual es independiente de $W(\cdot)$ y
$\mathfrak{F}(t) = \mathrm{U}(W(S), 0 \leq s \leq t) \;\; (t \geq 0)$.

Supongamos que T es un numero real positivo dado y sean:

$$b : \mathbb{R}^n \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad B : \mathbb{R}^n \times [0,T] \longrightarrow M^{n\times m}$$

funciones dadas (Note que ellas no son variables aleatorias).

Las componentes de estas funciones pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$b = \left(\; b^1, b^2, ..., b^n \; \right), \; B = \begin{pmatrix} b^{11} & . & . & b^{1m} \\ . & & & \\ . & . & . & . \\ . & & & \\ b^{n1} & . & . & b^{nm} \end{pmatrix}$$

Definición 1.3.1. *Diremos que un proceso estocástico $X(\cdot)$ a valores en $\mathbb{R}^n$ es una solución de la ecuación diferencial estocástica de Itô*

$$\begin{cases} dX & = & b(X,t)dt + B(X,t)dW; \\ X(0) & = & X_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

para $0 \leq t \leq T$ siempre que:

i) $X(\cdot)$ *es adaptada respecto a* $\mathfrak{F}(\cdot)$.

ii) $F = b(X, \cdot) \in \mathrm{L}^1([0,T], \mathbb{R}^n)$[3].

iii) $G = B(X,t) \in \mathrm{L}^2((0,T), \mathbb{R}^{n \times m})$.

iv) $X(t) = X_0 + \displaystyle\int_0^t b(X(s),s)ds + \int_0^t B(X(s),s)dW$ *c.t.p para todo* $0 \leq t \leq T$.

La ecuación diferencial (1.6) es llamada lineal siempre que los coeficientes b y B tengan la forma:

$$b(X,t) = C(t) + D(t)X; \quad B(X,t) = E(t) + F(t)X.$$

para $C : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D : [0,T] \longrightarrow M^{n \times n}$, $E : [0,T] \longrightarrow M^{n \times M}$ y $F : [0,T] \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, M^{n \times m})$.

[3]El espacio de los procesos medibles $F(\cdot)$, a valores en $\mathbb{R}^n$ tal que: $E(\displaystyle\int_0^T |F|dt) < \infty$.

Capítulo 2

Controlabilidad de Sistemas Determinísticos.

Consideremos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t); \\ x(0) & = & x_0, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

donde $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$[1] y u $\in \mathrm{L}_\infty(0,T,\mathbb{R}^m)$[2] ó $\mathrm{L}_2(0,T,\mathbb{R}^m)$[3]es llamado control.

Definición 2.0.1. *Diremos que el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t); \\ x(0) & = & x_0, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

es controlable para cada par de puntos $(x_0),(x_1) \in \mathbb{R}^n$ si existe un control medible, acotado $u \in \mathrm{L}_\infty(0,t_1,\mathbb{R}^n)$ ó $L_2(0,T,\mathbb{R}^n)$ para algún t_1 finito, el cual dirige x_0 hacia x_1. Ya que la solución de $\dot{x} = Ax+Bu$ es:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds,$$

el sistema podría ser controlable si dado x_1, existe un control u_1 y un t_1 finito, tal que:

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}Bu_1(s)ds.$$

---

[1]Espacio de los operadores lineales y acotados definidos de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$.

[2]El espacio de las funciones medibles y acotadas definidas de $[0,T]$ a valores en $\mathbb{R}^m$

[3]$\{u:[0,T]\longrightarrow \mathbb{R}^m$,donde u es medible y es definida c.t.p con $\|u\|^2 = (\int_0^T |u|^2dt)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$

Definición 2.0.2 (Espacio de Controlabilidad). *El conjunto de todos los puntos para el cual el origen $x_0 = 0$ puede ser dirigido en tiempo finito, es llamado el espacio de controlabilidad $\mathcal{C}$.*

Teorema 2.0.1. *El espacio de controlabilidad $\mathcal{C}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$, entonces existen $t_1, t_2 < \infty$ y controles $u_1 \in \mathrm{L}_\infty(0, t_1, \mathbb{R}^m)$; $u_2 \in \mathrm{L}_\infty(0, t_2, \mathbb{R}^m)$ tal que:

$$x_1 = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B u_1(s) ds; \qquad x_2 = \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} B u_2 ds.$$

Ahora de u_1 generamos un control $\hat{u}_1 \in \mathrm{L}_\infty(0, t_2, \mathbb{R}^m)$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(t) = 0, & 0 \leq t \leq t_2 - t_1; \\ \hat{u}_1(t + t_2 - t_1) = u_1(t), & 0 \leq t \leq t_1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Por otro lado, consideremos el control $\alpha\hat{u}_1(t) + \beta u_2(t) \in \mathrm{L}_\infty(0, t_2, \mathbb{R}^m)$ donde $-\infty < \alpha, \beta < \infty$, entonces este control dirige el origen hasta el punto x donde:

$$\begin{aligned}
x &= \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} B(\alpha\hat{u}_1(s) + \beta u_2(s)) ds \\
&= \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} B\alpha\hat{u}_1(s) ds + \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} \beta B u_2(s) ds \\
&= \alpha \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} B\alpha\hat{u}_1(s) ds + \beta \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} \beta B u_2(s) ds \\
&= \alpha \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} B\alpha\hat{u}_1(s) ds + \beta x_2 \\
&= \alpha[\int_0^{t_2-t_1} e^{A(t_2-s)} B\hat{u}_1(s) ds + \int_{t_2-t_1}^{t_2} e^{A(t_2-s)} B\hat{u}_1(s) ds] + \beta x_2 \\
&= \alpha \int_{t_2-t_1}^{t_2} e^{A(t_2-s)} B u_1(s - t_2 + t_1) ds + \beta x_2.
\end{aligned}$$

Ahora sea $t_2 - s = t_1 - s'$; entonces:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s')} B u_1(s') ds' + \beta x_2 \\ &= \alpha x_1 + \beta x_2. \end{aligned}$$

así, si $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ entonces también se satisface que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{C}$ para todo α, β finito.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ es un subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema 2.0.2. *La dimensión del espacio de controlabilidad es el rango de la matriz* $\left(\begin{array}{c} B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B \end{array} \right)$.

Esta matriz es de orden $n \times nm$ y es llamada la matriz de controlabilidad.

Demostración. La demostración del teorema depende del siguiente lema:

Lema 2.0.1. *Un vector x es perpendicular a $\mathcal{C}$ si y solamente si*

$$\begin{pmatrix} B' \\ B'A' \\ B'(A')^{n-1} \end{pmatrix} x = 0.$$

Demostración. Si x es perpendicular a $\mathcal{C}$, entonces ya que $\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu(s) ds$ es un elemento de $\mathcal{C}$, tenemos que:

$$\langle x, \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu(s) ds \rangle = 0. \tag{2.4}$$

donde $\langle , \rangle$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$, pero (2.4) implica:

$$\int_0^{t_1} \langle B' e^{A'(t_1-s)} x, u(s) \rangle ds = 0,$$

para todo control u. Así:

$$B' e^{A'(t_1-s)} x = 0,$$

para todo $0 \leq s \leq t_1$. En consecuencia, considerando $s = t_1$, se obtiene:

$$B'x = 0$$

y diferenciando con respecto a s "l"veces y considerando $s = t_1$ resulta:

$$B'(A')^l x = 0; \quad l = 1, 2, ...n - 1.$$

Suponiendo:

$$\begin{pmatrix} B' \\ . \\ . \\ . \\ B'(A')^{n-1} \end{pmatrix} x = 0.$$

Por el teorema de Caley-Hamilton, existen constantes $c_1, ..., c_n$; tal que:

$$(A')^n = c_1(A')^{n-1} + ...c_n I.$$

Así:

$$\begin{aligned} B'(A')^{n-1}x &= B'(c_1(A')^{n-1} + ...c_n I)x \\ &= B'c_1(A')^{n-1}x + ...c_n B' I x \\ &= 0, \end{aligned}$$

y de esta manera continuando este proceso, obtenemos que:

$$B'e^{A'(t_1-s)}x = B'[I + (t_1 - s)A' + \frac{(t_1-s)^2}{2!}(A')^2 + ...]x.$$

Por lo que $B'e^{A'(t_1-s)}x = 0$ y esto implica que:

$$\int_0^{t_1} \langle x, e^{A(t_1-s)}Bu(s)\rangle ds = 0$$

para todo t_1 y u; por tanto x es perpendicular a $\mathcal{C}$. □

Ahora:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} B, AB, ...A^{n-1}B \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} B' \\ B'A' \\ . \\ . \\ . \\ B'(A')^{n-1} \end{pmatrix},$$

el cual es n, el número de x linealmente independientes tal que:

$$\begin{pmatrix} B' \\ B'A' \\ B'(A')^{n-1} \end{pmatrix} x = 0$$

También la dimensión de $\mathcal{C}$ es n (el numero de x linealmente independientes tal que x es perpendicular a $\mathcal{C}$). Así la dimensión de $\mathcal{C} = rang \begin{pmatrix} B, AB, ...A^{n-1}B \end{pmatrix}$. □

Definición 2.0.3. *Un operador* $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ *es llamado definido positivo si* $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, *y estríctamente positivo si* $\langle Ax, x\rangle = 0$ *solamente si* $x = 0$.

Corolario 2.0.1. *Si rang*$\big(B, AB, ...A^{n-1}B \big)$*=n; entonces todo punto de* $\mathbb{R}^n$ *puede ser alcanzado desde el origen.*

Así, la controlabilidad del origen puede ser verificada en una simple operación algebraica.

Teorema 2.0.3. *Si rang*$\big(B, AB, ...A^{n-1}B \big)$*=n; para todo* $t_1 > 0$, *la matriz:*

$$W(t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At}BB'e^{-A't}dt$$

es estríctamente definida positiva. Además, existe un control el cual dirige algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$ hasta el origen.

Demostración. Si rang$\big(B, AB, ...A^{n-1}B \big)$=n entonces siguiendo un procedimiento analogo desarrollado en el teorema 2.0.2 obtenemos que $B'e^{-A't}x = 0$ en $0 \leq t \leq t_1$ y esto implica que $x = 0$.

Ahora:

$$\begin{aligned}
\langle x, W(t_1)x\rangle &= \langle x, \int_0^{t_1} e^{-At}BB'e^{-A't}dt \;\; x\rangle \\
&= \int_0^{t_1} \langle B'e^{-A't}x, B'e^{-A't}x\rangle dt \\
&= \int_0^{t_1} \|B'e^{-A't}x\|^2 dt.
\end{aligned}$$

Así que, $W(t_1)$ es por lo menos definida positiva; pero $\langle x, W(t)x\rangle = 0$ implica que $B'e^{-A't}x = 0$; y esto implica que $x = 0$.

De esta manera hemos demostrado que $W(t_1)$ es estrictamente definida positiva.

Ahora considere el control $u(t) = -B'e^{-A't}(W(t_1))^{-1}x_0$ definido en $[0, t_1]$ para el sistema con condición inicial estado x_0; entonces:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{At_1}x_0 - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}BB'e^{-A's}(W(t_1))^{-1}x_0 ds \\ &= e^{At'}x_0 - e^{At'}W(t_1)W(t_1)^{-1}x_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, este control dirige x_0 hasta el origen. $\square$

Teorema 2.0.4. *El sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

es controlable si y solamente si rang$\begin{pmatrix} B, AB, ...A^{n-1}B \end{pmatrix}$*=n.*

Ahora bien, ya que el concepto de controlabilidad es esencialmente geométrico podemos esperar que la controlabilidad es estable bajo cambio de coordenadas.

