

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Postgrado



“ACERCA DEL ACOPLAMIENTO GRANDE DE LA FAMILIA
LOGÍSTICA”

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO POR

LIC. JESÚS A. SILVA Y.

COMO REQUISITO FINAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAGISTER SCIENTIARUM

MENCIÓN MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS.

TUTOR: DR. NEPTALÍ J. ROMERO B.

Barquisimeto, Venezuela. Octubre de 2011

*A Dios primeramente y a aquellos seres
tan amados a quienes debo mi ser.*

AGRADECIMIENTOS

De forma muy especial quiero agradecer hoy y siempre a mis padres, que si no fuese por el esfuerzo realizado por ellos, mis estudios no hubiesen sido posible.

De igual manera quiero expresar especial gratitud a los doctores Neptalí Romero y Ramón Vivas, por su amistad incondicional, paciencia, esfuerzo y dedicación . Sus conocimientos en el campo de la investigación han sido imprescindibles para llevar a término el presente trabajo.

Por último, quiero expresar mi sentimiento de aprecio y amistad a mis eternos amigos: Dexy, Jorge M, María, Dicmar, Manuel, Alexander; gracias a todos.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
1. Introducción	1
2. Nociones Básicas	6
2.1. Propiedades Básicas	6
2.2. Espacio de parámetros	10
2.3. Curvas en el espacio de parámetros.	11
3. Variedades invariantes	14
3.1. El infinito es un atractor	14
3.2. Espacio de Curvas	16
3.3. Existencia de una Curva Invariante	20
3.3.1. Curva invariante: Caso $1 < \mu \leq \mu_3(\epsilon)$	22
3.3.2. Curva invariante. Caso $\mu_1\epsilon < \mu < 4$	26
4. Experimentación numérica.	30
Referencias Bibliográficas	33

1

Introducción

La mayoría de los fenómenos, o procesos que involucran cambios de estado en el tiempo son estudiados mediante ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) cuando se trata de una evolución temporal continua, o mediante la iteración de transformaciones cuando tal evolución ocurre a tiempo discreto. La teoría matemática de los sistemas dinámicos constituye en la actualidad una de las principales herramientas para abordar esta clase de estudios, pues el objetivo fundamental de esta teoría es describir (en diferentes contextos) el comportamiento asintótico de las órbitas de un sistema.

Varios modelos matemáticos de dinámica discreta, incluso los provenientes de diferentes procesos de discretización de ecuaciones diferenciales, conducen a una clase especial de sistemas dinámicos, conocidos en la actualidad como *sistemas dinámicos en retículos* (SDR) (lattices dynamical systems), los cuales aparecieron hace alrededor de cinco décadas y desde entonces tienen un especial rol en el estudio de propiedades dinámicas de fenómenos tales como en dinámica de fluidos y en general de los denominados *sistemas espacialmente extendidos*.

Para definir un SDR se requiere de varios ingredientes: una colección numerable (finita o no) de índices I ; para cada $i \in I$ se tiene un espacio topológico (X_i, T_i) , generalmente métrico y compacto, cada X_i es denominado espacio fase de componentes locales, el producto $\prod_{i \in I} X_i = X$ es conocido como el espacio de fase del SDR; por otro lado, para cada $i \in I$ existe una transformación $T_i : X_i \rightarrow X_i$ que define la dinámica local en cada espacio fase de componentes locales X_i ; así $T : X \rightarrow X$ está definido para cada $x = (x_i)_{i \in I}$ de X como:

$$T(x) = (T_i(x_i))_{i \in I},$$

que es la ley de transformación global del sistema dinámico discreto (X, T) .

Como una clase especial de SDR están los *mapas acoplados en retículos* (CML, coupled maps lattices). Tales sistemas espacialmente extendidos fueron introducidos, de manera independiente y simultánea, a comienzos de la década de 1980 por tres diferentes vías, y por igual número de destacados científicos: K. Kaneko, R. Kapral y S. Kusnetsov. Es notablemente curioso que estos introdujeron el mismo modelo para tres diferentes propósitos; en efecto, los CML fueron introducidos inicialmente para modelar la dinámica de sistemas espacialmente extendidos en química (Kapral), también para desarrollar una teoría de grupos de renormalización en sistemas espacialmente extendidos proveniente de circuitos eléctricos (Kusnetsov). En cuanto que Kaneko, uno de los más prolíficos en el área, consideró los CML como una herramienta poderosa para el estudio de la dinámica de los sistemas dinámicos extendidos en contextos más generales y de cualquier naturaleza; ver [5], [6] y [7].

Las ecuaciones diferenciales parciales son usualmente empleadas para describir fenómenos en sistemas espacio-temporales; sin embargo, el estudio analítico de sus soluciones presenta grandes dificultades metodológicas en sistemas con comportamiento complejo; esto hace que básicamente buena parte de los resultados teóricos en esa dirección estén restringidos a encontrar soluciones particulares, estudiar su estabilidad y en ciertas ocasiones estimar la dimensión de los atractores. Por otra parte, dado que la simulación numérica ha ganado respetable consideración como herramienta estratégica para el estudio de sistemas dinámicos en general, y como los CML son expresados en términos de la iteración de un determinado número (generalmente finito) de variables, permitiendo convenientes manipulaciones numéricas y computacionales, entonces los CML se pre-

sentan como modelos básicos en el análisis de la dinámica de sistemas espacialmente extendidos, ello debido a su naturaleza discreta en su evolución temporal y continua en lo espacial.

De forma vulgar un CML es un SDR en el que los espacios fase de componentes locales y sus correspondientes dinámicas son coincidentes; además, existe una iteración de un cierto número de componentes locales. Más específicamente la formulación precisa de un CML, ver [1], es como sigue: sean (X_i, T_i) con $i \in I$ una colección de sistemas dinámicos discretos coincidentes; es decir, $X_i = X_j$; y $T_i = T_j$ para todo $i, j \in I$; sean $T : X \rightarrow X$ el producto de tales dinámicas locales y $J : X \rightarrow X$ la interacción entre las componentes locales, la cual se supone idéntica sobre la diagonal de X , esto es, $J(x) = x$ para todo $x \in X$ con $x_i = x_j$ para cada $i, j \in I$ siendo que $x = (x_i)_{i \in I}$. Entonces el CML por ellos generado es la transformación $\widehat{T} : X \rightarrow X$ dada por la composición $\widehat{T} = J \circ T$.

Las transformaciones de iteración entre componentes locales más populares son las expresadas mediante el acoplamiento de rango finito $r \geq 1$ del tipo:

$$J_\epsilon(x)_i = (1 - \epsilon)x_i + \epsilon \sum_{l=-r}^r a_l x_{i+l}, \quad (1.1)$$

donde $\epsilon > 0$ es la fuerza (strength) de interacción, también conocido como parámetro de acoplamiento, el cual es supuesto, generalmente por razones físicas, en el intervalo $(0, 1)$, cada constante $a_l \geq 0$ con $\sum_{l=-r}^r a_l = 1$ y cada componente x_l de x es un número real, o más generalmente vectores en un espacio vectorial real. Claramente, para una tal interacción entre componentes locales, si T es la dinámica local, entonces el sistema de ecuaciones en diferencia:

$$x_i^n = (1 - \epsilon)T(x_i^{n-1}) + \epsilon \sum_{l=-r}^r a_l T(x_{i+l}^{n-1}), \quad n \geq 1 \quad (1.2)$$

describe la dinámica del CML generado por J_ϵ y T ; esto es:

$$\widehat{T}(x)_i = (1 - \epsilon)T(x_i) + \epsilon \sum_{l=-r}^r a_l T(x_{i+l}), \quad i \in I; \quad (1.3)$$

el cual también es conocido como acoplamiento difusivo. Cuando el conjunto de índices I tiene cardinal finito k , son impuestas condiciones periódicas de frontera, esto se traduce

en

$$x_{mk+j} = x_j, \text{ para todo } m \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq j < k.$$

Un caso particular de CML, ampliamente empleado para distintos fines, lo constituye cuando la dinámica local está dada por el mapa logístico $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, con $\mu > 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Esta clase especial de CML es conocida como *acoplamiento del mapa logístico*.

En este trabajo consideramos el acoplamiento como en (1.1), donde $r = 1$, $a_{-1} = a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y además se impondrán condiciones periódicas de frontera. Bajo tales consideraciones, el mapa logístico acoplado a estudiar es dado por el sistema de ecuaciones en diferencia:

$$\begin{cases} x_n = (1 - \epsilon)f_\mu(x_{n-1}) + \epsilon f_\mu(y_{n-1}) \\ y_n = (1 - \epsilon)f_\mu(y_{n-1}) + \epsilon f_\mu(x_{n-1}) \end{cases}, n \geq 1. \quad (1.4)$$

Observe que las soluciones de (1.4) están en correspondencia biunívoca con las órbitas del endomorfismo biparamétrico del plano:

$$F_{\mu,\epsilon}(x, y) = ((1 - \epsilon)f_\mu(x) + \epsilon f_\mu(y), (1 - \epsilon)f_\mu(y) + \epsilon f_\mu(x)); \quad (1.5)$$

además, el comportamiento asintótico de las soluciones es (1.4) es descrito por la dinámica de $F_{\mu,\epsilon}$.

El comportamiento asintótico de las soluciones de (1.4), y por lo tanto la dinámica del endomorfismo $F_{\mu,\epsilon}$, con $\mu > 1$ y $\epsilon \in [0, 1]$ ha sido objeto de estudio en varias investigaciones en las que se describen algunas de sus propiedades dinámicas y ergódicas; tenemos por ejemplo que en [2] y [3], Dobrinskiy, realiza estimaciones sobre la determinación del conjunto de órbitas acotadas de $F_{\mu,\epsilon}$; además, señala regiones del espacio fase en la cual existen atractores; W. W. Lin et al, ver [8] y [9], estudian algunas propiedades elementales sobre la sincronización de las órbitas de $F_{\mu,\epsilon}$; en [4], Fernandez y Jian, en un contexto que incluye el mapa logístico para algunos de los valores de los parámetros μ y ϵ , estudian propiedades relativas a la existencia de órbitas asintóticamente periódicas. Mientras que Kaneko, ver [7], muestra algunas estimaciones numéricas referentes a algunas propiedades ergódicas y a la existencia de atractores. Más recientemente, en [11] y [12], N. Romero, A. Rovella y R. Vivas muestran, para el endomorfismo (1.5, en el espacio de parámetros arriba indicado, la existencia variedades invariantes mediante

las cuales se describe la cuenca de atracción del atractor en el infinito; además, esto permite una descripción de la frontera de tal cuenca. Las propiedades dinámicas descritas en [11] y [12] son bastante más amplias y rigurosas que las similares en [2], [3], [8] y [9]; de hecho, debido a interpretaciones físicas es notable encontrar, en la literatura existente sobre el tema, una fuerte restricción del parámetros μ al intervalo $(1, 4]$ y del espacio fase a $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Los resultados obtenidos en [11] y [12], además de ser mas precisos en la determinación de la frontera del conjunto de puntos con órbita acotada, el valor del parámetro μ varía en $(1, +\infty)$.

