

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Programa de Maestría en Ciencias



Localización de Gravedad sobre Branas con Expansión de-Sitter

Autor: Adriana Araujo
Tutor: Rommel Guerrero

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" como requisito parcial para optar al título de Magister Scientiarum en Ciencias, mención Física-Matemática.

Barquisimeto, Junio 2011

Resumen

De los trabajos de Randall y Sundrum se conoce que es posible localizar gravedad sobre branas estáticas infinitamente delgadas dentro de un espacio 5D. En este trabajo se consideran soluciones dinámicas a las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales presentan un sector cuatridimensional semejante a la métrica Friedman-Robertson-Walker, hecho importante dentro del marco de la cosmología estandar. Sobre dicha estructura espacio-temporal se consideran perturbaciones a la métrica para encontrar la estructura del propagador y del potencial gravitacional. Seguidamente se estudia el espectro de las fluctuaciones gravitacionales constituidas por un modo cero localizado en torno a la brana y un continuo de modos masivos que se propagan libremente por toda la estructura 5D. Como consecuencia de ello, el potencial gravitacional está constituido por un término Newtoniano y unas correcciones asociadas al espectro masivo. Finalmente, se analizan tres escenarios asociados a la curvatura del espacio 5D, verificando que sólo para el caso donde la curvatura es negativa la contribución de los modos masivos del espectro no es significativa frente al término aportado por el modo cero, pudiendo de esta manera recuperar gravedad Newtoniana sobre la brana.

Índice general

Introducción	4
1. Configuración, y parámetros del Espacio-Tiempo	6
1.1. Análisis del factor Métrico	8
1.1.1. Caso $\Lambda_{\pm} \rightarrow 0$	8
1.1.2. Caso $\Lambda_{\pm} > 0$	8
1.1.3. Caso $\Lambda_{\pm} < 0$	9
2. Potencial Gravitacional	10
2.1. La Dinámica de las Perturbaciones Gravitacionales	10
2.2. El Propagador 5D Estático	12
2.3. El Potencial Gravitacional	14
3. Gravitación Newtoniana	16
3.1. Discretización del Espectro: Las Branas Reguladoras	17
3.2. Análisis de la Gravedad Newtoniana	18
3.2.1. Escenario $\Lambda \rightarrow 0$	19
3.2.2. Escenario $\Lambda > 0$	20
3.2.3. Escenario $\Lambda < 0$	20
Conclusiones	22
Apéndices	23
A. Geometría del Espacio-Tiempo: Los Espacios de-Sitter	24
B. La Ecuación Diferencial Hipergeométrica	26
C. Las Funciones Hipergeométricas y sus Aproximaciones	28
C.1. Escenario $\Lambda > 0$	28
C.2. Escenario $\Lambda < 0$	29
D. Las Normas de los Modos Masivos	31
D.1. Escenario $\Lambda \rightarrow 0$	32
D.2. Escenario $\Lambda > 0$	32

D.3. Escenario $\Lambda < 0$	32
Bibliografía	32

Introducción

Los mundos brana son teorías donde nuestro Universo corresponde a una hipersuperficie 4-dimensional (4D), denominada brana, dentro de un espacio de alta dimensionalidad. En estos escenarios se encuentra que el espectro de las fluctuaciones gravitacionales está constituido por un modo cero localizado en torno a la brana, y en correspondencia con un potencial Newtoniano; y por una torre de modos masivos libres de propagarse por toda la estructura de alta dimensionalidad, que generan correcciones al término Newtoniano en el potencial de interacción gravitacional [1].

Estos escenarios se pueden construir a partir de dos soluciones 5-dimensionales (5D) a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica¹, rígidamente conectadas sobre alguna hipersuperficie 4D de la estructura del alta dimensionalidad. Si las soluciones son estáticas, obligatoriamente deben ser con constante cosmológica negativa, ya que de lo contrario no es factible la localización de la gravedad [1]. Por otra parte, si las soluciones son dinámicas, por lo general la métrica sobre la brana es del tipo Friedman-Robertson-Walker (FRW), y en este caso, la constante cosmológica 5D puede ser nula, positiva o negativa; debido a que en cualquiera de estos casos el modo cero de las fluctuaciones gravitacionales permanece localizado [2, 3, 4, 5]. Una manera alternativa de generar estos escenarios, es a través del sistema acoplado Einstein campos escalar, donde la brana se obtiene en el límite de pared infinitamente fina de alguna solución al acoplamiento del tipo pared de dominio [6, 7, 8].

En este trabajo consideraremos soluciones dinámicas 5D con simetría de reflexión a las ecuaciones de Einstein con constantes cosmológica, en correspondencia con una brana con curvatura positiva y dotada con una métrica del tipo FRW. En particular, estamos interesados en estudiar la interacción gravitacional en el sector 4D del modelo en tres casos diferentes, diferenciados entre sí, por el signo de la curvatura 5D.

En el Capítulo 1, hallaremos una solución dinámica 5D a las ecuaciones de Einstein que dependerá fundamentalmente de dos parámetros, uno asociado a la curvatura de la brana, el cual siempre tomaremos positivo; y otro relacionado con la curvatura de la estructura 5D, que de acuerdo con los objetivos de este trabajo, asumiremos como nula, positiva o negativa, según sea el caso. Esta solución se caracteriza por coincidir con la solución de Goetz [9] en el límite de curvatura 5D nula, y por poseer un límite estático similar a la solución de Randall y Sundrum (RS-II) [1], cuando los vacíos 5D son negativos.

En el Capítulo 2, determinaremos la ecuación de movimiento de las fluctuaciones gravitacionales asociado a la solución considerada, en el sector transversal y sin traza, siguiendo para

¹Debemos aclarar que cuando las soluciones son con constante cosmológica positiva son del tipo de-Sitter (dS) y cuando poseen constante cosmológica negativa son Anti de-Sitter (AdS).

ello el procedimiento reportado en [7]. Posteriormente, fundamentados en que la interacción entre dos partículas masivas sobre nuestro Universo es mediada por un potencial estático, consideraremos la ecuación de las fluctuaciones en un régimen estático y calcularemos el propagador y el potencial de interacción sobre la brana.

En el Capítulo 3, analizaremos el espectro de las fluctuaciones gravitacionales, el cual estará determinado por una ecuación de Schrödinger, y se caracterizará por un modo cero localizado alrededor de la brana y un continuo de modos masivos no acotados y separados del modo cero por una brecha de masa, cuyo valor es proporcional a la constante cosmológica sobre la brana [5]. Un procedimiento para normalizar el espectro masivo también será considerado, el cual consistirá en introducir un par de branas reguladoras, paralelas a la brana física, de forma similar al escenario [10], las cuales inducirán la discretización del espectro. (Para detalles sobre éste procedimiento ver [11]). La dependencia del potencial de interacción con la constante cosmológica 5D se estudiará para los casos donde la curvatura es nula, positiva y negativa; recuperando gravedad 4D únicamente en el último caso, tal y como ocurre en escenarios similares al propuesto en este trabajo [3, 5].

Finalmente, la última parte del trabajo ha sido reservada para las conclusiones generadas del análisis de los resultados.

Capítulo 1

Configuración, y parámetros del Espacio-Tiempo

En este capítulo se presenta la configuración de la geometría del espacio-tiempo. El escenario es una hipersuperficie en un espacio de alta dimensionalidad, que llamaremos *bulk*. Los mundos brana que se proponen cuentan con simetría de reflexión Z_2 y con tensión sobre la brana positiva.

