

Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
Decanato de Ciencias y Tecnología
Departamento de Matemáticas



Dinámica de una familia de endomorfismos con retardo en \mathbb{R}^3

Trabajo de Grado Presentado por
Lcda. Dexy N, Pérez A
como requisito final para obtener el título de Magister en Scientiarum
Mención Matemáticas
Area de conocimiento: Sistemas Dinámicos Discretos.
Tutor: Dr. Neptalí Romero.

Barquisimeto, Octubre de 2011

Índice general

Agradecimientos	ii
1. Introducción	1
2. Nociones Básicas	4
2.1. Puntos críticos y superficies de nivel	4
3. Clasificación de la familia F_μ	16
3.1. Caso Vertical	16
3.2. Caso Horizontal	18
4. Retardo cuadrático en \mathbb{R}^3	22
4.1. Dinámica del tipo vertical	22
5. Problemas y generalizaciones	41
Bibliografía	42

Agradecimientos

Me siento profundamente agradecida a Dios primeramente, por darme vida y voluntad para seguir adelante con mi profesión, guiar mis pasos y acompañarme siempre.

A mis padres y hermanos, por su confianza, su incondicional amor y apoyo en la lucha por mis metas.

A mi tutor, a quien también quisiera expresar mi reconocimiento, mi gratitud e infinita admiración como profesional y como persona, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él y compartir sus conocimientos conmigo.

Por último, quiero expresar mi gran aprecio a mis compañeros y amigos de formación académica; María, Jesús, Rosmary, Jorge M, Jorge C, Manuel, Dicmar,...Y todas las personas que se han cruzado en mi vida y que me han inspirado, motivado e iluminado con su presencia.

A todos ustedes, ¡muchísimas gracias!

Introducción

Con una destacada frecuencia encontramos modelos matemáticos discretos mediante los cuales se pretende describir la evolución temporal de fenómenos que aparecen en el estudio de problemas en distintas áreas del conocimiento. Una clase importante de estos modelos se expresa mediante ecuaciones del tipo

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}), n \geq 0, \quad (1.1)$$

donde f es una función a valores reales definida en algún subconjunto de \mathbb{R}^k ; estas ecuaciones son conocidas como *ecuaciones en diferencia con retardo de orden k* , o simplemente, *ecuaciones en diferencia con retardo k -dimensional*; ello es debido a que la actualización temporal de los datos requiere de k datos anteriores. En realidad la ecuación anterior se corresponde con una clase especial de ecuaciones en diferencias, las cuales son denominadas homogéneas dado que esa actualización es independiente del tiempo n en que ella ocurre; no obstante continuaremos llamándola ecuación en diferencia con retardo. Este tipo de ecuaciones son de natural aparición en la discretización de ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) a pasos constantes, de allí en buena parte, su importancia y aplicabilidad en diferentes ciencias que incluyen la Biología, Economía y Ciencias Sociales.

Es fácil ver que a partir de k valores, o *datos iniciales*, x_0, \dots, x_{k-1} , la función f que define la ecuación (1.1) genera la sucesión

$$x_k = f(x_0, \dots, x_{k-1}), x_{k+1} = f(x_1, \dots, x_k), \dots, x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}), \dots,$$

la cual aporta información sobre la evolución temporal del fenómeno que se modela con (1.1) y que se inicia con los valores x_0, \dots, x_{k-1} ; la sucesión así obtenida $\{x_n : n \geq 0\}$ se denomina *solución* de la ecuación (1.1) con datos iniciales x_0, \dots, x_{k-1} .

El problema fundamental de las ecuaciones en diferencia con retardo es describir el comportamiento asintótico de sus soluciones. Con el objeto de intentar dar respuestas parciales a este problema, P. Montel en 1959, ver [2],

consideró el endomorfismo $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$, dado por

$$F(x_0, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_0, \dots, x_{k-1})), \quad (1.2)$$

para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de (1.1) en las proximidades de una *solución estacionaria*; es decir, una solución constante de (1.1). Al endomorfismo F se le denomina *endomorfismo asociado a la ecuación (1.1)*, o *endomorfismo con retardo asociado a f* . La consideración del endomorfismo F permite abordar el problema central de las ecuaciones en diferencia con retardo mediante la teoría de los Sistemas Dinámicos.

Recordemos que para un endomorfismo cualquiera $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$, la *órbita positiva* de $x = (x_0, \dots, x_{k-1})$ es el conjunto $\mathcal{O}(x) = \{F^n(x) : n \geq 0\}$, donde F^n denota la composición de F consigo misma n veces. Observe que para cada entero $n \geq 1$ y cualquier $(x_0, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ se tiene

$$F^n(x_0, \dots, x_{k-1}) = (x_n, \dots, x_{n+k-2}, f(x_{n-1}, \dots, x_{n+k-2})).$$

Esto implica que la sucesión $\{x_n : n \geq 0\}$ es la solución de la ecuación (1.1) con condición inicial x_0, \dots, x_{k-1} si, y solo si, $\{(x_n, \dots, x_{n+k-1}) : n \geq 0\}$ es la órbita positiva del punto $x = (x_0, \dots, x_{k-1})$ por el endomorfismo F dado por (1.2). Así, las soluciones de (1.1) están en correspondencia biunívoca con las órbitas del endomorfismo asociado; además, la dinámica que describen los puntos por F se corresponde con el comportamiento asintótico de las soluciones de (1.1).

Nótese que (x_0, \dots, x_{k-1}) es un punto fijo de F si, y solo si,

$$x_0 = \dots = x_{k-1} = x = f(x, \dots, x);$$

esto es, los puntos fijos de F están determinados por los puntos de intersección del gráfico de f con la diagonal de \mathbb{R}^{k+1} , o equivalentemente con las soluciones estacionarias de (1.1).

En el presente trabajo estaremos tratando, con familias uniparamétricas de ecuaciones en diferencia con retardo de orden 3, y sus endomorfismos asociados, en las cuales las funciones que las definen son dadas, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, por

$$f_\mu(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu, \quad (1.3)$$

donde a, b, c son constantes positivas y μ es el parámetro de la familia. Claramente el endomorfismo con retardo asociado a la ecuación (1.3) es la transformación $F_\mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$F_\mu(x, y, z) = (y, z, f_\mu(x, y, z)). \quad (1.4)$$

Analizaremos algunas propiedades dinámicas de F_μ en casos especiales, que describiremos adelante, de valores en el parámetro μ y las constantes positivas a, b y c . En realidad ello dependerá de la posición relativa de las superficies de nivel de f_μ y la imagen del conjunto de puntos críticos del endomorfismo F_μ . Como un adelanto de estas propiedades, note que como a, b y c son positivas, la matriz Hessiana de f_μ en cualquier punto (x, y, z) es definida positiva, y alejada de 0. Esto implica que la función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\varphi(x) = f(x, x, x)$, sea convexa; por lo que su gráfico corta la diagonal de \mathbb{R}^2 en a lo mas dos puntos, de donde se concluye que F_μ tiene a lo mas dos puntos fijos. Adicionalmente, si μ es muy negativo, entonces F_μ no tiene puntos fijos; mientras que si μ es suficientemente positivo, F_μ tiene exactamente dos puntos fijos.

Nociones Básicas

En este capítulo presentaremos algunas propiedades dinámicas generales de la familia uniparamétrica de endomorfismos cuadráticos con retardo en \mathbb{R}^3 :

$$F_\mu(x, y, z) = (y, z, f_\mu(x, y, z)), \quad (2.1)$$

donde

$$f_\mu(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu = f(x, y, z) - \mu, \quad (2.2)$$

siendo μ el parámetro de la familia y $a, b, c > 0$. Dado el carácter convexo de f_μ , diremos que cada F_μ es un endomorfismo con retardo cuadrático y convexo.

2.1. Puntos críticos y superficies de nivel

En esta sección describiremos las principales propiedades de F_μ , entre ellos sus puntos críticos, condiciones para la existencia de puntos fijos y superficies de nivel.

El conjunto de puntos críticos de F_μ ; esto es, el conjunto de puntos donde la diferencial de F_μ no es invertible, es dado por

$$\ell = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\},$$

el cual llamaremos *plano crítico* y cuya imagen (conjunto de valores críticos) es un paraboloide elíptico; $F_\mu(\ell) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : F_\mu(0, y, z) = (u, v, w)\}$. De hecho,

$(u, v, w) \in F_\mu(\ell)$ si y solamente si, $w = bu^2 + cv^2 - \mu$. Claramente

- $\mu = 0 \implies F_\mu(\ell)$ tiene vértice $(0, 0, 0)$.
- $\mu < 0 \implies F_\mu(\ell)$ está por encima del plano uv .
- $\mu > 0 \implies F_\mu(\ell)$ está por debajo del plano uv .

Con esto $F_\mu(\ell)$ divide al espacio \mathbb{R}^3 en tres regiones disjuntas que denotaremos como sigue:

- $P_\mu = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = bx^2 + cy^2 - \mu\}$, como el conjunto formado por los puntos en el paraboloide $F_\mu(\ell)$.
- $i(P_\mu) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > bx^2 + cy^2 - \mu\}$, el conjunto formado por los puntos en el interior del paraboloide y
- $e(P_\mu) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < bx^2 + cy^2 - \mu\}$ como el conjunto formado por los puntos en el exterior del paraboloide.

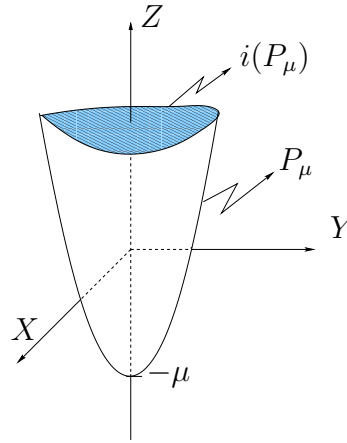


Figura 2.1: Imagen de \mathbb{R}^3 por F_μ .

Proposición 2.1. *El endomorfismo F_μ transforma al espacio \mathbb{R}^3 en la unión disjunta $P_\mu \cup i(P_\mu)$. Esto es; $F_\mu(\mathbb{R}^3) = P_\mu \cup i(P_\mu)$.*

Demostración: Sea $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ y calculemos $F_\mu^{-1}(u, v, w)$. Notemos que $(x, y, z) \in F_\mu^{-1}(u, v, w)$ si y solo si, $(y, z, f_\mu(x, y, z)) = (u, v, w)$, de manera que $(y, z, ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu) = (u, v, w)$. Y en consecuencia tenemos que, $y = u$, $z = v$, $ax^2 = w + \mu - by^2 - cz^2$.

Puesto que $ax^2 \geq 0$, se tiene que $ax^2 = w + \mu - by^2 - cz^2 \geq 0$ y por lo tanto $w \geq bu^2 + cv^2 - \mu$. Lo que indica que w está en $P_\mu \cup i(P_\mu)$. Es decir, los puntos en $e(P_\mu)$ no tienen preimagen. Por lo tanto se concluye que $F_\mu(\mathbb{R}^3) \subset P_\mu \cup i(P_\mu)$.

Por otra parte como, $F_\mu(\ell) = P_\mu$, entonces $F_\mu(\mathbb{R}^3 \setminus \ell) = i(P_\mu)$ de donde $F_\mu(\mathbb{R}^3) = P_\mu \cup i(P_\mu)$. Además, de las últimas ecuaciones tenemos que si $(u, v, w) \in P_\mu \cup i(P_\mu)$,

$$F_\mu^{-1}(u, v, w) = \{(x_+, y, z), (x_-, y, z)\} \quad (2.3)$$

donde $x_+ = \sqrt{\frac{w + \mu - cv^2 - bu^2}{a}}$ y $x_- = -\sqrt{\frac{w + \mu - cv^2 - bu^2}{a}}$. De manera que la preimagen de (u, v, w) por F_μ son puntos ubicados de forma simétrica respecto al plano crítico.

En resumen:

- $F_\mu^{-1}(P_\mu) = \ell$.
- $F_\mu^{-1}(i(P_\mu)) = \mathbb{R}^3 \setminus \ell$.
- $F_\mu^{-1}(e(P_\mu)) = \emptyset$.