Para ver esto consideremos $y = Px$; donde P es una matriz no-singular.

Entonces del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

obtenemos $\dot{y} = \hat{A}y + \hat{B}u$, donde $\hat{A} = PAP^{-1}$ y $\hat{B} = PB$.

Así:

$$\begin{aligned} rang\begin{pmatrix} \hat{B}, \hat{A}\hat{B}, ..., \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{pmatrix} &= rang\begin{pmatrix} PB, PAP^{-1}PB, PA^{n-1}B \end{pmatrix} \\ &= rangP\begin{pmatrix} B, AB, A^{n-1}B \end{pmatrix} \\ &= rang\begin{pmatrix} B, AB, A^{n-1}B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea la ecuación diferencial:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_1 x = u. \tag{2.7}$$

Considerando el siguiente cambio:

$$\begin{cases} x_1 & = & x \\ \dfrac{dx_1}{dt} & = & x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & x_3 \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt^{n-1}} & = & x_n \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

donde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}; \text{ b=} \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ A=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ -a_1 & . & . & . & . & . & -a_n \end{pmatrix},$$

En consecuencia, $\left(\; b, Ab, A^{n-1}b \; \right)$ tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & \times & . & . & . & . \\ 1 & \times & \times & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

Por lo que, rang$\left(\; b, Ab, ..., A^{n-1}b \; \right)$=n y el sistema (2.7) es controlable.

Ejemplo

El siguiente ejemplo demuestra que no todo sistema es controlable.

Considere el sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

entonces $\begin{pmatrix} b, Ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego, como rang$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, haciendo uso del teorema 2.0.4 se tiene que el sistema no es controlable.

Capítulo 3

Controlabilidad de Sistemas Estocásticos Lineales.

En este capítulo se estudia en detalle algunos resultados que permiten relacionar la controlabilidad exacta y la controlabilidad aproximada de un sistema lineal estocástico y su sistema determinístico asociado. Especificamente, el sistema lineal estocástico viene dado por:

$$\begin{cases} dx(t) &= [Ax(t) + Bu(t)]dt + \sigma_1(t)dW(t), \\ x(0) &= x(0), t \in [0, \mathrm{T}], \end{cases} \tag{3.1}$$

con A y B matrices de dimenciones $n \times n$, $n \times m$ respectivamente,
$\sigma_1 : [0, \mathrm{T}] \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, W es un proceso wiener n-dimencional y u es el control. El sistema determinístico asociado a (3.1) viene dado por:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} &= [Ay(t) + Bv(t)]dt, \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $v(.) \in L_2(0, \mathrm{T}, \mathbb{R}^m)$

Definición 3.0.1.

El operador controlabilidad asociado al sistema (3.1) es definido por:

$$\Pi_0^T = L_0^T (L_0^T)^* = \int_0^{\mathrm{T}} S(\mathrm{T} - t)BB^* S^*(\mathrm{T} - t)E\{./\mathfrak{F}_t\}dt,$$

donde $L_0^T \in L(L_2^{\mathfrak{F}}([0, T], \mathbb{R}^m), L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n))$ viene dado por:

$$L_0^T u = \int_0^T S(T - s)Bu(s)ds.$$

Es claro que, Π_0^T pertenece a $L(L_2(\Omega, \mathfrak{F}_{\mathrm{T}}, \mathbb{R}^n), L_2(\Omega, \mathfrak{F}_{\mathrm{T}}, \mathbb{R}^n))$ y ádemas es auto-adjunto:

$$\langle L_0^T (L_0^T)^* z, z \rangle = \langle z, L_0^T (L_0^T)^* z \rangle,$$

y definido no negativo.

El siguiente lema relaciona a los operadores $\Pi_0^T, R(\lambda, -\Pi_s^{\mathrm{T}})$ y $\Gamma_0^{\mathrm{T}}, R(\lambda, -\Gamma_s^{\mathrm{T}})$ para $\lambda > 0$ respectivamente.

Lema 3.0.1. *Para cada* $z \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$ *existe un proceso* $\varphi(\cdot) \in L_2^{\mathfrak{F}}([0, T], \mathbb{R}^n)$ *tal que:*

a) $z = E\{z\} + \int_0^T \varphi(s) dw(s).$

b) $\Pi_0^T z = \Gamma_0^T E z + \int_0^T \Gamma_s^T \varphi(s) dw(s).$

c) *Para todo* $\lambda > 0$, $R(\lambda, -\Pi_0^{\mathrm{T}}) z = R(\lambda, -\Gamma_0^{\mathrm{T}}) E z + \int_0^T R(\lambda, -\Gamma_0^{\mathrm{T}-s}) \varphi(s) dw(s).$

Demostración. La parte (a) es consecuencia del teorema de representación de martingala [ver okendal pag 51].

Para la parte (b) sea $z \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$. De (a) se sigue que existe $\varphi(\cdot) \in L_2^{\mathfrak{F}}([0, \mathrm{T}], \mathbb{R}^n)$ tal que:

$$E\{z/\mathfrak{F}_t\} = E\{z\} + \int_0^t \varphi(s) dw(s).$$

Ahora bien, de la definición del operador Π_0^T y por la parte (a) tenemos:

$$\begin{aligned}
\Pi_0^T &= \int_0^T S(T-t) B B^* S^*(T-t) E\{z/\mathfrak{F}_t\} dt \\
&= \int_0^T S(T-t) B B^* S^*(T-t) \times [E\{z\} + \int_0^t \varphi(s) dw(s)] dt.
\end{aligned}$$

luego por la definición de Γ_0^T y aplicando el teorema de Fubinni se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Pi_0^T &= \Gamma_0^T Ez + \int_0^T S(T-t)BB^*S^*(T-t)[\int_0^t \varphi(s)dw(s)]dt \\
&= \Gamma_0^T Ez + \int_0^T [\int_s^T S(T-t)BB^*S^*(T-t)\varphi(s)dt]dw(s) \\
&= \Gamma_0^T Ez + \int_0^T \Gamma_s^T \varphi(s)dw(s).
\end{aligned}$$

Finalmente la parte (c) se sigue directamente de (a) y (b). En efecto, ya que $(\lambda I + \Gamma_0^T)$ es invertible se sigue que el operador:

$$\Lambda_0^T = R(\lambda, -.\Gamma_0^T)Ez + \int_0^T R(\lambda, -\Gamma_s^T)\varphi(s)dw(s),$$

esta bien definido y es obvio que $\Lambda_0^T = R(\lambda, -\Pi_0^T)$. □

Sea $F \in \mathfrak{L}(U, X)$, donde U y X son espacios de Hilbert; los siguientes resultados permiten caracterizar la positividad o coersividad del operador lineal FF^*.

Teorema 3.0.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $ImF = X$ y $KerFF^* = \{0\}$.

2) $FF^* \geq 0$.

3) $R(\lambda, -FF^*)$ converge cuando $\lambda \longrightarrow 0^+$ en la topología uniforme de operadores.

4) $\lambda R(\lambda, -FF^*)$ converge cuando $\lambda \longrightarrow 0^+$ en la topología uniforme de operadores.

Demostración. En primer lugar, probaremos 2) ⇒ 1), para ello supóngase que $FF^* \geq 0$; esto es, exite $\gamma > 0$ tal que:

$$\langle FF^*z, z\rangle \geq \gamma \|z\|^2,$$

para todo $z \in Dom(FF^*)$. Por otro lado:

$$\langle FF^*z, z\rangle = \|F^*z\|^2.$$

Así, obtenemos que:

$$\|F^*z\|^2 \geq \gamma \|z\|^2.$$

Por lo tanto, de la desigualdad anterior se deduce que $kerF^* = \{0\}$, en consecuencia F^* es inyectivo.

Además, por propiedades de adjunto de un operador se tiene que:

$$\|F^*z\|^2 = \|Fz\|^2,$$

por lo que, también se obtiene que el $kerF = \{0\}$; es decir F también es inyectiva.

Como la composición de operadores inyectivos es inyectiva se tiene que $kerFF^* = \{0\}$.

Por otro lado, es claro que $ImF \subset X$. Veamos ahora que $X \subset ImF$.

En efecto:

Sea $x \in X$. Por ser $FF^* \geq 0$ se tiene que FF^* es invertible, así considerando $z = F^*(FF^*)^{-1})x \in Dom(F)$, se tiene que $F(z) = x$. Por lo tanto, $x \in ImF$.

Ahora probaremos que 1) $\Rightarrow$ 2). Supongase que ImF=X y $KerFF^* = \{0\}$.

Procedamos por el método de reducción al absurdo, es decir supongamos que FF^* no es coersivo; así $\exists z \in X, z \neq 0$ tal que $\langle FF^*z, z\rangle \gamma \|z\|^2, \;\; para \;\; \gamma \geq 0$. Considerando $\gamma = \frac{1}{n}$ se tiene que:

$$\langle FF^*z, z\rangle \frac{1}{n}\|z\|^2. \tag{3.3}$$

Si $n \longrightarrow \infty$, de (3.3) resulta que $\langle FF^*z, z\rangle = 0$, en consecuencia, $z = 0$; lo cual es una contradicción a la hipotesis. Por tanto, lo supuesto es falso, es decir FF^* es coersivo.

Veamos ahora que 2) $\Rightarrow$ 3). Supóngase que

$$\langle FF^*z, z\rangle \geq \gamma\|z\|^2. \tag{3.4}$$

Entonces para todo $z \in X$ y para todo $\lambda \geq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle z, (\lambda I + FF^*)z\rangle &= \langle z, \lambda z + FF^*z\rangle \\ &= \lambda\langle z, z\rangle + \langle FF^*z, z\rangle. \end{aligned}$$

Luego, por (3.4) se obtiene que:

$$\langle z, (\lambda I + FF^*)z\rangle \geq \lambda\|z\|^2 + \gamma\|z\|^2.$$

Extrayendo factor común de la desigualdad anterior resulta:

$$\langle z, (\lambda I + FF^*)z\rangle \geq (\lambda+\gamma)\|z\|^2.$$

Así, para todo $\lambda \geq 0$

$$\|R(\lambda, -FF^*)\| = \|(\lambda I + FF^*)^{-1}\| \leq \frac{1}{(\lambda+\gamma)} \leq \frac{1}{\gamma}. \tag{3.5}$$

En consecuencia, concluimos que $\|R(\lambda, -FF^*)\|$ es acotado para todo $\lambda \geq 0$. Por otro lado, por las identidades del resolvente, ver [2], obtenemos:

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, -FF^*) - R(\mu, -FF^*)\| &= \|(\lambda-\mu)R(\lambda, -FF^*)R(\mu, -FF^*)\| \\ &= \mid \lambda-\mu \mid \|R(\lambda, -FF^*)\|\|R(\mu, -FF^*)\|.\end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad (3.5) se obtiene:

$$\|R(\lambda, -FF^*) - R(\mu, -FF^*)\| \leq \frac{\mid \lambda-\mu \mid}{\gamma^2}.$$

Esto demuestra que $R(\lambda, -\Pi_0^T)$ es una sucesión de cauchy de operadores lineales acotados, la cual converge cuando $\lambda \longrightarrow 0^+$ en la topologia uniforme de operadores.