Sea el espacio-tiempo (\mathbb{R}^5, g) , con z como la coordenada adicional y g el tensor métrico del sistema, el cual dada la simetría es posible reescribirlo como (índices latinos van de $0, \dots, 4$ e índices griegos de $0, \dots, 3$)

$$g_{ab} = \Theta(-z)g_{-ab} + \Theta(z)g_{+ab}, \quad g_{ab-}|_{z=0} = g_{ab+}|_{z=0} \quad a, b = 0, \dots, 4, \quad (1.1)$$

con constante cosmológica

$$\Lambda = \Theta(-z)\Lambda_- + \Theta(z)\Lambda_+, \quad (1.2)$$

donde $\Theta(z)$, es la función Heaviside. Entonces, (1.1) será solución a la ecuación de campo de Einstein

$$G_{mn} + \Lambda g_{mn} = T_{mn}, \quad T_{mn} = -\tau \delta_m^\mu \delta_n^\nu g_{\mu\nu} \delta(z), \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3, \quad (1.3)$$

si y solo si g_+ y g_- satisfacen

$$G_{mn-} + \Lambda_- g_{-mn} = 0 \quad \text{para } z < 0, \quad (1.4)$$

$$G_{mn+} + \Lambda_+ g_{+mn} = 0 \quad \text{para } z > 0, \quad (1.5)$$

$$2g^{pq} \left(\delta_m^c \delta_n^d - \frac{1}{2} g_{mn} g^{cd} \right) (\partial_{[c} g_{+q][d} - \partial_{[c} g_{-q][d}]) \delta_p]|_{z=0} = -\tau \delta_m^\mu \delta_n^\nu g_{\mu\nu}|_{z=0}, \quad (1.6)$$

con τ , la tensión de la brana, un parámetro a determinar. Es interesante destacar que la expresión tensorial del T_{mn} , evidencia la alta concentración de energía localizada en torno a la brana en $z = 0$.

Ahora bien, consideremos el siguiente tensor métrico

$$g_{\pm mn} = f^2_{\pm}(z) [-dt_m dt_n + dz_m dz_n + R^2(t) \delta_m^i \delta_n^j dx_i dx_j], \quad (1.7)$$

a partir de (1.4) (1.5) y (1.6), resulta

$$\frac{3}{f_{\pm}^2} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \left(3 \frac{f_{\pm}''}{f_{\pm}^3} + \Lambda_{\pm} \right) = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{2}{f_{\pm}^2} \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{f_{\pm}^2} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \left(3 \frac{f_{\pm}''}{f_{\pm}^3} + \Lambda_{\pm} \right) = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{3}{f_{\pm}^2} \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{3}{f_{\pm}^2} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \left(6 \frac{f_{\pm}''}{f_{\pm}^4} + \Lambda_{\pm} \right) = 0, \quad (1.10)$$

mientras que la condición de borde sobre la brana (1.6), se reduce a

$$f'_+ |_{z=0} - f'_- |_{z=0} = -\frac{1}{3} \tau f^2 |_{z=0}. \quad (1.11)$$

donde las primas y punto denotan derivadas con respecto a z y t respectivamente. Por otro lado, de (1.8), (1.9) y (1.10) se obtiene que

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{\Lambda_-}{6} f_-^2 + \left(\frac{f'_-}{f_-} \right)^2 = \frac{\Lambda_+}{6} f_+^2 + \left(\frac{f'_+}{f_+} \right)^2 = \beta^2. \quad (1.12)$$

Entonces, escogiendo convenientemente $\beta > 0$, se encuentra que

$$R(t) = e^{\beta t}. \quad (1.13)$$

Extendámonos un poco en este punto. Nótese que el tensor métrico del sector 4D de (1.7) es

$$\hat{g}_{\mu\nu} = -dt_{\mu} dt_{\nu} + e^{2\beta t} dx_{\mu}^i dx_{\nu}^j \quad (1.14)$$

donde $\mu, \nu = 0, \dots, 3$; $i, j = 1, \dots, 3$, y el símbolo $\hat{}$ para hacer referencia al sector 4D.

Las componentes no nulas del tensor de Einstein de (1.14) son

$$\hat{G}_{tt} = 3\beta^2, \quad \hat{G}_{11} = -3\beta^2 e^{2\beta t}, \quad \hat{G}_{22} = \hat{G}_{33} = \hat{G}_{11}. \quad (1.15)$$

De tal manera que

$$\hat{G}_{\mu\nu} + 3\beta^2 \hat{g}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.16)$$

Entonces, a partir de (1.16), se deduce que el subespacio 4D posee constante cosmológica positiva dada por $3\beta^2$. (Para detalles de espacios dS, ver Apéndice A.)

Continuando, de (1.11) y (1.12), se obtiene que la tensión de la brana tiene la siguiente expresión

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{6\beta^2 - \Lambda_+} + \sqrt{6\beta^2 - \Lambda_-} \right), \quad \Lambda_{\pm} \leq 6\beta^2. \quad (1.17)$$

En relación al factor métrico, de (1.12), se obtiene

$$f'_{\pm} = \mp f_{\pm} \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{6} \Lambda_{\pm} f_{\pm}^2}, \quad (1.18)$$

e integrando resulta

$$f_{\pm} = \sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda_{\pm}} \frac{C_{\pm} e^{\mp\beta z}}{1 + \frac{1}{4} C_{\pm}^2 e^{\mp 2\beta z}}}, \quad (1.19)$$

con C_{\pm} las constantes de integración respectivas. Exigiendo que f_{\pm} satisfaga $f_{+}(0) = f_{-}(0) = 1$ y (1.11), con τ dado por (1.17) resulta

$$C_{\pm} = 2 \sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda_{\pm}}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Lambda_{\pm}}{6\beta^2}} \right). \quad (1.20)$$

1.1. Análisis del factor Métrico

A continuación se presenta en detalle un análisis de la naturaleza de f_{\pm} , en relación al signo que pudiera tomar Λ_{\pm} en (1.2).

1.1.1. Caso $\Lambda_{\pm} \rightarrow 0$

En el límite de curvatura 5D nula; es decir para $\Lambda_{\pm} \rightarrow 0$, de (1.20), se obtiene que

$$\lim_{\Lambda_{\pm} \rightarrow 0} \sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda}} C_{\pm} = 1, \quad (1.21)$$

así, (1.19) se reduce a

$$f \rightarrow e^{-\beta|z|}, \quad (1.22)$$

el cual coincide con el límite de pared delgada de la solución autogravitante de Goetz calculado en [6]. Además de (1.22), se puede observar que en este caso $f_{\pm} \in \mathbb{R}$.

1.1.2. Caso $\Lambda_{\pm} > 0$

Nuevamente

$$f_{\pm} = \sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda_{\pm}} \frac{C_{\pm} e^{\mp\beta z}}{1 + \frac{1}{4} C_{\pm}^2 e^{\mp 2\beta z}}}, \quad (1.23)$$

con C_{\pm} dado por (1.20). De acuerdo con (1.17), la constante cosmológica del *bulk*, satisface que

$$0 < \Lambda_{\pm} \leq 6\beta^2, \quad (1.24)$$

de tal manera que, $C_{\pm} \in \mathbb{R}$, y en consecuencia el factor métrico (1.23) es una función real.

1.1.3. Caso $\Lambda_{\pm} < 0$

Reescribiendo $\Lambda_{\pm} = -|\Lambda_{\pm}|$, de (1.19), se tiene que

$$f_{\pm} = i\sqrt{\frac{6\beta^2}{|\Lambda_{\pm}|}} \frac{C_{\pm}e^{\mp\beta z}}{1 + \frac{1}{4}C_{\pm}^2e^{\mp 2\beta z}}, \quad (1.25)$$

y de (1.20)

$$C_{\pm} = -2i\sqrt{\frac{6\beta^2}{|\Lambda_{\pm}|}} \left(\sqrt{1 + \frac{|\Lambda_{\pm}|}{6\beta^2}} - 1 \right). \quad (1.26)$$

Claramente C_{\pm} , es imaginario puro; y en este sentido iC_{\pm} es real. En consecuencia (1.25), es real y positivo.

Adicionalmente dentro del contexto de este caso, en el límite estático, $\beta \rightarrow 0$, cuando $\Lambda_{\pm} = -|\Lambda| < 0$; el factor métrico (1.19), consistentemente se reduce a

$$f \rightarrow \left(1 + \sqrt{|\Lambda|/6}|z| \right)^{-1}, \quad (1.27)$$

siendo este, el factor métrico del escenario RS-II [1] en coordenadas conforme.

Por tanto, el espacio tiempo descrito por la métrica (1.7), con $R(t)$ y f_{\pm} dado por (1.13) y (1.19) respectivamente, corresponde a una brana con curvatura positiva y con soporte en la hipersuperficie 4D en $z = 0$, dentro de un espacio-tiempo 5D, cuya curvatura pudiese ser nula, positiva o negativa. Por último, debemos mencionar, que escenarios similares a los descritos anteriormente son comunes en la literatura y algunos ejemplos de ellos se pueden encontrar en [2, 3, 4, 5].

