

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“MÉTODO DE REGIÓN DE CONFIANZA PARA
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON SOLUCIONES
SINGULARES”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. MAYARIN LÓPEZ

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
ÁREA DE CONOCIMIENTO: OPTIMIZACIÓN.
TUTOR: MSc. ALÍ DUIN



Universidad Centroccidental
 "Lisandro Alvarado"
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“MÉTODO DE REGIÓN DE CONFIANZA PARA PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON SOLUCIONES SINGULARES”

Presentado por la ciudadana BR. MAYARIN LÓPEZ titular de la Cédula de Identidad N° 18.689.730. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

*Dedicado a mi Dios, mis padres y mi
hermana.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios .

A mis padres Ambrosio y Cecilia que siempre estuvieron brindándome su apoyo incondicional, siempre están para ayudarme a levantar, y bueno por fin veré en sus rostro la alegría de ver a su triki convertida en Licenciada.

A mi hermana Ámbar que siempre coloca una sonrisa donde hay una lágrima.

A mi tutor el profesor Alí Duin por su valiosa colaboración.

A mis amigos y compañeros con quienes he compartido buenos momentos (y no tan buenos): Silmaris, Gaetano, Yogeidy, Andreina, Karlingh, Jessica, Aldemar, y demás integrantes de UNUMA.

Y muy especialmente a : María José, Mariana, Carlos, Hector y Alfredo.

§0.1. Resumen

Se estudia en este trabajo un método de optimización sin la presencia de restricciones presentado por los autores [*Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)*], el cual combina la estrategia de Newton con Región de Confianza. Para este método se estudia y prueba la convergencia global y además una tasa de convergencia superlineal en el caso cuando el punto solución tiene matriz hessiana singular. Además el método en sí propone el uso de un modelo aproximado dado por (3.1) levemente diferente a los modelos aproximados clásicos en región de confianza diferenciándolo en dos aspectos: (a) la función objetivo se actualiza asegurando que la matriz aproximada a la hessiana sea positiva definida y (b) en las restricciones la longitud del vector de dirección de descenso se acota mediante un múltiplo de la norma del gradiente.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
0.1. Resumen	ii
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
2. Preliminares.	3
2.1. Definiciones importantes	3
3. El algoritmo y su convergencia global	11
3.1. Modelo aproximado	11
4. Convergencia Superlineal	19
4.1. Convergencia superlineal	19
5. Resultados Numéricos	29
6. Conclusión	33
6.1. Conclusión	33
Referencias bibliográficas.	35

Introducción

§1.1. Introducción

En el trabajo a desarrollarse los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)] tienen como objetivo resolver el siguiente problema de optimización

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{1.1}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es LC^2 en \mathbb{R}^n . Esto es f es dos veces continuamente diferenciable y la Hessiana, $\nabla^2 f$ es Lipschitz continua en \mathbb{R}^n .

Para esto estudian un método de región de confianza pero esta vez sin la suposición de que la matriz hessiana en la solución sea no singular y aún así la convergencia global es garantizada y es precisamente esto lo que hace interesante el método propuesto, pues previo a este trabajo existían una gran cantidad de métodos de región de confianza pero no se aseguraba la convergencia en caso de que la matriz hessiana en la solución fuese singular. La manera en que se aproxima la función original f al igual que en los métodos de región de confianza clásicos es por una función cuadrática levemente distinta a la aproximación de los métodos de región de confianza clásicos, estas aproximaciones son mostradas en capítulos posteriores. Además que el algoritmo propuesto por los autores posee una tasa de convergencia superlineal bajo la suposición de cota de error local. Nuestro objetivo es presentar un nivel de detalle más amplio que el presentado en el artículo, además de la comprensión del mismo.

Capítulo 2

Preliminares.

§2.1. Definiciones importantes

Este capítulo además de establecer alguna terminología referente a la teoría a desarrollar, tiene por objeto describir los conceptos: cota de error local, funciones LC^2 y otros elementos, que son la base sobre la cual está sustentado este trabajo.

Dos estrategias: Búsqueda lineal y Región de confianza.