La implicación 3) $\Rightarrow$ 4) es obvia

Finalmente para probar 4) $\Rightarrow$ 2), supongase:

$$\lambda\|R(\lambda, -FF^*)\| = \lambda\|(\lambda I + FF^*)^{-1}\| \longrightarrow 0, \ \textit{cuando}\ \lambda \longrightarrow 0^+.$$

En consecuencia:

$$\lambda^{\frac{1}{2}}\|(\lambda I + FF^*)^{\frac{-1}{2}}\| \longrightarrow 0, \quad \textit{cuando} \ \ \lambda \longrightarrow 0^+.$$

Esto implica, que si λ es suficientemente pequeño entonces:

$$\lambda^{\frac{1}{2}}\|(\lambda I + FF^*)^{\frac{-1}{2}}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.6}$$

Por otro lado, para todo $z \in X$, tenemos:

$$\|z\|^2 \ = \ \|(\lambda^{\frac{1}{2}}(\lambda I + FF^*)^{\frac{-1}{2}}(\lambda^{\frac{-1}{2}}(\lambda I + FF^*)^{\frac{1}{2}})z\|^2.$$

Luego, de (3.6) resulta que:

$$\|z\|^2 \leq \frac{1}{2}\|\lambda^{\frac{-1}{2}}(\lambda I + FF^*)^{\frac{1}{2}}z\|^2.$$

En consecuencia, de la desigualdad anterior se obtiene:

$$\|z\|^2 \leq \frac{1}{2}\langle \gamma^{-1}(\gamma I + FF^*)z, z\rangle,$$

lo cual implica:

$$\langle \gamma^{-1}(\gamma I + FF^*)z, z\rangle \geq 2\|z\|^2,$$

y por tanto:

$$\langle FF^*z, z\rangle \geq \gamma\|z\|^2 \Longleftrightarrow FF^* \geq \gamma I,$$

así queda demostrado el teorema. □

Teorema 3.0.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) ImF es denso en X.

2) $FF^* > 0$.

3) $\lambda R(\lambda, -FF^*)$ converge al operador cero cuando $\lambda \longrightarrow 0^*$ en la topología fuerte de operadores.

Demostración. ver [9]. □

A continuación daremos condiciones necesarias y suficientes para controlabilidad exacta y aproximada del sistema lineal estocástico. Probaremos que controlabilidad exacta del sistema lineal estocástico; invertibilidad del operador Π_0^T y convergencia uniforme del operador $\lambda R(\lambda, -\Pi_0^T)$ a cero son equivalentes.

De igual forma, probaremos que controlabilidad aproximada del sistema lineal estocástico; positividad del operador Π_0^T y convergencia fuerte de $\lambda R(\lambda, -\Pi_0^T)$ a cero son equivalentes.

Al siguiente teorema se le conoce como condición del rango.

Teorema 3.0.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) El sistema estocástico (3.1) es exactamente controlable en $[0, T]$.

2) $\Pi_0^T \geq \gamma I$.

3) $\lambda R(\lambda, -\Pi_0^T)$ converge a cero cuando $\lambda \longrightarrow 0^+$ en la topología uniforme de operadores.

4) El sistema determinístico (3.2) es controlable en cada $[s, T], 0 \leq s < T$.

5) El sistema estocástico (3.1) es exactamente controlable en cada $[0, s]$,
$0 \leq s < T$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supóngase que el sistema estocástico lineal (3.1) es exactamente controlable en $[0, T]$, es decir, $R_T(x_0) = L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$; así por definición de $R_T(x_0)$ se tiene que $ImL_0^T = L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$.

Por otro lado, sabemos que $\Pi_0^T = L_0^T (L_0^T)^*$, por lo que, se obtiene, del teorema 3.0.1 que $\Pi_0^T \geq 0$, es decir, existe $\gamma \geq 0$ tal que $\Pi_0^T \geq \gamma I$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supóngase que $\Pi_0^T \geq 0$, es decir, existe $\gamma \geq 0$ tal que:

$$\langle \Pi_0^T z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2 \quad \textit{para} \;\; \textit{todo} \;\; z \in Dom(\Pi_0^T).$$

Haciendo uso del ejemplo A.4.2 ver Curtain and H.J.Zwart, se tiene que Π_0^T es acotado e invertible.

En consecuencia, $\mathrm{Im}\Pi_0^T = L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$. Pero $\Pi_0^T = L_0^T (L_0^T)^*$, por lo que, se tiene $\mathrm{Im}\Pi_0^T \subset \mathrm{Im}L_0^T$, y por tanto

$$\mathrm{Im}L_0^T = L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n).$$

Luego, por definición de $R_T(x_0)$ se obtiene que el sistema estocástico lineal es exactamente controlable.

2) $\Longleftrightarrow$ 3) Se sigue directamente del teorema 3.0.1.

1) $\Rightarrow$ 4) Supóngase que el sistema estocástico (3.1) es exactamente controlable en $[0, T]$. Entonces por (2) para algún $\gamma > 0$ se tiene que:

$$E\langle \Pi_0^T z, z \rangle \geq \gamma E \|z\|^2, \tag{3.7}$$

para todo $z \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$. Por otro lado, dado $z \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$, existe un proceso $\varphi(.) = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^T \in L_2^{\mathfrak{F}}([0, T], L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n))$ tal que:

$$E\langle \Pi_0^T z, z \rangle = E\langle \Gamma_0^T E z + \sum_{i=1}^{k} \int_0^T \Gamma_\tau^T \varphi_i(\tau) dw_i(\tau), Ez + \sum_{i=1}^{k} \int_0^T \varphi_i(\tau) dw_i(\tau) \rangle \tag{3.8}$$

Ahora bien,si $z = h(w_1(s+\epsilon) - w_1(s))$,para $\epsilon > 0$ se tiene que:

$$\varphi_1(\tau) = \begin{cases} h, & 0 \leq s \leq \tau < s+\epsilon \text{ y } h \in \mathbb{R}^n \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\varphi_i(\tau) = 0, \quad i = 2,..,k, \quad \tau \in [0,T],$$

De (3.8) y linealidad de la Esperanza se obtiene:

$$E\langle \Pi_0^T z, z\rangle = \langle \Gamma_0^T Ez, Ez\rangle + E\sum_{i=1}^{k}\int_0^T \langle \Gamma_\tau^T \varphi_i(\tau), \varphi_i(\tau)\rangle d\tau. \tag{3.9}$$

Utilizando (3.7) se sigue que:

$$E\langle \Pi_0^T z, z\rangle = \langle \Gamma_0^T Ez, Ez\rangle + E\sum_{i=1}^{k}\int_0^T \langle \Gamma_\tau^T \varphi_i(\tau), \varphi_i(\tau)\rangle d\tau \geq \gamma E\|z\|^2.$$

De donde se tiene que: sigue

$$\frac{1}{\epsilon}\int_s^{s+\epsilon} \langle \Gamma_\tau^T h, h\rangle \geq \gamma \frac{1}{\epsilon}\int_s^{s+\epsilon} \|h\|^2 d\tau = \gamma \|h\|^2$$

Tomando límite cuando $\epsilon \to 0^+$ en la desigualdad anterior se concluye que:

$$\langle \Gamma_s^T h, h\rangle \geq \gamma \|h\|^2,$$

para todo $0 \leq s < t$ y para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Así, el sistema determinístico (3.2) es controlable en cada $[s,T]$, $0 \leq s < T$.

4) $\Rightarrow$ 5) Supóngase que el sistema determinístico (3.2) es controlable en cada $[s,T]$, $0 \leq s < T$, entonces la matriz Γ_s^T es invertible para todo $0 \leq s < T$. Definamos el operador $\Lambda_s^T : L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n) \to L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$ como

$$\Lambda_s^T z = (\Gamma_s^T)^{-1} E\{z/\mathfrak{F}_s\} + \int_s^T (\Gamma_\tau^T)^{-1}\varphi(\tau) dw(\tau).$$

Es claro que el operador Λ_s^T esta bien definido. Más aún, $(\Pi_s^T)^{-1} = \Lambda_s^T$. Por lo tanto, el sistema estocástico (3.1) es exactamente controlable en cada $[s,T]$, $0 \leq s < T$.

5) $\Rightarrow$ 1) Esta implicación es obvia.

De esta manera el teorema queda demostrado. $\square$

Capítulo 4

Controlabilidad de Sistemas Estocásticos Semilineales

En este capítulo se estudia en detalle la controlabilidad exacta y aproximada del sistema estocástico semilineal

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dx(t) & = & [Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t), u(t))]dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t); \\ x(0) & = & x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \tag{4.1}$$

con A y B matrices de dimensiones $n \times n$, $n \times m$ respectivamente,
$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma_1 : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y W es un proceso Wiener n-dimensional, vía aproximaciones del tipo Picard.

Para ello establecemos una serie de definiciones y notaciones, las cuales desde el punto de vista comparativo son análogas al caso de sistemas estocásticos lineales .

En este capítulo las siguientes notaciones son adoptadas:

- $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$:= El espacio de probabilidad con medida de probabilidad P en Ω.
- $\{\mathfrak{F}_t / t \in [0, T]\}$:= La filtración generada por $\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$ y $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_T$.
- $L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$:= El espacio de Hilbert de todas las variables aleatorias cuadrado integrables, $\mathfrak{F}_T$-medibles, con valores en $\mathbb{R}^n$
- $L_2^{\mathfrak{F}}([0, T], \mathbb{R}^n)$:= El espacio de Hilbert de todos los procesos cuadrado integrables, $\mathfrak{F}_t$-medibles con valores en $\mathbb{R}^n$.
- $C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P, X)$:= El espacio de Banach de las aplicaciones continuas de $[0, T]$ en $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P, X)$ satisfaciendo la condición $sup_{t \in [0,T]} E\|x(t)\|^2 < \infty$.

- X_s :=El espacio de Banach con norma topológica dada por $\|x\|_s^2 = sup_{t\in[0,s]}E\|x(t)\|^2$ el cual es un subespacio cerrado de $C([0,T], L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P, X))$ consistiendo de procesos $x(t)$ medibles y $\mathfrak{F}_t$-adaptados.
- U_s :=El espacio de Banach con norma topológica dada por $\|u\|_s^2 = sup_{t\in[0,s]}E\|u(t)\|^2$ el cual es un subespacio cerrado de $C([0,T], L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P, U))$ consistiendo de los procesos $U(t)$-medibles y $\mathbb{F}_t$-adaptados.
- $L(X,Y)$:=El espacio de todos los operadores lineales, acotados de un espacio de Banach X en otro espacio de Banach Y.
- $S(t) = exp(At)$, exponencial del operador A.

Ahora introducimos los siguientes operadores y conjuntos:

1. El operador $L_0^T \in \mathfrak{L}(L_2^{\mathfrak{F}}([0,T], \mathbb{R}^m), L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n))$ es definido por:
$$L_0^T u = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds.$$
El adjunto $(L_0^T)^* : L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2^{\mathfrak{F}}([0,T], \mathbb{R}^n)$ es definido por:
$$(L_0^T)^* z = B^* S^*(T-t) E\{z/\mathfrak{F}_t\}.$$
2. La matriz de controlabilidad $\Gamma_s^T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$
$$\Gamma_s^T = \int_s^T S(T-t)BB^*S^*(T-t)dt, \qquad 0 \le s < t$$
y el operador resolvente
$$R(\alpha, \Gamma_s^T) = (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}, \qquad 0 \le s \le T.$$
3. El conjunto de todos los estados dirigidos desde x_0 en tiempo $t > 0$
$$R_t(x_0) = \{x(t, x_0, u) : u(.) \in U_T\},$$
donde $x(t, x_0, u)$ es la solución del sistema semilineal estocástico (4.1) correspondiente a $x_0 \in \mathbb{R}^n, u(\cdot) \in U_T$.