Capítulo 2

Potencial Gravitacional

2.1. La Dinámica de las Perturbaciones Gravitacionales

Siguiendo el procedimiento reportado en [7], se determinará la ecuación de las perturbaciones gravitacionales para una solución arbitraria al sistema acoplado Einstein campo escalar.

El sistema Einstein-campo escalar viene dado por

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab}, \quad (2.1)$$

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} \nabla_d \phi \nabla^d \phi + V(\phi) \right), \quad (2.2)$$

$$\nabla_d \nabla^d \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (2.3)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial de autointeracción, y ϕ el campo escalar el cual interpola suavemente entre los mínimos de $V(\phi)$.

Ahora bien, consideremos $\{g_{ab}, \phi\}$, una solución exacta a (2.1-2.3). Por otro lado, consideremos una familia uniparamétrica $\{\tilde{g}_{ab}(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda)\}$ dada por

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad \tilde{\phi} = \phi + \lambda \varphi, \quad \lambda \ll 1, \quad (2.4)$$

tal que también sean solución al sistema anteriormente planteado, donde h_{ab} y φ representan las perturbaciones de la métrica y al el campo escalar, respectivamente. De tal manera que a primer orden en λ se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} = h_{ab}, \quad \frac{d}{d\lambda} \tilde{\phi} = \varphi. \quad (2.5)$$

Continuando es conveniente expresar a (2.1), para \tilde{g}_{ab} , en la forma del Ricci cinco dimensional,

$$\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{R} = \tilde{T}_{ab} + \lambda J_{ab}, \quad (2.6)$$

donde $J_{ab} = J_{\mu\nu}\delta^\mu_a\delta^\nu_b\delta(z)$ es la fuente de la perturbación h_{ab} , la cual está altamente concentrada sobre el sector 4D. Por otro lado, considerando

$$\tilde{R} = -\frac{2}{3}(\tilde{T} + \lambda\tilde{g}^{ab}J_{ab}), \quad (2.7)$$

en (2.6), resulta

$$\tilde{R}_{ab} - (\tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ab}\tilde{T}) = (J_{\mu\nu}\delta^\mu_a\delta^\nu_b - \frac{1}{3}g_{ab}J)\delta(z), \quad (2.8)$$

donde

$$\tilde{T}_{ab} = \tilde{\nabla}_a\tilde{\phi}\tilde{\nabla}_b\tilde{\phi} - \tilde{g}_{ab}\left(\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_d\tilde{\phi}\tilde{\nabla}^d\tilde{\phi} + V(\tilde{\phi})\right), \quad (2.9)$$

y a primer orden en la perturbación se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda}\tilde{R}_{ac}|_{\lambda=0} = -\frac{1}{2}\square h_{ac} - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_c(g^{bd}h_{bd}) + \nabla_{(a}\nabla^b h_{c)b} + R_{(ac)}^{bf}h_{fb} + R_{(a|b|}^{bf}h_{c)f}, \quad (2.10)$$

y

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\tilde{T}_{ac} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ac}\tilde{T}\right)_{\lambda=0} = \frac{2}{3}h_{ac}V(\phi) + \frac{2}{3}g_{ac}\frac{dV}{d\phi}\varphi + 2\nabla_a\varphi\nabla_c\phi, \quad (2.11)$$

para detalles ver [12].

Ahora bien, considerando que el campo escalar depende unicamente de la coordenada adicional, $\phi = \phi(z)$ y escogiendo el calibre axial

$$h_{az} = 0, \quad (2.12)$$

encontramos que la parte del sector transversal sin traza de h_{ab} se desacoplan de la perturbación del campo escalar permitiendo tomar a esta última como $\varphi = 0$. Luego de (2.8), (2.10) y (2.11) resulta

$$\frac{1}{2}\square^{(5)}h_{ac} + R^{bd}{}_{(ac)}h_{bd} + R^{bd}{}_{(a|d|}h_{c)b} - \frac{2}{3}V(\phi)h_{ac} = (J_{\mu\nu}\delta^\mu_a\delta^\nu_c - \frac{1}{3}g_{ac}J)\delta(z), \quad (2.13)$$

la cual describe la linealización de la gravedad en el sector transversal sin traza.

Ahora bien, para el tensor métrico

$$g_{\pm mn} = f^2(z)[-dt_m dt_n + dz_m dz_n + e^{\beta t}\delta_m^i\delta_n^j dx_i dx_j], \quad (2.14)$$

(2.13) se reduce a

$$-\frac{1}{2f^2}[\square^{(4)} + \partial_z^2 - \frac{f'}{f}\partial_z - 2\frac{f''}{f} - 2\beta^2]h_{ac} = (J_{\mu\nu}\delta^\mu_a\delta^\nu_c - \frac{1}{3}g_{ac}J)\delta(z), \quad (2.15)$$

con $\square^{(4)} = -\partial_t^2 - 3\beta\partial_t + e^{-2\beta t}\partial_i^2$.

2.2. El Propagador 5D Estático

Fenomenológicamente nuestro Universo es descrito por una métrica del tipo FRW con constante cosmológica positiva similar a (1.14); sin embargo, es un hecho que la interacción gravitacional entre dos partículas masivas está mediada por un potencial estático. A continuación calcularemos el potencial de interacción estático asumiendo que es válido en el escenario (2.14), en el régimen $\beta t \ll 1$.

Retomando, (2.15), se tiene

$$-\frac{1}{2}(\square^{(4)} + \mathbb{H})h_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}\delta(z), \quad (2.16)$$

donde

$$\square^{(4)} = -\partial_t^2 + \partial_i^2 \quad \text{y} \quad \mathbb{H} = \partial_z^2 - \frac{f'}{f}\partial_z - 2\frac{f''}{f}, \quad (2.17)$$

y adicionalmente se ha considerado que $f(0) = 1$.

Es importante notar que de acuerdo con el calibre RS, donde $h_{az} = 0$ y en consecuencia $h_{zz} = 0$, es necesario exigir $J = 0$ en (2.15) para evitar inconsistencias en la ecuación de movimiento.

Proponiendo

$$h_{\mu\nu} = -2 \int d^5x' \sqrt{g} G_{\mu\nu\alpha\beta}(x - x', z - z') J^{\alpha\beta}(x') \delta(z); \quad (2.18)$$

donde

$$G_{\mu\nu\alpha\beta} = G_0(x - x', z, z') P^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta} + \sum_m G_m(x - x', z, z') P^{(m)}_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.19)$$

con $P^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ y $P^{(m)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ como los tensores de polarización correspondientes a un gravitón propagándose sobre un espacio-tiempo plano, los cuales viene dados por

$$P^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}, \quad (2.20)$$

$$P^{(m)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + O(p), \quad (2.21)$$

de esta manera, encontramos que sustituyendo (2.18) en (2.16), resulta

$$(\square^{(4)} + \mathbb{H}) \left(G_0(x - x', z, z') + \sum_m G_m(x - x', z, z') \right) = \frac{\delta^4(x - x')\delta(z - z')}{\sqrt{g}}, \quad (2.22)$$

donde se ha hecho uso de $\eta_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} = 0$ y $p_\alpha J^{\alpha\beta} = 0$. Nótese que $h_{\mu\nu}$, sera solución de (2.15), siempre que la acción del operador $(\square^{(4)} + \mathbb{H})$, sobre la función de Green satisfaga (2.22). Por otro lado, es necesario expresar a (2.22) en el espacio de momento; luego, transformando por Fourier resulta

$$(p^2 - \mathbb{H}) \left(\tilde{G}_0(p, z, z') + \sum_m \tilde{G}_m(p, z, z') \right) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\delta(z - z')}{\sqrt{g}}, \quad (2.23)$$

con $\tilde{G}(p, z, z')$ como la transformada de fourier de $G(x-x', z, z')$ y p^2 la transformada de Fourier de $\square^{(4)}$ ¹, tal que

$$p^2 = -p_0^2 + \mathbf{p}^2. \quad (2.29)$$

Así, en el espacio de momento la solución de (2.23) viene dada por

$$\tilde{G}_0(p, z, z') = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\phi_0(z)\phi_0^*(z')}{p^2}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{G}_m(p, z, z') = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\phi_m(z)\phi_m^*(z')}{p^2 + m^2}, \quad (2.31)$$

las cuales se asemejan formalmente a las respotadas en [5], y donde ϕ_m , satisface la ecuación de autovalores

$$\mathbb{H}\phi_m(z) = m^2\phi_m(z), \quad (2.32)$$

y la relación de clausura

$$\phi_0(z)\phi_0^*(z') + \sum_m \phi_m\phi_m^*(z') = \frac{\delta(z-z')}{\sqrt{g}}. \quad (2.33)$$

Ahora bien, si $\phi_m = f^{1/2}\psi_m$, entonces ψ_m satisface

$$(-\partial_z^2 + V_{QM})\psi_m = m^2\psi_m, \quad V_{QM} = \frac{3}{4} \frac{f'^2}{f^2} + \frac{3}{2} \frac{f''}{f}. \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34), representa una ecuación autovalores en m^2 tipo Schrödinger donde cada $\psi_m(z)$, corresponde a las autofunciones o modos gravitacionales.