□

Veamos ahora las condiciones necesarias y suficientes para que la familia de endomorfismos (2.1) asociados a la ecuación en diferencia (2.2) tenga puntos fijos. Y para ello, simplemente debemos recordar que (x, y, z) es un punto fijo de F si, y sólo si,

$$F(x, y, z) = (x, y, z).$$

Dado que $F_\mu(x, y, z) = (y, z, f_\mu(x, y, z))$, es punto fijo de F_μ si, y solo si,

$$(y, z, f_\mu(x, y, z)) = (x, y, z)$$

en consecuencia;

$$f_\mu(x, x, x) = ax^2 + bx^2 + cx^2 - \mu = x$$

Luego debe cumplirse que;

$$(a + b + c)x^2 - x - \mu = 0.$$

Esto significa que F_μ tiene punto fijo si, y solo si, la ecuación anterior tiene solución. En efecto, supongamos que $\delta = a + b + c$, luego resolviendo la ecuación cuadrática tenemos que

$$x = x_1 \quad \text{o} \quad x = x_2,$$

donde

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\delta\mu}}{2\delta} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\delta\mu}}{2\delta}$$

Pero, para que tenga sentido la existencia de estos puntos fijos, debe cumplirse que $1 + 4\delta\mu \geq 0$. De manera que F_μ tiene puntos fijos si, y solamente si, $\mu \geq -\frac{1}{4(a+b+c)}$.

Ahora bien, note que los puntos fijos tienen la forma $P_1 = (x_1, x_1, x_1)$ y $P_2 = (x_2, x_2, x_2)$, y además si el parámetro $\mu = -\frac{1}{4(a+b+c)}$ se tiene que $P_1 = P_2$. En consecuencia, se tiene que:

- Si $\mu \in \left(-\infty, -\frac{1}{4(a+b+c)}\right)$ F_μ no puntos fijos.
- Si $\mu = -\frac{1}{4(a+b+c)}$, F_μ tiene un único punto fijo.
- Si $\mu \in \left(-\frac{1}{4(a+b+c)}, +\infty\right)$ F_μ tiene dos puntos fijos.

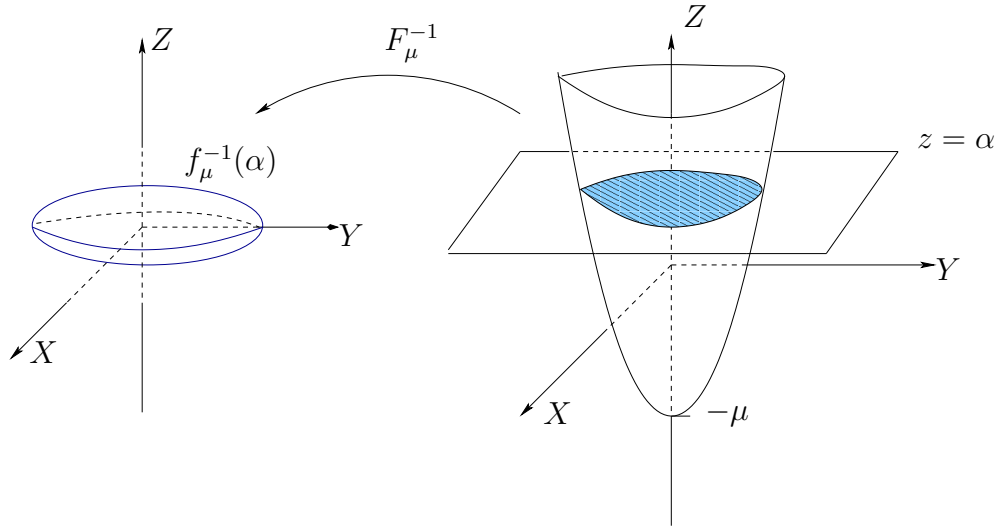
A continuación haremos cálculos preliminares para ubicar regiones de \mathbb{R}^3 que contienen los puntos cuyas órbitas, por F_μ , son acotadas. Para ello nos valdremos de las superficies de nivel de la familia de funciones f_μ , $\mu \in \mathbb{R}$. En Primer lugar, es obvio que dado $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $f_\mu^{-1}(\alpha) = \emptyset$ si $\alpha < \min(f_\mu) = -\mu$.
- $f_\mu^{-1}(\alpha) = (0, 0, 0)$ si $\alpha = \min(f_\mu) = -\mu$.
- $f_\mu^{-1}(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu = \alpha\}$ si $\alpha > \min(f_\mu) = -\mu$.

Esto significa que para todo $\alpha > -\mu$ el conjunto $f_\mu^{-1}(\alpha)$, superficie de nivel α de f_μ es un elipsoide centrado en el origen (como se muestra en la figura (2.2) cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\mu+\alpha}{a}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{\mu+\alpha}{b}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{\mu+\alpha}{c}\right)} = 1, \quad \forall \alpha > -\mu.$$

Puesto que este hecho es cierto para todo $\alpha > -\mu$ y que $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ se puede cubrir con elipsoides, entonces nos preguntamos si existe algún valor $\alpha > -\mu$ y plano tangente horizontal $z = \alpha$ tal que coincida con su respectiva

Figura 2.2: Elipsoide $f_\mu^{-1}(\alpha)$

superficie de nivel $f_\mu^{-1}(\alpha)$. Es decir, ¿existirá $\alpha > -\mu$ tal que $f_\mu^{-1}(\alpha)$ sea tangente a los hiperplanos $z = \alpha$ y $z = -\alpha = \tilde{\alpha}$?

Para dar respuesta a esta pregunta, tenemos la siguiente proposición que muestra este resultado.

Proposición 2.2. *Para todo $\mu \in [-\frac{1}{4c}, +\infty)$, existen valores $S_1(\mu)$ y $S_2(\mu)$ tales que $f_\mu^{-1}(S_1(\mu))$ y $f_\mu^{-1}(S_2(\mu))$ son tangentes a los hiperplanos $z = S_1(\mu)$ y $z = S_2(\mu)$, respectivamente.*

Demostración: En primer lugar, recordemos que dado $\alpha > -\mu$, la superficie de nivel de f_μ viene dado por el conjunto

$$f_\mu^{-1}(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu = \alpha\}.$$

Además, la intersección del elipsoide $f_\mu^{-1}(\alpha)$ con el eje Z son los valores de z tales que satisfacen la ecuación $cz^2 - \mu = \alpha$, es decir, $z = \pm \sqrt{\frac{\alpha + \mu}{c}}$ son los valores del eje Z donde la superficie de nivel $f_\mu^{-1}(\alpha)$ interseca a los hiperplanos $z = \pm \sqrt{\frac{\alpha + \mu}{c}}$. Ahora bien, puesto que se quiere determinar un nivel α que coincida con los planos tangentes horizontales de $f_\mu^{-1}(\alpha)$.

Entonces definiendo la función $\varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_\mu(t) = ct^2 - \mu$$

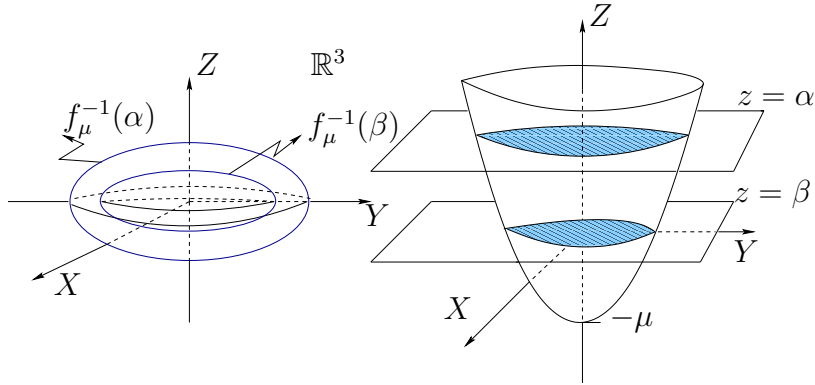


Figura 2.3: elipsoides y paraboloides.

este problema es equivalente a determinar los puntos fijos de la misma. Dichos puntos fijos son:

$$\alpha = \frac{1}{2c}(1 \pm \sqrt{1 + 4c\mu})$$

Para garantizar la existencia de dichos valores, debe cumplirse que $1 + 4c\mu \geq 0$ y por lo tanto $\mu \geq \frac{-1}{4c}$. Los puntos fijos de la función $\varphi(t) = ct^2 - \mu$ son los valores $S_1(\mu) = \frac{1}{2c}(1 + \sqrt{1 + 4c\mu})$ y $S_2(\mu) = \frac{1}{2c}(1 - \sqrt{1 + 4c\mu})$ y son tales que sus elipsoides $f_\mu^{-1}(S_1(\mu))$ y $f_\mu^{-1}(S_2(\mu))$ son tangentes a los hiperplanos $z = S_1(\mu)$ y $z = S_2(\mu)$, respectivamente. Gráficamente la situación es como la figura (2.4).

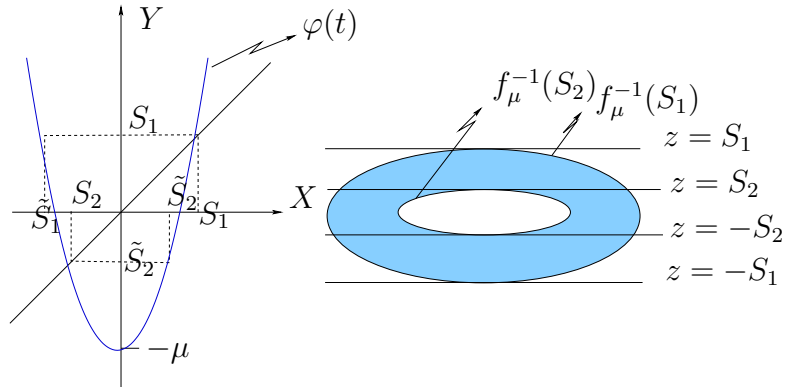


Figura 2.4: parábola $\varphi(t)$.

Note que $S_1(\mu) > 0$ y $S_2(\mu) < 0$ y que dado cualquier nivel $\alpha > -\mu$, los planos tangentes horizontales a $f_\mu^{-1}(\alpha)$ son dados por las preimágenes de α por φ_μ . Esto es; $\varphi_\mu^{-1}(\alpha) = z$ si, y solo si, $z = \pm\sqrt{\frac{\alpha + \mu}{c}}$. Así que los planos tangentes horizontales al elipsoide $f_\mu^{-1}(\alpha)$ son dados por los valores: $\left\{ \sqrt{\frac{\alpha + \mu}{c}}, -\sqrt{\frac{\alpha + \mu}{c}} \right\}$ \square

En adelante escribiremos ξ_μ y $\tilde{\xi}_\mu$ en lugar de $f_\mu^{-1}(S_1)$ y $f_\mu^{-1}(-S_1)$ respectivamente.

A objeto de determinar en un primer intento, la región de \mathbb{R}^3 donde están los puntos de órbitas acotada, recordamos el concepto de ∞ como atractor.

Definición 2.1. Dada una transformación continua $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, se dice que ∞ es un atractor de F si existe $R > 0$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^k$ con $\|x\| > R$ se tiene: $\|F(x)\| > R$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F^n(x)\| = +\infty$. En tal caso, al conjunto de puntos x tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F^n(x)\| = +\infty$ se le conoce como *cuenca de atracción de ∞* , y es denotado por $B_\infty(F)$.

Retornemos a la familia F_μ dada por (2.1) con f_μ como en (2.2); y analicemos el comportamiento mediante F_μ de los puntos que están en el exterior y en el interior de los elipsoides ξ_μ y $\tilde{\xi}_\mu$ y que denotaremos por:

- $e(\xi_\mu) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu > S_1(\mu)\}$.
- $e(\tilde{\xi}_\mu) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu > -S_1(\mu)\}$.
- $i(\xi_\mu) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu < S_1(\mu)\}$.
- $i(\tilde{\xi}_\mu) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu < -S_1(\mu)\}$.