Acá estudiamos algunas propiedades dinámicas para el endomorfismo dado por (1.5) cuando $(\mu, \epsilon) \in (1, +\infty) \times (1, +\infty)$ como las abordadas y descritas tanto en la Tesis Doctoral de R. Vivas [12], como en el artículo [11], donde la descripción dinámica se hace para el caso en que $\epsilon \in (0, 1)$; específicamente se muestran propiedades relativas a: la hiperbolicidad del endomorfismo y la existencia de curvas invariantes que determinan la frontera del conjunto de puntos con órbita acotada; además, esto permite una descripción de la frontera de la cuenca del atractor en el ∞ .

Vale la pena resaltar la importancia de la experimentación numérica, pues mediante la misma se plantearon conjeturas, se rechazaron otras y se hicieron observaciones que permitieron llegar a los resultados expuestos en la presente disertación, en particular: la existencia de la curva invariante, el proceso de fractalización cuando se aumenta el valor del parámetro μ y dejando al parámetro ϵ fijo, la existencia de componentes de la cuenca del infinito en el interior de la curva $\widehat{\Gamma}$ para algunos valores en el espacio de parámetros con $\mu \leq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon}$.

2

Nociones Básicas

2.1. Propiedades Básicas

En esta sección se presentarán algunas propiedades básicas del endomorfismo $F_{\mu,\epsilon}$ referentes a la existencia de puntos fijos, así como también sobre su conjunto de puntos críticos y de valores críticos, mediante los cuales se limita la imagen del plano por $F_{\mu,\epsilon}$.

Una simple cuenta muestra que el endomorfismo $F_{\mu,\epsilon}$ siempre tiene dos puntos fijos en la diagonal Δ de \mathbb{R}^2 :

$$O = (0, 0) \text{ y } P_\mu = \left(\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu}\right) \text{ para } \mu \neq 0.$$

Para ciertos valores en los parámetros μ y ϵ , se demuestra la existencia de otros dos puntos fijos, los cuales se disponen de manera simétrica respecto de la diagonal Δ de \mathbb{R}^2 y ubicados sobre la recta $x + y = k$, donde

$$k = 1 - \frac{1}{\mu(1-2\epsilon)};$$

de hecho, tales puntos fijos (p_+, p_-) y (p_-, p_+) , son determinados por:

$$p_{\pm} = \frac{k\mu \pm \sqrt{2(\mu-1)\mu k - \mu^2 k^2}}{2\mu}. \quad (2.1)$$

Observación 2.1. Es fácil verificar que cuando $(\mu, \epsilon) \in [1, +\infty) \times (-\infty, 0)$, tales puntos fijos existen siempre que $\mu \geq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon}$.

Un rol fundamental en nuestro análisis de la dinámica de (1.5) lo tienen:

- el punto fijo $P_{\mu} = \left(\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu}\right)$.
- los autovalores asociados a P_{μ} : $\lambda_1 = 2 - \mu$ y $\lambda_2 = (2 - \mu)(1 - 2\epsilon)$;
- el conjunto crítico de $F_{\mu, \epsilon}$ y sus imágenes; estos son respectivamente:
- $\ell_1 = \{(\frac{1}{2}, y) : y \in \mathbb{R}\}$ y $\ell_2 = \{(x, \frac{1}{2}) : x \in \mathbb{R}\}$,
- $L_1 = F_{\mu, \epsilon}(\ell_1) = \{(x, y) : y = \frac{1-\epsilon}{\epsilon}x - \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}\mu; x \geq \frac{\mu}{4}\}$, y
- $L_2 = F_{\mu, \epsilon}(\ell_2) = \{(x, y) : y = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}x + \frac{1-2\epsilon}{4(1-\epsilon)}\mu; x \leq \frac{\mu}{4}\}$.

Se puede demostrar de manera sencilla que la imagen de \mathbb{R}^2 por $F_{\mu, \epsilon}$ viene dada por $C_{\mu, \epsilon} = C_1 \cap C_2$, donde

- $C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}x + \frac{1-2\epsilon}{4(1-\epsilon)}\mu \right\}$; y
- $C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{1-\epsilon}{\epsilon}x + \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}\mu \right\}$.

Observe que $C_{\mu, \epsilon}$ está limitado por L_1 y L_2 y que puntos que están fuera de $C_{\mu, \epsilon}$ no tienen preimagen; más aun si $(w, z) \in C_{\mu, \epsilon}$, entonces los puntos (x, y) tales que $F_{\mu, \epsilon}(x, y) = (w, z)$, están determinados por (x_{\pm}, y_{\pm}) , donde:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{(1-2\epsilon)\mu}((1-\epsilon)w - \epsilon z)} \right] \quad \text{y} \quad (2.2)$$

$$y_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{(1-2\epsilon)\mu}((1-\epsilon)z - \epsilon w)} \right]. \quad (2.3)$$

También es simple verificar:

- las preimágenes del origen son: $O = (0, 0)$, $S = (1, 0)$; $S_1 = (1, 1)$ y $S_2 = (0, 1)$;
- el punto $R = (\frac{\mu}{4}, \frac{\mu}{4}) = L_1 \cap L_2$, vértice de $C_{\mu,\epsilon}$, tiene como preimagen a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \ell_1 \cap \ell_2$;
- cada punto de $L_1 \setminus \{R\}$ tiene dos preimágenes, ambas ubicadas sobre ℓ_1 y simétricas respecto de ℓ_2 ;
- cada punto de $L_2 \setminus \{R\}$ tiene dos preimágenes, ambas ubicadas sobre ℓ_2 y simétricas respecto de ℓ_1 ;
- cada punto del interior de $C_{\mu,\epsilon}$ tiene exactamente cuatro preimágenes dispuestas simetricamente de ℓ_1 y ℓ_2 .

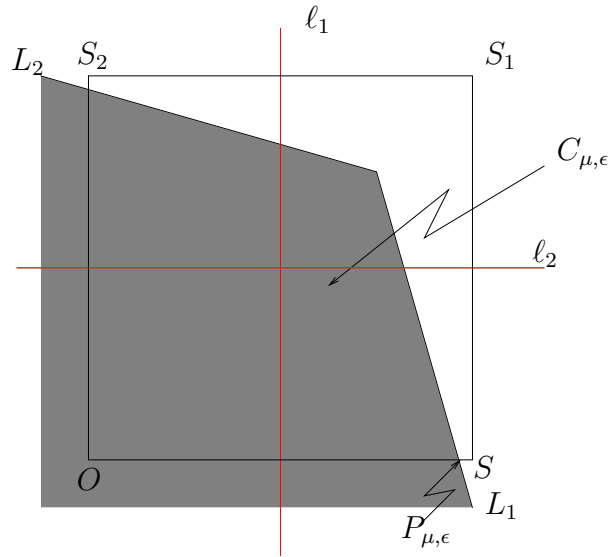


Figura 2.1: Conjuntos críticos, valores críticos e imagen del plano.

Ahora bien, si consideremos una curva que conecte a $L_1 \setminus \{R\}$ y $L_2 \setminus \{R\}$, la cual tiene solo dos puntos sobre tales rectas (sus extremos), y el resto está en el interior de $C_{\mu,\epsilon}$, entonces usando los hechos expuestos en la parte de arriba se demuestra que la preimagen de tal curva es una curva cerrada, que además es simétrica respecto de ℓ_1 y ℓ_2 y contiene en su interior al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ como se observa en la figura (2.2)

De igual manera, si consideramos una curva simple contenida totalmente en $C_{\mu,\epsilon}$, de manera que ambos puntos extremos estén sobre una de las líneas $L_1 \setminus \{R\}$ ó $L_2 \setminus \{R\}$,

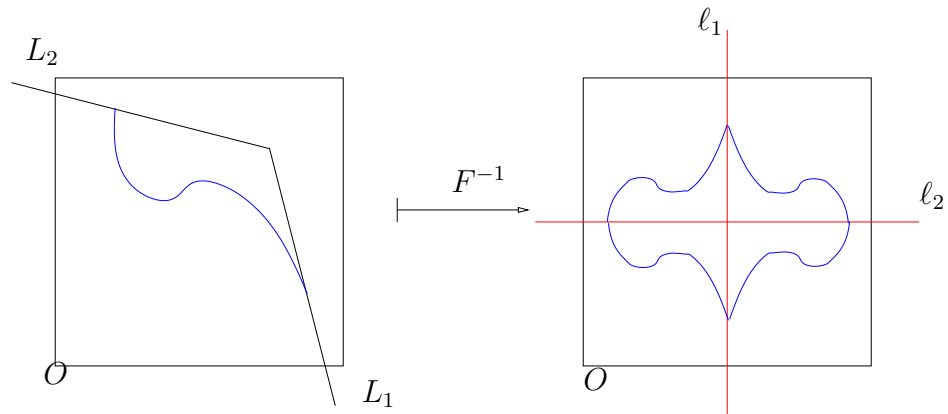


Figura 2.2: Preimagen por $F_{\mu,\epsilon}$ de una curva que une a L_1 y L_2 .

entonces su preimagen son dos curvas de Jordan (simples y cerradas) que intersectan ambas a ℓ_1 o ℓ_2 , según sea el caso, como se observa en la siguiente figura:

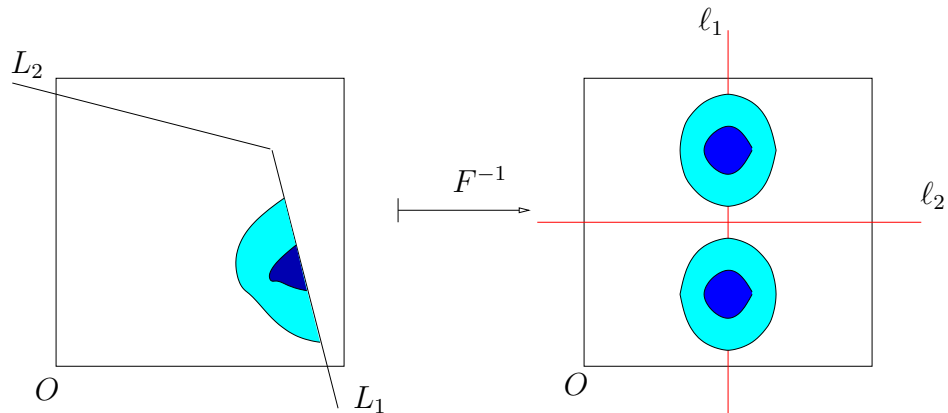


Figura 2.3: Preimagen por $F_{\mu,\epsilon}$ de dos curvas cuyos extremos están en L_1 .

En consecuencia, queda establecida la forma que presenta la preimagen de cualquier conjunto conexo, debido a que puntos del exterior de $C_{\mu,\epsilon}$ no tiene primágenes bajo $F_{\mu,\epsilon}$. Por ejemplo en la figura que sigue, se muestra la preimagen, por $F_{\mu,\epsilon}$ de un conjunto conexo. Se observa que la intersección de este conjunto con $C_{\mu,\epsilon}$ son dos piezas disjuntas; una de ellas tiene parte de su frontera sobre L_2 y no intersecta a L_1 , por tal motivo la preimagen de esta pieza son dos piezas sobre ℓ_2 y simétricas respecto de ℓ_1 . La frontera de la otra pieza contiene tres curvas; dos de ellas conectan mediante sus extremos a L_1 y L_2 y sus preimágenes son como las ilustradas en la figura (2.2), mientras que la otra curva es como la ilustrada en la figura (2.3).