A continuación se determinará la expresión que sigue el potencial gravitacional entre dos partículas de masa m_1 y m_2 separadas por una distancia r sobre la brana.

¹Sea la transformada de Fourier de una función $f(x)$ de rápido decaimiento

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ipx}; \quad (2.24)$$

entonces,

$$\widetilde{\partial_x^2 f} = -p^2 \tilde{f}(p). \quad (2.25)$$

Considere ahora la siguiente transformada integral

$$\tilde{G}(p, z) = \int dx^4 G(x, z) e^{i\eta_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, \dots, 3. \quad (2.26)$$

Así

$$\widetilde{\square_4 G} = - \int e^{ipx} \left[\int \partial_t^2 G e^{-ip_0 t} dt \right] d^3x + \int e^{-ip_0 t} \left[\int \partial_x^2 G e^{ip^i x^i} d^3x \right] dt. \quad (2.27)$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{\square_4 G} = -p^2 \tilde{G}(p). \quad (2.28)$$

2.3. El Potencial Gravitacional

El potencial gravitacional en el espacio de momentos, viene dado por la siguiente expresión

$$\tilde{V}(p, z, z') = \int dt J_1^{\alpha\beta}(p) \tilde{G}_{\alpha\beta\mu\nu}(p, z, z') J_2^{\mu\nu}(p), \quad (2.35)$$

donde $J^{\alpha\beta} = mu^\alpha u^\beta$, con u^α la cuadrivelocidad de una partícula de masa m . Nótese que para dos partículas de masa m_1 y m_2 sobre la brana existe un $J_1^{\alpha\beta}$ y $J_2^{\alpha\beta}$ respectivamente; luego, en (2.35) se observa que la interacción entre estas dos partículas es mediada por el propagador $G_{\alpha\beta\mu\nu}$, en correspondencia con la definición de un potencial gravitacional.

Para una partícula en reposo sobre la brana se tiene que $J^{\alpha\beta} = m\delta_0^\alpha \delta_0^\beta$; así (2.35), se puede reescribir

$$\tilde{V}(p) = m_1 m_2 \int dt \tilde{G}_{0000}(p, 0, 0). \quad (2.36)$$

Con el proposito de encontrar el potencial gravitacional, es necesario obtener la expresión del potencial en el espacio de coordenadas. Para ello antitransformaremos por Fourier a (2.36). Debido a que el espacio-tiempo es 5D, es conveniente antitransformar en cada una de las coordenadas de la geometría; es decir, en el tiempo y en el espacio.

Considerando que $P_{0000}^{(0)} = 1/2$ y $P_{0000}^{(m)} = 2/3$, y definiendo $\mathcal{F}_{t-t'}^{-1}$ y $\mathcal{F}_{x-x'}^{-1}$, como las antitransformadas en el tiempo y en el espacio, se tiene

$$\begin{aligned} V(r) &= m_1 m_2 \int dt \mathcal{F}_{t-t'}^{-1} \mathcal{F}_{x-x'}^{-1} \tilde{G}_{0000}(p, 0, 0) \\ &= m_1 m_2 \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}_{x-x'}^{-1} \int dt \mathcal{F}_{t-t'}^{-1} \tilde{G}^0(p, 0, 0) + \frac{2}{3} \sum_m \mathcal{F}_{x-x'}^{-1} \int dt \mathcal{F}_{t-t'}^{-1} \tilde{G}^m(p, 0, 0) \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ahora bien, considerando que

$$\int dt \mathcal{F}_{t-t'}^{-1} \tilde{G}^{(0)}(p, 0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{|\psi_0(0)|^2}{\mathbf{p}^2}, \quad (2.38)$$

$$\int dt \mathcal{F}_{t-t'}^{-1} \tilde{G}^{(m)}(p, 0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{|\psi_m(0)|^2}{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2.39)$$

donde $\mathbf{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Por tanto, reescribiendo a (2.37), resulta

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}_{x-x'}^{-1} \frac{|\psi_0(0)|^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{2}{3} \sum_m \mathcal{F}_{x-x'}^{-1} \frac{|\psi_m(0)|^2}{\mathbf{p}^2 + m^2} \right]. \quad (2.40)$$

Ahora consideremos el siguiente término para m arbitrario

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{x-x'}^{-1} \frac{|\psi_m(0)|^2}{\mathbf{p}^2 + m^2} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{p}^2 + m^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-i|\mathbf{p}|r \cos\theta} \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \, ir} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| \frac{(e^{i|\mathbf{p}|r} - e^{-i|\mathbf{p}|r})}{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \\
&= \sqrt{2\pi} \frac{e^{-mr}}{r}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Finalmente, sustituyendo (2.41) en (2.40) se obtiene

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{4\pi r} \left[|\psi_0(0)|^2 + \frac{4}{3} \sum_m |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} \right]. \tag{2.42}$$

La ecuación (2.42), representa la estructura del potencial gravitacional entre dos partículas masivas, situadas sobre la brana y separadas por una distancia r . Además, cuenta con un modo cero y unas correcciones correspondientes al sector masivo de las autofunciones.

Capítulo 3

Gravitación Newtoniana

Con el fin de obtener el espectro de las fluctuaciones gravitacionales de los escenarios analizados en el Capítulo 1, descritos por la métrica (1.7, 1.19, 1.13), consideremos el problema de autovalores (2.34) tal que

$$V_{QM} = V_{QM-}\Theta(-z) - \frac{1}{2}\tau\delta(z) + V_{QM+}\Theta(z) + \frac{9}{4}\beta^2 \quad (3.1)$$

donde

$$V_{QM\pm} = -15\beta^2\left(1 + \frac{4}{C_{\pm}^2}e^{\pm 2\beta z}\right)^{-2} \frac{4}{C_{\pm}^2}e^{\pm 2\beta z}. \quad (3.2)$$

Así, el espectro de las fluctuaciones gravitacionales viene dado por un modo cero localizado en torno a la brana,

$$\psi_0(z) = N_0[f_-^{-3/2}\Theta(-z) + f_+^{3/2}\Theta(z)], \quad (3.3)$$

donde N_0 es una constante de normalización, y por una torre continua de modos masivos, $m^2 \neq 0$, que se propagan libremente por toda la estructura 5D, y que convenientemente escribimos de la siguiente manera

$$\psi_+(z) = N_m [A_+(e^{i\mu z} F_+ + e^{-i\mu z} F_+^*) + i(e^{i\mu z} F_+ - e^{-i\mu z} F_+^*)], \quad z > 0, \quad (3.4)$$

y

$$\psi_-(z) = N_m [A_-(e^{-i\mu z} F_- + e^{i\mu z} F_-^*) + i(e^{-i\mu z} F_- - e^{i\mu z} F_-^*)], \quad z < 0, \quad (3.5)$$

con

$$F_{\pm} \equiv {}_2F_{1\pm}\left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 1 - \frac{i\mu}{\beta}; \left(1 + \frac{4}{C_{\pm}^2}e^{\pm 2\beta z}\right)^{-1}\right], \quad \mu = \sqrt{m^2 - 9\beta^2/4}, \quad (3.6)$$

donde F_{\pm} es la función hipergeométrica, N_m y A_{\pm} , las constantes de normalización e integración respectivamente. Para detalles de (3.4) y (3.5) ver Apéndice B.