Ahora por conveniencia adoptaremos las siguientes notaciones con respecto a los operadores antes mencionados:

$$M_B = \|B\|, \quad M_S = max\{\|S(t)\| : t \in [0,T]\}, \quad M_\Gamma = max\{\|\Gamma_s^T\| : s,t \in [0,T]\}.$$

Definición 4.0.1. *El sistema estocástico (4.1) es aproximadamente controlable en* $[0, T]$ *si:*

$$\overline{R_T(x_0)} = L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n),$$

esto es, si es posible dirigir el sistema desde un punto inicial x_0 dentro de una esfera de radio $\epsilon > 0$ y centro un punto final x, en el espacio estado $L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$ en un tiempo T.

Definición 4.0.2. *El sistema estocástico (4.1) es exactamente controlable en* $[0, T]$ *si:*

$$R_T(x_0) = L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n),$$

esto es, si todos los puntos en $L_2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^n)$ pueden ser alcanzados desde el punto x_0 en tiempo T.

Las siguientes condiciones son impuestas:

(H_1) para todo $x_1, x_2 \in X, u_1, u_2 \in U$ y $0 \leq t \leq T$

$$\|f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_2)\|^2 + \|\sigma(t, x_1, u_1) - \sigma(t, x_2, u_2)\|^2 \leq K(\|x_1 - x_2\|^2) + L(\|u_1 - u_2\|^2),$$

donde K y L son funciones decrecientes, concavas, continuas de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ tal que $K(0) = L(0) = 0$, $K(u) > 0$, $L(u) > 0$ para todo $u > 0$ y
$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{K(u) + L(u)} = \infty$$

(H_2) La función (f, σ) es continua en (x, u) para cada $t \in [0, T]$ y existen funciones $H : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ y $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:

$$\|f(t, x, u)\|^2 + \|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq H(\|x\|^2) + G(\|u\|^2),$$

para todo $t \in [0, T]$ y todo $(x, u) \in X \times U$.

Aquí H y G son funciones concavas decrecientes, tal que, para todo $\gamma > 0$, $\upsilon_0 > 0$ la ecuación integral:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \gamma \int_0^t [H(\upsilon(s)) + G(\upsilon(s))] ds,$$

tiene una solución global en $[0, T]$.

$(H_2)'$ La función (f, σ) es continua y existe $M_f > 0$ tal que:

$$\|f(t, x, u)\|^2 + \|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq M_f,$$

para todo $t \in [0, T]$ y todo $(x, u) \in X \times U$.

(H_3) El sistema lineal (3.1) es aproximadamente controlable.

(H_4) El sistema lineal (3.1) es exactamente controlable.

(H_5) A es no-negativo y auto-adjunto.

(H_6) BB^* es positivo, esto es, existe $\gamma_1 > 0$ tal que $\langle BB^*x, x\rangle \geq \gamma_1 \|x\|^2$.

(AC) $\|\alpha R(\alpha, \Gamma_0^T)\| \longrightarrow 0$ cuando $\alpha \longrightarrow 0^+$.

Note que las hipótesis (AC), (H_3) y (H_4) son equivalentes, ver teorema 3.0.3.

En el siguiente lema se encuentra una formula explicita del control que dirige el estado inicial x_0 en alguna vecindad de un punto final arbitrario h.

Lema 4.0.1. *Para $f(\cdot) \in L_2^{\mathfrak{F}}([0,T], \mathbb{R}^n)$ arbitraria, $\sigma(\cdot) \in L_2^{\mathfrak{F}}([0,T], \mathbb{R}^{n\times n})$, $h \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{R}^n)$ la función*

$$\begin{aligned} u^\alpha(t) &= B^*S^*(T-t)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) - B^*S^*(T-t)\times \\ &\int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} S(T-t) f(r)dr - B^*S^*(T-t)\times \\ &\int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{1} \times (S(T-t)\sigma(r) - \varphi(r))dw, \end{aligned} \tag{4.2}$$

dirige el sistema

$$\begin{aligned} x(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \\ &\int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s), \end{aligned} \tag{4.3}$$

de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a alguna vecindad de h en tiempo T y:

$$\begin{aligned} x_\alpha(T) &= h - \alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{1}(Eh - S(T)x_0) + \int_0^T \alpha(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} S(T-r) f(r)dr + \\ &\int_0^T (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}(S(T-r)\sigma(r) - \varphi(r))dw(r), \end{aligned}$$

donde h por el teorema de representación de martingala tiene la siguiente representación $h = Eh + \displaystyle\int_0^T \varphi(r)dw(r)$

Demostración. Sustituyendo (4.2) en (4.3) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
x_\alpha(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t B[B^*S^*(T-t)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) - \\
&\quad B^*S^*(T-s)\int_0^s (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dr - B^*S^*(T-s)\int_0^s (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}\times \\
&\quad (S(T-r)\sigma(r) - \varphi(r))dw(r)]ds + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dw(s) \\
&= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s) + \\
&\quad \int_0^t S(t-s)BB^*S^*(T-s)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)ds - \\
&\quad \int_0^t S(t-s)B[B^*S^*(T-s)\int_0^s (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dr]ds.
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando propiedad distributiva y el teorema de Fubinni en la igualdad anterior, resulta:

$$\begin{aligned}
x_\alpha(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-r)\sigma(s)dw(s) + \\
&\quad \int_0^t S(t-s)BB^*S^*(T-s)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)ds - \\
&\quad \int_0^t \int_r^t S(t-s)BB^*S^*(T-s)(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dsdr - \\
&\quad \int_0^t \int_r^t S(t-s)BB^*S^*(T-S)(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} \times (S(T-r)\sigma(r) - \varphi(r))dsdw(r).
\end{aligned}$$

Luego, considerando $t = T$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
x_\alpha(T) &= S(T)x_0 + \int_0^T S(T-s)f(s)ds + \int_0^T S(T-r)\sigma(s)dw(s) + \\
&\int_0^T S(T-s)BB^*S^*(T-s)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)ds - \\
&\int_0^T \int_r^T S(T-s)BB^*S^*(T-s)(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dsdr - \\
&\int_0^T \int_r^T S(T-s)BB^*S^*(T-S)(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} \times (S(T-r)\sigma(r) - \varphi(r))dsdw(r).
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la definición de matriz de controlabilidad $\Gamma_s^T, \ \ 0 \leq s < t$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
x_\alpha(T) &= S(T)x_0 + \int_0^T S(T-s)f(s)ds + \int_0^T S(T-s)\sigma(s)dw(s) + \\
&\Gamma_0^T(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) - \int_0^T \Gamma_r^T(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dr - \\
&\int_0^T \Gamma_r^T(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} \times (S(T-r)\sigma(r) - \varphi(r))dw(r).
\end{aligned}$$

Ahora bien, agrupando términos semejantes y sumando y restando el término $\int_0^T \varphi(r)dw(r)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
x_\alpha(T) &= (I - \Gamma_0^T(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1})S(T)x_0 + \int_0^T (I - \Gamma_r^T(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dr + \\
&\int_0^T (I - \Gamma_r^T(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} \times (S(T-r)\sigma(r) - \varphi(r))dw(r) + \int_0^T \varphi(r)dw(r) + \\
&\Gamma_0^T(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}Eh.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
(\alpha I + \Gamma_0^T)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} = I &\iff \alpha I(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} + \Gamma_0^T(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} = I \\
&\iff \alpha I(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} = I - \Gamma_0^T(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
x_\alpha(T) &= \Gamma_0^T(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}(-S(T)x_0+Eh)+S(T)x_0+\int_0^T\varphi(r)dw(r)+\\
&\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dr+\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}\times(S(T-r)\sigma(r)-\\
&\varphi(r))dw(r)+S(T)x_0+Eh-S(T)x_0-Eh\\
&= h+(\Gamma_0^T(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}-I)(-S(T)x_0+Eh)+\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dr\\
&+\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}\times(S(T-r)\sigma(r)-\varphi(r))dw(r).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $x_\alpha(T)$ esta en una vecindad de h. En efecto:

$$\begin{aligned}
E\|x_\alpha(T)-h\|^2 &= E\|-\alpha(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)+\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f_\alpha(r)dr\\
&+\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}(S(T-r)\times\sigma_\alpha(r)-\varphi_\alpha(r))dw(r)\|^2\\
&\leq E(\|-\alpha(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)\|+\|\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)\times\\
&f_\alpha(r)dr\|+\|\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}(S(T-r)\times\sigma_\alpha(r))\|+\\
&\|\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}\varphi_\alpha(r)dw(r)\|+\|\int_0^T\alpha(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}\varphi_\alpha(r)dw(r)\|.
\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ con $a>0$ y $b>0$, desigualdad de Holder y la propiedad (**iii**) del lema (1.2.2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&E\|x_\alpha(T)-h\|\leq 4\|\alpha R(\alpha,\Gamma_0^T)(Eh-S(T)x_0\|^2+4T\int_0^T E\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)S(T-r)\times\\
&f_\alpha(r)\|^2dr+4\int_0^T E\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)S(T-r)\sigma_\alpha(r)\|^2dr+4\int_0^T E\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\varphi(r)\|^2dr.
\end{aligned}$$

Haciendo uso de las propiedades de norma se sigue que:

$$\begin{aligned}
&E\|x_\alpha(T)-h\|\leq 4\|\alpha R(\alpha,\Gamma_0^T)\|^2\|Eh-S(T)x_0\|^2+\\
&4T\int_0^T\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2E\|S(T-r)f_\alpha(r)\|^2dr+4\int_0^T\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2E\|S(T-r)\sigma_\alpha(r)\|^2dr+
\end{aligned}$$

$$4\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 E\|\varphi(r)\|^2 dr.$$

Por otro lado, utilizando la linealidad de la esperanza y extrayendo factor común se obtiene:

$$E\|x_\alpha(T)-h\| \leq 4\|\alpha R(\alpha,\Gamma_0^T)\|^2\|Eh-S(T)x_0\|^2+4\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 E\|\varphi(r)\|^2 dr+$$

$$4(T+1)\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2\|S(T-r)\|^2[E(\|f_\alpha(r)\|^2+\|\sigma_\alpha(r)\|^2)]dr.$$

Utilizando la hipótesis $(H_2)'$, se obtiene de la desigualdad anterior:

$$E\|x_\alpha(T)-h\|^2 \leq 4\|\alpha R(\alpha,\Gamma_0^T)\|^2\|Eh-S(T)x_0\|^2+4\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 E\|\varphi(r)\|^2 dr+$$

$$4(T+1)M_f M_S^2\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 dr.$$

Como el sistema estocástico (3.1) es aproximadamente controlable por teorema 3.0.3 se tiene que el sistema determinístico (3.2) es controlable en cada $[r,T], 0 \leq r < T$; por tanto la matriz de controlabilidad es definida positiva en cada intervalo $[r,T], 0 \leq r < T$ así por teorema 3.0.1 se tiene que $\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 \longrightarrow 0$ cuando $\alpha \longrightarrow 0^+$ para todo $0 \leq r < T$.

Por otro lado, $\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 \leq 1, 0 \leq r < T$; para todo $\alpha > 0$.

Haciendo uso del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se obtiene que $E\|x_\alpha(T)-h\|^2 \longrightarrow 0$ cuando $\lambda \longrightarrow 0^+$.