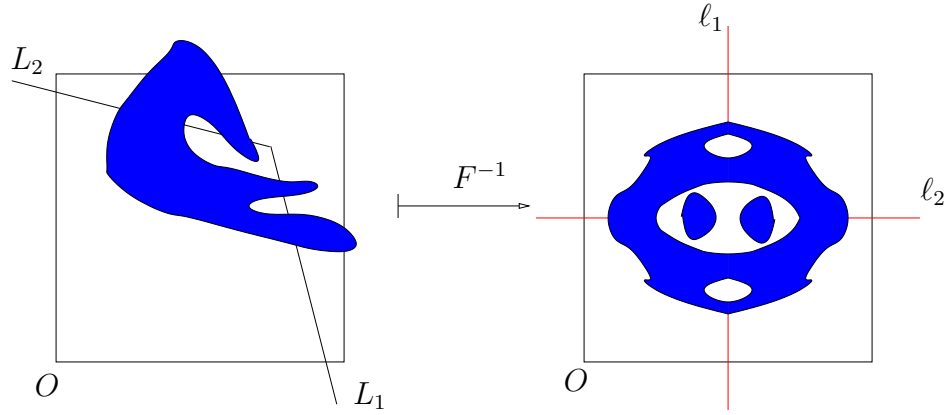


Figura 2.4: Preimagen por $F_{\mu,\epsilon}$ de una curva que une a L_1 y L_2 .

2.2. Espacio de parámetros

En esta sección se justifica la restricción del estudio del endomorfismo $F_{\mu,\epsilon}$ en el espacio de parámetros a $(\mu, \epsilon) \in (1, +\infty) \times (-\infty, 0)$.

Proposición 1. *Para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $\mu < 1$, con $\mu \neq 0$, se tiene que $F_{\mu,\epsilon}$ y $F_{2-\mu,\epsilon}$ son topológicamente conjugados.*

Demostración.

Con el fin de obtener una conjugación lineal entre $F_{\mu,\epsilon}$ y $F_{2-\mu,\epsilon}$ considere el cambio de variable $X = \alpha x + \beta$ donde $\alpha \neq 0$. Luego si hacemos $x_1 = f_\mu(x)$, entonces se tiene que:

$$X_1 = \alpha f_\mu(x) + \beta = \frac{\mu}{\alpha} X [(\alpha + 2\beta) - X] - \frac{\mu}{\alpha} (\beta^2 + \alpha\beta) + \beta;$$

luego, se requiere entonces que $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \frac{\mu}{\alpha} (\beta^2 + \alpha\beta) + \beta = 0 \end{cases}$ y $\beta \neq 0$; al resolver el sistema

se obtiene que $\alpha = \frac{\mu}{2-\mu}$ y $\beta = \frac{1-\mu}{2-\mu}$; en consecuencia

$$X = \frac{\mu}{2-\mu} x + \frac{1-\mu}{2-\mu} = g_\mu(x) \text{ y } X_1 = (2-\mu)X(1-X).$$

Ahora bien, sea $G_\mu(x, y) = (g_\mu(x), g_\mu(y))$; veamos que $F_{2-\mu,\epsilon} \circ G_\mu = G_\mu \circ F_{\mu,\epsilon}$; sean $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 (F_{2-\mu,\epsilon} \circ G_\mu)(x, y) &= F_{2-\mu,\epsilon}(g_\mu(x), g_\mu(y)) \\
 &= F_{2-\mu,\epsilon}\left(\frac{\mu}{2-\mu}x + \frac{1-\mu}{2-\mu}, \frac{\mu}{2-\mu}y + \frac{1-\mu}{2-\mu}\right) \\
 &= \frac{\mu}{2-\mu}F_{\mu,\epsilon}(x, y) + \left(\frac{1-\mu}{2-\mu}, \frac{1-\mu}{2-\mu}\right) \\
 &= (G_\mu \circ F_{\mu,\epsilon})(x, y);
 \end{aligned}$$

por lo tanto $F_{2-\mu,\epsilon}$ y $F_{\mu,\epsilon}$ son linealmente conjugados mediante el endomorfismo G_μ . \square

Observación 2.2. Observe que de la proposición anterior, se deduce que solo es necesario estudiar la dinámica de $F_{\mu,\epsilon}$ para $\mu \geq 1$; además, si consideramos la reflexión $R(x, y) = (y, x)$ se obtiene que $R \circ F_{\mu,\epsilon} = F_{\mu,1-\epsilon}$ y por lo tanto $\|F_{\mu,\epsilon}(x, y)\| = \|F_{\mu,1-\epsilon}(x, y)\|$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ahora bien, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces sigue de lo anterior que el conjunto de los ω -límite de puntos que se disponen simétricamente respecto a la diagonal Δ de \mathbb{R}^2 , es el mismo tanto para $F_{\mu,\epsilon}$ como para $F_{\mu,1-\epsilon}$; esto es,

$$\omega((x, y), F_{\mu,\epsilon}) \cup \omega((y, x), F_{\mu,\epsilon}) = \omega((x, y), F_{\mu,1-\epsilon}) \cup \omega((y, x), F_{\mu,1-\epsilon});$$

más aun, si se conoce la órbita de un punto por una de estas aplicaciones, la órbita de la otra también está determinada.

Observe que aunque no se tiene una conjugación entre $F_{\mu,\epsilon}$ y $F_{\mu,1-\epsilon}$ con $\epsilon \in \mathbb{R}$, según la observación anterior se deduce que:

- la dinámica cuando $\epsilon > 1$ se corresponde a la de $\epsilon < 0$; y
- la dinámica cuando $\frac{1}{2} \leq \epsilon \leq 1$ se corresponde a la de $0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$.

Observe además que si $\epsilon = 0$, entonces $F_{\mu,0}(x, y) = (f_\mu(x), f_\mu(y))$; es decir, la dinámica en este caso está desacoplada y es descrita como el producto de la dinámica de la aplicación logística unidimensional.

2.3. Curvas en el espacio de parámetros.

Un rol importante en el espacio de parámetros lo juegan tres curvas $\epsilon \mapsto \mu_1(\epsilon)$, $\epsilon \mapsto \mu_2(\epsilon)$ y $\epsilon \mapsto \mu_3(\epsilon)$. Para definir la curva μ_1 consideremos el punto $P_{\mu,\epsilon}$ dado por la intersección de L_1 con el eje de las abscisas, es decir

$$P_{\mu,\epsilon} = (p_{\mu,\epsilon}, 0) = L_1 \cap \{(x, y) : y = 0\} = \left(\frac{1-2\epsilon}{4(1-\epsilon)}\mu, 0 \right).$$

Sea $\mu_1(\epsilon) := \frac{4(1-\epsilon)}{1-2\epsilon}$. Es simple ver que $p_{\mu,\epsilon} \leq 1$ si, y solo si, $\mu \leq \mu_1(\epsilon)$. Para definir las curvas $\mu_2(\epsilon)$ y $\mu_3(\epsilon)$ recordemos que en el punto fijo, P_μ , los autovalores de $DF_{\mu,\epsilon}(P_\mu)$ son $\lambda_1 = 2 - \mu$ y $\lambda_2 = (2 - \mu)(1 - 2\epsilon)$. Observe que $\lambda_2 \geq -1$ si, y solo si, $\mu \leq \frac{4\epsilon - 3}{2\epsilon - 1} := \mu_2(\epsilon)$ y $\lambda_2 \leq 1$ si, y solo si, $\mu \geq \frac{4\epsilon - 1}{2\epsilon - 1} := \mu_3(\epsilon)$. También, es facil ver que si $1 \leq \mu \leq 3$, entonces $|\lambda_1| \leq 1$.

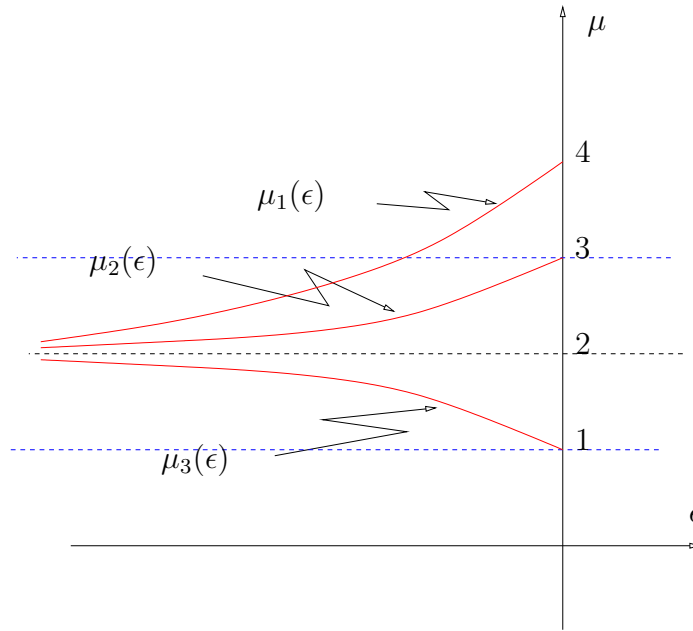


Figura 2.5: Curvas en el espacio de parámetros.

Note que si fijamos $\epsilon < 0$, entonces para valores de μ comprendidos en el intervalo $(1, \mu_3(\epsilon))$ sigue que el punto fijo P_μ es una silla hiperbólica, mientras que si $\mu = \mu_3(\epsilon)$, entonces el punto pierde hiperbolicidad; si consideramos ahora $\mu \in (\mu_3(\epsilon), \mu_2(\epsilon))$, entonces el punto fijo P_μ se convierte en un atractor hiperbólico y además aparecen dos nuevos puntos fijos que están dispuestos simétricamente respecto de la diagonal Δ . Para valores de μ que estén sobre la curva $\mu_2(\epsilon)$ sigue que el punto fijo deja de ser hiperbólico. Ahora bien, si tomamos ahora $\mu \in (\mu_2(\epsilon), 3)$, entonces el punto fijo vuelve a ser una silla hiperbólica pero ahora con la diferencia de que se mantiene la existencia de los nuevos puntos fijos; es claro que si $\mu = 3$, entonces el punto fijo deja de ser hiperbólico

mientras que para valores de μ mayores que tres sigue que el punto P_μ es un repulsor hiperbólico.

3

Variedades invariantes

En este capítulo mostraremos que para ciertos valores (μ, ϵ) en el espacio de parámetros tales que $\mu \leq \frac{4(1-\epsilon)}{1-2\epsilon}$ existe una curva de Jordan; esto es, una curva cerrada la cual conecta el origen y sus preimágenes y que además es positivamente invariante por $F_{\mu,\epsilon}$, la cual describe la cuenca de atracción de infinito por $F_{\mu,\epsilon}$. Seguidamente se demuestra, que cuando el valor en el espacio de parámetros (μ, ϵ) satisface que $\mu \leq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon}$, entonces la curva Γ contiene al segmento $\{(x, x) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ y sus preimágenes por $F_{\mu,\epsilon}$.