De (3.1) y (3.2), se puede verificar que

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} V_{QM}(z) = \frac{9}{4}\beta^2; \quad (3.7)$$

de tal manera que el modo cero localizado se encuentra separado del continuo de modos masivos por una brecha de masa igual a $9\beta^2/4$, lo cual es una característica genérica de los escenarios con expansión dS.

Por otro lado, de la integración de (2.34, 3.1), se obtienen las siguientes condiciones de borde sobre la brana para los modos masivos

$$\psi_-(0) = \psi_+(0), \quad (3.8)$$

$$(\psi'_- - \psi'_+)_{z=0} - \frac{1}{2}\tau\psi(0) = 0. \quad (3.9)$$

Adicionalmente, los modos masivos cumplen con la siguiente condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_m(z)\psi_{m'}^*(z) = \delta(m - m'). \quad (3.10)$$

Nótese que (3.10) diverge para todo $m = m'$, lo cual es un problema típico dentro de éste contexto, y que se puede resolver introduciendo un par de branas reguladoras ubicadas en $\pm z_r$ [10, 11]. A continuación consideraremos con cierto detalle el método de las branas reguladoras para normalizar el espectro masivo (3.4, 3.5).

3.1. Discretización del Espectro: Las Branas Reguladoras

Para discretizar el continuo de modos masivos se introducen un par de branas reguladoras ubicadas en $\pm z_r$ con tensiones negativas. Ahora bien, en vista de la simetría Z_2 del sistema ocurre que $\psi_m(-z_r) = \psi_m(z_r)$ y en consecuencia solo es necesario considerar una brana reguladora, aquella ubicada en z_r - ver Fig (3.1)

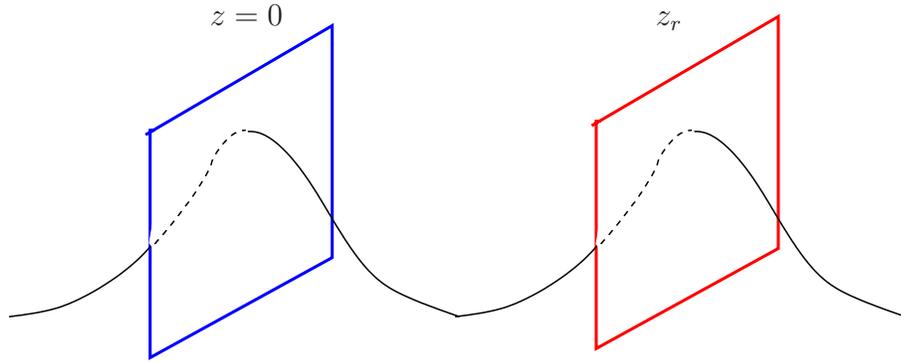


Figura 3.1: Brana física en $z = 0$ y brana reguladora en z_r .

Dentro del marco del proceso de regularización, consideremos el factor métrico

$$f(z) = f_<\Theta(-z_r - z) + f_-\Theta(z + z_r)\Theta(-z) + f_+\Theta(z_r - z)\Theta(z) + f_>\Theta(z - z - r), \quad (3.11)$$

donde

$$f_>(z) = f_-(z - 2z_r) \rightarrow f_>(z_r) = f_-(-z_r), \quad (3.12)$$

$$f_<(z) = f_+(z + 2z_r) \rightarrow f_<(-z_r) = f_+(z_r). \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.11) en (3.1) resulta:

$$\begin{aligned}
V_{QM} &= V_{<}\Theta(-z_r - z) + V_{-}\Theta(z + z_r)\Theta(-z) + V_{+}\Theta(z_r - z)\Theta(z) + V_{>}\Theta(z - z_r) \\
&+ \frac{3}{2}\frac{f'_- - f'_<}{f}\delta(z + z_r) + \frac{f'_+ - f'_-}{f}\delta(z) + \frac{f'_> - f'_+}{f}\delta(z - z_r) + \frac{9}{4}\beta^2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Adicionalmente, como consecuencia de la brana reguladora, se obtiene la siguiente condición de borde en z_r para los modos masivos (3.4, 3.5).

$$2\psi'_-(-z_{\pm r}) + \frac{3}{2}\tau\psi(-z_{\pm r}) = 0, \tag{3.15}$$

donde se ha hecho uso de la simetría Z_2 del sistema.

De la ecuación (3.15), cuando $z_r \rightarrow \infty$, se deduce que

$$\tan(\mu z_r) = \frac{3A\beta - 2\mu}{2A\mu + 3\beta}, \quad \text{con } A_+ = A_- = A, \tag{3.16}$$

donde se ha tenido en cuenta el comportamiento de las funciones hipergeométricas cuando su argumento tiende a uno. Además es importante destacar, que (3.16), representa de forma general, la condición de cuantización del espectro masivo de las ondas gravitacionales; de hecho para $z_r \rightarrow \infty$, es posible verificar que el espectro masivo se cuantiza en unidades de π/z_r .

La transición de la suma sobre los m a una integral en (2.42), cuando $z_r \rightarrow \infty$, viene dada por

$$\sum_m \psi^2(m) = \sum_m \psi^2(m) \frac{z_r}{\pi} \Delta_m \rightarrow \int \psi^2(m) \frac{z_r}{\pi} dm. \tag{3.17}$$

Por otro lado, la ecuación (3.10) se puede reescribir como

$$\lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{1}{z_r} \int_{-z_r}^{z_r} dz \psi_{m_p}^* \psi_{m_q} = \lim_{z_r \rightarrow \infty} \frac{\delta_{pq}}{z_r}. \tag{3.18}$$

La densidad de estados normalizada a través de (3.18) es empleada para evaluar el potencial gravitacional (2.42)

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{4\pi r} \left[|\psi_0(0)|^2 + \frac{4}{3} \int_{3\beta/2}^{+\infty} |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} \frac{z_r}{\pi} dm \right]. \tag{3.19}$$

Nótese que en (3.19), se tiene presente la brecha de energía dada por $3\beta/2$, la cual evidencia el valor a partir del cual los modos masivos fluctúan libremente por la estructura 5D. Dicha brecha es posible observarla vía la expresión del V_{QM} dado por (3.2).

3.2. Análisis de la Gravedad Newtoniana

Debido a que la estructura funcional de los modos masivos (3.4, 3.5) es poco trivial, es necesario determinar que sector de ellos contribuye de forma efectiva a la integral

$$\int_{3\beta/2}^{\infty} |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} dm. \tag{3.20}$$

Dado que $3\beta/2$ es la escala mas pequeña de energía que m puede alcanzar, para cualquiera de los escenarios discutidos aquí, consideraremos que $m \gg 3\beta/2$. Por otro lado, debido a que los modos pesados son exponencialmente atenuados es necesario tomar en cuenta que $m \ll m_c$, donde m_c es una escala de energía determinada.

En lo que sigue, debido a la simetría Z_2 ,

$$\Lambda_+ = \Lambda_- = \Lambda; \quad (3.21)$$

así pues,

- para $\Lambda \rightarrow 0$, no existe un m_c . Por lo tanto, $m \gg 3\beta/2$;
- para $\Lambda > 0$ existen dos escalas, $3\beta/2$ y $\sqrt{|\Lambda|/6}$; sin embargo, de acuerdo con (1.17), estas son del orden. Entonces, en este caso tampoco existe un m_c , y por lo tanto, consideraremos $m \gg 3\beta/2$;
- para $\Lambda < 0$, al igual que en el caso anterior, podemos identificar dos escalas de energía, $3\beta/2$ y $\sqrt{|\Lambda|/6}$, tal que la segunda está directamente relacionada con m_c ; en consecuencia, en este caso $3\beta/2 \ll m \ll \sqrt{|\Lambda|/6}$.

A continuación, analizaremos el potencial gravitacional (2.42) sobre la brana dS para los diferentes escenarios mencionados arriba, considerando que sobre el sector 4D, la métrica (1.7), es del tipo FRW con β^{-1} como el radio del Universo. (Para detalles sobre las aproximaciones tomadas en las funciones hipergeométricas ver Apéndice C; y para el cálculo de la norma ver Apéndice D).