Antes de iniciar el estudio consideremos los siguientes casos:

1. Si $\mu \in \left(-\infty, -\frac{1}{4(a+b+c)}\right)$, F_μ no tiene puntos fijos. Por el teorema (1.1) de [8] se tiene que la cuenca de atracción de infinito es todo el espacio \mathbb{R}^3 . En efecto, sea $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por;

$$L(x, y, z) = \frac{ax}{a+b+c} + \frac{(a+b)y}{a+b+c} + z$$

y

$$\Delta L(x, y, z) = L(F_\mu(x, y, z)) - L(x, y, z)$$

Luego, $\Delta L(x, y, z) = f_\mu(x, y, z) - \frac{ax + by + cz}{a + b + c}$. Estudiemos esta diferencia y supongamos que

$$\varphi_\mu(x, y, z) = \Delta L(x, y, z).$$

Es claro que la función $\varphi_\mu(x, y, z)$ es cuadrática; específicamente

$$\varphi_\mu(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu - \frac{ax + by + cz}{a + b + c},$$

además, $\nabla \varphi_\mu(x, y, z) = \left(2ax - \frac{a}{a + b + c}, 2by - \frac{y}{a + b + c}, 2cz - \frac{c}{a + b + c} \right)$,
y $\nabla \varphi_\mu(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si, y solamente si $x = y = z = \frac{1}{2(a + b + c)}$.

Esto es, φ_μ tiene como único punto crítico

$$P_* = \left(\frac{1}{2(a + b + c)}, \frac{1}{2(a + b + c)}, \frac{1}{2(a + b + c)} \right)$$

La matriz Hessiana de φ es:

$$H_{\varphi_\mu(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix};$$

por lo tanto φ_μ es definida positiva pues a, b y c son constantes positivas. Así que φ_μ tiene en P_* un mínimo global y esto significa que

$$\varphi_\mu(x, y, z) > \varphi_\mu(P_*), \quad \forall (x, y, z) \neq P_*$$

Luego,

$$\varphi_\mu(x, y, z) > f_\mu(P_*) - \frac{\frac{a}{2(a+b+c)} + \frac{b}{2(a+b+c)} + \frac{c}{2(a+b+c)}}{a + b + c}$$

donde $f_\mu(P_*) - \frac{\frac{a}{2(a+b+c)} + \frac{b}{2(a+b+c)} + \frac{c}{2(a+b+c)}}{a + b + c} = -\frac{1}{4(a + b + c)} - \mu$ y por tanto positivo.

Esto implica que $\Delta L(x, y, z) > 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Es decir, $B_\infty(F_\mu) = \mathbb{R}^3$ si $\mu < -\frac{1}{4(a + b + c)}$.

2. Si $\mu = -\frac{1}{4(a+b+c)}$, F_μ tiene un único punto fijo,
 $P_0 = \left(-\frac{1}{2(a+b+c)}, -\frac{1}{2(a+b+c)}, -\frac{1}{2(a+b+c)}\right)$ de manera que la cuenca de atracción es todo el espacio \mathbb{R}^3 excepto dicho punto fijo, es decir, $B_\infty(F_\mu) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \bigcup_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(P_0) \right\}$. En efecto, consideramos $W = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \bigcup_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(P_0) \right\}$ y notemos que por los mismos argumentos que se mostró el ítem anterior, se tiene que $\Delta L(x, y, z) > 0$ si $(x, y, z) \in W$. Esto implica que $B_\infty(F_\mu) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \bigcup_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(P_0) \right\}$ si $\mu = -\frac{1}{4(a+b+c)}$.
3. En cambio si $\mu \in \left(-\frac{1}{4(a+b+c)}, +\infty\right)$, F_μ tiene dos puntos fijos y la cuenca de atracción puede presentar estructuras geométricas distintas en función de los valores de las constantes positivas a, b y c . No obstante algunas propiedades generales serán establecidas para este caso; veamos

Sea $(x, y, z) \in e(\xi_\mu)$, entonces debe existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) \in f_\mu^{-1}(\alpha)$ y planos tangentes t y \tilde{t} tales que

$$t > S_1 > \tilde{S}_1 > \tilde{t}.$$

Además recordemos que $t \rightarrow \varphi_\mu(t)$ es una función creciente en el intervalo

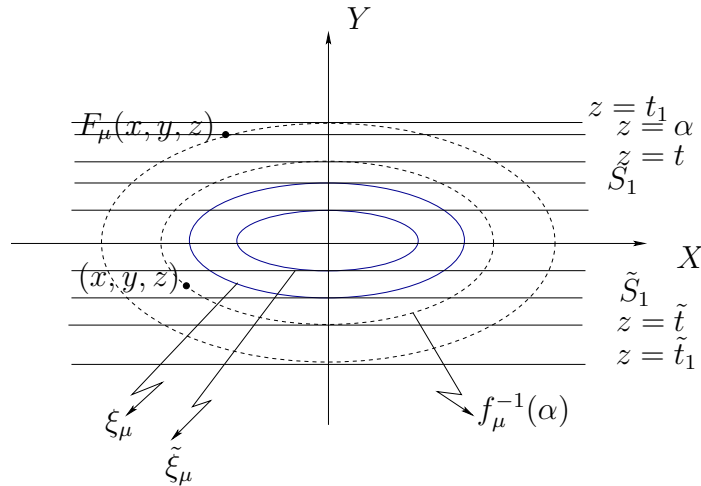


Figura 2.5: Dinámica en $e(\xi_\mu)$

$(0, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Así que:

$$\varphi_\mu(t) > \varphi_\mu(S_1) \implies \alpha > S_1 \quad \text{y} \quad \varphi_\mu(\tilde{t}) > \varphi_\mu(\tilde{S}_1) \implies \alpha > S_1.$$

De manera que $F_\mu(x, y, z) = (y, z, \alpha)$, lo cual implica que $F_\mu(x, y, z)$ está por encima del plano $z = S_1$, específicamente en el plano $z = \alpha$ el cual está por encima del plano $z = t$. Es decir, $S_1 < t < \alpha$. Al repetir el mismo proce-

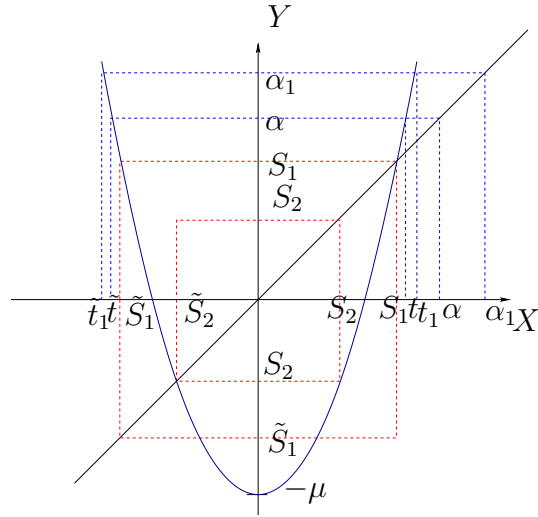


Figura 2.6: $\varphi(t)$

dimiento para puntos en el plano $z = \alpha$, se obtiene que para $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, \alpha) \in f_\mu^{-1}(\alpha_1)$, y planos tangentes t_1 y \tilde{t}_1 son tales que, $t_1 > t > \tilde{t} > \tilde{t}_1$. Así, $\varphi_\mu(t_1) > \varphi_\mu(t)$ y $\varphi_\mu(\tilde{t}) < \varphi_\mu(\tilde{t}_1)$, es decir, $\alpha_1 > \alpha$ y en consecuencia $F_\mu(x, y, \alpha) = (y, \alpha, \alpha_1)$ es un punto que está en el plano $z = \alpha_1$ el cual está por encima del plano $z = t_1$. O sea, $\alpha_1 > \alpha > t_1 > t > S_1$. Por lo tanto se deduce que todo $(x, y, z) \in e(\xi_\mu)$ tiene imagen por F_μ en $e(\xi_\mu)$; luego, para cada (x, y, z) en $e(\xi_\mu)$

$$\|F_\mu^n(x, y, z)\| \longrightarrow +\infty, \quad \text{cuando } n \longrightarrow +\infty.$$

Note que esto implica que ∞ es un atractor para F_μ ; además, todos los puntos en el exterior de ξ_μ pertenecen a la cuenca de atracción $B_\infty(F_\mu)$.

Consideremos ahora $(x, y, z) \in i(\tilde{\xi}_\mu) = f_\mu^{-1}(-S_1)$. Entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) \in f_\mu^{-1}(\beta)$, y para este elipsoide existen planos tangentes

horizontales $z = t$ y $z = \tilde{t}$ tales que $t < z'$ y $\tilde{t} > \tilde{z}'$, donde z' y \tilde{z}' son los planos tangentes al elipsoide $\tilde{\xi}_\mu = f_\mu^{-1}(-S_1) = f_\mu^{-1}(\tilde{S}_1)$ dados por:

$$z' = \sqrt{\frac{-S_1 + \mu}{c}} \quad \text{y} \quad \tilde{z}' = -\sqrt{\frac{-S_1 + \mu}{c}}$$

Nuevamente, por ser $\varphi_\mu(t)$ una función creciente en el intervalo $(0, +\infty)$ y

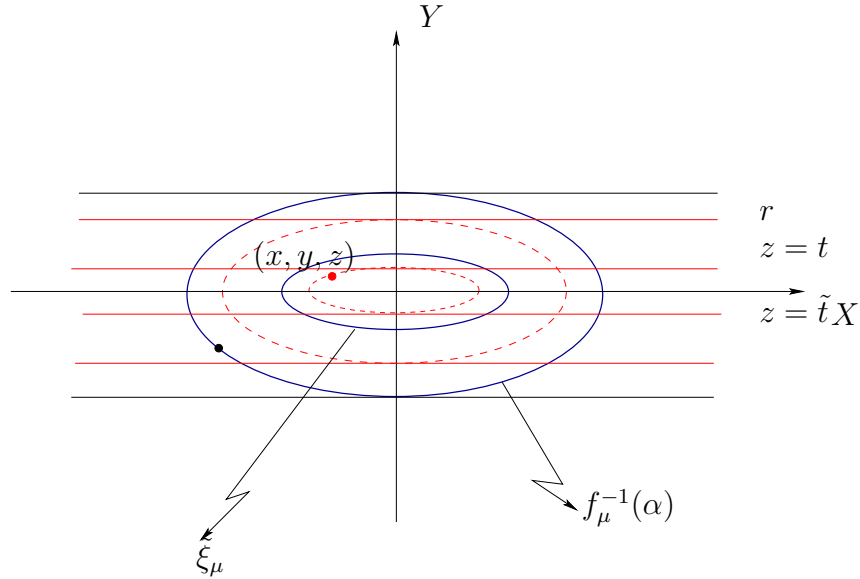


Figura 2.7: Dinámica en $e(\xi_\mu)$

decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, tenemos que:

$$S_1 > z' > t \quad \text{y} \quad t > \tilde{z}' > \tilde{S}_1$$

Luego,

$$\varphi_\mu(S_1) > \varphi_\mu(z') > \varphi_\mu(t) \iff S_1 > \tilde{S}_1 > \beta$$

$$\varphi_\mu(t) < \varphi_\mu(\tilde{z}') < \varphi_\mu(\tilde{S}_1) \iff \beta < \tilde{S}_1 > S_1$$

Esto implica que $F_\mu(x, y, z) = (y, z, f_\mu(x, y, z)) = (y, z, \beta)$ y en consecuencia $F_\mu(x, y, z)$ está ubicado en un plano que está por debajo del plano $z = \tilde{S}_1$, esto significa que $F_\mu(x, y, z) \in e(\xi_\mu)$. Por lo que se deduce que los puntos en $i(\tilde{\xi}_\mu)$ también pertenecen a la cuenca de atracción $B_\infty(F_\mu)$.

De manera que, si denotamos con C_μ al conjunto $cl(i(\xi_\mu)) \cap cl(e(\tilde{\xi}_\mu))$, la

intersección de la clausura de los conjuntos $i(\xi_\mu)$ y $e(\tilde{\xi}_\mu)$, y considerando los resultados obtenidos anteriormente se tiene lo siguiente:

- Si (x, y, z) tiene órbita acotada, entonces $(x, y, z) \in C_\mu$.
- Si algún punto de la órbita positiva de (x, y, z) se sale de C_μ , entonces $(x, y, z) \in B_\infty(F_\mu)$.

Estas dos propiedades dicen que $\mathbb{R}^3 \setminus B_\infty(F_\mu) = \Lambda_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu)$.