3.1. El infinito es un atractor

En esta sección usaremos técnicas como las abordadas en [11], para mostrar que ∞ es un atractor de $F_{\mu,\epsilon}$ cualesquiera sean los valores de los parámetros $(\mu, \epsilon) \in (1, +\infty) \times (-\infty, 0)$.

Definición 1. *Dada una transformación continua $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, se dice que ∞ es*

un atractor de F si existe $R > 0$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^m$ con $\|x\| > R$ se tiene: $\|F(x)\| > R$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F^n(x)\| = +\infty$. En tal caso, al conjunto de puntos x tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F^n(x)\| = +\infty$ se le conoce como cuenca de atracción de ∞ , y es denotado $B_\infty(F)$. La cuenca inmedata de ∞ como atractor es la componente de la cuenca de atracción que contiene a ∞ , y se denota por $B_\infty^\circ(F_{\mu,\epsilon})$.

Dada una curva de Jordan $\mathcal{J} \in \mathbb{R}^2$, es decir una curva simple cerrada, denotaremos por $int(\mathcal{J})$ a la componente acotada del complemento de \mathcal{J} , similarmente $ext(\mathcal{J})$ denotará a la componente no acotada del complemento de \mathcal{J} .

Proposición 2. Si $1 \leq \mu \leq 4$ y $\epsilon < 0$, entonces ∞ es un atractor para $F_{\mu,\epsilon}$ y

$$B_\infty(F_{\mu,\epsilon}) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_{\mu,\epsilon}^{-j}(ext(K)),$$

donde $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

Demostración.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, donde $x_0 \in [0, 1]$ y $y_0 < 0$. Así $F_{\mu,\epsilon}(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$, donde

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - \epsilon)f_\mu(x_0) + \epsilon f_\mu(y_0) \\ y_1 &= (1 - \epsilon)f_\mu(y_0) + \epsilon f_\mu(x_0). \end{aligned}$$

Es claro, que bajo estas condiciones se tiene que $y_1 < f_\mu(y_0) < 0$. Ahora bien, si continuamos con este proceso se tiene que para cada $n \geq 1$, $F_{\mu,\epsilon}^n(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$, donde

$$\begin{aligned} x_n &= (1 - \epsilon)f_\mu(x_{n-1}) + \epsilon f_\mu(y_{n-1}) \\ y_n &= (1 - \epsilon)f_\mu(y_{n-1}) + \epsilon f_\mu(x_{n-1}), \end{aligned}$$

y además, $y_n < f_\mu^n(y_0) < 0$ para cada $n \geq 1$. Pero $f_\mu^n(y_0) \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, lo cual implica que $y_n \rightarrow -\infty$ si $n \rightarrow +\infty$ y por tanto $(x_0, y_0) \in B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$. De manera similar se demuestra que si $x_0 \in [0, 1]$ y $y_0 > 1$, entonces $(x_0, y_0) \in B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$.

Análogamente si $y_0 \in [0, 1]$ y $x_0 < 0$ ó $x_0 > 1$, entonces $(x_0, y_0) \in B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$, además, su cuenca de atracción es

$$B_\infty(F_{\mu,\epsilon}) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_{\mu,\epsilon}^{-j}(ext(K))$$

□

3.2. Espacio de Curvas

Considere parámetros μ y ϵ de forma que $\mu \leq \mu_1(\epsilon)$. Sean C el conjunto:

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; 0 \leq y \leq x\} \cup \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

y \mathcal{C} el conjunto de todas las curvas $\Gamma = \{(t, \gamma(t)) : t \in [0, 1]\}$ contenidas en C , tales que:

- $\gamma(0) = 0, \gamma(t) = \gamma(1 - t)$, con $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
- $0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t)}{t} \leq 1$,
- γ es lipschitz con constante de lipschitz $lip(\gamma) \leq 1$.

Para cada $\Gamma \in \mathcal{C}$ y $(t, \gamma(t)) \in \Gamma \cap C_{\mu, \epsilon}$ se tiene que:

$$x_{\pm}(t, \gamma(t)) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{(1 - 2\epsilon)\mu} (\epsilon\gamma(t) - (1 - \epsilon)t)} \right] \quad (3.1)$$

y

$$y_{\pm}(t, \gamma(t)) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{(1 - 2\epsilon)\mu} (\epsilon t - (1 - \epsilon)\gamma(t))} \right]. \quad (3.2)$$

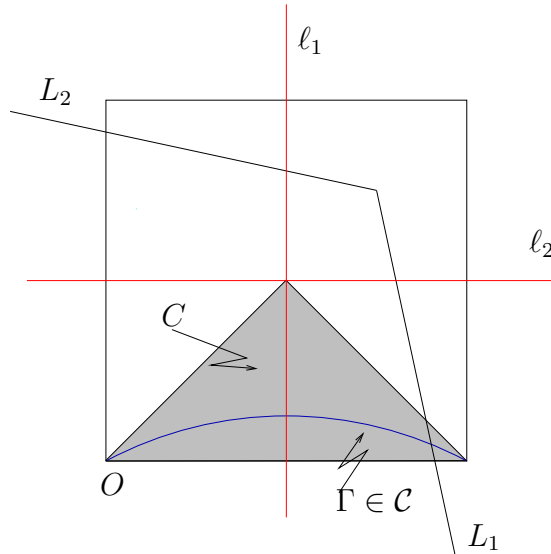


Figura 3.1: El espacio de curvas \mathcal{C} .

Es fácil ver que \mathcal{C} dotado con la métrica $d(\Gamma, \Gamma_1) = \sup_{t \in [0,1]} |\gamma(t) - \gamma_1(t)|$ es completo; además, dado que cada $\Gamma \in \mathcal{C}$ es lipschitz con constante de lipschitz $lip(\gamma) \leq 1$ se tiene que Γ interseca a la recta L_1 de manera transversal en un único punto $(t_0, \gamma(t_0))$.

Para cada $\Gamma = \{(t, \gamma(t)) : t \in [0, 1]\}$ en \mathcal{C} con punto de intersección en L_1 , $(t_0, \gamma(t_0))$, definimos

$$\tilde{\Gamma} = \{(x_-(t, \gamma(t)), y_-(t, \gamma(t))), (x_+(t, \gamma(t)), y_-(t, \gamma(t))) : 0 \leq t \leq t_0\}. \quad (3.3)$$

Observe que $\tilde{\Gamma}$ es una parte conexa de la preimagen por $F_{\mu, \epsilon}$ de la pieza de Γ contenida en $C_{\mu, \epsilon}$.

Lema 1. *La curva $\tilde{\Gamma}$ está en \mathcal{C} .*

Demostración.

De las ecuaciones (3.1) y (3.2) se sigue que:

- $x_-(0, 0) = 0$ y $x_-(t, \gamma(t)) + x_+(t, \gamma(t)) = 1$;
- $x_+(t_0, \gamma(t_0)) = \frac{1}{2}$, pues $(t_0, \gamma(t_0)) = \Gamma \cap L_1$.

Veamos ahora que $\tilde{\Gamma}$ es el gráfico de alguna función $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Para esto es suficiente mostrar que la función $t \rightarrow x_-(t, \gamma(t))$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, t_0]$. En efecto, sean $t_1, t_2 \in [0, t_0]$ tales que $t_1 > t_2$, así $x_-(t_1, \gamma(t_1)) > x_-(t_2, \gamma(t_2))$ si, y solo si, $\gamma(t_1) - \gamma(t_2) > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}(t_1 - t_2)$; pero la última desigualdad es cierta debido a que $lip(\gamma) \leq 1$; pues, como $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq t_1 - t_2$, esto implica que $\gamma(t_1) - \gamma(t_2) \geq (-1)(t_1 - t_2)$ y como $\frac{1-\epsilon}{\epsilon} < -1$, $\gamma(t_1) - \gamma(t_2) \geq (-1)(t_1 - t_2) > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}(t_1 - t_2)$. Por tanto, $\tilde{\Gamma}$ es el gráfico de una función $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es simétrica respecto a $t = \frac{1}{2}$ y conecta O con S .

Denotemos por $\varphi_- : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, t_0]$ y $\varphi_+ : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, t_0]$ las inversas de las funciones $t \rightarrow x_-(t, \gamma(t))$ y $t \rightarrow x_+(t, \gamma(t))$ respectivamente.

Es fácil ver que para cada $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ se cumple que $\varphi_+(s) = \varphi_-(1 - s)$, y además:

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} y_-(\varphi_-(s), \gamma(\varphi_-(s))), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ y_-(\varphi_+(s), \gamma(\varphi_+(s))), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Por otro lado, tomando $s = x_-(t, \gamma(t))$ para $t \in [0, t_0]$, sigue de (3.1) que

$$\varphi_-(s) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \gamma(\varphi_-(s)) + \frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon} f_\mu(s). \quad (3.4)$$

Veamos ahora que $\tilde{\Gamma} \subset C$. Sea $s \in [0, \frac{1}{2}]$, así existe $t \in [0, t_0]$ tal que $s = x_-(t, \gamma(t))$; de esta manera $(s, \tilde{\gamma}(s)) = (x_-(t, \gamma(t)), y_-(t, \gamma(t)))$. Observe que $y_-(t, \gamma(t)) \leq x_-(t, \gamma(t))$ si, y solo si, $\gamma(t) \leq t$; lo cual es cierto pues $(t, \gamma(t)) \in C$, además por simetría sigue que

$$y_-(t, \gamma(t)) \leq x_-(t, \gamma(t)) = 1 - x_+(t, \gamma(t)).$$

Así queda demostrado que $\tilde{\Gamma} \subset C$; solo resta probar:

- $0 \leq \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{\gamma}(s)}{s} \leq 1$, y
- $\tilde{\gamma}$ es lipschitz con $lip(\tilde{\gamma}) \leq 1$.

Para demostrar el primer item observe que

$$\tilde{\gamma}(s) = \frac{y_-(t, \gamma(t))}{x_-(t, \gamma(t))} = \frac{\epsilon - (1 - \epsilon) \frac{\gamma(t)}{t}}{\epsilon \frac{\gamma(t)}{t} - (1 - \epsilon)} \times \frac{x_+(t, \gamma(t))}{y_+(t, \gamma(t))}$$

donde $s = x_-(t, \gamma(t))$ para algún $t \in [0, t_0]$. Note que si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t)}{t} = \alpha$ para algún $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{\gamma}(s)}{s} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y_-(t, \gamma(t))}{x_-(t, \gamma(t))} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon - (1 - \epsilon) \frac{\gamma(t)}{t}}{\epsilon \frac{\gamma(t)}{t} - (1 - \epsilon)} \times \frac{x_+(t, \gamma(t))}{y_+(t, \gamma(t))} = \frac{\epsilon - (1 - \epsilon)\alpha}{\epsilon\alpha - (1 - \epsilon)}.$$

Pero $\frac{\epsilon - (1 - \epsilon)\alpha}{\epsilon\alpha - (1 - \epsilon)} \geq 0$ y $\frac{\epsilon - (1 - \epsilon)\alpha}{\epsilon\alpha - (1 - \epsilon)} \leq 1$ si, y solo si, $\alpha \leq 1$. Esto demuestra el primer item.