3.2.1. Escenario $\Lambda \rightarrow 0$

La constante de integración del sistema dada por

$$A = \frac{2m}{3\beta}; \quad (3.22)$$

mientras que las constantes de normalización de los modos del espectro son

$$N_0^2 = \frac{3\beta}{2}, \quad N_m^2 = \frac{1}{4z_r}; \quad (3.23)$$

tal que, el modo cero y los modos masivos en $z = 0$, vienen como

$$|\psi_0(0)|^2 = \frac{3\beta}{2}, \quad |\psi_m(0)|^2 = \frac{1}{z_r}. \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.24) en el potencial gravitacional dado por (2.42), resulta

$$V(r) = \frac{3\beta}{8\pi} \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \frac{8}{9\pi} \frac{1}{\beta r} + \dots \right]; \quad (3.25)$$

y en vista de que $\beta r \ll 1$, no es posible despreciar $1/\beta r$ frente al uno y de esta manera se hace significativa la contribución de los modos masivos frente al término Newtoniano, obteniéndose así gravedad 5D sobre la brana.

3.2.2. Escenario $\Lambda > 0$

Analicemos el escenario con vacíos dS, dentro del rango factible $1 > \Lambda/\beta^2 > 0$, esto último en correspondencia con la tesión (1.17).

La constante de integración del sistema y la norma de los modos masivos para este caso vienen dados por

$$A \sim \frac{8m}{15\beta}, \quad N_m^2 \sim \frac{1}{4z_r}; \quad (3.26)$$

mientras que la constante de normalización del modo cero queda determinada de la siguiente manera

$$N_0^2 \sim \beta \left[\sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda}} \left[2 \left(\frac{6\beta^2}{\Lambda} \right) \arctan \left(\sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda} - 1} \right) - \sqrt{\frac{6\beta^2}{\Lambda} - 1} \right] \right]. \quad (3.27)$$

tal que

$$\frac{2}{\pi}\beta < N_0^2 < \frac{3}{2}\beta. \quad (3.28)$$

Entonces, el espectro de fluctuaciones en $z = 0$, queda determinado por

$$|\psi_0(0)|^2 \sim N_0^2, \quad |\psi_m(0)|^2 \sim \frac{1}{z_r}. \quad (3.29)$$

Ahora bien, sustituyendo nuevamente en (2.42) se tiene que

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{4\pi r} N_0^2 \left[1 + \frac{4}{3\pi} \frac{1}{N_0^2 r} + \dots \right]. \quad (3.30)$$

En este caso $N_0^2 r \ll 1$, en consecuencia $1/N_0^2 r$ no es despreciable frente al término Newtoniano, obteniéndose de esta forma gravedad 5D sobre la brana.

3.2.3. Escenario $\Lambda < 0$

Para este escenario, donde $3\beta/2 \ll m \ll \sqrt{|\Lambda|/6}$, se tiene que

$$A \sim 1, \quad N_0^2 \sim \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}}, \quad N_m^2 \sim \frac{1}{8z_r}. \quad (3.31)$$

Así pues, el espectro de las fluctuaciones sobre la brana viene dado por

$$|\psi_0(0)|^2 \sim \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}}, \quad |\psi_m(0)|^2 \sim \frac{8}{\pi z_r} \left(\frac{m}{\sqrt{|\Lambda|/6}} \right)^{-3}. \quad (3.32)$$

Sustituyendo (3.32) en (2.42), resulta

$$V(r) = \frac{m_1 m_2}{4\pi r} \sqrt{\frac{|\Lambda|}{6}} \left[1 + \frac{4}{27\beta^2} \sqrt{\frac{6}{|\Lambda|}} \left[(2 - 3\beta r) - \frac{1}{2}\gamma + \log(3/2) \right] \right]; \quad (3.33)$$

donde γ es la constante Euler-Gamma.

Analizando la expresión (3.33), encontramos que el término proporcional a βr es despreciable frente a cualquier cantidad finita, ya que $\beta r \ll 1$. Por lo tanto, en este escenario es posible recuperar gravedad Newtoniana sobre la brana en el intervalo

$$\sqrt{\frac{6}{|\Lambda|}} \ll r \ll \frac{2}{3}\beta^{-1}. \quad (3.34)$$

Conclusiones

En este trabajo se consideraron soluciones dinámicas a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con simetría de reflexión, que están en correspondencia con un espacio-tiempo 5D con constante cosmológica nula, positiva o negativa; dividido en dos subespacios por una brana con curvatura positiva asociada a una alta densidad de energía con soporte sobre la hipersuperficie $z = 0$. En particular, el escenario correspondiente a curvatura 5D nula, coincide con el límite de pared delgada de la solución de Goetz [9], determinado en [6]. Adicionalmente, en el límite estático y curvatura 5D negativa, la familia de soluciones se reduce al escenario RS-II [1].

Con el fin de hallar la ecuación de movimiento de las fluctuaciones gravitacionales en el sector transversal y sin traza, se consideró el procedimiento reportado en [7]. Luego, restringiendo el sistema a un régimen estático, determinamos el propagador y el potencial de interacción entre dos partículas masivas separadas una distancia r sobre la brana. Encontramos que el propagador y el potencial dependen esencialmente de dos términos, uno asociado al modo cero de las fluctuaciones gravitacionales; y otro que depende del sector masivo del espectro gravitacional. Ocurre que las fluctuaciones gravitacionales siguen una ecuación de Schrödinger, con un potencial mecánico cuántico tipo delta, que asintóticamente tiende a $9\beta^2/4$; tal que el espectro de auto-funciones se caracteriza por un modo cero localizado alrededor de la brana, y por una torre de modos masivos libres de moverse por toda la estructura 5D, y separados del modo acotado por la brecha que exhibe el potencial mecánico cuántico.

Con el propósito de normalizar el espectro masivo, se introdujo un par de branas reguladoras siguiendo el procedimiento discutido en [11]. De las condiciones de integrabilidad asociadas al problema de autovalores inicial fueron determinadas las constantes de integración de las auto-funciones; luego, al introducir las branas reguladoras en $\pm z_r$, se generó una condición adicional, la cual indujo la discretización de la masa del espectro en unidades de π/z_r . El conjunto de autofunciones del problema inicial se recuperó en el límite $z_r \rightarrow \infty$.

Finalmente, estudiamos el potencial gravitacional sobre tres escenarios, el primero asociado a una curvatura 5D nula; mientras que el segundo y el tercero, relacionados con una curvatura 5D positiva y negativa, respectivamente. En los tres casos, siempre se asumió una curvatura positiva sobre la brana. En los dos primeros escenarios, sólo se pudo identificar una escala de energía, aquella relacionada con el parámetro β ; de manera que la única opción para estudiar el potencial estaba relacionada con el intervalo $m \gg 3\beta/2$ o equivalentemente $r \ll 2\beta^{-1}/3$. Ahora bien, justamente en esta región las correcciones resultarán significativas y el potencial tomó la forma 5D. El último caso resultó más favorable, ya que en ese escenario se identificaron claramente dos escalas; tal que, $3\beta/2 \ll m \ll \sqrt{|\Lambda|}/6$ ó $\sqrt{|\Lambda|}/6 \ll r \ll 2\beta^{-1}/3$, donde las correcciones efectivamente fueron despreciables frente al término Newtoniano. Por lo tanto, sobre

una brana dS sólo es posible recuperar gravedad Newtoniana si los vacíos de la estructura 5D son estrictamente AdS.

Apéndice A

Geometría del Espacio-Tiempo: Los Espacios de-Sitter

En Relatividad General el espacio-tiempo de-Sitter, es una solución maximamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein, con constante cosmológica Λ positiva, la cual fenomenológicamente constituye un universo en expansión.

El objetivo de lo que a continuación se analizará, es exponer la geometría que exhiben los espacios-tiempos modelados por una métrica de-Sitter.

Para ello, consideremos un espacio \mathbf{R}^{n+1} , con la siguiente métrica

$$ds^2 = -dt_0^2 + \sum_{i=1}^n dx_i^2, \quad (\text{A.1})$$

donde t_0 y cada x_i , satisfacen la ecuación

$$-t_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha^2. \quad (\text{A.2})$$

con α , como una constante positiva.

Luego se define al espacio de-Sitter, como aquel descrito geoméricamente por el hiperboloide de una hoja, el cual tiene por ecuación a (A.2).