Así la cuenca de atracción para F_μ es:

$$B_\infty(F_\mu) = \mathbb{R}^3 \setminus \Lambda_\mu, \quad \forall \mu \in \left(-\frac{1}{4(a+b+c)}, +\infty \right).$$

Adicionalmente, dado un punto cualquiera p en C_μ , si $F_\mu^{-1}(p)$ existe, entonces $F_\mu^{-1}(p) \in C_\mu$. En efecto, si $F_\mu^{-1}(p) \notin C_\mu$, entonces está en el exterior de C_μ , específicamente $F_\mu^{-1}(p)$ está en $e(\xi_\mu)$ o en $i(\tilde{\xi}_\mu)$. Luego, Si $F_\mu^{-1}(p) \in e(\xi_\mu)$, entonces existe q tal que $q = F_\mu^{-1}(p)$ y por tanto $F_\mu(q) = p$ está en $e(\xi_\mu)$, lo cual es una contradicción al hecho de que p está en C_μ . Análogamente sucede si $F_\mu^{-1}(p) \in i(\tilde{\xi}_\mu)$: existe q tal que $q = F_\mu^{-1}(p)$ y por tanto $F_\mu(q) = p$ está en $e(\xi_\mu)$.

Clasificación de la familia F_μ

A continuación describiremos dos de las posibles situaciones en que puede ser dividida la familia uniparamétrica F_μ dada por (2.1) con f_μ como en (2.2). Esta clasificación atiende a dos posiciones relativas entre el conjunto C_μ y el paraboloides P_μ . Estas dos situaciones corresponden a dos casos que llamaremos del *tipo vertical* y del *tipo horizontal*, respectivamente.

A continuación describiremos estos casos sin entrar en detalles del análisis de las dinámicas generadas por cada uno de los casos. De hecho, en el capítulo siguiente abordaremos en detalle la descripción del comportamiento asintótico de las órbitas de puntos por F_μ cuando este endomorfismo es del tipo vertical. El análisis dinámico para el caso horizontal está en proceso de estudio en trabajo en desarrollo con la colaboración de Jesús Silva, Neptalí Romero y Ramón Vivas.

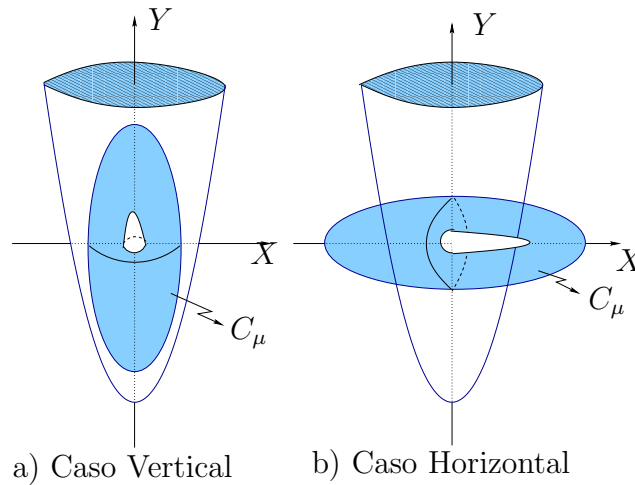


Figura 3.1: Dinámica en C_μ

3.1. Caso Vertical

Diremos que F_μ es del tipo vertical si $C_\mu \subset i(P_\mu)$. Esto quiere decir que los puntos extremos en el eje X y el eje Y del elipsoide ξ_μ están en el $i(P_\mu)$.

Veamos cómo se traduce esto en terminos del parámetro μ y las constantes positivas a, b y c . Para ello, en adelante escribiremos S_μ en lugar de $S_1(\mu)$ y observemos que las trazas de P_μ y ξ_μ en $z = 0$ son:

1. para el paraboloido P_μ , es la elipse en el plano XY :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\mu}{b}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{\mu}{c}\right)} = 1; \quad (3.1)$$

2. para el elipsoide ξ_μ , es la elipse en el plano XY :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\mu + S_\mu}{a}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{\mu + S_\mu}{c}\right)} = 1. \quad (3.2)$$

Asi que, los extremos de ξ_μ en los ejes X y Y están en $i(P_\mu)$ si, y solo si, se cumplen

- $\frac{\mu + S_\mu}{a} < \frac{\mu}{b}$
- $\frac{\mu + S_\mu}{b} < \frac{\mu}{c}$

Estas dos condiciones no son suficientes para garantizar que $C_\mu \subset i(P_\mu)$; solo garantizan que los puntos $(x, y, z) \in C_\mu$ con $z \geq 0$, están en $i(P_\mu)$. De aqui se requiere algo más, más precisamente, que para todo $\beta \in [-S_\mu, 0]$ la elipse de ecuación $ax^2 + by^2 = \mu - c\beta^2 + S_\mu$ esté contenida en $i(P_\mu)$. Note que esta elipse es la traza de ξ_μ con $z = \beta$. De acá se deduce que debe cumplir, para todo $\beta \in [-S_\mu, 0]$:

$$\frac{\mu + \beta}{b} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{a} \quad \text{y} \quad \frac{\mu + \beta}{c} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{b}. \quad (3.3)$$

Debido a la forma del paraboloido P_μ las condiciones (3.3) tambien se cumplen para todo $\beta \in [0, S_\mu]$.

Asi que, F_μ es del tipo vertical si, y solo si, se satisfacen:

$$V_1) \quad a > \left(\frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{\mu + \beta} \right) b.$$

$$V_2) \quad b > \left(\frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{\mu + \beta} \right) c,$$

para todo $\beta \in [-S_\mu, S_\mu]$. Adicionalmente notemos que si $\beta = S_\mu$ de las condiciones (3.3) o equivalentemente (V_1) y (V_2) se obtiene que, debido a que S_μ y $-S_\mu$ satisfacen la igualdad $ct^2 - \mu = t$; $\mu > \pm S_\mu$ de lo cual se deduce entonces que una condición más para la verticalidad de F_μ es que μ sea estrictamente positivo ya que $S_\mu = \frac{1}{2c} (1 + \sqrt{1 + 4c\mu})$.

3.2. Caso Horizontal

Como vimos, F_μ es del tipo vertical si, y solo si, $C_\mu \cap P_\mu = \emptyset$, o equivalentemente $C_\mu \subset i(P_\mu)$. Así que F_μ es no vertical si, y solo si, $C_\mu \cap P_\mu \neq \emptyset$. Esta es una clase muy amplia como para intentar una definición que agrupe a un solo tipo de dinámica. Es por ello que introducimos las siguientes clases:

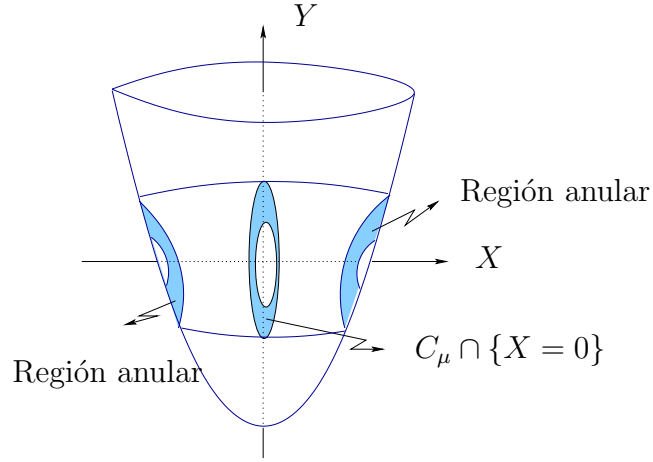
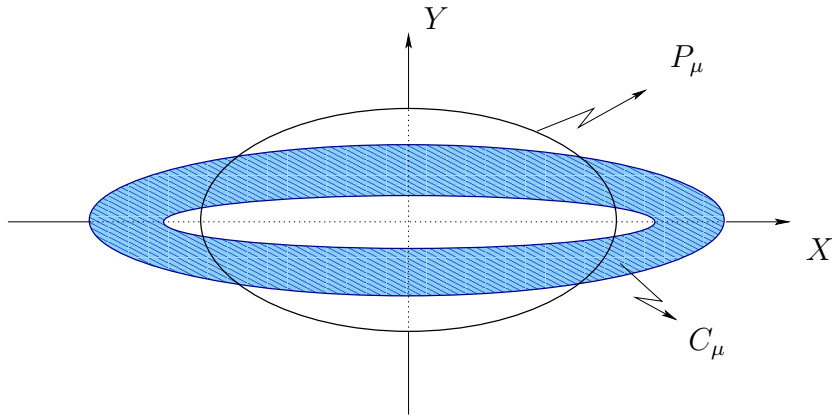
- F_μ se dice que satisface (H_1) si $C_\mu \cap P_\mu$ es la unión disjunta de dos regiones anulares dispuestas simétricamente a ambos lados de $X = 0$.
- Análogamente, F_μ se dice que satisface (H_2) si, y solo si, $C_\mu \cap P_\mu$ es la unión disjunta de dos regiones anulares dispuestas simétricamente a ambos lados de $Y = 0$.

Dada la forma regular (simetría respecto del origen de C_μ , y las correspondientes simetrías de P_μ), si el elipsoide $\tilde{\xi}_\mu \subset cl(i(P_\mu))$, entonces es imposible que en $C_\mu \cap P_\mu$ existen regiones anulares; es decir, regiones que son inmersiones topológicas de un anillo en el plano. Obviamente las condiciones (H_1) y (H_2) no se satisfacen simultáneamente. También es claro que otras formas geométricas pueden obtenerse en el $C_\mu \cap P_\mu$, dependiendo, claramente, de las longitudes de los ejes del elipsoide $\tilde{\xi}_\mu$.

Definición 3.1. El endomorfismo F_μ es del tipo horizontal si satisface alguna de las condiciones H_1 o H_2 .

Lema 3.1. F_μ satisface H_1 si y solamente si

$$\frac{\mu - S_\mu}{a} > \frac{\mu}{b} \quad y \quad \frac{\mu + \beta}{c} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{b}, \quad \forall \beta \in [-S_\mu, S_\mu].$$

Figura 3.2: F_μ tipo horizontal, H_1 Figura 3.3: F_μ es H_1 . Traza $Z = 0$

Demostración: Por definición se sabe que F_μ satisface H_1 si $C_\mu \cap P_\mu$ es la unión disjunta de dos regiones anulares dispuestas simétricamente a ambos lados de $X = 0$. Puesto que F_μ es del tipo H_1 , los puntos $\left(\pm\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{a}}, 0, 0\right)$ están en $e(P_\mu)$, por la ecuación (3.1) del paraboloido al hacer corte en $z = 0$ y la ecuación (3.2) de la traza $z = 0$ del elipsoide $\tilde{\xi}_\mu$, tenemos que se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\frac{\mu - S_\mu}{a} > \frac{\mu}{b} \quad \text{y} \quad \frac{\mu}{c} > \frac{\mu + S_\mu}{b} > \frac{\mu - S_\mu}{b}$$

Recordando además, que $\xi_\mu \cap \{Z = \beta\}$ debe quedar en $i(P_\mu)$, $|\beta| < S_\mu$ se

tiene tambien la siguiente condición en el eje Y

$$\frac{\mu + \beta}{c} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{b}.$$

Por lo tanto, se deduce fácilmente que para que F_μ sea del tipo H_1 se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\frac{\mu - S_\mu}{a} > \frac{\mu}{b} \quad y \quad \frac{\mu + \beta}{c} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{b}, \quad \forall \beta \in [-S_\mu, S_\mu].$$

□

Lema 3.2. F_μ satisface H_2 si y solamente si

$$\frac{\mu - S_\mu}{b} > \frac{\mu}{c} \quad y \quad \frac{\mu + \beta}{b} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{a}, \quad \forall \beta \in [-S_\mu, S_\mu].$$

Demostración: La prueba es análoga a la del lema anterior. □

Note que hay situaciones en las que no se cumple H_1 ni H_2 , ya que si suponemos que F_μ satisface H_1 , la desigualdad $\frac{\mu - S_\mu}{a} > \frac{\mu}{b}$ dice que los puntos extremos sobre el eje X del elipsoide $\tilde{\xi}_\mu$ están fuera de P_μ ; es decir, $\left(\pm\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{a}}, 0, 0\right) \in e(P_\mu)$. Por otro lado la familia de desigualdades;

$$\frac{\mu + \beta}{c} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{b}, \quad \forall \beta \in [-S_\mu, S_\mu]$$

indican que los puntos extremos de ξ_μ sobre el eje Z están en $i(P_\mu)$ con $|\beta| < S_\mu$ y que los puntos extremos sobre el eje Y y el plano $Z = \beta$ de la elipse $\xi_\mu \cap Z = \beta$ también están en $i(P_\mu)$, $|\beta| < S_\mu$. Observe también que al tomar $\beta = 0$ en la condición H_1 se obtiene que

$$\frac{\mu}{c} > \frac{\mu + S_\mu}{b} > \frac{\mu - S_\mu}{b}$$

con lo cual falla la primera desigualdad de la condición H_2 . De esta manera de concluye que H_1 y H_2 son excluyentes.