Veamos ahora que $\tilde{\gamma}$ es lipschitz con $lip(\tilde{\gamma}) \leq 1$; esto es,

$$\left| \frac{\tilde{\gamma}(s_1) - \tilde{\gamma}(s_2)}{s_1 - s_2} \right| \leq 1 \quad \text{para todo } s_1, s_2 \in [0, 1]$$

- Caso I: $s_1, s_2 \in [0, \frac{1}{2}]$.

En este caso existen $t_1, t_2 \in [0, t_0]$ tales que $s_i = x_-(t_i, \gamma(t_i))$ con $i = 1, 2$. y por tanto,

$$\frac{\tilde{\gamma}(s_1) - \tilde{\gamma}(s_2)}{s_1 - s_2} = \frac{y_-(t_1, \gamma(t_1)) - y_-(t_2, \gamma(t_2))}{x_-(t_1, \gamma(t_1)) - x_-(t_2, \gamma(t_2))},$$

y esta última expresión es igual a:

$$\frac{\epsilon - (1 - \epsilon)z}{\epsilon z - (1 - \epsilon)} \times \frac{\sqrt{1 + K_{\mu,\epsilon}(\epsilon\gamma(t_1) - (1 - \epsilon)t_1)} + \sqrt{1 + K_{\mu,\epsilon}(\epsilon\gamma(t_2) - (1 - \epsilon)t_2)}}{\sqrt{1 + K_{\mu,\epsilon}(\epsilon t_1 - (1 - \epsilon)\gamma(t_1))} + \sqrt{1 + K_{\mu,\epsilon}(\epsilon t_2 - (1 - \epsilon)\gamma(t_2))}},$$

donde $z = \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1}$ y $K_{\mu,\epsilon} = \frac{4}{(1 - 2\epsilon)\mu}$. El segundo factor de la expresión anterior es menor o igual que 1 debido a que $\gamma(t) \leq t$, y el primer factor es menor o igual que 1, pues la función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(z) = \frac{\epsilon - (1 - \epsilon)z}{\epsilon z - (1 - \epsilon)}$ satisface que $|g(z)| \leq 1$.

Por tanto se tiene que $|\frac{\tilde{\gamma}(s_1) - \tilde{\gamma}(s_2)}{s_1 - s_2}| \leq 1$.

- Caso II: $s_1, s_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Sean $t_1, t_2 \in [0, t_0]$ tales que $s_i = x_+(t_i, \gamma(t_i))$ con $i = 1, 2$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tilde{\gamma}(s_1) - \tilde{\gamma}(s_2)}{s_1 - s_2} \right| &= \frac{y_-(t_1, \gamma(t_1)) - y_-(t_2, \gamma(t_2))}{x_+(t_1, \gamma(t_1)) - x_+(t_2, \gamma(t_2))} \\ &= \frac{y_-(t_1, \gamma(t_1)) - y_-(t_2, \gamma(t_2))}{x_-(t_2, \gamma(t_2)) - x_-(t_1, \gamma(t_1))} \\ &= -\frac{y_-(t_1, \gamma(t_1)) - y_-(t_2, \gamma(t_2))}{x_-(t_1, \gamma(t_1)) - x_-(t_2, \gamma(t_2))} \end{aligned}$$

y así como en el caso anterior se obtiene lo requerido.

- Caso III: $s_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ y $s_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Al igual que antes, si $t_1, t_2 \in [0, t_0]$, $s_1 = x_-(t_1, \gamma(t_1))$ y $s_2 = x_+(t_2, \gamma(t_2))$ entonces:

$$\left| \frac{\tilde{\gamma}(s_1) - \tilde{\gamma}(s_2)}{s_1 - s_2} \right| = \left| \frac{y_-(t_1, \gamma(t_1)) - y_-(t_2, \gamma(t_2))}{x_-(t_1, \gamma(t_1)) - x_+(t_2, \gamma(t_2))} \right|.$$

Al racionalizar se obtiene que esta última expresión es igual a:

$$|g(z)| \left| \frac{\sqrt{1 + K_{\mu,\epsilon}(\epsilon\gamma(t_1) - (1 - \epsilon)t_1)} + \sqrt{1 + K_{\mu,\epsilon}(\epsilon\gamma(t_2) - (1 - \epsilon)t_2)}}{\sqrt{1 + K_{\mu,\epsilon}(\epsilon t_1 - (1 - \epsilon)\gamma(t_1))} + \sqrt{1 + K_{\mu,\epsilon}(\epsilon t_2 - (1 - \epsilon)\gamma(t_2))}} \right|$$

donde g es la función definida en el Caso I, $z = \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_2)}{t_1 - t_2}$ y $K_{\mu,\epsilon}$ es $\frac{4}{(1 - 2\epsilon)\mu}$; luego procediendo de la misma manera que en el caso I se tiene lo requerido. Así la demostración queda completa. \square

Observación 3.1. Con lo mostrado anteriormente podemos definir para cada curva $\Gamma \in \mathcal{C}$ el operador $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ dado por $\Phi(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$, siendo $\tilde{\Gamma}$ la curva descrita en el lema anterior.

3.3. Existencia de una Curva Invariante

Sea $\Gamma = \{(t, \gamma(t)) : t \in [0, 1]\}$ una curva en \mathcal{C} ; con el fin de construir una curva de Jordan $\widehat{\Gamma}$ uniendo el origen y sus preimágenes se emplea la simetría que exhiben las preimágenes de puntos por $F_{\mu, \epsilon}$ como sigue: consideremos la curva $\Gamma^r = \{(1 - \gamma(t), t) : t \in [0, 1]\}$, la cual conecta a S con S_1 ; Γ^t y Γ^l son las curvas dadas por

$$\Gamma^t = \{(t, 1 - \gamma(t)) : t \in [0, 1]\} \text{ y } \Gamma^l = \{(\gamma(t), t) : t \in [0, 1]\};$$

observe que Γ^t conecta a S_1 con S_2 , y Γ_l conecta O con S_2 , entonces la curva $\widehat{\Gamma}$ es la que se obtiene al concatenar las curvas $\Gamma, \Gamma^r, \Gamma^t$ y Γ^l .

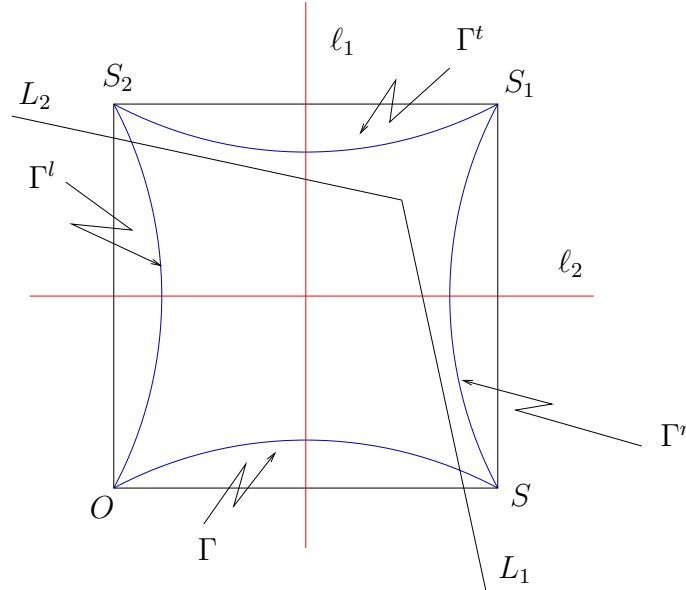


Figura 3.2: $\widehat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^r \cup \Gamma^t \cup \Gamma^l$.

En vista que $\Phi(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$, Φ define un sistema dinámico discreto en \mathcal{C} ; es decir, para cualquier $\Gamma \in \mathcal{C}$ y cada entero $n \geq 1$ está definido $\Phi^n(\Gamma)$, el cual denotaremos en adelante por Γ_n .

Denotemos por $\Gamma_0 = \{(t, 0) : t \in [0, 1]\}$ el segmento de recta que une O con S . Si $\Gamma_1 = \Phi(\Gamma_0)$, entonces $ext(\widehat{\Gamma}_1) \subset B_\infty(F_{\mu, \epsilon})$; en efecto, solo basta probar que si (x, y) son tales que $x \in [0, 1]$ y $y < \gamma_1(x)$, entonces $F_{\mu, \epsilon}(x, y) \in ext(K) \subset B_\infty(F_{\mu, \epsilon})$; donde $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Pero esto es claro pues; si $y < \gamma_1(x) \leq \frac{1}{2}$, entonces dado que f_μ es

creciente en $[0, \frac{1}{2}]$ sigue que:

$$(1 - \epsilon)f_\mu(y) + \epsilon f_\mu(x) < (1 - \epsilon)f_\mu(\gamma_1(x)) + \epsilon f_\mu(x);$$

pero $(1 - \epsilon)f_\mu(\gamma_1(x)) + \epsilon f_\mu(x) = 0$ y por tanto $(1 - \epsilon)f_\mu(y) + \epsilon f_\mu(x) < 0$; es decir, $F_{\mu,\epsilon}(x, y) \in \text{ext}(K) \subset B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$.

Lema 2. Si $\Gamma_n = \Phi^n(\Gamma_0)$ para $n \geq 1$ y $\Gamma_n = \{(t, \gamma_n(t)) : t \in [0, 1]\}$, entonces para cada $t \in (0, 1)$ y cada $n \geq 1$, $\gamma_n(t) > \gamma_{n-1}(t)$.

Demostración.

Observe que si $s \in (0, t_0)$ con $t_0 = L_1 \cap \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, entonces $y_-(s, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\epsilon}{(1-2\epsilon)\mu} s} \right] > 0$ y consecuentemente $\gamma_1(t) > \gamma_0(t) = 0$ cuando $t \in (0, 1)$. Por otra parte, de los mismos argumentos anteriores sigue que si $t \in (0, 1)$, y $y < \gamma_1(t)$, entonces $F_{\mu,\epsilon}(t, y) \in \text{ext}(K)$. En consecuencia se tiene que $\gamma_2(t) \geq \gamma_1(t)$ para cada $t \in (0, 1)$. Supongamos que existe $t \in (0, 1)$ tal que $\gamma_2(t) = \gamma_1(t)$; de esta manera $F_{\mu,\epsilon}(t, \gamma_2(t)) \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1$, luego $F_{\mu,\epsilon}(t, \gamma_2(t)) = O$ o $F_{\mu,\epsilon}(t, \gamma_2(t)) = S$, lo cual es una contradicción; por tanto $\gamma_2(t) > \gamma_1(t)$ para cada $t \in (0, 1)$. Continuando con este proceso recursivo se obtiene lo requerido. \square

Teorema 1. Sean Γ_n , $n \geq 0$, como en el lema anterior. Si $(\mu, \epsilon) \in (1, +\infty) \times (-\infty, 0)$ son tales que $\mu \leq \mu_1(\epsilon)$, entonces la sucesión $\{\Gamma_n\}_{n \geq 0}$ converge a una curva $\Gamma_{\mu,\epsilon} \in \mathcal{C}$ positivamente invariante de forma que $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}$ satisface $\text{ext}(\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}) = B_\infty^\circ(F_{\mu,\epsilon})$. Adicionalmente, si $\Gamma_n^r \cap L_1 = \emptyset$ para cada $n \geq 1$, entonces

- $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon} = \partial B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$.
- $\text{ext}(\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}) = B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$.