De esta manera se completa la prueba. □

Lema 4.0.2. *Supóngase que las hipótesis* (H_4),(H_5) *y* (H_6) *se satisfacen. Entonces existe* $C > 0$ *tal que para todo* $g(\cdot) \in L_2^{\mathfrak{F}}(0,T,\mathbb{R}^n)$ *la siguiente desigualdad se satisface:*

$$\lim_{t\to T^-} E\int_0^T \|\Gamma_r^t S^*(T-t)(\Gamma_r^T)^{-1}S(t-r)g(r)\|^2 dr \leq C\int_0^T E\|g(r)\|^2 dr. \quad (4.4)$$

Demostración. Por hipótesis (H_4) el sistema estocástico lineal es exactamente controlable en $[0,T]$. Así, el sistema (3.2) por teorema 3.0.3 es exactamente controlable en cada sub-intervalo $[0,t], 0 \leq r < t \leq T$; esto es, existe constante $\gamma_{t,r} > 0$ tal que:

$$\langle \Gamma_r^t x, x\rangle \geq \gamma_{t,r}\|x\|^2.$$

En consecuencia, $\|(\Gamma_r^t)^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma_{t,r}}$. Probemos que existe una constante $C_1 > 0$ tal que:

$$\frac{1}{\gamma_{t,s}} \leq \frac{1}{C_1(t-s)} \tag{4.5}$$

En efecto, para probar (4.5) se hace uso de que el operador A es nonegativo y autoadjunto, y además de que el operador composición BB^* es positivo, esto es,

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_r^t x, x\rangle &= \int_r^t \langle S(t-s)BB^*S^*(t-s)x, x\rangle ds \\ &= \int_r^t \langle BB^*S^*(t-s)x, S^*(t-s)x\rangle ds \\ &= \int_r^t \|B^*S^*(t-s)x\|^2 ds. \end{aligned}$$

Por la hipótesis (H_6) se sigue que:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_r^t x, x\rangle &\geq \gamma_1 \int_r^t \langle S(t-s)S^*(t-s)x, x\rangle ds \\ &= \int_r^t \langle e^{2A(t-s)}x, x\rangle ds \\ &= \int_r^t \langle (I + 2A(t-s) + 2A^2(t-s)^2 ...)x, x\rangle ds \\ &= \gamma_1\|x\|^2(t-r) + \gamma_1 \int_r^t \langle (2A(t-s) + 2A^2(t-s)^2 + ...)x, x\rangle ds. \end{aligned}$$

Luego, por la hipótesis (H_5) se obtiene:

$$\langle \Gamma_r^t x, x\rangle \geq \gamma_1\|x\|^2(t-r).$$

Así, aplicando propiedad arquimediana, existe $C_1 > 0$ tal que:

$$\langle \Gamma_r^t x, x\rangle \geq C_1(t-r) \parallel x \parallel^2 \geq \gamma_r^t \parallel x \parallel^2, \quad C_1 \leq \gamma_1.$$

Así basta considerar $\gamma_{t,r} = C_1(t-r)$. Esto conlleva a que:

$$\begin{aligned} \int_0^t E\|\Gamma_r^t S^*(T-t)(\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)g(r)\|^2 dr &\leq M_S^4 M_\Gamma^2 \int_0^t (t-r)^2 \frac{1}{\gamma_{T,r}^2} E\|g(r)\|^2 dr \\ &= \frac{M_S^4 M_\Gamma^2}{C_1^2} \int_0^t \frac{(t-r)^2}{(T-r)^2} E\|g(r)\|^2 dr. \end{aligned}$$

Luego, por propiedades de integrales definidas se obtiene

$$\int_0^t E\|\Gamma_r^t S^*(T-t)(\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)g(r)\|^2 dr \leq \frac{M_S^4 M_\Gamma^2}{C_1^2} \int_0^T E\|g(r)\|^2 dr \tag{4.6}$$

Tomando limite en (4.6) cuando $t \longrightarrow T^-$, la desigualdad (4.4) con $C = (M_S^4 M_\Gamma^2)/C_1^2$ es obtenida. $\square$

4.1. Controlabilidad Via Tipo Aproximación de Picard.

En esta sección derivaremos algunas condiciones de controlabilidad para el sistema estocástico (4.1).

En primer lugar, se define el operador $\mathfrak{F}_\alpha$ de $X_T \times U_T$ en si mismo, para $\alpha > 0$, dado como sigue:

$$\mathfrak{F}_\alpha(x, u) = (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \tag{4.7}$$

donde:

$$\mathbf{z(t)} = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-r)Bw(r)dr + \int_0^t S(t-r)f(r)dr + \int_0^t S(t-r)\sigma(r)dw(r),$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{w(t)} &= B^*S^*(T-t)[(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) + \int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}\varphi(r)dw(r)] \\ &\quad -B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} S(T-r)f(r)dr \\ &\quad -B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} \times S(T-r)\sigma(r)dw(r)\end{aligned}$$

y $\varphi \in L_2^{\mathfrak{F}}([0,T], \mathbb{R}^{n\times n})$ satisface que $h = Eh + \int_0^T \varphi(r)dw(r)$, para $h \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{R}^n)$. Sera demostrado que el sistema (4.1) es aproximadamente controlable si para todo $\alpha > 0$ existe un punto fijo del operador $\mathfrak{F}_\alpha$. Para demostrar esto aplicaremos el metodo de aproximación de tipo Picard al operador definido por (4.7). En efecto,

$$x_0 = S(t)x_0$$

$$\begin{aligned}x_{n+1}(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-r)Bu_{n+1}(r)dr + \int_0^t S(t-r)f_n(r)dr + \\ &\quad \int_0^t S(t-r)\sigma_n(r)dw(r) \qquad (3)\end{aligned}$$

$$u_0(t) = B^*S^*(T-t)[(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) + \int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}\varphi(r)dw(r)]$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= B^*S^*(T-t)[(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) + \int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}\varphi(r)dw(r)] \\ & -B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} \times S(T-r)f_n(r)dr \\ & -B^*S^*(T-t) \times \int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} S(T-r)\sigma_n(r)dw(r) \qquad (4) \end{aligned}$$

Lema 4.1.1. *Si las hipótesis (H1) y (H2) se cumplen, entonces el operador* $\mathfrak{F}_\alpha$ *esta bien definido y existen constantes* $M_T(\alpha), K_1(\alpha), K_2(\alpha) > 0$ *tal que si* $(x_1, u_1), (x_2, u_2) \in X_T \times U_T$ *entonces:*

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1) - \mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq M_T(\alpha)\int_0^t K(\sup_{0\leq r\leq s} E\|x_1(r)-x_2(r)\|^2)ds$$
$$+M_T(\alpha)\int_0^t L(\sup_{0\leq r\leq s} E\|u_1(r)-u_2(r)\|^2)ds,$$

y

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2 \leq K_1(\alpha) + K_2(\alpha)\{\int_0^t H(\sup_{0\leq r\leq s} E\|x_1\|^2)ds + \int_0^t G(\sup_{0\leq r\leq s} E\|u_1\|^2)ds\},$$

para cada $t \in [0,T]$*, donde:*

$$M_T(\alpha) = max\{\frac{2}{\alpha^2}M_B^2M_S^4 + \frac{6}{\alpha^2}M_B^4M_S^6T + 3M_S^2, \frac{6}{\alpha^2}M_S^6M_B^4T^3 + 3TM_S^2 + \frac{2}{\alpha^2}M_S^4M_B^2T^2\}.$$
$$K_1(\alpha) = 4M_S^2E\|x_0\|^2 + \{\|Eh\|^2 + M_S^2E\|x_0\|^2 + \int_0^t E\|\varphi\|^2dr\} +$$
$$(\frac{12}{\alpha^2}M_S^4M_B^4T + \frac{3}{\alpha^2}M_S^2M_B^2).$$
$$K_2(\alpha) = (\frac{12}{\alpha^2}M_B^4M_S^6T + 4M_S^2 + \frac{3}{\alpha^2}M_S^4M_B^2)max\{T,1\}.$$

Demostración. Veamos primeramente, que la diferencia de las imagenes de dos puntos cualquiera en $X_T \times U_T$, mediante el operador $\mathfrak{F}_\alpha$ esta acotada. En efecto:

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 &= \sup_{0\leq s\leq t}\|(z_1,w_1)-(z_2,w_2)\|_t\\ &= \sup_{0\leq s\leq t}\|(z_1-z_2,w_1-w_2)\|_t\\ &= \sup_{0\leq s\leq t}E\|z_1(s)-z_2(s)\|^2+\sup_{0\leq s\leq t}E\|w_1(s)-w_2(s)\|^2.\end{aligned}$$

Por definición de $z_1(s)$, $z_2(s)$, $w_1(s)$ y $w_2(s)$ se obtiene:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 = \sup_{0\leq s\leq t}E(\|\int_0^s S(s-r)B(w_1(r)-w_2(r))dr+$$
$$\int_0^s S(s-r)(f_1(r)-f_2(r))dr+\int_0^s S(s-r)(\sigma_1(r)-\sigma_2(r))dw(r)\|^2)+$$
$$\sup_{0\leq s\leq t}E\|B^*S^*(T-s)\int_0^s(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)(f_1(r)-f_2(r))dr+$$
$$B^*S^*(T-s)\int_0^s(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}\times S(T-r)(\sigma_1(r)-\sigma_2(r))dr\|^2 \quad (4.8)$$

En lo que sigue consideraremos la siguiente notación:

$$A(r)=S(s-r)B(w_1(r)-w_2(r)).$$

$$B(r)=S(s-r)(f_1(r)-f_2(r)).$$

$$C(r)=S(s-r)(\sigma_1(r)-\sigma_2(r)).$$

$$D(r)=(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)(f_1(r)-f_2(r)).$$

$$E(r)=(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1}\times S(T-r)(\sigma_1(r)-\sigma_2(r)).$$

Ahora bien, haciendo uso de la desigualdad triangular, de la igualdad (4.8) se obtiene:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq \sup_{0\leq s\leq t}E(\|\int_0^s A(r)dr\|+\|\int_0^s B(r)dr\|+\|\int_0^s C(r)dw(r)\|)^2+$$
$$\sup_{0\leq s\leq t}E(\|B^*S^*(T-s)\int_0^s D(r)dr\|^2+\|B^*S^*(T-s)\int_0^s E(r)dr\|)^2.$$

Aplicando la propiedad $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$, la linealidad de la esperanza y propiedades del supremo se obtiene:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq 3\sup_{0\leq s\leq t}E\|\int_0^s A(r)dr\|^2+3\sup_{0\leq s\leq t}E\|\int_0^s B(r)dr\|^2+$$

$$3 \sup_{0\leq s\leq t} E\|\int_0^s C(r)dw(r)\|^2 + 2 \sup_{0\leq s\leq t} E\|B^*S^*(T-s)\int_0^t D(r)dr\|^2 +$$

$$2 \sup_{0\leq s\leq t} E\|B^*S^*(T-s)\int_0^s E(r)dr\|^2.$$

Luego, por propiedades de la integral se tiene:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq 3E\|\int_0^t A(r)dr\|^2+3E\|\int_0^t B(r)dr\|^2+3E\|\int_0^t C(r)dw(r)\|^2+$$

$$2E\|B^*S^*(T-s)\int_0^t D(r)dr\|^2 + 2E\|B^*S^*(T-s)\int_0^s E(r)dr\|^2.$$

Aplicando la definición de norma en $L_2(\Omega)$, la definición de M_S, M_B y el hecho que $\|(\alpha I+\Gamma_r^T)^{-1})\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$ con $\alpha > 0$, se obtiene que:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq 3M_S^2M_B^2\int_0^t E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2dr+3E\int_0^T\|\int_0^t B(r)dr\|^2dt+$$

$$3M_S^2E\int_0^t \|\sigma_1(r)-\sigma_2(r)\|^2dr + 2E\int_0^T \|B^*S^*(T-t)\int_0^t D(r)dr\|^2dt$$

$$+\frac{2}{\alpha^2}M_B^2M_S^4E\int_0^T \|(\sigma_1(r)-\sigma_2(r))\|^2dr.$$

Luego, reemplazando $B(r)$, $D(r)$, aplicando la desigualdad de Holder y resolviendo las operaciones algebraicas resulta:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 = 3M_S^2M_B^2\int_0^t E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2dr+3TM_S^2E\int_0^t \|(f_1(r)-$$

$$f_2(r))\|^2dr+3M_S^2E\int_0^t \|(\sigma_1(r)-\sigma_2(r))\|^2dr+\frac{2}{\alpha^2}M_B^2M_S^4T^2E\int_0^t \|(f_1(r)-f_2(r))\|^2dr+$$

$$\frac{2}{\alpha^2}M_B^2M_S^4E\int_0^t \|(\sigma_1(r)-\sigma_2(r))\|^2dr.$$

Ahora bien, estudiemos el termino $\displaystyle\int_0^t E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2dr$.