Además de las condiciones vistas en el lema anterior, se tiene que C_μ corta transversalmente al paraboloido P_μ

Teorema 3.1. *Si F_μ es del tipo horizontal entonces C_μ corta transversalmente a P_μ .*

Demostración: Este hecho se demuestra probando que los planos tangentes a P_μ y a C_μ no son paralelos. Para ello, supongamos que dichos planos tangentes son paralelos, entonces los vectores gradientes de cada plano tangente son paralelos. Esto es, dado $(x, y, z) \in P_\mu$ o en ξ_μ los vectores gradientes son: $\nabla P_\mu(x, y, z) = (2bx, 2cy, 1)$ y $\nabla \xi_\mu(x, y, z) = (2ax, 2by, 2cz)$, que son paralelos si existe, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que: $\nabla \xi_\mu(x, y, z) = \alpha \nabla P_\mu(x, y, z)$. Esto es;

$$\begin{cases} a = \alpha b \\ b = \alpha c \\ \alpha = -2cz \end{cases} \quad (3.4)$$

Puesto que a, b y $c > 0$ (Por la convexidad de f_μ) de la primera ecuación del sistema (3.4), se tiene que $\alpha > 0$ y en consecuencia $z < 0$. Además, del sistema se deduce que $a \geq b \geq c$.

Supongamos que estamos en el caso de la condición H_1 , es decir,

$$\frac{\mu - S_\mu}{a} > \frac{\mu}{b} \quad \text{y} \quad \frac{\mu + \beta}{c} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{b}, \quad \forall \beta \in [-S_\mu, S_\mu].$$

Como $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ y $\mu < \mu - S_\mu$, entonces $\frac{\mu}{a} < \frac{\mu - S_\mu}{b}$, de manera que $\frac{\mu - S_\mu}{a} < \frac{\mu}{a} < \frac{\mu - S_\mu}{b}$ y como también $\frac{\mu - S_\mu}{b} < \frac{\mu}{b}$ se tiene la desigualdad

$$\frac{\mu - S_\mu}{a} < \frac{\mu}{a} < \frac{\mu - S_\mu}{b} < \frac{\mu}{b}$$

el cual es una contradicción a la primera desigualdad de H_1 .

Lo mismo sucedería si estuviéramos en caso de la condición H_2 , pues aquí tendríamos que

$$\frac{\mu - S_\mu}{b} > \frac{\mu}{c} \quad \text{y} \quad \frac{\mu + \beta}{b} > \frac{\mu + S_\mu - c\beta^2}{a}, \quad \forall \beta \in [-S_\mu, S_\mu]$$

como $a \geq b \geq c$, entonces $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ y $\frac{\mu - S_\mu}{b} < \frac{\mu - S_\mu}{c}$ y como $\frac{\mu - S_\mu}{c} < \frac{\mu}{c}$ tenemos que $\frac{\mu - S_\mu}{b} < \frac{\mu - S_\mu}{c} < \frac{\mu}{c}$, desigualdad que contradice la condición H_2 . Así queda probado que C_μ interseca transversalmente al paraboloides P_μ . \square

Retardo cuadrático en \mathbb{R}^3

En el presente capítulo nos disponemos a estudiar parte de la dinámica, para valores grandes de $|\mu|$, de los endomorfismos

$$F_\mu(x, y, z) = (y, z, f_\mu(x, y, z))$$

como en (2.1) y (2.2), imponiendo ciertas condiciones a los coeficientes a, b y c de la función f_μ .

4.1. Dinámica del tipo vertical

En lo que sigue el endomorfismo F_μ es del tipo vertical, ver 3.1. Para esta clase de mapas, y con valores grandes de $|\mu|$ describiremos cómo es el conjunto $\bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu)$ cuando son satisfechas las hipótesis de verticalidad.

Previo a este análisis definimos \mathcal{H}_0 como el conjunto de todos los endomorfismos $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tales que:

1. ∞ es un atractor para F .
2. El conjunto no errante de F , $\Omega(F)$, o es vacío o es un conjunto de Cantor que coincide con el complemento de la cuenca de atracción de ∞ , y F restringido a $\Omega(F)$ expande.

Demostraremos el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Dada F_μ del tipo vertical, si a es suficientemente grande respecto de b y c , entonces existe μ_0 tal que para todo $\mu \geq \mu_0$, $F_\mu \in \mathcal{H}_0$.*

Los endomorfismos en \mathcal{H}_0 son siempre Axioma A, esto es debido a Mañé y Pugh ver [3], y por un resultado de Przytycki, ver [4] y [5], adaptado a variedades no compactas, se tiene que los endomorfismos en \mathcal{H}_0 son estructuralmente estables. Remitimos a los libros de Katok & Hasselblatt y Palis & de Melo, ver [1] y [6] para recordar las nociones de Axioma A y estructuralmente estable, igualmente a los artículos citados de Przytycki.

Antes de iniciar una demostración de este teorema, estimaremos las preimágenes $F_\mu^{-n}(x, y, z)$, $n \geq 1$.

En primer lugar recordemos que:

$$C_\mu = cl(i(\xi_\mu)) \cap cl(e(\tilde{\xi}_\mu)),$$

$$\xi_\mu = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{\left(\frac{S_\mu + \mu}{a}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{S_\mu + \mu}{b}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{S_\mu + \mu}{c}\right)} = 1 \right\},$$

$$\tilde{\xi}_\mu = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{\left(\frac{\mu - S_\mu}{a}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{\mu - S_\mu}{b}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{\mu - S_\mu}{c}\right)} = 1 \right\}$$

y denotemos por $\pi_i(F_\mu^{-1}(x, y, z))$ a la coordenada i -ésima de $F_\mu^{-1}(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, y ubiquemos algunos puntos estratégicos para realizar el estudio y supongamos que $P = (0, 0, S_\mu)$, $Q = \left(0, 0, \sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}}\right)$, $\tilde{P} = -P$, y $\tilde{Q} = -Q$.

Recordemos que para todo $(x, y, z) \in i(P_\mu)$ se tiene:

$$F_\mu^{-1}(x, y, z) = \left\{ \left(\pm \sqrt{\frac{z - (bx^2 + cy^2 - \mu)}{a}}, x, y \right) \right\},$$

siempre que $z \geq bx^2 + cy^2 - \mu$.

Entonces:

- $F_\mu^{-1}(P) = F_\mu^{-1}(0, 0, S_\mu) = \left\{ \left(\pm \sqrt{\frac{S_\mu + \mu}{a}}, 0, 0 \right) \right\} = \{P_+, P_-\}$, donde $P_+ = \left(\sqrt{\frac{S_\mu + \mu}{a}}, 0, 0 \right)$ y $P_- = \left(-\sqrt{\frac{S_\mu + \mu}{a}}, 0, 0 \right)$.
- $F_\mu^{-1}(\tilde{P}) = F_\mu^{-1}(0, 0, -S_\mu) = \left\{ \left(\pm \sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{a}}, 0, 0 \right) \right\} = \{\tilde{P}_+, \tilde{P}_-\}$, donde $\tilde{P}_+ = \left(\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{a}}, 0, 0 \right)$ y $\tilde{P}_- = \left(-\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{a}}, 0, 0 \right)$.
- $F_\mu^{-1}(Q) = F_\mu^{-1}\left(0, 0, \sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}}\right) = \left\{ \left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}}, 0, 0 \right) \right\} = \{Q_+, Q_-\}$
donde $Q_+ = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}}, 0, 0 \right)$ y $Q_- = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}}, 0, 0 \right)$.

$$\begin{aligned} \blacksquare F_\mu^{-1}(\tilde{Q}) &= F_\mu^{-1}\left(0, 0, -\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}}\right) = \left\{ \left(\pm \sqrt{\frac{-\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}}, 0, 0 \right) \right\} \\ &= \{ \tilde{Q}_+, \tilde{Q}_- \}, \text{ donde} \end{aligned}$$

$$\tilde{Q}_+ = \left(+\sqrt{\frac{-\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}}, 0, 0 \right) \text{ y } \tilde{Q}_- = \left(-\sqrt{\frac{-\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}}, 0, 0 \right).$$

Notemos que los puntos P_+ , P_- , \tilde{P}_+ , y \tilde{P}_- determinan precisamente los radios menores de los elipsoides $f_\mu^{-1}(S_\mu)$ y $f_\mu^{-1}(-S_\mu)$, respectivamente.

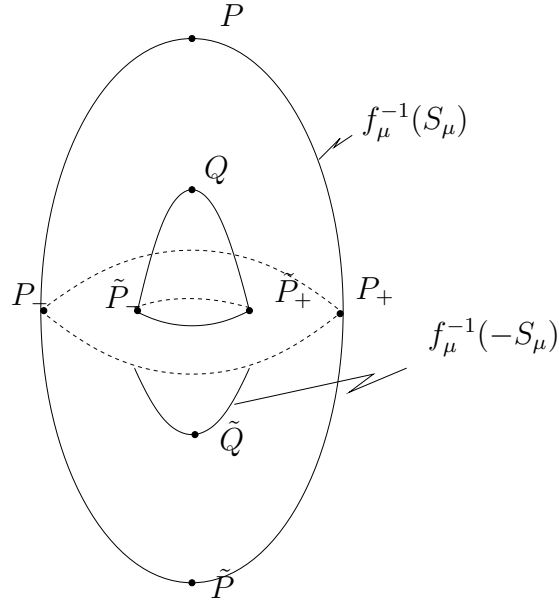


Figura 4.1: CAPSULA C_μ

Es fácil verificar que se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu - \sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}}}{a}} &> \sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{a}}, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}} < \sqrt{\frac{S_\mu + \mu}{a}} \\ \text{y } \sqrt{\frac{-\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}} &< \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{c}} + \mu}{a}}. \end{aligned}$$

Sigue por tanto, al considerar el orden usual en la recta, que:

$$P_- < Q_- < \tilde{Q}_- < \tilde{P}_- < \tilde{P}_+ < \tilde{Q}_+ < Q_+ < P_+$$

Recordemos que dado cualquier punto $(x, y, z) \in cl(i(P_\mu))$ su preimágen por F_μ viene dada por:

$$F_\mu^{-1}(x, y, z) = \left\{ \left(\pm \sqrt{\frac{z - bx^2 - cy^2 + \mu}{a}}, x, y \right) \right\}$$

En particular, para todos los puntos en C_μ .

Dado que $C_\mu \subset cl(i(P_\mu))$, cada punto en C_μ tiene dos preimágenes. En vista que necesitamos calcular preimágenes de puntos en C_μ tambien es importante recordar que $F_\mu^{-1}(C_\mu) \subset C_\mu$. Definamos ahora las ramas de la inversa de F_μ en C_μ ; más explícitamente: $G^+ : C_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $G^- : C_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$G^+(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{z - bx^2 - cy^2 + \mu}{a}}, x, y \right) \text{ y}$$

$$G^-(x, y, z) = \left(-\sqrt{\frac{z - bx^2 - cy^2 + \mu}{a}}, x, y \right).$$

Es fácil verificar que G^+ y G^- son inyectivas, y obviamente continuas. De allí que ambas sean inmersiones topológicas, de hecho diferenciables. Note tambien que si $p = (x, y, z) \in C_\mu$, entonces

$$D_p G^+ = \begin{bmatrix} \frac{-bx}{\sqrt{\frac{z-bx^2-cy^2+\mu}{a}}} & \frac{-cy}{\sqrt{\frac{z-bx^2-cy^2+\mu}{a}}} & \frac{1}{2\sqrt{\frac{z-bx^2-cy^2+\mu}{a}}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es invertible. Una formula análoga hay para $D_p G^-$. De esta manera se tiene que $F_\mu^{-1}(C_\mu) = C_0(\mu) \cup C_1(\mu)$, donde $C_0(\mu) = G^+(C_\mu)$ y $C_1(\mu) = G^-(C_\mu)$ son difeomorfos a C_μ , disjuntos y dispuestos simétricamente respecto del plano $X = 0$. Es claro que $F_\mu(C_0(\mu)) = F_\mu(C_1(\mu))$.

Gráficamente pudieramos describir la situación como lo indica la siguiente figura

Fijaremos la siguiente notación para calcular los iterados hacia atrás de F_μ que siguen.