Demostración.

Es claro que $\widehat{\Gamma}_0 = \partial K$, $F_{\mu,\epsilon}^{-1}(\Gamma_0) = \Gamma_1 \cup \Gamma_1^t$ y $F_{\mu,\epsilon}^{-1}(\Gamma_0^l) = \Gamma_1^l \cup \Gamma_1^r$; sigue por tanto que

$$\widehat{\Gamma}_1 \subset F_{\mu,\epsilon}^{-1}(\widehat{\Gamma}_0).$$

De manera recursiva se demuestra que, para cada $n \geq 1$, son satisfechas las siguientes propiedades:

$$F_{\mu,\epsilon}^{-1}(\Gamma_n) = \Gamma_{n+1} \cup \Gamma_{n+1}^t, \quad F_{\mu,\epsilon}^{-1}(\Gamma_n^l) = \Gamma_{n+1}^l \cup \Gamma_{n+1}^r, \quad \widehat{\Gamma}_{n+1} \subset F_{\mu,\epsilon}^{-1}(\widehat{\Gamma}_n);$$

además, $ext(\widehat{\Gamma}_{n+1}) \subset B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$ y $\gamma_n(t) < \gamma_{n+1}(t)$ para cada $t \in (0, 1)$.

Observe que para cada $t \in [0, 1]$ la sucesión $\{\gamma_n(t)\}_{n \geq 0}$ es creciente y esta acotada y en consecuencia tiene un límite $\gamma_{\mu,\epsilon}(t)$; y dado que $lip(\gamma_n) \leq 1$ para cada n , la sucesión de funciones $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ converge uniformemente a una función $\gamma_{\mu,\epsilon}$, cuyo gráfico $\Gamma_{\mu,\epsilon}$ está en \mathcal{C} . Claramente $F_{\mu,\epsilon}(\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}) \subset \widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}$, $ext(\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}) \subset B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$ y $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon} = B_\infty^\circ(F_{\mu,\epsilon})$.

Supongamos que $\Gamma_n^r \cap L_1 = \emptyset$ para cada $n \geq 1$, en este caso $\Gamma_{\mu,\epsilon}^r$ no interseca a $int(C_{\mu,\epsilon})$ pues de lo contrario existirían puntos de la curva Γ_n^r en $int(C_{\mu,\epsilon})$ para algún $n \geq 1$; en consecuencia no existen componentes de $B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$ en el interior de la curva $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}$ y por tanto $ext(\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}) = B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$ y $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon} = \partial B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$. \square

3.3.1. Curva invariante: Caso $1 < \mu \leq \mu_3(\epsilon)$.

El propósito de esta sección es caracterizar la curva $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}$ para el caso en que $1 < \mu \leq \mu_3(\epsilon)$ y $\epsilon \in (-\infty, 0)$; de hecho se demuestra que para estos valores en el espacio de parámetros la curva $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon} = F_{\mu,\epsilon}^{-1}(\Delta)$; donde $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ como se observa en la figura 3.4.

Lema 3. Si $C_\mu = \left\{ (x, y) : (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{2 - \mu}{\sqrt{2\mu}} \right)^2 \right\}$, entonces se satisfacen:

a) $F_{\mu,\epsilon}(C_\mu) \subset \left\{ (x, y) : x + y = 2 \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \right) \right\}, y$

b) $F_{\mu,\epsilon}(ext(C_\mu)) \subset \left\{ (x, y) : x + y < 2 \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \right) \right\} = W_\mu.$

Demostración.

Considere $(x, y) \in ext(C_\mu)$; así $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 > \left(\frac{2 - \mu}{\sqrt{2\mu}} \right)^2$, o equivalentemente $x^2 + y^2 - x - y > 2 \frac{(2 - \mu)}{\mu^2}$. Ahora bien, si $F_{\mu,\epsilon}(x, y) = (x_1, y_1)$, entonces:

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= -\mu[x^2 + y^2 - x - y] \\ &< -\mu\left[2 \frac{1 - \mu}{\mu^2}\right] \\ &= 2 \frac{\mu - 1}{\mu}. \end{aligned}$$

lo cual demuestra el ítem b). La parte a) es análoga. \square

Observación 3.2. Observe que la recta $x + y = 2 \left(\frac{\mu-1}{\mu} \right)$ es tangente a la circunferencia C_μ en el punto P_μ ; además, como consecuencia del lema anterior se tiene que W_μ es positivamente invariante por $F_{\mu,\epsilon}$; esto es, $(F_{\mu,\epsilon}(W_\mu) \subset W_\mu)$; mas aún, $F_{\mu,\epsilon}(\overline{W_\mu} \setminus \{P_\mu\}) \subset W_\mu$.

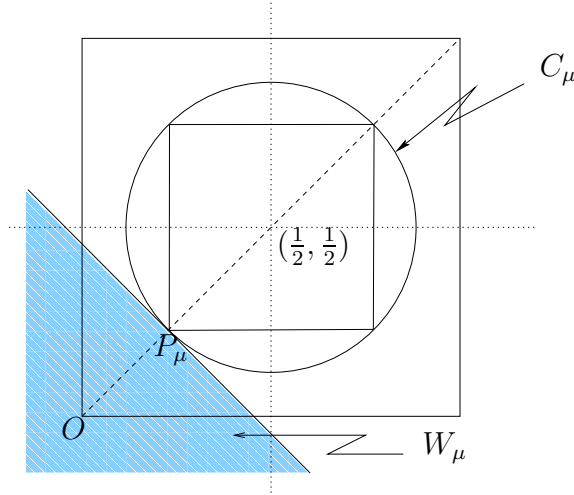
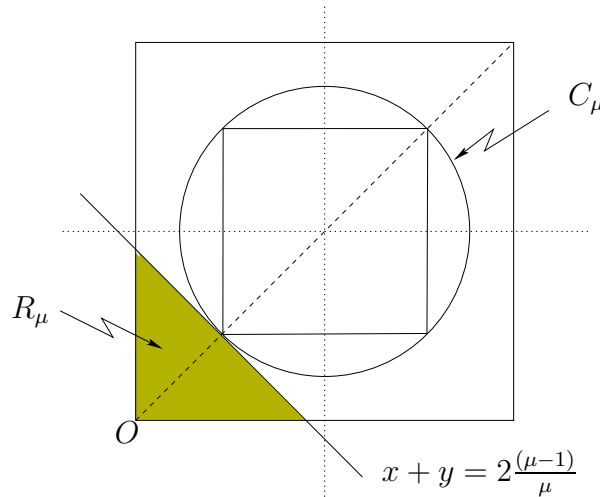


Figura 3.3: Región invariante W_μ .

Denotemos por R_μ al conjunto $\overline{W_\mu} \cap K$; como se observa en la figura siguiente



Lema 4. Si $(x, y) \in R_\mu \setminus \{(x, x) : 0 \leq x \leq \frac{\mu-1}{\mu}\}$ y $F_{\mu,\epsilon}(x, y) = (x_1, y_1)$, entonces

$$|y_1 - x_1| > \lambda_2 |y - x|,$$

donde $\lambda_2 = 2 - \mu)(1 - 2\epsilon)$ es autovalor asociado a F_μ .

Demostración.

Claramente si $F_{\mu,\epsilon}(x, y) = (x_1, y_1)$ con $(x, y) \in R_\mu$, entonces

$$|y_1 - x_1| = \mu(1 - 2\epsilon)|1 - (x + y)||y - x|;$$

pero $|1 - (x + y)| = 1 - (x + y)$, pues $\frac{2-\mu}{\mu} < 1 - (x + y) < 1$; en consecuencia

$$|y_1 - x_1| > (2 - \mu)(1 - 2\epsilon)|y - x|.$$

□

Teorema 2. Si $\mu \leq \mu_3(\epsilon)$, entonces $R_\mu \setminus \{(x, x) : 0 \leq x \leq \frac{\mu-1}{\mu}\} \subset B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$.

Demostración.

Sea $(x, y) \in R_\mu \setminus \{(x, x) : 0 \leq x \leq \frac{\mu-1}{\mu}\}$, entonces $|y_1 - x_1| > \lambda_2|y - x|$, donde $(x_1, y_1) = F_{\mu,\epsilon}(x, y)$. Si $\mu < \mu_3(\epsilon)$, entonces $\lambda_2 > 1$, y en consecuencia la órbita positiva de (x, y) por $F_{\mu,\epsilon}$ se aleja de la diagonal con una tasa de crecimiento exponencial; de hecho, si $F^n(x, y) = (x_n, y_n)$, entonces

$$|y_n - x_n| > \lambda_2^n |y - x|;$$

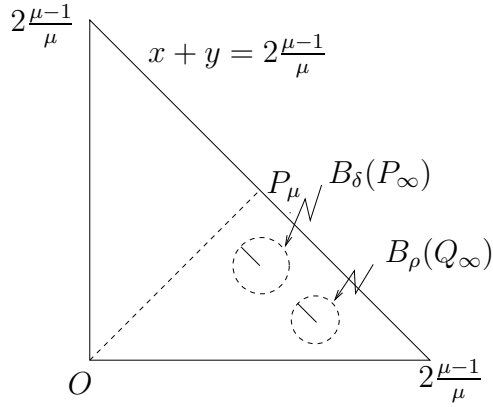
así que existe $n \geq 0$ tal que $(x_n, y_n) \in \text{ext}(K)$, y por lo tanto $(x, y) \in B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$.

Por otro lado, si $\mu = \mu_3(\epsilon)$, entonces $\lambda_2 = 1$. Sea (x, y) en $R_\mu \setminus \{(x, x) : 0 \leq x \leq \frac{\mu-1}{\mu}\}$ y supongamos que $(x, y) \notin B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$; lo cual implica que la órbita positiva de (x, y) por $F_{\mu,\epsilon}$ está contenida en R_μ ; mas aún, dado que $|x_1 - y_1| \geq |x - y|$ entonces,

$$\mathcal{O}^+(x, y) \subset R_\mu \setminus \left\{ (x, x) : 0 \leq x \leq \frac{\mu-1}{\mu} \right\}.$$

Por la compacidad de R_μ podemos suponer que la sucesión $(x_n, y_n) = F_{\mu,\epsilon}^n(x, y)$ converge a un punto $P_\infty = (x_\infty, y_\infty)$ en R_μ , note que $P_\infty \notin \{(x, x) : x \in [0, \frac{\mu-1}{\mu}]\}$. Sea $Q_\infty = F_{\mu,\epsilon}(P_\infty) = (\bar{x}_\infty, \bar{y}_\infty)$; así se satisface que $|\bar{y}_\infty - \bar{x}_\infty| \geq |y_\infty - x_\infty|$; es fácil ver que P_∞ está en el complemento de la cuenca de atracción de infinito, pues de lo contrario se tendrían puntos de la órbita de (x, y) en $B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$ por ser esta última abierta. Ahora bien, dado que P_∞ no es punto fijo se tiene que la distancia entre P_∞ y Q_∞ es estrictamente positiva; por lo tanto, es posible considerar números $\delta, \rho > 0$ suficientemente pequeños y $L > 0$ tales que:

- $F_{\mu,\epsilon}(B_\delta(P_\infty)) \subset B_\rho(Q_\infty)$,
- si $(u, v) \in B_\delta(P_\infty)$, entonces $|v - u| \leq L, y$
- si $(u, v) \in B_\rho(Q_\infty)$, entonces $|v - u| > L$.