Por propiedades de la integral sabemos que para $t < T$:

$$\int_0^t E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2dr \leq \int_0^T E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2dr = TE\|w_1(r)-w_2(r)\|^2.$$

Por otro lado:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2 = E\|B^*S^*(T-r)[(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)+$$
$$\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\varphi(t)dw(t)] - B^*S^*(T-r)\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)f_1(t)dt-$$
$$-B^*S^*(T-r)\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\times S(T-t)\sigma_1(t)dw(t) - (B^*S^*(T-r)$$
$$[(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)+\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\varphi(t)dw(t)] - B^*S^*(T-r)$$
$$\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)f_2(t)dt - B^*S^*(T-r)\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)\sigma_2(t)dw(t)\|^2.$$

Aplicando propiedad distributiva, obtenemos:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2 = E\|B^*S^*(T-r)(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)+$$
$$B^*S^*(T-r)\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\varphi(t)dw(t) - B^*S^*(T-r)\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)f_1(t)dt$$
$$-B^*S^*(T-r)\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\times S(T-t)\sigma_1(t)dw(t) - B^*S^*(T-r)(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}$$
$$(Eh-S(T)x_0) - B^*S^*(T-r)\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\varphi(t)dw(t) + B^*S^*(T-r)$$
$$\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)f_2(t)dt + B^*S^*(T-r)\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)\sigma_2(t)dw(t)\|^2.$$

Así:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2 = E\|B^*S^*(T-r)[\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)(f_2(t)-f_1(t))dt]+$$
$$B^*S^*(T-r)[\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\times S(T-t)(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))dw(t)]\|^2.$$

Por desigualdad triangular, se obtiene:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2 \le E(\|B^*S^*(T-r)[\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)(f_2(t)-f_1(t))dt]\|+$$
$$\|B^*S^*(T-r)[\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\times S(T-t)(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))dw(t)]\|)^2.$$

Aplicando la propiedad $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$, resulta:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2 \le E(2\|B^*S^*(T-r)[\int_0^r (\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)(f_2(t)-f_1(t))dt]\|^2+$$

$$2\|B^*S^*(T-r)[\int_0^r(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\times S(T-t)(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))dw(t)]\|^2).$$

Luego, por definición de norma de $L_2(\Omega)$ y linealidad de la esperanza se tiene que:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2\leq E(2\int_0^T\|B^*S^*(T-r)[\int_0^r(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)(f_2(t)-$$

$$-f_1(t))dt]\|^2d\hat{t}+E(2\|B^*S^*(T-r)[\int_0^r(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\times S(T-t)(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))dw(t)]\|^2).\quad(5)$$

Haciendo uso de la desigualdad de Holder en la desigualdad (5) se obtiene:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2\leq E(2\int_0^T\|B^*S^*(T-r)\|^2d\hat{t}\int_0^T\|\int_0^r(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}S(T-t)$$

$$(f_2(t)-f_1(t))dt]\|^2d\hat{t}+E(2\|B^*S^*(T-r)[\int_0^r(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\times S(T-t)$$

$$[(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))dw(t)]\|^2).$$

Por propiedades de norma y resolviendo los calculos anteriores resulta:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2\leq 2T\|B^*\|^2\|S^*\|^2T\int_0^r\|(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\|^2\|S(T-t)\|^2$$

$$\|(f_2(t)-f_1(t))\|^2dt+2\|B^*\|^2\|S^*\|^2E\|\int_0^r(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\times S(T-t)(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))dw(t)\|^2.$$

Por el lema 1.2.2 parte (**iii**) y del hecho que $\|(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\|\leq\dfrac{1}{\alpha}$ se obtiene:

$$E\|w_1(r)-w_2(r)\|^2\leq\frac{2}{\alpha^2}T^2M_B^2M_S^4E\int_0^r\|(f_2(t)-f_1(t))\|^2dt+$$

$$\frac{2}{\alpha^2}M_B^2M_S^4E\int_0^r\|(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))\|^2dt.\quad(4.9)$$

Ahora bien, reemplazando (4.9) en (4.8), se tiene:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2\leq 3M_S^2M_B^2T(\frac{2}{\alpha^2}T^2M_B^2M_S^4E\int_0^r\|(f_2(t)-f_1(t))\|^2dt+$$

$$\frac{2}{\alpha^2}M_B^2M_S^4E\int_0^r\|(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))\|^2dt)+3TM_S^2E\int_0^t\|(f_1(r)-f_2(r))\|^2dr$$

$$+3M_S^2E\int_0^t\|(\sigma_1(t)-\sigma_2(t)\|^2dr+\frac{2}{\alpha^2}M_S^4M_B^2T^2E\int_0^t\|(f_1(r)-f_2(r))\|^2dr+$$

$$\frac{2}{\alpha^2}M_B^2M_S^4E\int_0^t\|(\sigma_1(t)-\sigma_2(t))\|^2dr.$$

Por tanto:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq \frac{6}{\alpha^2}M_S^6M_B^4T^3E\int_0^r\|(f_2(t)-f_1(t))\|^2dt+$$
$$\frac{6}{\alpha^2}M_B^4M_S^6TE\int_0^r\|\sigma_2(t)-\sigma_1(t)\|^2dt+3TM_S^2E\int_0^t\|(f_1(r)-f_2(r))\|^2dr+$$
$$3M_S^2E\int_0^t\|(\sigma_1(r)-\sigma_2(r)\|^2dr+\frac{2}{\alpha^2}M_S^4M_B^2T^2E\int_0^t\|f_1(r)-f_2(r)\|^2dr+$$
$$\frac{2}{\alpha^2}M_S^4M_B^2E\int_0^t\|\sigma_1(r)-\sigma_2(r)\|^2dr.$$

Por agrupación de términos semejantes resulta:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq (\frac{6}{\alpha^2}M_S^6M_B^4T^3+3TM_S^2+\frac{2}{\alpha^2}M_S^4M_B^2T^2)$$
$$E\int_0^t\|(f_1(r)-f_2(r))\|^2dr+(\frac{2}{\alpha^2}M_S^4M_B^2+\frac{6}{\alpha^2}M_B^4M_S^6T+3M_S^2)E\int_0^t\|\sigma_1(r)-\sigma_2(r)\|^2dr.$$

Luego, por la hipótesis general se obtiene:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq M_T(\alpha)\{E\int_0^t\|(f_1(r)-f_2(r))\|^2dr+E\int_0^t\|\sigma_1(r)-\sigma_2(r)\|^2dr\}.$$

Haciendo uso tanto de la linealidad de la esperanza como la definición de norma en los espacios X y U y la hipótesis (H_1) se sigue que:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)-\mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \leq M_T(\alpha)\{\int_0^t K(\sup_{0\leq r\leq s}E\|x_1(r)-x_2(r)\|^2)ds+$$
$$\int_0^t L(\sup_{0\leq r\leq s}E\|u_1(r)-u_2(r)\|^2)ds\}.$$

De esta manera queda demostrada la primera parte del teorema.

Por otro lado:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2=\|(z_1(s),w_1(s)\|_t^2=\sup_{0\leq s\leq t}E\|z_1(s)\|^2+\sup_{0\leq s\leq t}E\|w_1(s)\|^2$$
$$=\sup_{0\leq s\leq t}E(\|S(t)x_0+\int_0^s S(s-r)Bw_1(r)dr+\int_0^s S(s-r)f_1(r)dr+$$
$$\int_0^s S(s-r)\sigma_1(r)dw_1(r)\|^2)+\sup_{0\leq s\leq t}E(\|B^*S^*(T-s)[(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)+$$

$$\int_0^s (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}\varphi(r)dw_1(r)] - B^*S^*(T-s)\int_0^s (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f_1(r)dr-$$
$$B^*S^*(T-s)\int_0^s (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} \times S(T-r)\sigma_1(r)dw_1(r)\|^2.$$

Luego, por propiedades de la integral y aplicando desigualdad triangular, resulta:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2 \leq E(\|S(t)x_0\| + \|\int_0^t S(t-s)Bw_1(s)ds\| + \|\int_0^t S(t-s)f_1(s)ds\| +$$
$$\|\int_0^t S(t-s)\sigma_1(s)dw_1(s)\|)^2 + E(\|B^*S^*(T-t)[(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)+$$
$$\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}\varphi(s)dw_1(s)]\| + \|B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f_1(s)ds\| +$$
$$\|B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} \times S(T-t)\sigma_1(s)dw_1(s)\|)^2.$$

Aplicando las propiedades:

$$(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2.$$

$$(a+b+c+d)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + d^2,$$

se obtiene:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2 \leq E(4\|S(t)x_0\|^2 + 4\|\int_0^t S(t-s)Bw_1(s)ds\|^2 + 4\|\int_0^t S(t-s)f_1(s)ds\|^2 +$$
$$4\|\int_0^t S(t-s)\sigma_1(s)dw_1(s)\|^2) + E(3\|B^*S^*(T-t)[(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)+$$
$$\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}\varphi(s)dw_1(s)]\|^2 + 3\|B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f_1(s)ds\|^2 +$$
$$3\|B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} \times S(T-t)\sigma_1(s)dw_1(s)\|)^2.$$

Aplicando la definición de norma en $L_2(\Omega)$, el lema 1.2.2 parte (**iii**), la linealidad de la esperanza y resolviendo las operaciones se tiene que:

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2 \;\leq\; & 4M_S^2E\|x_0\|^2+4M_S^2M_B^2E\int_0^t\|w_1(s)\|^2ds+4TM_S^2E\|\int_0^t f_1(s)ds\|^2+\\ & 4M_S^2E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds+3M_S^2M_B^2\{\frac{1}{\alpha^2}(\|Eh\|^2+M_S^2E\|x_0\|^2)+\\ & \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t E\|\varphi(s)\|^2ds\}+\frac{3}{\alpha^2}TM_S^4M_B^2E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+\\ & 3M_B^2M_S^4\frac{1}{\alpha^2}E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora bien, estudiemos el termino $E\int_0^t\|w_1(s)\|^2ds$.