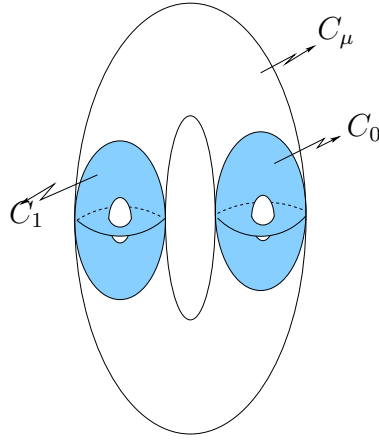


Figura 4.2: CAPSULA C_μ y $F_\mu^{-1}(C_\mu) = C_0(\mu) \cup C_1(\mu)$

- $\Pi_0 = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$
- $\Pi_1 = \{(x, y, z) : x < 0\}$
- $\Pi_0^+ = \{(x, y, z) : x \geq 0 \text{ y } y \geq 0\}$
- $\Pi_0^- = \{(x, y, z) : x \geq 0 \text{ y } y < 0\}$
- $\Pi_1^+ = \{(x, y, z) : x < 0 \text{ y } y \geq 0\}$
- $\Pi_1^- = \{(x, y, z) : x < 0 \text{ y } y < 0\}$

Ahora bien, tomemos $(x, y, z) \in C_\mu$, luego $F_\mu^{-1}(x, y, z) = (\pm u, v, w)$ con $u > 0$. Entonces,

$$F_\mu^{-2}(x, y, z) = F_\mu^{-1}(\pm u, v, w) = \left(\pm \sqrt{\frac{w - bu^2 - cv^2 + \mu}{a}}, \pm u, v \right).$$

Note que si consideramos $F_\mu^{-1}(x, y, z)$ en $C_0(\mu)$, el punto que estamos considerando tiene coordenadas $(u, v, w) \in \Pi_0$, de manera que

$$F_\mu^{-2}(x, y, z) = F_\mu^{-1}(u, v, w) = \left(\pm \sqrt{\frac{w - bu^2 - cv^2 + \mu}{a}}, u, v \right),$$

las cuales se encuentran: una en Π_0^+ y la otra en Π_1^+ . Luego, por el mismo argumento anterior se tiene que $F_\mu^{-1}(C_0(\mu))$ es la unión dos nuevas cápsulas

las cuales denotaremos por $C_{00}(\mu)$ y $C_{10}(\mu)$, para indicar que las preimágenes de la cápsula $C_0(\mu)$ están ubicadas, una en el mismo $C_0(\mu)$ y la otra en $C_1(\mu)$ respectivamente. De manera similar sucede cuando se considera $F_\mu^{-1}(x, y, z)$ en $C_1(\mu)$, dicho punto tiene coordenadas $(-u, v, w) \in \Pi_1$ y cuya preimagen $F_\mu^{-2}(x, y, z) = F_\mu^{-1}(-u, v, w) = \left(\pm \sqrt{\frac{w - bu^2 - cv^2 + \mu}{a}}, -u, v \right)$, lo cual indica que se encuentran en Π_0^- y Π_1^- . Nuevamente por el argumento utilizado anteriormente se deduce que $F_\mu^{-1}(C_1(\mu)) = C_{01}(\mu) \cup C_{11}(\mu)$; indicando así que las preimágenes de la cápsula $C_1(\mu)$ estarán ubicadas, una en $C_0(\mu)$ y la otra en $C_1(\mu)$, respectivamente. Por lo tanto, al calcular $F_\mu^{-2}(C_\mu)$, tenemos:

$$\begin{aligned} F_\mu^{-2}(C_\mu) &= F_\mu^{-1}(F_\mu^{-1}(C_\mu)) \\ &= F_\mu^{-1}(C_0(\mu) \cup C_1(\mu)) \\ &= F_\mu^{-1}(C_0(\mu)) \cup F_\mu^{-1}(C_1(\mu)) \\ &= (C_{00}(\mu) \cup C_{10}(\mu)) \cup (C_{01}(\mu) \cup C_{11}(\mu)) \end{aligned}$$

Resumiendo, para cada $i = 0, 1$, $F_\mu^{-1}(C_i(\mu))$ tiene dos componentes conexas difeomorfas, una en cada sector $C_j(\mu)$, con $j = 0, 1$, las cuales serán denotadas por $C_{0i}(\mu)$ y $C_{1i}(\mu)$ para indicar que la preimagen por F_μ de la cápsula $C_i(\mu)$ está ubicada una en $C_0(\mu)$ y la otra en $C_1(\mu)$. Para generalizar la observación anterior, tenemos que; para cualquier $k \geq 1$,

$$F_\mu^{-k}(C_\mu) = \bigcup_{\sigma_j \in \{0,1\}, j \in \{1, \dots, k\}} C_{\sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu)$$

donde

$$C_{\sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu) = \{(x, y, z) : F_\mu^j(x, y, z) \in C_{\sigma_j}(\mu) \text{ para } j = 1, \dots, k\},$$

siendo que $C_{\sigma_0}(\mu) \supset C_{\sigma_0 \sigma_1}(\mu) \supset \dots \supset C_{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu)$

Antes de mencionar los siguientes lemas, fijaremos primero la siguiente notación asintótica. Sea f una expresión que depende de μ .

Si k y p son constantes, con $p > 0$ y $k \neq 0$, entonces cuando escribamos:

(i) $f \sim k\mu^p$ si y solo si $\frac{f}{\mu^p} \rightarrow k$ cuando $\mu \rightarrow \infty$

(ii) $f \lesssim k\mu^p$ si y solo si $\frac{f}{\mu^p} \leq k$ cuando $\mu \rightarrow \infty$

(iii) $f \gtrsim k\mu^p$ si y solo si $\frac{f}{\mu^p} \geq k$ cuando $\mu \rightarrow \infty$

Lema 4.1. Para todo $(x, y, z) \in C_\mu$, vale la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2} \lesssim |\pi_1(F_\mu^{-1}(x, y, z))| \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}}\mu^{1/2} \quad (4.1)$$

Demostración: Sean $(x, y, z) \in C_\mu$ y

$$F_\mu^{-1}(x, y, z) = \left(\pm \sqrt{\frac{z - (bx^2 + cy^2 - \mu)}{a}}, x, y \right).$$

Determinemos los valores máximos y mínimos que alcanza $\pi_1(F_\mu^{-1}(x, y, z))$.

Note que: $x \in \left[-\sqrt{\frac{\mu+S_\mu}{a}}, \sqrt{\frac{\mu+S_\mu}{a}} \right]$ y $y \in \left[-\sqrt{\frac{\mu+S_\mu}{b}}, \sqrt{\frac{\mu+S_\mu}{b}} \right]$. Definamos $h : i(P_\mu) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$h(x, y, z) = \sqrt{\frac{z - (bx^2 + cy^2 - \mu)}{a}}.$$

Usando multiplicadores de Lagrange estimaremos los valores extremos de h sujetos a la restricción $g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu - S_\mu = 0$. Es decir, resolveremos el sistema que se obtiene al calcular:

$$\nabla h = \lambda \nabla g, \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dado que

$$\nabla h(x, y, z) = \left(\frac{-bx}{h(x, y, z)}, \frac{-cy}{h(x, y, z)}, \frac{1}{2h(x, y, z)} \right)$$

y

$$\nabla g(x, y, z) = (2ax, 2by, 2cz)$$

tenemos el sistema de ecuaciones.

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{-bx}{h(x, y, z)} = 2\lambda ax \\ \frac{-cy}{h(x, y, z)} = 2\lambda by \\ \frac{1}{2h(x, y, z)} = 2\lambda cz \end{cases}$$

Consideraremos los siguientes casos:

- Caso 1: $x = y = 0$

$$\begin{aligned}
 x = y = 0 &\Rightarrow cz^2 - \mu - S_\mu \\
 &\Rightarrow z^2 = \frac{\mu + S_\mu}{c} \\
 &\Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{\mu + S_\mu}{c}} \\
 &\Rightarrow z = \pm S_\mu
 \end{aligned}$$

Luego, $h(0, 0, \pm S_\mu) = \sqrt{\frac{\mu \pm S_\mu}{a}}$. lo cual indica que el máximo y mínimo valor que alcanza $\pi_1(F_\mu^{-1}(x, y, z))$ en este caso son: $\sqrt{\frac{\mu + S_\mu}{a}}$, y $\sqrt{\frac{\mu - S_\mu}{a}}$, respectivamente, que son justamente los radios en el eje Z de los elipsoides $f_\mu^{-1}(S_\mu)$ y $f_\mu^{-1}(-S_\mu)$ respectivamente.

- Caso 2: $y \neq x = 0$

$$y \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-c}{2bh(0, y, z)}$$

Además, del sistema (I)

$$\frac{1}{2h(0, y, z)} = \frac{-2c^2z}{2bh(0, y, z)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-c^2z}{b}$$

así, $b = -2c^2z$ y por tanto, $z = -\frac{b}{2c^2}$.

Luego tenemos que

$$by^2 + c \left(-\frac{b}{2c^2} \right)^2 = \mu + S_\mu.$$

Esto es,

$$y^2 = \frac{1}{b} \left(\mu + S_\mu - \frac{b^2}{4c^3} \right)$$

De manera que

$$h(0, y, z) = \sqrt{\frac{1}{a} \left(\mu \left(1 - \frac{c}{b} \right) - \frac{c}{b} S_\mu - \frac{b}{4c^2} \right)}$$

- Caso 3: $x \neq y = 0$

$$x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-b}{2ah(x, 0, z)}$$

Además,

$$\frac{1}{2h(x, 0, z)} = \frac{-b}{2ah(x, 0, z)}(2cz) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-bcz}{a}$$

así, $z = -\frac{a}{2bc}$.

por tanto, se tiene que

$$ax^2 + c \left(-\frac{a}{2bc}\right)^2 = \mu + S_\mu \Rightarrow x^2 = \frac{1}{a} \left(\mu + S_\mu - \frac{a^2}{4b^2c} \right)$$

De manera que

$$h(x, 0, z) = \sqrt{\frac{1}{a} \left(\mu \left(1 - \frac{b}{a} \right) - \frac{b}{a} S_\mu - \frac{a}{4bc} \right)}$$

- Caso 4: $x \neq y \neq 0$

$$x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-b}{2ah(x, y, z)}$$

$$y \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-c}{2bh(x, y, z)}$$

De manera que,

$$\frac{-b}{2ah(x, y, z)} = \frac{-c}{2bh(x, y, z)} \Rightarrow b^2 = ac$$

y del sistema (I) se tiene que $z = \frac{-b}{2c^2}$.

Así,

$$ax^2 + by^2 + \frac{b^2}{4c^3} = \mu + S_\mu;$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= \sqrt{\frac{1}{a} \left(\mu \left(1 - \frac{b}{a} \right) - \frac{b}{a} S_\mu - \frac{b}{4ac} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{a} \left(\mu \left(1 - \frac{c}{b} \right) - \frac{c}{b} S_\mu - \frac{b}{4ac} \right)} \end{aligned}$$

Como la función h es continua en el conjunto compacto $f_\mu^{-1}(S_\mu)$, entonces debe tener al menos un máximo y un mínimo y dichos valores deben ser alguno de los valores extremos que en cada caso hemos encontrado. Con las notaciones asintóticas se puede verificar en cada caso las siguientes estimaciones asintóticas de h .