Dado que $(x_n, y_n) \rightarrow P_\infty$ podemos escoger $k_0 > 0$ suficientemente grande tal que $(x_n, y_n) \in B_\delta(P_\infty)$ para todo $k \geq k_0$; así $F_{\mu,\epsilon}(x_{k_0}, y_{k_0}) = (x_{k_0+1}, y_{k_0+1}) \in B_\rho(Q_\infty)$, lo cual es una contradicción pues $B_\delta(P_\infty) \cap B_\rho(Q_\infty) = \emptyset$. En consecuencia se tiene que $(x, y) \in B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$, y dado que (x, y) es arbitrario sigue que $R_\mu \setminus \{(x, x) : 0 \leq x \leq \frac{\mu-1}{\mu}\} \subset B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$.

□

Como consecuencia inmediata de este teorema tenemos

Corolario 1. Si $\mu \leq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon}$, entonces $ext(C_\mu) \setminus F^{-1}(\{(x, x) : 0 \leq x \leq p_\mu\}) \subset B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$.

Corolario 2. Si $(\mu, \epsilon) \in (1, +\infty) \times (-\infty, 0)$ son tales que $\mu \leq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon}$, entonces la curva $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}$ obtenida en el teorema 1, contiene al segmento $\{(x, x) : 0 \leq x \leq p_\mu\}$ y sus preimágenes.

Demostración.

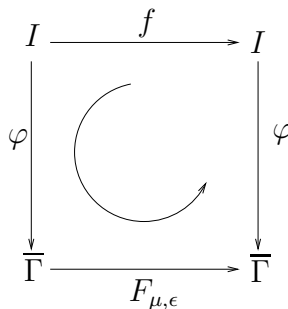
Sea $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}$ la curva de Jordan obtenida en el teorema (1), la cual siempre existe pues $\mu \leq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon} < \frac{4(1-\epsilon)}{1-2\epsilon}$. Pero, según el corolario anterior $ext(C_\mu) \subset B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$, y en consecuencia la curva $\widehat{\Gamma}_{\mu,\epsilon}$ contiene el segmento $\{(x, x) : 0 \leq x \leq p_\mu\}$.

□

Teorema 3. Si $(\mu, \epsilon) \in (1, +\infty) \times (-\infty, 0)$ son tales que $\mu \leq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon}$, entonces $\widehat{\Gamma}_{\mu, \epsilon} = \Delta_1 \cup \Delta_2$; donde $\Delta_1 = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ y $\Delta_2 = \{(x, 1-x) : x \in [0, 1]\}$.

Demostración.

Según el corolario anterior solo resta demostrar que $\{(x, x) : x \in (\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{1}{2})\} \subset \Gamma_{\mu, \epsilon}$. Consideremos la curva $\overline{\Gamma} = \{(t, \gamma_{\mu, \epsilon}(t)) : t \in [\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{1}{\mu}]\}$, claramente $\overline{\Gamma} \subset \Gamma_{\mu, \epsilon}$ y $F_{\mu, \epsilon}(\overline{\Gamma}) \subset \overline{\Gamma}$; además $\gamma_{\mu, \epsilon}(\frac{\mu-1}{\mu}) = \frac{\mu-1}{\mu}$ y $\gamma_{\mu, \epsilon}(\frac{1}{\mu}) = \frac{\mu-1}{\mu}$. Sea $\varphi : I = [\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{1}{\mu}] \mapsto \overline{\Gamma}$ dada por $\varphi(x) = (x, \gamma_{\mu, \epsilon}(x))$, es fácil ver que φ es un homeomorfismo; de hecho φ conjuga las dinámicas de $F_{\mu, \epsilon}$ y $f = \varphi^{-1} \circ F_{\mu, \epsilon} \circ \varphi$.



Es simple notar que f no tiene ningún punto fijo en $(\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{1}{\mu})$, pues de lo contrario se tendría un nuevo punto fijo para $F_{\mu, \epsilon}$ el cual sabemos que no existe en esta parte del espacio de parámetros, por lo tanto se satisface que $f(x) < x$ para cada $x \in (\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{1}{\mu})$ y en consecuencia $\omega(x) = \{\frac{\mu-1}{\mu}\}$ para cada $x \in (\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{1}{\mu})$; de esto último se deduce que cada punto sobre la curva $\overline{\Gamma}$ está en la variedad estable del punto fijo P_μ por $F_{\mu, \epsilon}$, lo cual demuestra que $\Gamma_{\mu, \epsilon} = \{(x, x) : x \in [0, \frac{1}{2}]\} \cup \{(x, 1-x) : x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ y por lo tanto $\widehat{\Gamma}_{\mu, \epsilon} = \Delta_1 \cup \Delta_2$. \square

Como consecuencia inmediata de este teorema se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3. Si $(\mu, \epsilon) \in (1, +\infty) \times (-\infty, 0)$ son tales que $\mu \leq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon}$, entonces $B_\infty(F_{\mu, \epsilon}) = \mathbb{R}^2 \setminus F_{\mu, \epsilon}^{-1}(\Delta)$; donde $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$.

3.3.2. Curva invariante. Caso $\mu_1 \epsilon < \mu < 4$.

En esta sección presentaremos un procedimiento para obtener una curva invariante que conecte las preimágenes del origen, para el caso en que la intersección de la recta L_1 con el eje x es un punto que se encuentra ubicado a la derecha del $(1, 0)$.

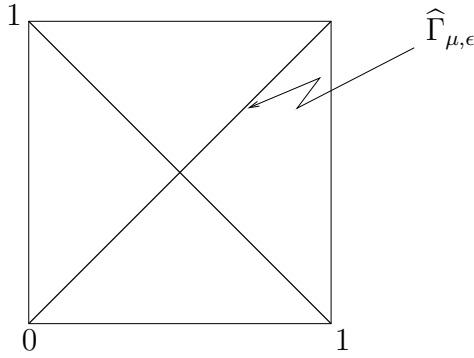


Figura 3.4: Curva invariante cuando $\mu \leq \frac{1-4\epsilon}{1-2\epsilon}$

Consideremos la curva

$$\Gamma_0 = \{(x, 0) : x \in [0, 1]\} \cup \{(1, y) : y \in [0, t_0]\};$$

donde $t_0 = L_1 \cap \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Si aplicamos el operador Φ definido anteriormente se obtiene entonces una curva que conecta el origen con el punto $(1, 0)$ como en la figura 3.5

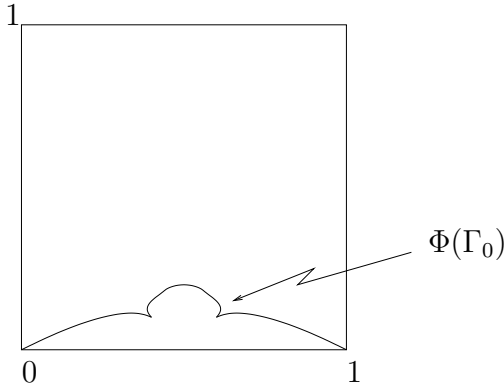


Figura 3.5: Imagen de Γ_0 por Φ

Ahora bien, debido a la simetría que exhibe el endomorfismo $F_{\mu, \epsilon}$ se tiene que la preimagen del cuadrado $K = [0, 1] \times [0, 1]$ es una curva cerrada Γ_1 , la cual conecta las preimagenes del origen, como a continuación se muestra en la figura 3.6.

Si procedemos de la misma manera pero ahora considerando la preimagen de la curva cerrada Γ_1 ; es decir, la preimagen de $\Gamma_1 \cap C_{\mu, \epsilon}$, donde $C_{\mu, \epsilon}$ representa el cono que es la imagen de \mathbb{R}^2 , pueden ocurrir varias cosas, por ejemplo si la intersección de Γ_1 con el cono $C_{\mu, \epsilon}$ es disconexa pueden aparecer elementos de la cuenca de atracción del

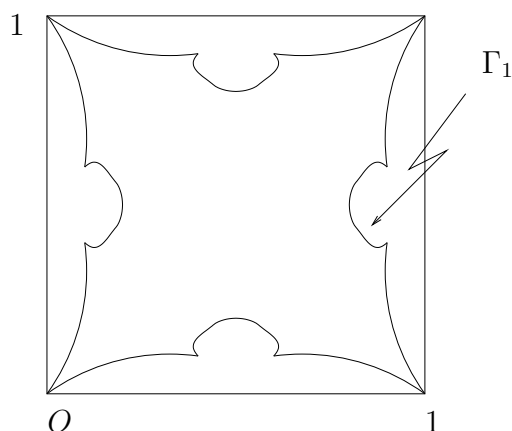


Figura 3.6: Γ_1 como preimagen de $K = [0, 1] \times [0, 1]$

infinito en el interior de la curva los cuales denominaremos islas; la figura 3.7 nos da la ilustración de este caso.

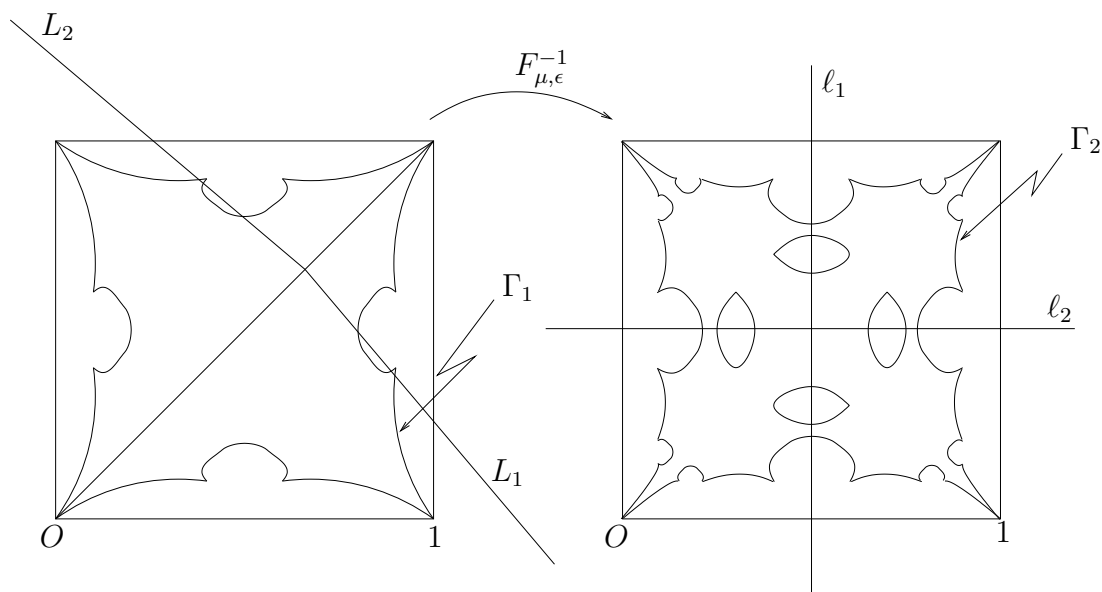


Figura 3.7: Γ_2 como preimagen de Γ_1

Otro caso posible es que aparezcan como antes las islas, pero en el exterior de la curva; para que este caso ocurra es necesario que en alguna de las preimagenes del cuadrado digamos Γ_i ; la intersección de Γ_i con la semirecta L_1 sea como se observa en la figura 3.8.