Primero se describe la estrategia búsqueda lineal. **Búsqueda lineal**

- el algoritmo elige una dirección de búsqueda d_k .
- busca a lo largo de esa dirección desde el iterado actual a un nuevo iterado con un menor valor de la función objetivo.
- la distancia que debe moverse el iterado puede encontrarse resolviendo de manera aproximada el siguiente problema de minimización unidimensional que consiste en encontrar un paso t tal que

$$\min_{t>0} f(x_k + td_k)$$

(Resolviendo exactamente este problema se obtendría el mayor beneficio, pero hacerlo es caro e innecesario pues el objetivo final es la optimización de f y no la de $f(x_k + td_k)$).

- en cada nuevo punto se calcula una nueva dirección de búsqueda y un nuevo paso y se repite el proceso.

Región de confianza

Constituye una metodología reciente en optimización, se basan en un problema aproximado más que en una dirección.

- se construye una función modelo $m_k(x)$ cuyo comportamiento cerca del iterado actual x_k es similar al de la función objetivo f .
- como el modelo m_k puede no ser una buena aproximación de f cuando x está lejos de x_k , se restringe la búsqueda de un óptimo de m_k en alguna región en torno a x_k . Es decir se encuentra el candidato d_k resolviendo de manera aproximada al siguiente subproblema $\min_d m_k(x_k + d)$ donde $x_k + d$ está dentro de la región de confianza.
- Si la solución candidata no produce un decrecimiento suficiente en f se concluye que la región de confianza es demasiado grande y debe reducirse para después resolver el nuevo subproblema asociado.

Uno de los objetivos de este trabajo es el estudio de una estrategia específica de región de confianza.

Modelos para métodos con región de confianza

A continuación se da una descripción general de los métodos de región de confianza para luego abordar el método a ser objetivo de estudio.

El modelo en un método de región de confianza está usualmente definido por una función cuadrática de la forma:

$$m_k(x_k + d) = f(x_k) + d^T \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} d^T B_k d$$

donde la matriz B_k es, o bien el hessiano $\nabla^2 f(x_k)$, o alguna aproximación de éste.

- Si $B_k = 0$ y se define la región de confianza utilizando la norma euclídea, el problema de región de confianza es:

$$\min_d f(x_k) + d^T \nabla f(x_k)$$

$$\text{suje}to\ a\ \|d\| \leq \Delta_k$$

Puede calcularse directamente la solución de este problema y tiene la forma

$$d_k = -\frac{\Delta_k \nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$$

Este es un simple paso de descenso en el que la longitud del paso está determinado por el radio de la región de confianza ; la búsqueda lineal y la región de confianza son esencialmente lo mismo en este caso.

- Un algoritmo de región de confianza más interesante se obtiene eligiendo B_k como el hessiano $\nabla^2 f(x_k)$ en el modelo cuadrático. Como se tiene la restricción de la región de confianza $\|d\| \leq \Delta_k$ no es necesario que $\nabla^2 f(x_k)$ sea definido positivo pues se tiene asegurada la existencia de una solución d_k . Este método llamado método de Newton con región de confianza es muy eficiente en la practica.
- Si la matriz B_k en el modelo cuadrático se define con una aproximación cuasi-Newton se obtiene un método cuasi-Newton con región de confianza.

Lo expuesto anteriormente fue tomado de la página web

[www.dma.uvigo.es/aurea/transparencias2.pdf].

El tamaño de la región de confianza es crítico para la eficacia de cada paso. Si la región de confianza es demasiado pequeña el algoritmo pierde la oportunidad de dar un paso importante para moverse cerca del minimizador de la función objetivo f . Si es demasiado grande, el minimizador del problema puede estar lejos del minimizador de la función objetivo en la región, dando como resultado un avance no deseado, una estrategia para esta situación sería reducir el tamaño de la región de confianza, e intentar resolver nuevamente. Como consecuencia de los comentarios anteriores se tiene que la elección del Δ_k debe basarse en lo bien que se aproxime la función f mediante la función m_k . Con el propósito de medir esta característica se emplea el siguiente parámetro

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + d_k)}{m_k(0) - m_k(d_k)}.$$

Donde d_k es un paso a partir del iterado actual x_k .