- Caso 1. $h(0, 0, \pm S_\mu) \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \mu^{1/2}$
- Caso 2. $h(0, y, z) \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\mu \left(1 - \frac{c}{b} \right) \right)^{1/2}$
- Caso 3. $h(x, 0, z) \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\mu \left(1 - \frac{b}{a} \right) \right)^{1/2}$
- Caso 4. $h(x, y, z) \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\mu \left(1 - \frac{b}{a} \right) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\mu \left(1 - \frac{c}{b} \right) \right)^{1/2}$

Puesto que $1 > \left(1 - \frac{b}{a} \right)$ y $1 > \left(1 - \frac{c}{b} \right)$, entonces

$$h(x, y, z) \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}} \mu^{1/2}, \text{ para todo } (x, y, z) \in f_\mu^{-1}(S_\mu).$$

Y considerando $k_0^2 = \max \left\{ \left(1 - \frac{b}{a} \right), \left(1 - \frac{c}{b} \right) \right\}$ tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{a}} k_0^2 \mu^{1/2} \lesssim h(x, y, z) \text{ para todo } (x, y, z) \in f_\mu^{-1}(S_\mu).$$

En conclusión

$$\frac{1}{\sqrt{a}} k_0^2 \mu^{1/2} \lesssim h(x, y, z) \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}} \mu^{1/2} \text{ para todo } (x, y, z) \in f_\mu^{-1}(S_\mu).$$

Análogamente para la función $-h$, obtenemos

$$-\frac{1}{\sqrt{a}}\mu^{1/2} \lesssim -h(x, y, z) \lesssim -\frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2} \quad \text{para todo } (x, y, z) \in f_\mu^{-1}(S_\mu).$$

Esto demuestra el lema. \square

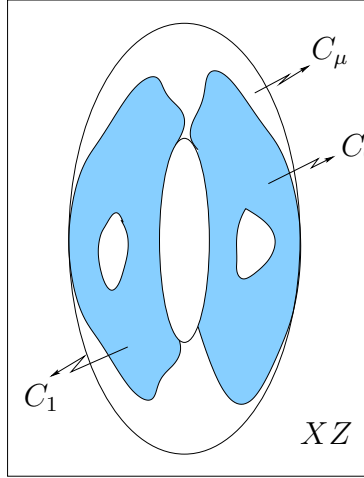


Figura 4.3: Corte $Y = 0$

Lema 4.2. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$ y $(x, y, z) \in F_\mu^{-n}(C_\mu)$,

$$\frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2} \lesssim |x|, |y|, |z| \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}}\mu^{1/2}.$$

Demostración: Por el lema 4.1 ya se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2} \lesssim |\pi_1(F_\mu^{-1}(x, y, z))| \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}}\mu^{1/2} \quad \text{para todo } (x, y, z) \in f_\mu^{-1}(S_\mu)$$

Supongamos que $|\pi_1(F_\mu^{-1}(x, y, z))| = h(x, y, z)$, donde h es la función de la demostración del Lema 4.1 y consideremos $(x_1, y_1, z_1) \in (F_\mu^{-1}(f_\mu^{-1}(S_\mu)))$, entonces $F_\mu(x_1, y_1, z_1) \in f_\mu^{-1}(S_\mu)$. Es decir, existe $(x, y, z) \in f_\mu^{-1}(S_\mu)$ tal que $F_\mu^{-1}(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$. Así,

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \sigma h(x, y, z), & \text{donde } \sigma = \pm \\ y_1 = x \\ z_1 = y \end{cases}$$

Note que x_1 satisface la desigualdad (4.1). Es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2} \lesssim |x_1| \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}}\mu^{1/2} \quad \text{para todo } (x_1, y_1, z_1) \in f_\mu^{-1}(S_\mu) \quad (4.2)$$

Ahora tomemos $(x_2, y_2, z_2) \in F_\mu^{-2}(f_\mu^{-1}(S_\mu))$, entonces existe $(x_1, y_1, z_1) \in F_\mu^{-1}(f_\mu^{-1}(S_\mu))$ tal que $F_\mu(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1)$. O bien,

$$(x_2, y_2, z_2) \in F_\mu^{-1}(x_1, y_1, z_1) = (\sigma h(x_1, y_1, z_1), x_1, y_1) \quad \text{donde } \sigma = \pm$$

es decir,

$$\begin{cases} x_2 = \sigma h(x_1, y_1, z_1), \\ y_2 = x_1 \\ z_2 = y_1 \end{cases}$$

Por (1) se tiene

$$(2) \quad \begin{cases} x_2 = \sigma h(x_1, y_1, z_1), \quad \text{donde } \sigma = \pm \\ y_2 = \sigma h(x, y, z) \\ z_2 = y_1 \end{cases}$$

De manera que, por el mismo argumento con el que se mostró la desigualdad (4.2), se tiene que x_2 también satisface la desigualdad (4.1).

Tomemos ahora, $(x_3, y_3, z_3) \in F_\mu^{-3}(f_\mu^{-1}(S_\mu))$, entonces existe $(x_2, y_2, z_2) \in F_\mu^{-2}(f_\mu^{-1}(S_\mu))$ tal que $F_\mu(x_3, y_3, z_3) \in F_\mu^{-1}(x_2, y_2, z_2)$. O equivalentemente,

$$(x_3, y_3, z_3) \in F_\mu^{-1}(x_2, y_2, z_2) = (\sigma h(x_2, y_2, z_2), \sigma h(x_1, y_1, z_1), \sigma h(x, y, z))$$

es decir,

$$(3) \quad \begin{cases} x_3 = \sigma h(x_2, y_2, z_2), \quad \text{donde } \sigma = \pm \\ y_3 = \sigma h(x_1, y_1, z_1) \\ z_3 = \sigma h(x, y, z) \end{cases}$$

Nuevamente por el argumento que se mostró la desigualdad (4.2), se tiene que x_3 también satisface la desigualdad (4.2).

En conclusión se tiene que $|\pi_i(F_\mu^{-1}(x, y, z))|$, $i = 1, 2, 3$ satisface la desigualdad (4.1), y recordando además que dado $\beta \in [-S_\mu, S_\mu]$, $F_\mu^{-1}(f_\mu^{-1}(\beta)) \subset i(F_\mu^{-1}(f_\mu^{-1}(S_\mu)))$ y $F_\mu^{-n}(C_\mu) \subset F_\mu^{-n+1}(C_\mu)$, $\forall n \geq 1$ se concluye que, para que todo $(x, y, z) \in F_\mu^{-n}(C_\mu)$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2} \lesssim |x|, |y|, |z| \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}}\mu^{1/2}, \quad \text{para todo } n \geq 3$$

□

Para concluir, tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.2. *Si F_μ es vertical con a suficientemente grande, de forma tal que $\frac{4b}{ak_0} < \frac{1}{2}$, entonces existen μ_0 , $C > 0$ y $\rho > 1$ tales que, para todo $\mu \geq \mu_0$ y cada $p \in \Lambda_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu)$ y todo vector \vec{U} se tiene que*

$$\|D_p F_\mu^n(\vec{U})\| \geq C\rho^n \|\vec{U}\|$$

Demostración: Consideremos en \mathbb{R}^3 la norma $\|(u, v, w)\| = \max\{|u|, |v|, |w|\}$, $p = (x, y, z)$ en $F_\mu^{-1}(C_\mu)$ y $(u, v, w) = \vec{U}$. Luego,

$$D_p F_\mu(\vec{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2ax & 2by & 2cz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ 2aux + 2byv + 2czw \end{pmatrix}$$

Supongamos que $D_p F_\mu(\vec{U}) = \vec{U}'$, donde $\vec{U}' = (u', v', w')$. Entonces,

$$(i) \quad \begin{cases} v = u' \\ w = v' \\ 2aux + 2byv + 2czw = w' \end{cases}$$

Como estamos interesados en estimar la norma de $D_p F_\mu(\vec{U})$, será necesario considerar los siguientes casos:

- Caso 1: $\|\vec{U}\| = |u| \geq \max\{|u|, |v|, |w|\}$

$$\begin{aligned} \|D_p F_\mu(\vec{U})\| &\geq |2aux + 2byv + 2czw| = 2a|u||x| \left(1 + \frac{by}{ax} \frac{v}{u} + \frac{cz}{ax} \frac{w}{u}\right) \\ &\geq 2a|u||x| \left(1 - \frac{b}{a} \left|\frac{y}{x}\right| \left|\frac{v}{u}\right| - \frac{c}{a} \left|\frac{z}{x}\right| \left|\frac{w}{u}\right|\right) \end{aligned}$$

Dado que $\frac{|v|}{|u|} \leq 1$ y $\frac{|w|}{|u|} \leq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \bullet \left| \frac{by}{ax} \right| &\lesssim \frac{b}{a} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}}\mu^{1/2}}{\frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2}} = \frac{b}{ak_0^2} \\ \bullet \left| \frac{cz}{ax} \right| &\lesssim \frac{c}{a} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}}\mu^{1/2}}{\frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2}} = \frac{b}{ak_0^2} \end{aligned}$$

Luego, tomando a suficientemente grande de tal forma que $\frac{b}{ak_0^2} < \frac{1}{4}$ se tiene que

$$\|D_p F_\mu(\vec{U})\| \geq a|u||x| \geq a|u| \frac{1}{\sqrt{a}}k_0^2\mu^{1/2}$$

y por tanto,

$$\|D_p F_\mu(\vec{U})\| \geq \sqrt{a}k_0^2\mu^{1/2}\|\vec{U}\|$$

En consecuencia existe μ_0 y $\lambda > 1$ tal que, para todo $\mu \geq \mu_0$, si $\|\vec{U}\| = |u|$, entonces $\|D_p F_\mu(\vec{U})\| \gtrsim \lambda\|\vec{U}\|$.

- Caso 2: $\|\vec{U}\| = |v| \geq \max\{|u|, |v|, |w|\}$
Supongamos que $\vec{U}' = D_p F_\mu(\vec{U})$, entonces

$$\begin{aligned} D_p F_\mu^2(\vec{U}) &= (D_{F_\mu(p)} F_\mu \circ D_p F_\mu)(\vec{U}) \\ &= D_{F_\mu(p)} F_\mu(\vec{U}'), \text{ donde } F_\mu(p) = F_\mu(x, y, z) = (x', y', z') \end{aligned}$$

Esto es;

$$D_p F_\mu^2(\vec{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2ax' & 2by' & 2cz' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v' \\ w' \\ 2ax'u' + 2by'v' + 2cz'w' \end{pmatrix}$$

De manera que si $D_p F_\mu^2(\vec{U}) = \vec{U}''$, donde $\vec{U}'' = (u'', v'', w'')$, se tiene que

$$(ii) \quad \begin{cases} v' = u'' \\ w' = v'' \\ 2ax'u' + 2by'v' + 2cz'w' = w'' \end{cases}$$

Así;

$$\begin{aligned} \|D_p F_\mu^2(\vec{U})\| &\geq |2ax'v + 2by'w + 2cz'(2axu + 2byv + 2czw)|, \\ &\geq 2a|x'v| \left(1 - \frac{b}{a} \left| \frac{y'}{x'} \right| \left| \frac{w}{v} \right| - \frac{c}{a} \left| \frac{z'}{x'} \right| \left| \frac{2axu + 2byv + 2czw}{v} \right| \right) \end{aligned}$$

Por el Lema 4.2 sabemos que las variables x', y' y z' satisfacen la desigualdad (4.1). Notemos que pueden suceder dos casos:

- Caso 2.1: $|w'| \geq 2|v|$
En este caso, $\|D_p F_\mu(\vec{U})\| \geq |2axu + 2byv + 2czw| = |w'| \geq 2|v|$, lo cual implica que la $\|D_p F_\mu(\vec{U})\| \geq 2\|\vec{U}\|$ y en consecuencia, F_μ expande.