En la figura se observa claramente que para este caso, tales islas en el exterior de la

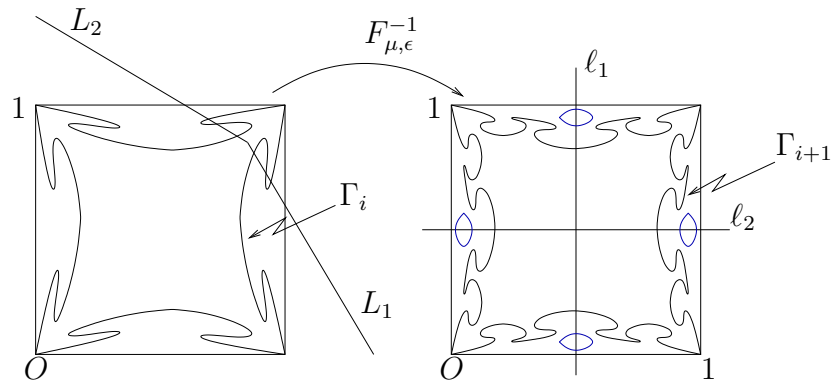


Figura 3.8: Γ_2 como preimagen de Γ_1

curva no son necesariamente componentes de la cuenca de atracción del infinito, pues la frontera de estas islas son preimágenes de la curva y esta es invariante.

Observación 3.3. Observe que mediante el mismo procedimiento se puede encontrar una curva invariante la cual conecte el origen y sus preimágenes; pero ahora no se puede asegurar que tal curva sea el gráfico de una función; además, debido a la existencia de las islas tanto en el interior como en el exterior de la curva, no se puede dar una caracterización precisa de la cuenca de atracción del infinito.

4

Experimentación numérica.

En este capítulo mostraremos algunas figuras generadas por el endomorfismo $F_{\mu,\epsilon}$ para ciertos valores (μ, ϵ) en el espacio de parámetros; estas se obtienen iterando hacia el futuro o hacia el pasado ciertos puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tales figuras aportarán información sobre la riqueza dinámica del endomorfismo, y en particular de la cuenca de atracción del infinito. Las imágenes que se muestran a continuación fueron obtenidas mediante un programa denominado Fractint, el cual fue instalado sobre el sistema operativo GNU/Linux. Vale la pena destacar que este generador de fractales es una herramienta que permite ilustrar algunos de los resultados expuestos en los capítulos anteriores; también se ilustrarán algunos posibles fenómenos dinámicos que no han sido abordados teóricamente en esta monografía. En las figuras que se muestran a continuación se indican de manera explícita los valores de los parámetros (μ, ϵ) usados para generar esas figuras.

En la figura 4.1 se observa que para tales valores de μ y ϵ se tiene $\mu \leq \mu_1(\epsilon)$, lo cual garantiza la existencia de la curva $\Gamma_{\mu,\epsilon}$, la cual caracteriza la cuenca inmediata

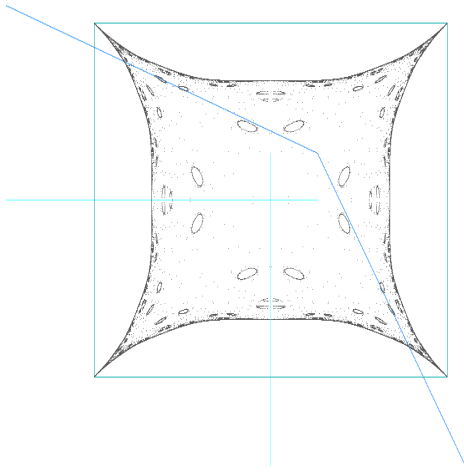


Figura 4.1: $\mu = 2,53$ $\epsilon = -0,9$

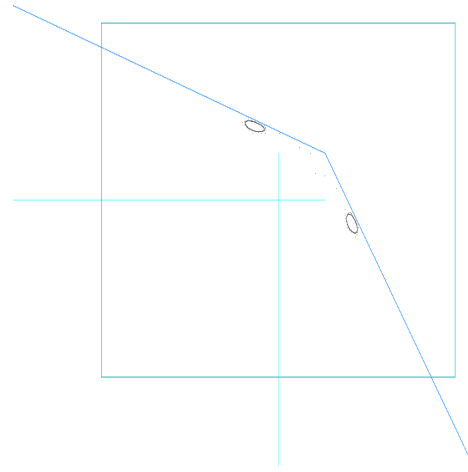


Figura 4.2: Curva 2-periódica

de atracción de infinito, acá se satisface también que $ext(\Gamma_{\mu,\epsilon}) = B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$; es decir, el interior de la curva es justamente el complemento de la cuenca de atracción del infinito ver teorema 1. Esta imagen es obtenida iterando hacia el futuro y hacia el pasado el punto $(0 \cdot 45, 0 \cdot 49)$.

También se observa en esta figura la presencia de una curva 2-periódica junto con sus preimágenes; en la figura 4.2 se obtiene dicha curva iterando solamente hacia el futuro el mismo punto.

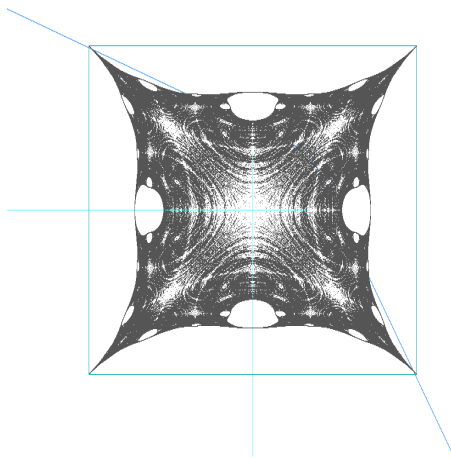


Figura 4.3: $\mu = 2,7$ $\epsilon = -0,9$

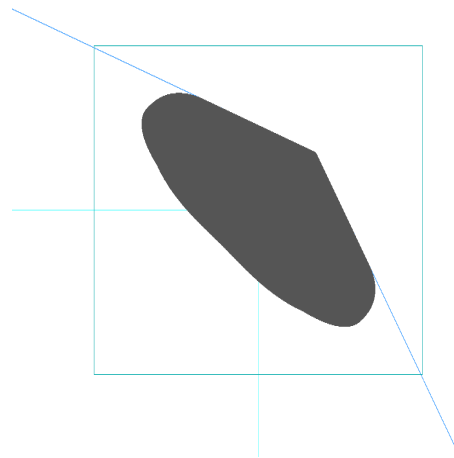


Figura 4.4: Atractor extraño

Ahora bien, si mantenemos fijo el parámetro $\epsilon = -0,9$ y aumentamos el valor de μ ; por ejemplo $\mu = 2,7$ se observa entonces que $\Gamma_n^r \cap L_1 \neq \emptyset$ para algún entero $n \geq 1$, y en consecuencia se tienen elementos de $B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$ en el interior de $\Gamma_{\mu,\epsilon}$ como se observa en la figura 4.3.

La figura 4.3 muestra un claro ejemplo de la existencia de un atractor extraño en el interior de la curva $\Gamma_{\mu,\epsilon}$; algunas partes claras en el interior de dicha curva pertenecen a la cuenca de este atractor; y otras pertenecen a $B_\infty(F_{\mu,\epsilon})$. En la figura 4.4 se observa claramente el atractor extraño al cual se hace referencia, esta figura es obtenida manteniendo los mismos parámetros pero esta vez solo se iteró hacia el futuro el punto $(0,45, 0,49)$.

Si aumentamos de nuevo el parámetro μ ; por ejemplo $\mu = 2,9$ se obtiene que $\mu > \mu_1(\epsilon)$; luego si iteramos hacia el futuro y hacia el pasado el punto $(0,45, 0,49)$ se obtiene entonces una curva invariante como la obtenida en la sección 3.3.2 la cual no es gráfico de alguna función. Ver figura 4.5

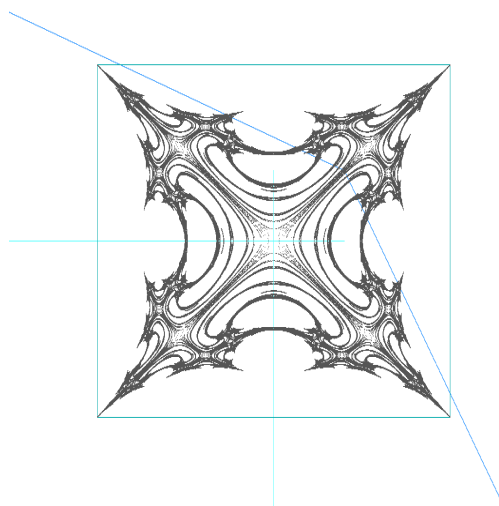


Figura 4.5: $\mu = 2,9$ $\epsilon = -0,9$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] L. A. Bunimovich. Coupled Map Lattices: at the age of Maturity. *Lect. Notes Phys.* **671**, (2005) 9–32.
- [2] V. Dobrynskiy. On properties of coupled quadratic mappings. *Nonlinear Analysis.* **35**, (1999) 247–267.
- [3] V. Dobrynskiy. Critical sets and properties of endomorphisms built by coupling of two identical quadratic mappings. *J. Dynam. Control Systems.* **5**, (1999) 227–254.
- [4] B. Fernandez and M. Jiang. Coupling two unimodal mapas with simple kneading sequences. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **24**, (2004) 107–125.
- [5] K. Kaneko. Period doubling of Kink-antikink patterns, quasiperiodicity in atiferro-like structures and spatial intermittency in coupled map lattices. *Prog. Theor. Phys.* **72**, (1984) 80–86.
- [6] K. Kaneko. Spatial period-doubling in open flow. *Phys. Lett. A.* **111**, (1985) 321–325.
- [7] K. Kaneko. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos. *Physica D.* **34**, (1989) 1–41.
- [8] W. W. Lin, C. C. Peng and C. S. Wang. Synchronization in coupled map lattices with periodic boundary conditions. *Internat. J. Bifur. and Chaos* **9 (8)**. (1999) 1635–1652.
- [9] W. W. Lin and Y. Q. Wang. Chaotic Synchronization in coupled map lattices with periodic boundary conditions. *SIAM J. Applied Dynamical Systems* **1**. (2002) 175–189.

- [10] N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. On the Dynamics of n -dimensional Quadratic Endomorphisms. *Commun. Math. Phys.* **195**, (1998) 295–308.
- [11] N. Romero, A. Rovella and R. Vivas. Invariant Manifolds and Synchronization for Coupled Logistic Mappings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics Sciences*. **4 (1)**. (2007).
- [12] R. A. Vivas. *Variedades invariantes para la aplicación logística acoplada*. Tesis Doctoral. UCV. (2007)