El numerador se llama la reducción actual y el denominador la reducción prevista.

Note que como el paso d_k es obtenido minimizando el modelo m_k en una región que incluye $d = 0$, la reducción prevista será siempre no negativa, por lo tanto si ρ_k es negativo el nuevo valor objetivo $f(x_k + d_k)$ es mayor que el valor actual $f(x_k)$ por lo que el paso debe ser rechazado.

Por otra parte, si ρ_k es cercano a 1, existe una buena concordancia entre el modelo m_k y la función f en este paso, lo que es seguro para ampliar la región de confianza para la siguiente iteración.

Si ρ_k es positivo, pero significativamente menor que 1 no se altera la región de confianza, pero si está cercano a 0 o negativo reducir el tamaño de la región. (Para mayor detalle consultar [J.Nocedal-S.J.Wright (1999)]).

Ahora se describirá el problema a ser resuelto mediante el método propuesto. Considérese el siguiente problema de optimización

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (2.1)$$

Donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es LC^2 en \mathbb{R}^n . Esto es, f es una función dos veces continuamente diferenciable y la matriz Hessiana, $\nabla^2 f$, de f es Lipschitz continua en \mathbb{R}^n , digamos, existe una constante $L > 0$ tal que,

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (2.2)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

En el desarrollo del trabajo se denotará por $g(x) = \nabla f(x)$ y $G(x) = \nabla^2 f(x)$ el vector gradiente y la matriz Hessiana de f en x respectivamente.

Sea X el conjunto de los minimizadores locales de $f(x)$.

Se llamará a \bar{x} una solución no singular del problema (2.1), si $G(\bar{x})$ es una matriz no singular. De otra manera se llamará \bar{x} solución singular.

El siguiente concepto es muy usado en la teoría clásica de optimización.

DEFINICIÓN 2.1. Una matriz A de n filas y n columnas es positiva semidefinida si y solo si $x^T A x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Un concepto que juega papel importante en el desarrollo teórico del algoritmo, es el de cota de error local. Este resulta ser importante en la determinación de la tasa de convergencia. A continuación se describe formalmente dicho concepto.

DEFINICIÓN 2.2 (Cota de error local). Una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que provee una cota de error local para el problema (2.1), cerca de $\bar{x} \in X$ si existe una vecindad $\Omega(\bar{x})$ de \bar{x} y una constante $\bar{c} > 0$ tal que para todo $x \in \Omega(\bar{x})$

$$F(x) \geq \bar{c} \operatorname{dist}(x, X) \quad (2.3)$$

Para facilitar el análisis del comportamiento de las sucesiones de matrices, vectores y escalares que origina el método se recurre a una notación práctica conocida como O – grande y o – pequeña.

Las notaciones O -grande y o -pequeña.

Con el propósito de determinar que tan rápido crece o decrece una función, Edmund Landau introdujo la notación de órdenes de magnitud.

DEFINICIÓN 2.3 (Notación O -grande.). Dos funciones f y g de variable real son del mismo orden de magnitud, escrito $f(x) = O(g(x))$ si y solo si, existen constantes N y C tales que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad \forall x > N$$

Lo que intuitivamente significa que f estará "acotada" por otra función $C|g(x)|$, donde $g(x)$ es una función más sencilla de analizar en términos de su comportamiento para valores grandes de x .

En general, si $a \in \mathbb{R}$, escribiremos $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$ si y solo si, existen constantes α, β tales que

$$|f(x)| \leq \beta|g(x)|, \quad |x - a| < \alpha.$$

Normalmente, el contexto determina el valor de a o si ésta es ∞ .

Según la notación O -grande, el residuo para el polinomio de Taylor se puede expresar de la siguiente manera.