- Caso 2.2 : $|w'| < |v|$
En este caso; como $\left| \frac{by'w}{ax'v} \right| \leq \frac{b}{ak_0^2}$ y $\left| \frac{cz'}{ax'} \right| \left| \frac{2axu + 2byv + 2czw}{v} \right| \leq \frac{c}{a} \left| \frac{z'}{x'} \right| \leq \frac{c}{ak_0^2} < \frac{b}{ak_0^2}$ Entonces, tomando a suficientemente grande de tal manera que $\frac{b}{ak_0} < \frac{1}{4}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|D_p F_\mu^2(\vec{U})\| &\geq 2a|x'v| \left(1 - \left| \frac{by'w}{ax'v} \right| - \left| \frac{cz'}{ax'} \right| \left| \frac{2axu + 2byv + 2czw}{v} \right| \right) \\ &\geq 2a|x'v| \left(1 - \frac{1}{2} \right) \\ &\geq a|x'v| \geq \sqrt{ak_0^2 \mu^{1/2}} \|\vec{U}\| \end{aligned}$$

De donde se obtiene que , existe μ_0 tal que, $\forall \mu \geq \mu_0$ si $\|\vec{U}\| = |v|$, entonces

$$\|D_p F_\mu^2(\vec{U})\| \geq \lambda \|\vec{U}\|, \quad \lambda > 1$$

- Caso 3: $\|\vec{U}\| = |w| \geq \max\{|u|, |v|\}$
En este caso nos interesaremos en la derivada del tercer iterado porque

es aquí donde se ve que la tercera coordenada,

$$\begin{aligned}
\|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| &= (D_{F_\mu^2(p)} F_\mu \circ D_{F_\mu(p)} F_\mu \circ D_p F_\mu)(\vec{U}) \\
&= (D_{F_\mu^2(p)} F_\mu \circ D_{F_\mu(p)} F_\mu)(\vec{U}') \\
&= (D_{F_\mu^2(p)} F_\mu)(\vec{U}'') \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2ax'' & 2by'' & 2by'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde $D_p F_\mu^2(U) = (u'', v'', w'')$. Luego,

$$D_p F_\mu^3(\vec{U}) = \begin{pmatrix} v'' \\ w'' \\ 2ax''u'' + 2by''v'' + 2cz''w'' \end{pmatrix}$$

y así,

$$\begin{aligned}
\|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| &\geq |2ax''u'' + 2by''v'' + 2cz''w''| \\
&= |2ax''v' + 2by''w' + 2cz''w''| \\
&= |2ax''w + 2by''w' + 2cz''w''| \\
&\geq 2a|x''||w| \left(1 - \frac{b}{a} \left| \frac{y''w'}{x''w} \right| - \frac{c}{a} \left| \frac{z''w''}{x''w} \right| \right)
\end{aligned}$$

Notemos que en los terminos $\frac{b}{a} \left| \frac{y''w'}{x''w} \right|$ y $\frac{c}{a} \left| \frac{z''w''}{x''w} \right|$ pueden suceder varios casos:

$$|w'| \geq 2|w| \quad \text{o} \quad |w'| < 2|w|.$$

- Caso 3.1: $|w'| \geq 2|w|$

Si $|w'| \geq 2|w|$, entonces

$$\begin{aligned}
\|D_p F_\mu(\vec{U})\| &\geq |2axu + 2byv + 2czw| \\
&= |w'| \geq 2|w| \\
&= 2\|\vec{U}\|
\end{aligned}$$

lo cual implica que F_μ expande.

- Caso 3.2: $|w'| < 2|w|$

En este caso pueden suceder dos casos más, cuando $|w''| \geq 2|w|$ y cuando $|w''| < 2|w|$.

- Caso 3.2.1: $|w''| \geq 2|w|$

Si $|w''| \geq 2|w|$, entonces $\|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| \geq |w''| \geq 2|w| = 2\|\vec{U}\|$.
Por tanto, $\|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| \geq 2\|\vec{U}\|$

- Caso 3.2.2: $|w''| < 2|w|$

$$\|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| \geq 2a|x'|\|w\| \left(1 - \frac{b}{a} \left| \frac{y''w'}{x''w} \right| - \frac{c}{a} \left| \frac{z''w''}{x''w} \right| \right)$$

Puesto que las variables, x'', y'', z'' satisfacen la desigualdad (4.1) tenemos que $\frac{b}{a} \left| \frac{y''w'}{x''w} \right| \lesssim \frac{2b}{ak_0^2}$ y $\frac{c}{a} \left| \frac{z''w''}{x''w} \right| \lesssim \frac{2c}{ak_0^2} < \frac{2b}{ak_0^2}$. Así, obtenemos que

$$\| \|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| \| \gtrsim 2|x'|\|w\| \left(1 - \frac{4b}{ak_0^2} \right)$$

Luego, considerando a suficientemente grande de tal manera que $\frac{4b}{ak_0^2} < \frac{1}{2}$ se deduce que

$$\| \|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| \| \geq a|x'|\|w\| \gtrsim \sqrt{ak_0^2}\mu^{1/2}\|\vec{U}\|$$

y por tanto,

$$\| \|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| \| \geq \lambda \|\vec{U}\| \quad \text{con } \lambda > 1$$

De esta manera se concluye que, para todo $p \in F_\mu^{-n}(C_\mu)$, $n \geq 5$ y todo $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$ se tiene:

- $\| \|D_p F_\mu^j(\vec{U})\| \| \geq \|\vec{U}\|$, para $j = 1, 2$.
- $\| \|D_p F_\mu^3(\vec{U})\| \| \geq \lambda \|\vec{U}\|$, con $\lambda > 1$

Además, si escribimos $n = 3q + r$, $r = 0, 1, 2$. $q = \frac{n}{3} - \frac{r}{3}$. De donde,
 $D_p F_\mu^n = D_{F_\mu(p)} F_\mu^r \circ D_p F_\mu^{3q}$ y por tanto,

$$\begin{aligned} \|D_p F_\mu^n(\vec{U})\| &\geq \|D_{F_\mu(p)} F_\mu^r(D_p F_\mu^{3q})(\vec{U})\| \\ &\geq \|D_p F_\mu^{3q}(\vec{U})\| \\ &\geq \lambda^q \|\vec{U}\| \\ &\geq c\rho^n \|\vec{U}\|, \end{aligned}$$

donde $c = \min\{\lambda^{-r/3}; r = 0, 1, 2\} = \lambda^{-2/3}$ y $\rho = \lambda^{1/3} > 1$.

De acá se demuestra que si F_μ es vertical con a suficientemente grande para que $\frac{4b}{ak_0} < \frac{1}{2}$, entonces existe μ_0 , $C > 0$ y $\rho > 1$ tal que para todo $\mu \geq \mu_0$ todo $p \in \Lambda_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}(C_\mu)$ y todo vector \vec{U} se tiene que

$$\begin{aligned} \|D_p F_\mu^n(\vec{U})\| &\geq F\lambda^q \|\vec{U}\| \\ &\geq C\rho^n \|\vec{U}\| \end{aligned}$$

Además con esta desigualdad estamos diciendo que F_μ tiene en Λ_μ una expansión dominada. \square

Es importante observar que como $(u, v, w) \in F_\mu^{-1}(x, y, z)$ si y solo si $u = x$, $v = y$ $(u, v, w) = f_\mu^{-1}(z)$, entonces cada punto de C_μ tiene dos preimágenes en C_μ . Esto implica que para cada $i = 0, 1$, $F_\mu^{-1}(C_i(\mu))$ tiene dos componentes conexas, una en cada sector C_j , con $j = 0, 1$ las cuales serán denotadas por $C_{0i}(\mu)$ y $C_{1i}(\mu)$. Por el resultado obtenido en la sección 4.1, se tiene que para cualquier $k \geq 1$,

$$F_\mu^{-k}(C_\mu) = \bigcup_{\sigma_j \in \{0,1\}, j \in \{1, \dots, k\}} C_{\sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu)$$

donde

$$C_{\sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu) = \{(x, y, z) : F_\mu^j(x, y, z) \in C_{\sigma_j}(\mu) \text{ para } j = 1, \dots, k\};$$

teniendo que $C_{\sigma_0}(\mu) \supset C_{\sigma_0 \sigma_1}(\mu) \supset \dots C_{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu) \supset \dots$ y debido a la expansión dominada de F_μ en Λ_μ el diametro de los conjuntos $C_{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu)$ tiende

a cero cuando $k \rightarrow +\infty$. Esto implica que para cada sucesión $\{\sigma_k\}_{k \geq 0}$ con $\sigma_k \in \{0, 1\}$ $\bigcap_{k \geq 0} C_{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu)$ es un único punto que denotamos por P_σ con $\sigma \in \Sigma_2$, donde Σ_2 representa el espacio de todas las sucesiones unilaterales en $\{0, 1\}$.

De esta manera, $\Lambda_\mu = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_2} P_\sigma$ y cada punto en este conjunto se identifica con una sucesión unilateral en $\{0, 1\}$. Puesto que, Σ_2 representa el espacio de todas las sucesiones unilaterales en $\{0, 1\}$, entonces se verifica que la aplicación $\varphi : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda_\mu$ definida por

$$\varphi(\{\sigma_k\}_{k \geq 0}) = C_{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_k}(\mu)$$

es un homeomorfismo. Con esto se demuestra que Λ_μ es un conjunto de Cantor, y además al considerar la aplicación Shift $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, se demuestra por construcción que $\varphi \circ \sigma = F_\mu \circ \varphi$ en Λ_μ ; con lo cual $\Omega(F_\mu) = \Lambda_\mu$ y las propiedades dinámicas topológicas de F_μ en Λ_μ son las mismas de σ ; estas son:

1. $\overline{Per(F_\mu)} = \Lambda_\mu$
2. F_μ tiene órbitas densas en Λ_μ y
3. F_μ tiene la propiedad de sensibilidad en las condiciones iniciales.

En otras palabras, $F_\mu : \Lambda_\mu \rightarrow \Lambda_\mu$ es un sistema dinámico caótico y con estos resultados queda mostrado que $F_\mu \in \mathcal{H}_0$.

Problemas y generalizaciones

Lo desarrollado en el trabajo está inspirado por lo tratado en [8]. Posteriormente, en [7],[9] y [10] se desarrollan técnicas que permiten abordar generalizaciones al concepto de endomorfismos cuadráticos verticales; ver [8]. En relación al análisis de la dinámica de la familia F_μ , como en (2.1) con f_μ como en (2.2), se conjetura el siguiente resultado:

Conjetura 1. Si la constante b es suficientemente grande respecto a a y c , entonces existe $\mu_1 > 0$ tal que, para todo $\mu > \mu_1$, la dinámica de F_μ es:

1. ∞ es un atractor,
2. $\Lambda(F_\mu) = \mathbb{R}^3 \setminus B_\infty(F_\mu)$ es homeomorfo al producto de un conjunto de Cantor en \mathbb{R}^2 y \mathbb{S}^1 , (\mathbb{S}^1 representa la esfera unitaria en el plano); además el conjunto no errante $\Omega(F_\mu) = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^n(\Lambda(F_\mu))$ y $F_\mu|_{\Omega(F_\mu)}$ es hiperbólico del tipo silla.

De hecho la conjetura podría intentarse en el caso cuadrático general, o más elegantemente para alguna clase especial de funciones C^2 -convexa. Incluso en dimensiones superiores a 3.

También es interesante poder hacer algún tipo de experimentación numérica, al estilo de lo realizado en [8].

Bibliografía

- [1] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, (1995).
- [2] P. Montel; *Leçons sur les Récurrences et leurs Applications*. Gauthier Vilars, (1957).
- [3] R. Mañé & C. Pugh. *Stability of Endomorphisms*. Symp. Warwick Dynamical Systems. Lecture Notes in Math. Vol. 468. 175-184, (1975).
- [4] F. Przytycki. *Anosov endomorphisms*. Studia Mathematica LVIII, 249-285 (1976).
- [5] F. Przytycki. *On the Ω -stability on endomorphisms satisfying Axiom A*. Studia Mathematica LX, 61-77 (1977).
- [6] J. Palis & W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer - Verlag (1982).
- [7] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó; *On the Dynamics of n -dimensional Quadratic Endomorphisms*. A ser publicado en Commun. Math. Phys. 195, 295-308 (1998).
- [8] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó; *Endomorfismos Convexos con retardo en \mathbb{R}^2 : La Dinámica de los cuadráticos*. IX Escuela Venezolana de Matemáticas. Asociación Matemática Venezolana, Centro de Estudios Avanzados- Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, 1998.
- [9] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó; *Invariant manifolds for delay endomorphisms*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Vol. 7, No. 1, 35-50 (2001).
- [10] N. Romero, A. Rovella & F. Vilamajó; *Dynamics of Vertical Delay Endomorphisms*. *Discrete and Continuous. Dynamical Systems. Serie B*. pp. 409-422. (2003)

Dinámica de una familia de endomorfismos con retardo en \mathbb{R}^3

Lcda. Dexy N, Pérez A

Dr. Neptalí Romero

October 27, 2011

Abstract

En el presente trabajo, se analizaron algunas propiedades de las familias uniparamétricas de ecuaciones en diferencia con retardo de orden 3, y sus endomorfismos asociados, en las cuales las funciones que las definen son dadas, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, por

$$f_\mu(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - \mu, \quad (1)$$

donde a, b, c son constantes positivas y μ es el parámetro de la familia. Claramente el endomorfismo con retardo asociado a la ecuación (1) es la transformación $F_\mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$F_\mu(x, y, z) = (y, z, f_\mu(x, y, z)). \quad (2)$$

Fueron analizadas algunas propiedades dinámicas de F_μ en casos especiales, de valores en el parámetro μ y las constantes positivas a, b y c . De hecho, se demostró que cuando a es suficientemente grande respecto de b y c , la dinámica que se describe es un conjunto de Cantor.