$$E\int_0^t\|w_1(s)\|^2ds\leq E\int_0^T\|w_1(s)\|^2dt\leq TE\|w_1(s)\|.$$

Por los calculos anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned}& E\|w_1(s)\|^2\leq 3M_S^2M_B^2\{\frac{1}{\alpha^2}(\|Eh\|^2+M_S^2E\|x_0\|^2)+\frac{1}{\alpha^2}\int_0^t E\|\varphi(s)\|^2ds\}+\\ & \qquad \frac{3}{\alpha^2}TM_S^4M_B^2E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+3M_B^2M_S^4\frac{1}{\alpha^2}E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds\end{aligned} \tag{4.11}$$

así reemplazando (4.11) en (4.10), resulta:

$$\begin{aligned}& \|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2\leq 4M_S^2E\|x_0\|^2+4M_S^2M_B^2T(3M_S^2M_B^2\{\frac{1}{\alpha^2}(\|Eh\|^2+M_S^2E\|x_0\|^2)+\\ & \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t E\|\varphi(s)\|^2ds\}+\frac{3}{\alpha^2}TM_S^4M_B^2E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+3M_B^2M_S^4\frac{1}{\alpha^2}E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds+\\ & 4TM_S^2E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+4M_S^2E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds+3M_S^2M_B^2\{\frac{1}{\alpha^2}(\|Eh\|^2+M_S^2E\|x_0\|^2)+\\ & \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t E\|\varphi(s)\|^2ds\}+\frac{3}{\alpha^2}TM_S^4M_B^2E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+M_B^2M_S^4\frac{3}{\alpha^2}E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds.\end{aligned}$$

Resolviendo las operaciones anteriores se obtiene:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2=4M_S^2E\|x_0\|^2+\frac{12}{\alpha^2}M_S^4M_B^4T((\|Eh\|^2+M_S^2E\|x_0\|^2)+$$

$$\frac{12}{\alpha^2}M_S^4M_B^4T\int_0^t E\|\varphi(s)\|^2ds+\frac{12}{\alpha^2}M_S^6M_B^4T^2E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+$$
$$\frac{12}{\alpha^2}M_S^6M_B^4TE\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds+4TM_S^2E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+4M_S^2E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds+$$
$$\frac{3}{\alpha^2}M_S^2M_B^2(\|Eh\|^2+M_S^2E\|x_0\|^2)+\frac{3}{\alpha^2}M_S^2M_B^2\int_0^t E\|\varphi(s)\|^2ds+$$
$$\frac{3}{\alpha^2}TM_S^4M_B^2E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+M_B^2M_S^4\frac{3}{\alpha^2}E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds.$$

Agrupando terminos semejantes resulta:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2=4M_S^2E\|x_0\|^2+(\frac{12}{\alpha^2}M_S^4M_B^4T+\frac{3}{\alpha^2}M_S^2M_B^2)\{\|Eh\|^2+M_S^2E\|x_0\|^2+$$
$$\int_0^t E\|\varphi(s)\|^2ds\}+(\frac{24}{\alpha}M_S^6M_B^4T^2+4TM_S^2+\frac{6}{\alpha}TM_S^4M_B^2)E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+$$
$$(\frac{12}{\alpha^2}M_S^6M_B^4T+4M_S^2+\frac{3}{\alpha^2}M_S^4M_B^2)E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds.$$

Luego, por linealidad de la esperanza,la hipotesis (H2) y la definición de norma en X_T y U_T se obtiene:

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1)\|_t^2 &\leq K_1(\alpha)+K_2(\alpha)\{E\int_0^t\|f_1(s)\|^2ds+E\int_0^t\|\sigma_1(s)\|^2ds\}\\ &\leq K_1(\alpha)+K_2(\alpha)\{E\int_0^t H(\|x_1\|^2)+G(\|u_1\|^2)\}\\ &= K_1(\alpha)+K_2(\alpha)\{\int_0^t H(\sup_{0\leq r\leq s}E\|x_1(r)\|^2)+\int_0^t G(\sup_{0\leq r\leq s}E\|u_1(r)\|^2)ds\}.\end{aligned}$$ $\square$

Lema 4.1.2. *Bajo las condiciones* (H_1)-(H_2) *la sucesión* (x_n,u_n) *es acotada en* $X_t\times U_t$

Demostración. Por lema (4.1.1) para algún $n\geq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}\|(x_{n+1},u_{n+1})\|_t^2 &= \sup_{0\leq s\leq t}E\|x_{n+1}(s)\|^2+\sup_{0\leq s\leq t}E\|u_{n+1}(s)\|^2\\ &\leq k_1+k_2\{\int_0^t H(\sup_{0\leq r\leq s}E\|x_n(r)\|^2)ds+\int_0^t G(\sup_{0\leq\leq r\leq s}E\|u_{n+1}(r)\|^2)ds\},\end{aligned}\tag{4.12}$$

donde k_1,k_2 son constantes positivas independientes de n.

Sea $\nu(t)$ una solución global de la ecuación:

$$\nu(t)=\nu_0+k_2\{\int_0^t H(\nu(s))ds+\int_0^t G(\nu(s))ds\},$$

con una condición inicial $\nu_0 > max(k_1, \|(x_0,u_0)\|_T^2)$. Probaremos por inducción matemática que:

$$\|(x_n,u_n)\|_t^2 \leq \nu(t), t\in[0,T]. \tag{4.13}$$

Para $n=0$ la desigualdad (4.13) se obtiene de la definición de ν.

Ahora supóngase que

$$\|(x_n,u_n)\|_t^2 \leq \nu(t), t\in[0,T].$$

Entonces por (4.13) obtenemos que:

$$\nu(t)-\|(x_{n+1},u_{n+1})\|_t^2 \geq k_1+k_2\{\int_0^t [H(\nu(s))+\int_0^t G(\nu(s))ds\}-k_1$$
$$-k_2\{\int_0^t H(\sup_{0\leq r\leq s} E\|x_n(r)\|^2)]ds+\int_0^t G(\sup_{0\leq r\leq s} E\|u_{n+1}(r)\|^2)ds\}.$$

Así, se obtiene que:

$$\nu(t)-\|(x_{n+1},u_{n+1})\|_t^2 \geq k_2\{\int_0^t [H(\nu(s))-H(\sup_{0\leq r\leq s} E\|x_n(r)\|^2)]ds$$
$$+\int_0^t [G(\nu(s))-G(\sup_{0\leq r\leq s} E\|u_{n+1}(r)\|^2)ds\}\geq 0.$$

Esta desigualdad se sigue de (4.12),(4.13) y del hecho que tanto H como G son crecientes. □

Teorema 4.1.1. *Bajo las condiciones (H_1), (H_2) la suceción (x_n,u_n) es una suceción de cauchy en $X_T\times U_T$.*

Demostración. Sean:

$$r_n(t)=\sup_{m\geq n}\|(x_m,u_m)-(x_n,u_n)\|_t^2$$

$$p_n(t)=\sup_{m\geq n}\|x_m-x_n\|_t^2$$

$$q_n(t)=\sup_{m\geq n}\|u_m-u_n\|_t^2.$$

Las funciones $r_n(t),p_n(t),q_n(t)$ estan bien definidas, son uniformemente acotadas y evidentemente monotonas no-decrecientes.

Ya que $\{r_n(t) : n \geq 0\}$, $\{p_n(t) : n \geq 0\}$, $\{q_n(t) : n \geq 0\}$ son monotonas no-decrecientes para cada $t \in [0,T]$ existe una función no-decreciente $(r(t), p(t), q(t))$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} (r_n(t), p_n(t), q_n(t)) = (r(t), p(t), q(t)).$$

Por lema (4.1.1) obtenemos que:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_m, u_m) - \mathfrak{F}_\alpha(x_n, u_n)\|_t^2 \leq M_T(\alpha) \int_0^t K(\sup_{0\leq r\leq s} E\|x_{m-1}(r) - x_{n-1}(r)\|^2)ds +$$
$$M_T(\alpha) \int_0^t L(\sup_{0\leq r\leq s} E\|u_{m-1}(r) - u_{n-1}(r)\|^2)ds$$

del cual se sigue que:

$$r(t) \leq p_n(t) + q_n(t) = r_n(t) = \sup_{m\geq n}(\|(x_m, u_m) - (x_n, u_n)\|_t^2) \leq \sup_{m\geq n}(M_T(\alpha)$$
$$\int_0^t K(\sup_{0\leq r\leq s} E\|x_{m-1}(r) - x_{n-1}(r)\|^2)ds + M_T(\alpha) \int_0^t L(\sup_{0\leq r\leq s} E\|u_{m-1}(r) - u_{n-1}(r)\|^2)ds).$$

Luego, por propiedades de supremo se tiene:

$$r_n(t) \leq \sup_{m\geq n}(M_T(\alpha) \int_0^t K(\sup_{0\leq s\leq t} E\|x_{m-1}(s) - x_{n-1}(s)\|^2)ds + M_T(\alpha) \int_0^t L(\sup_{0\leq s\leq t} E\|u_{m-1}(s) -$$
$$u_{n-1}(s)\|^2)ds).$$

Haciendo uso de la continuidad de K y L, de la desigualdad anterior resulta:

$$r_n(t) \leq (M_T(\alpha) \int_0^t K(\sup_{m\geq n}(\sup_{0\leq s\leq t} E\|x_{m-1}(s) - x_{n-1}(s)\|^2))ds +$$
$$M_T(\alpha) \int_0^t L(\sup_{m\geq n}(\sup_{0\leq s\leq t} E\|u_{m-1}(s) - u_{n-1}(s)\|^2))ds.$$

Por definición de $p_n(t)$ obtenemos:

$$r_n(t) \leq M_T(\alpha) \int_0^t K(p_{n-1}(s))ds + M_T(\alpha) \int_0^t L(q_{n-1}(s))ds.$$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene:

$$\begin{aligned} r(t) &\leq p(t) + q(t) \\ &\leq M_T(\alpha) \int_0^t K(p(s))ds + M_T(\alpha) \int_0^t L(q(s))ds. \end{aligned}$$

Ahora si $w = p + q$ entonces:

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq M_T(\alpha)[K(p(t)) + L(q(t))] \\ &\leq M_T(\alpha)[K(w(t)) + L(w(t))] \\ &= M_T(\alpha)V(w(t)) \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde $V(w(t)) = K(w(t)) + L(w(t))$, así de (4.14)obtenemos:

$$\int_{\epsilon}^{t} \frac{w'(s)ds}{V(w(s))} \leq M_T(\alpha)(t - \epsilon) \tag{4.15}$$

Definamos el siguiente operador $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{V(u)},$$

para x_0 fijo. Tenemos que:

$$\begin{aligned} G(w(t)) - G(w(\epsilon)) &= \int_{x_0}^{w(t)} \frac{du}{V(u)} - \int_{x_0}^{w(\epsilon)} \frac{du}{V(u)} \\ &= \int_{x_0}^{w(t)} \frac{du}{V(u)} + \int_{w(\epsilon)}^{x_0} \frac{du}{V(u)} \\ &= \int_{w(\epsilon)}^{w(t)} \frac{du}{V(u)} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Luego, de (4.15) y (4.16) se obtiene que:

$$G(w(t)) - G(w(\epsilon)) \leq M_T(\alpha)(t - \epsilon),$$

ó equivalentemente,

$$G(w(t)) \leq G(w(\epsilon))M_T(\alpha)(t - \epsilon).$$

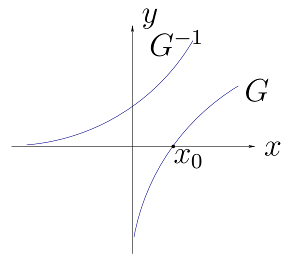
En consecuencia, aplicando inversa de G se tiene que:

$$w(t) \leq G^{-1}(G(w(\epsilon)) + M_T(\alpha)(t - \epsilon)). \tag{4.17}$$

Por otro lado, G es una aplicación creciente, continua y tal que $G(x_0) = 0$. Más aún, para valores $x < x_0$, G tiende a $-\infty$.Además

$$G'(x) = \frac{1}{V(x)} = \frac{1}{K(x) + L(x)}.$$

Así,que G' es decreciente en todo los reales positivos.