Por otro lado, la curvatura, es una característica propia de la geometría de cada espacio, por ello para la métrica maximamente simétrica dada por (A.1), el tensor de curvatura de Riemann es dado por

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{\alpha^2}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}). \quad (\text{A.3})$$

y el tensor de Ricci resulta

$$R_{\mu\nu} = \frac{(n-1)}{\alpha^2}g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Ahora bien, en los espacios maximamente simétricos [13], como el propuesto, el escalar de curvatura se encuentra relacionado con la constante cosmológica del escenario. Veamos

$$R = \frac{n(n-1)}{\alpha^2}, \quad (\text{A.5})$$

y la constante cosmológica viene dada por

$$\Lambda = \frac{(n-1)(n-2)}{2\alpha^2}. \quad (\text{A.6})$$

Así, de (A.5) y (A.6), se tiene

$$R = \frac{2n}{(n-2)}\Lambda, \quad (\text{A.7})$$

tal que para $n = 4$, se obtiene que $\Lambda = 3/\alpha^2$, resultado similar al reportado en la ecuación (1.16).

A continuación se muestra que bajo cierto cambio de coordenadas, que satisface a (A.2), la métrica (A.1) se reduce a la propuesta en el Capítulo 1, dada por (1.14).

Consideremos los siguientes cambios de coordenadas

$$t_0 = \alpha \sinh(t/\alpha) + \frac{r^2 e^{t/\alpha}}{2\alpha}, \quad x_1 = \alpha \cosh(t/\alpha) - \frac{r^2 e^{t/\alpha}}{2\alpha}, \quad x_i = e^{t/\alpha} y_i, \quad (\text{A.8})$$

donde

$$r^2 = \sum_i y_i^2. \quad (\text{A.9})$$

De esta manera considerando (A.8), y tras diferenciar y simplificar adecuadamente a nivel de (A.1), resulta

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t/\alpha} dy^2, \quad (\text{A.10})$$

donde

$$dy^2 = \sum_{i=2}^{n-2} dy_i^2. \quad (\text{A.11})$$

Lo anterior demuestra que el sector 4D, de la métrica (1.7), está representado geoméricamente por un espacio de-Sitter.

El anterior análisis corresponde a un caso particular de un resultado ampliamente conocido en Relatividad General, el cual asevera que es posible establecer una correspondencia entre la constante cosmológica y la geometría del espacio-tiempo [13]. Por ejemplo, como en el caso discutido anteriormente, un espacio con constante cosmológica positiva está asociado a un hiperboloide de una hoja denominado de-Sitter. Por otra parte, en aquellos escenarios con curvatura nula o negativa, la geometría corresponde, en el primer caso, a un espacio plano o Minkowskiano; y en el segundo caso, a un hiperboloide de dos hojas o también llamado Anti de-Sitter.

Apéndice B

La Ecuación Diferencial Hipergeométrica

En este apéndice se demuestra que la ecuación de Schrödinger bajo un cierto cambio de variable a nivel de la función de onda (3.4), se reduce a una ecuación diferencial hipergeométrica.

Para determinar la expresión que tiene los modos masivos para $z > 0$ (análogo para $z < 0$), se considera el siguiente cambio:

$$\psi(z) = \left(\frac{1}{4}C^2 + e^{2\beta z}\right)^{5/2} e^{\pm i\mu z} \chi(z), \quad \text{con} \quad \mu^2 = m^2 - \frac{9}{4}\beta^2, \quad (\text{B.1})$$

sustituyendo en (2.34), resulta:

$$-\partial_z^2 \chi - 2 \left[\pm i + 5\beta \left(1 + \frac{4}{C^2} e^{2\beta z}\right)^{-1} \right] \partial_z \chi - 5\beta \left(1 + \frac{4}{C^2} e^{2\beta z}\right)^{-1} \frac{4}{C^2} e^{2\beta z} (\pm 2i\mu + 5\beta) \chi = 0. \quad (\text{B.2})$$

Ahora bien, consideremos

$$\xi = -\frac{4}{C^2} e^{2\beta z}, \quad (\text{B.3})$$

como la variable de integración resultando que

$$(1 - \xi)\xi \chi''(\xi) + \left[\left(1 \pm i\frac{\mu}{\beta}\right) - \left(6 \pm i\frac{\mu}{\beta}\right) \xi \right] \chi'(\xi) - \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} \pm i\frac{\mu}{\beta}\right) \chi(\xi) = 0, \quad (\text{B.4})$$

y comparando con la expresión que sigue la ecuación diferencial hipergeométrica, se tiene que la ecuación de Schrödinger es posible reescribirla como

$$(1 - \xi)\xi W''(\xi) + [c - (a + b + 1)\xi]W'(\xi) - abW(\xi) = 0; \quad (\text{B.5})$$

con a, b, c como los parámetros Pochhammer de la ecuación Hipergeométrica

$$a = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{5}{2} \pm \frac{i\mu}{\beta}, \quad c = 1 \pm \frac{i\mu}{\beta}.$$

Por otro lado, existe una variedad de soluciones a (B.5), pero dada la complejidad de dicha ecuación es necesario escoger convenientemente [14]

$$\chi(\xi) = (1 - \xi)^{-a} {}_2F_1[a, c - b; a - b + 1; (1 - \xi)^{-1}]. \quad (\text{B.6})$$

Así, la función de onda ψ_+ viene como

$$\psi_+(z) = A_+(e^{i\mu z} {}_2F_{1+} + e^{-i\mu z} {}_2F_{1+}^*) + i(e^{i\mu z} {}_2F_{1+} - e^{-i\mu z} {}_2F_{1+}^*), \quad (\text{B.7})$$

con ${}_2F_{1+}$ como en (3.4), y donde el primer término es la parte real y el segundo la parte imaginaria de $\psi_+(z)$. De manera similar para $\psi_-(z)$ se obtiene

$$\psi_-(z) = A_-(e^{-i\mu z} {}_2F_{1-} + e^{i\mu z} {}_2F_{1-}^*) + i(e^{-i\mu z} {}_2F_{1-} - e^{i\mu z} {}_2F_{1-}^*). \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Las Funciones Hipergeométricas y sus Aproximaciones

Es necesario considerar a $\psi_m(z)$, en $z = 0$, y para ello se requiere un comportamiento aproximado de las funciones hipergeométricas.

$$F_{\pm} \equiv {}_2F_{1\pm} \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}; 1 - \frac{i\mu}{\beta}; \frac{C_{\pm}^2}{C_{\pm}^2 + 4} \right], \quad \mu = \sqrt{m^2 - 9\beta^2/4}. \quad (\text{C.1})$$

En lo que sigue analizaremos, el procedimiento para encontrar una estimación próxima al comportamiento real de las funciones hipergeométricas. Para ello consideremos las siguientes definiciones

$$x = \frac{m}{\beta}, \quad y = \frac{\sqrt{\Lambda/6}}{\beta}. \quad (\text{C.2})$$

C.1. Escenario $\Lambda > 0$

Para el caso dS, estudiado en el Capítulo 3, se tiene que

$$x \gg 1, \quad y \sim 1, \quad (\text{C.3})$$

de esta manera bajo las anteriores consideraciones, la función hipergeométrica resulta

$$F1 \sim {}_2F_1 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -ix, \frac{1}{2} \right], \quad (\text{C.4})$$

donde

$$\frac{C_{\pm}^2}{C_{\pm}^2 + 4} \sim \frac{1}{2}. \quad (\text{C.5})$$

Desarrollando en serie y siguiendo (C.3), se obtiene que

$$F1 \sim 1 - i \frac{15}{8} \frac{1}{x} \quad (\text{C.6})$$

y

$$F2 \equiv \frac{d}{dz} F1(z)|_{z=0} \sim 1 - i \frac{7}{8} \frac{1}{x}. \quad (\text{C.7})$$