Para fijar idea, consideremos el grafico descrito arriba.

Esto implica que, dado w es continua y $w(0) = 0$, podemos escojer al ϵ suficientemente pequeño tal que $w(\epsilon) < x_0$, y por tanto obtener que:

$$G(w(\epsilon)) \to -\infty. \tag{4.18}$$

Así, de (4.17) y (4.18) se obtiene que $w(t) \leq 0$.

En consecuencia, $w(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Pero:

$$\|(x_m, u_m) - (x_n, u_n)\|_t^2 \leq p_n(T) + q_n(T) \to w(T) = 0.$$

Así:

$$\|(x_m, u_m) - (x_n, u_n)\|_t^2 \to 0, \quad cuando \quad n, m \to \infty.$$

$\square$

Corolario 4.1.1. *Bajo las hipótesis* (H_1) *y* (H_2)*, para cualquier par de puntos* $(x_n, u_n), (x_m, u_m) \in X_T \times U_T$*,se satisface*

$$\| \ (x_m, u_m) - (x_n, u_n)\|_t^2 = 0,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Teorema 4.1.2. *Bajo las hipótesis* (H_1) , (H_2) *el operador (4.7) tiene un unico punto fijo.*

Demostración. Por lema (4.1.2) la sucesión (x_n, u_n) es de cauchy en $X_T \times U_T$. La completitud de $X_T \times U_T$ implica la existencia de un proceso $(x, u) \in X_T \times U_T$ tal que:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|(x_n, u_n) - (x, u)\|_T^2 = 0.$$

Ahora bien, deseamos probar que existe un unico $(x, u) \in X_T \times U_T$ tal que:

$$\mathfrak{F}_\alpha(x, u) = (x, u).$$

Por otro lado sabemos que:

$$\mathfrak{F}_\alpha(x,u) = (z,w),$$

donde:

$$z(t) = S(T)x_0 + \int_0^t S(t-r)Bw(r)dr + \int_0^t S(t-r)f_1(r)dr + \int_0^t S(t-r)\sigma_1(r)dw(r),$$

y

$$w(t) = B^*S^*(T-t)[(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) + \int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}\varphi(r)dw(r)] -$$
$$B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-s)f(r)dr - B^*S^*(T-t)\times$$
$$\int_0^t (\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1} \times S(T-r)\sigma(r)dw(r).$$

Tomando el limite cuando $n \longrightarrow \infty$ en (3) y (4), y haciendo uso de la continuidad de f y de σ se obtiene que (x_{n+1}, u_{n+1}) converge a (z,w). Por otro lado (x_n, u_n) converge a (x,u), por unicidad de limite obtenemos que $(z,w) = (x,u)$; por tanto hemos probado que el operador $\mathfrak{F}_\alpha, \alpha > 0$ tiene un punto fijo en $X_T \times U_T$.

Ahora probaremos la unicidad de dicho punto.

Para ello supóngamos que $(x_1,u_1),(x_2,u_2) \in X_T \times U_T$ son dos puntos fijos de $\mathfrak{F}_\alpha$.

Entonces por lema (4.1.1) obtenemos que:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1) - \mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_t^2 \le M_T(\alpha)\int_0^t K(\sup_{0\le r\le s} E\|x_1(r) - x_2(r)\|^2)ds +$$
$$M_T(\alpha)\int_0^t L(\sup_{0\le r\le s} E\|u_1(r) - u_2(r)\|^2)ds.$$

Por el corolario (4.1.1) obtenemos que:

$$\|\mathfrak{F}_\alpha(x_1,u_1) - \mathfrak{F}_\alpha(x_2,u_2)\|_T^2 = 0,$$

se sigue que $(x_1,u_1) = (x_2,u_2)$ en $X_T \times U_T$.

Así, $\mathfrak{F}_\alpha$ tiene un unico punto fijo. $\square$

Si $\alpha = 0$ el operador no-lineal $\mathfrak{F}_0$ es definido por

$$\mathfrak{F}_0(x,u) = (z,w),$$

donde:

$$z(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-r)Bw(r)dr + \int_0^t S(t-r)f(r)dr + \int_0^t S(t-r)\sigma(r)dw(r),$$

$$w(t) = B^*S^*(T-t) \times [(\Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) + \int_0^t (\Gamma_r^T)^{-1}\varphi(r)dw(r)] -$$

$$B^*S^*(T-t)\int_0^t (\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dr - B^*S^*(T-t)\int_0^t (\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)\sigma(r)dw(r).$$

Teorema 4.1.3. *Supóngase que las hipótesis* (H_1), (H_2) *y* (H_4) *se satisfacen. Entonces el operador* $\mathfrak{F}_0$ *tiene un punto fijo.*

Demostración. La demostración es similar a la del teorema (4.1.2). □

Teorema 4.1.4. *Supóngase que las hipótesis* (H_1), $(H_2)'$ *y* (H_3) *se satisfacen. Entonces el sistema (4.1) es aproximadamente controlable.*

Demostración. Sea (x_α, u_α) un punto fijo de $\mathfrak{F}_\alpha$ en $X_T \times U_T$.

Por lema (4.0.1), x^α satisface la siguiente igualdad:

$$x_\alpha(T) = h - \alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) + \int_0^T \alpha(\alpha I + \Gamma_r^T)S(T-t)f(r)dr$$

$$+ \int_0^T \alpha(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}(S(T-t) \times \sigma(r) - \varphi(r))dw(r). \tag{4.19}$$

Por (4.19) y la hipótesis (H_2),

$$E\|x_\alpha(T) - h\|^2 = E\| - \alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)$$

$$+ \int_0^T \alpha(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f_\alpha(r)dr$$

$$+ \int_0^T \alpha(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}(S(T-r) \times \sigma_\alpha(r) - \varphi_\alpha(r)dw(r)\|^2.$$

Aplicando desigualdad triangular en la desigualdad anterior se obtiene:

$$E\|x_\alpha(T) - h\|^2 \leq E(\| - \alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)\| + \|\int_0^T \alpha(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}$$

$$S(T-r)f_\alpha(r)dr\| + \|\int_0^T \alpha(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}(S(T-r) \times \sigma_\alpha(r)\|$$

$$+\| \int_0^T \alpha(\alpha I + \Gamma_r^T)^{-1}\varphi_\alpha(r))dw(r)\|)^2.$$

Utilizando la propiedad $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ con $a>0$ y $b>0$, desigualdad de Holder y la propiedad (**iii**) del lema (1.2.2) se obtiene:

$$E\|x_\alpha(T)-h\| \leq 4\|\alpha R(\alpha,\Gamma_0^T)(Eh - S(T)x_0\|^2 +$$

$$4T\int_0^T E\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)S(T-r)f_\alpha(r)\|^2 dr + 4\int_0^T E\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)S(T-r)\sigma_\alpha(r)\|^2 dr +$$

$$4\int_0^T E\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\varphi(r)\|^2 dr.$$

Haciendo uso de las propiedades de norma se sigue que:

$$E\|x_\alpha(T)-h\| \leq 4\|\alpha R(\alpha,\Gamma_0^T)\|^2\|Eh - S(T)x_0\|^2 +$$

$$4T\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 E\|S(T-r)f_\alpha(r)\|^2 dr + 4\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 E\|S(T-r)\sigma_\alpha(r)\|^2 dr$$

$$+4\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 E\|\varphi(r)\|^2 dr.$$

Por otro lado, utilizando la linealidad de la esperanza y extrayendo factor común se obtiene:

$$E\|x_\alpha(T)-h\| \leq 4\|\alpha R(\alpha,\Gamma_0^T)\|^2\|Eh-S(T)x_0\|^2 + 4\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 E\|\varphi(r)\|^2 dr$$

$$4(T+1)\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2\|S(T-r)\|^2[E(\|f_\alpha(r)\|^2 + \|\sigma_\alpha(r)\|^2)]dr.$$

Utilizando la hipótesis $(H_2)'$ y la definición de M_S se obtiene:

$$E\|x_\alpha(T)-h\|^2 \leq 4\|\alpha R(\alpha,\Gamma_0^T)\|^2\|Eh-S(T)x_0\|^2 + 4\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 E\|\varphi(r)\|^2 dr +$$

$$4(T+1)M_f M_S^2\int_0^T \|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 dr.$$

Como el sistema estocástico (3.1) es aproximadamente controlable por teorema 3.0.3 se tiene que el sistema determinístico (3.2) es controlable en cada $[r,T], 0 \leq r < T$; por tanto la matriz de controlabilidad es definida positiva en cada $[r,T], 0 \leq r < T$ así por teorema 3.0.1 se tiene que $\|\alpha R(\alpha,\Gamma_r^T)\|^2 \longrightarrow 0$ cuando $\alpha \longrightarrow 0^+$ para todo $0 \leq r < T$.

Por otro lado, $\|\alpha R(\alpha, \Gamma_r^T)\|^2 \leq 1, 0 \leq r < T$; para todo $\lambda > 0$.

Haciendo uso del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se obtiene que $E\|x_\alpha(T) - h\|^2 \longrightarrow 0$ cuando $\lambda \longrightarrow 0^+$. Esto da la controlabilidad aproximada. $\square$

Teorema 4.1.5. *Supóngase que las hipótesis* (H_1), (H_2), (H_3), (H_4), (H_5), (H_6) *se satisfacen. Entonces el sistema (4.1) es exactamente controlable.*

Demostración. Por teorema (4.1.3), el operador $\mathfrak{F}_\alpha$ tiene un punto fijo. Por tanto el control:

$$u_0(t) = B^*S^*(T-t)(\Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) - B^*S^*(T-t)\int_0^t (\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)$$

$$f(r)dr - B^*S^*(T-t) \times \int_0^t (\Gamma_r^T)^{-1}(S(T-r)\sigma(r) - \varphi(r))dw(r),$$

transfiere el sistema (4.1) de x_0 a h.

Así el teorema es probado. $\square$

Bibliografía.

[1] Alabert. Aureli . Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Departamento de Matemática. Universidad Autonoma de Barcelona. Cali, enero de 2004.

[2] Curtain. Ruth F. and Pritchard. A. J. Analysis in Modern Applied Mathematics. Academic Press. New York, 1977.

[3] Curtain. R. J. and Zwart. H.J.. An Introductión to infinite- Dimensional Linear Systems Theory. Sprinnger- Verlag, 1995.

[4] Kreyszig Erwin. Introductory Funtional Analysis With application. Wiley Classics Library, 1989.

[5] Lawrence. C. Evans. An introduction to stochastic Difeferntial Equations, versión 1,2.

[6] Mahmudov. N.I. and Denker. A. On Controllability of linear stochastic systems, Turkey, 2000.

[7] Mahmudov. N.I. and Zorlu.S. Contollability of semilinear stochastic systems, Turkey, junio 2005.

[8] Mahmudov. Nazim Idrisoglu. Controllability of semilinear stochastic systems, mayo 2001

[9]Oksendal Bernt. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Sixth Edition. Blindern. March 2003.