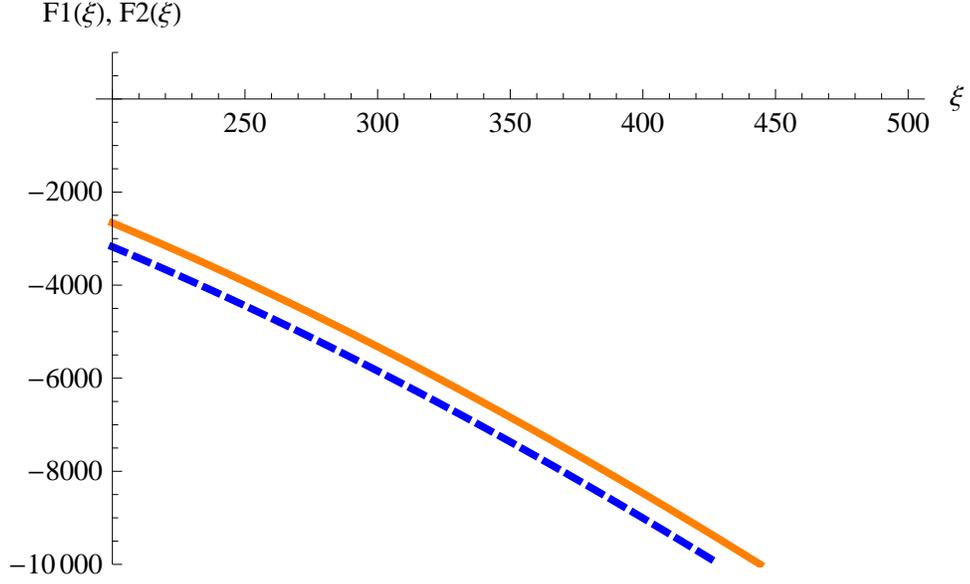


Figura C.1: $F1$ (azul) y su aproximación (naranja), con $\xi = y/x$

C.2. Escenario $\Lambda < 0$

Consideremos la siguiente función hipergeométrica, típica del escenario AdS, analizado en el Capítulo 3; en este caso

$$x \gg 1, \quad y \gg 1, \quad \frac{y}{x} \gg 1. \quad (\text{C.8})$$

En consecuencia

$$F1 \sim {}_2F_1 \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -ix, -\frac{y}{2} \right], \quad (\text{C.9})$$

donde se ha considerado

$$\frac{C_{\pm}^2}{C_{\pm}^2 + 4} \sim -\frac{y}{2}. \quad (\text{C.10})$$

Nuevamente desarrollando en serie a segundo orden se tiene que

$$F1 \sim -\frac{2(1-i)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} + \sqrt{\frac{y}{x}} \left(\frac{2(1+i)}{\sqrt{\pi}} - \frac{(1-i)1}{4\sqrt{\pi}x} \right) + \sqrt{\frac{x}{y}} \left(\frac{1-i}{\sqrt{\pi}} + \frac{1+ix}{\sqrt{\pi}y} \right), \quad (\text{C.11})$$

la cual, de acuerdo a (C.8), se puede truncar, resultando

$$F1 \sim -\frac{2(1-i)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} + \left(\frac{2(1+i)}{\sqrt{\pi}} \right) \sqrt{\frac{y}{x}}. \quad (\text{C.12})$$

Por otro lado, bajo un razonamiento análogo se tiene que la derivada de $F1$, resulta aproximada como sigue

$$F2 \equiv \frac{d}{dz} F1(z)|_{z=0} \sim \frac{8(1+i)}{5\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{y}{x}}. \quad (\text{C.13})$$

En la Fig (C.1), se observa el comportamiento entre la función hipergeométrica (3.6) y su función aproximación (C.12).

Apéndice D

Las Normas de los Modos Masivos

A continuación se abordan los detalles técnicos relacionados con el cálculo de la constante de normalización de los modos masivos del espectro de autofunciones, de los escenarios estudiados en el Capítulo 3.

Tomando en cuenta el comportamiento asintótico de la función de onda; es decir, para z muy grande, donde el argumento de la función hipergeométrica tiende a cero; y en consecuencia, ésta se aproxima a la unidad, resulta

$$\psi_+(z) = 2N_m A(\cos(\mu z) - \sin(\mu z)). \quad (\text{D.1})$$

Entonces, en vista de que $\psi_m \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\psi_+^2(z) = 4(A^2 \cos(\mu z)^2 - 2A \cos(\mu z) \sin(\mu z) + \sin(\mu z)^2). \quad (\text{D.2})$$

Por otro lado, dada la ortogonalidad de las funciones $\sin(\mu z)$ y $\cos(\mu z)$, y haciendo uso de (3.18), resulta

$$2 \frac{N_m^2}{z_r} \int_0^{z_r} 4(A^2 \cos(\mu z)^2 + \sin(\mu z)^2) = \frac{1}{z_r}, \quad (\text{D.3})$$

donde hemos considerado la simetría Z_2 del sistema.

Integrando se obtiene que

$$2 \frac{N_m^2}{z_r} \left[\frac{2(1 + A^2)z_r \mu + (A^2 - 1) \sin(2\mu z_r)}{\mu} \right] = \frac{1}{z_r}. \quad (\text{D.4})$$

De esta manera, considerando a $z_r \rightarrow \infty$, se tiene

$$N_m^2 = \frac{1}{4(1 + A^2)z_r}. \quad (\text{D.5})$$

Dicha expresión, representa la forma general de la norma de los modos masivos del espectro de autofunciones.

En lo que sigue, se calculará el valor de dicha norma para los diferentes escenarios considerados aquí.

D.1. Escenario $\Lambda \rightarrow 0$

Para este caso A viene dado por (3.22), luego haciendo uso de (D.5), la constante de normalización para el espectro masivo es

$$N_m^2 = \frac{1}{4z_r}, \quad (\text{D.6})$$

donde se ha hecho uso de que $m/\beta \gg 1$.

D.2. Escenario $\Lambda > 0$

En este caso A viene dado por (3.26), y nuevamente haciendo uso de (D.5) resulta que

$$N_m^2 \sim \frac{1}{4z_r}. \quad (\text{D.7})$$

Se puede observar que tanto para el escenario con constante cosmológica nula, como para el escenario dS, las normas son similares, esto como consecuencia de que para ambos casos $m \gg \beta$.

D.3. Escenario $\Lambda < 0$

Siguiendo un procedimiento similar a los expuestos anteriormente, con A dado por (3.31); la constante de normalización resulta

$$N_m^2 \sim \frac{1}{8z_r}. \quad (\text{D.8})$$

Bibliografía

- [1] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999.
- [2] Martin Gremm. Thick domain walls and singular spaces. *Phys. Rev.*, D62:044017, 2000.
- [3] A. Kehagias and K. Tamvakis. Graviton localization and Newton law for a dS(4) brane in 5D bulk. *Class. Quant. Grav.*, 19:L185, 2002.
- [4] Iver H. Brevik, Kazuo Ghoroku, Sergei D. Odintsov, and Masanobu Yahiro. Localization of gravity on brane embedded in AdS(5) and dS(5). *Phys. Rev.*, D66:064016, 2002.
- [5] Kazuo Ghoroku, Akihiro Nakamura, and Masanobu Yahiro. Newton’s law in de Sitter brane. *Phys. Lett.*, B571:223–228, 2003.
- [6] Rommel Guerrero, Alejandra Melfo, and Nelson Pantoja. Self-gravitating domain walls and the thin-wall limit. *Phys. Rev.*, D65:125010, 2002.
- [7] Oscar Castillo-Felisola, Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, and Alba Ramirez. Localizing gravity on exotic thick 3-branes. *Phys. Rev.*, D70:104029, 2004.
- [8] R. Guerrero, R. O. Rodriguez, and R. Torrealba. de sitter and double asymmetric brane worlds. *Phys. Rev.*, D72:124012, 2005. hep-th/0510023.
- [9] G. Goetz. An exact solution for a thick domain wall. *J. Math. Phys.*, 31:2683, 1990.
- [10] Lisa Randall and Raman Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3370–3373, 1999.
- [11] Petter Callin and Finn Ravndal. Higher order corrections to the Newtonian potential in the Randall-Sundrum model. *Phys. Rev.*, D70:104009, 2004.
- [12] Susana Zhogby. Fluctuaciones gravitacionales en espaciotiempo pared de dominio. Master’s thesis, Decanato de Ciencias y Tecnología, 2007.
- [13] Sean. M Carroll. Lectures notes of general relativity. Technical report, Institute for Theoretical Physics, 1997.
- [14] Funtions.wolfram.com: Hypergeometric 2F1.