$R_n(x+h) = O(h^{n+1})$. Además de la notación O -grande, Landau también introdujo la notación o -pequeña. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, se escribe $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow a$, y se lee $f(x)$ es un infinitésimo de orden superior que $g(x)$ en el punto a . La idea es que $f(x) \rightarrow 0$ más rápidamente que $g(x)$ cuando $x \rightarrow a$. Formalmente se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.4 (Notación o -pequeña.). $f(x) = o(g(x))$, para $x \rightarrow \infty$ si y solo si, $\forall \gamma > 0$, existe una constante N , tal que

$$|f(x)| \leq \gamma |g(x)|, \forall x > N.$$

En general se tiene que

$f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, si y solo si, $\forall \gamma > 0$ existe una constante η tal que

$$|f(x)| \leq \gamma |g(x)|; \forall |x - a| < \eta.$$

Cuando a es cero o infinito, y queda claro su valor por el contexto, se omite.

Lo interesante de esta notación es que si, por ejemplo, $\varphi(x) = o(x - a)^p$ y $\Psi(x) = o(x - a)^q$ entonces

$$\varphi(x)\Psi(x) = o(x - a)^{p+q} \text{ y si } p > q, \quad \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)} = o(x - a)^{p-q} \text{ y } (\varphi(x) + \Psi(x)) = o(x - a)^q$$

DEFINICIÓN 2.5. Un método iterativo de un paso es un proceso que genera una sucesión $\{x_k\}_k \geq 0$ de la manera siguiente:

1. Se parte de un valor inicial x_0 que se supone suficientemente próximo a la solución buscada.
2. Se itera, es decir, se obtiene una sucesión definida por recurrencia mediante la fórmula

$$x_{k+1} = G(x_k), \quad k \geq 0 \tag{2.4}$$

siendo G una función real de variable real dada. Así pues, un método iterativo depende de la fórmula (2.4) que se utilice, y también del punto inicial x_0 que se tome.

DEFINICIÓN 2.6. Se dice que un método iterativo dado por la fórmula (2.4) tiene la propiedad de convergencia global hacia $\alpha \in \mathbb{R}$ en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ si para todo dato inicial $x_0 \in D$ se puede construir la sucesión x_k correspondiente con la fórmula (2.4), cumpliéndose $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \alpha$.

DEFINICIÓN 2.7. Se dice que un método iterativo dado por la fórmula (2.4) tiene la propiedad de convergencia local hacia $\alpha \in \mathbb{R}$ si existe un número $\delta > 0$ tal que dicho método tiene la propiedad de convergencia global hacia α en el intervalo $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, es decir, si para todo dato inicial $x_0 \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ se puede construir la sucesión x_k correspondiente con la fórmula (2.4), y $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \alpha$.

DEFINICIÓN 2.8. Sea x_k una sucesión de números reales tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \alpha$ y sea $p > 0$. Se dice que la sucesión tiene orden de convergencia al menos p si existen $k_0 \geq 0$ y $C > 0$ ($0 < C < 1$ si $p = 1$) tales que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p \quad \forall k \geq k_0 \quad (2.5)$$

Notése que en la definición precedente, p no tiene que ser necesariamente un número entero. En la terminología clásica, si $p = 1, 2$ ó 3 , se habla de convergencia al menos lineal, cuadrática o cúbica, respectivamente. Si $p < 1$, o si $p = 1$ y $C = 1$, se dice que la convergencia es sublineal, y si $p > 1$ se dice que la convergencia es superlineal.

PROPOSICIÓN 2.1. Sea x_k una sucesión de números reales tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \alpha$ y sea $p > 0$. La condición necesaria y suficiente para que la sucesión x_k tenga orden de convergencia al menos p es que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \alpha\|}{\|x_k - \alpha\|^p} = L < +\infty \quad (L < 1 \text{ si } p = 1) \quad (2.6)$$

donde se usa el convenio de que $0/0 = 0$.

Demostración. Si el orden de convergencia es al menos p entonces

$$\frac{\|x_{k+1} - \alpha\|}{\|x_k - \alpha\|^p} \leq C$$

para todo $k \geq k_0$, y en consecuencia

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \alpha\|}{\|x_k - \alpha\|^p} = L \leq C$$

Recíprocamente, si se verifica (2.6), entonces fijado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, existe un $k_0(\varepsilon)$ tal que

$$\frac{\|x_{k+1} - \alpha\|}{\|x_k - \alpha\|^p} \leq L + \varepsilon$$

para todo $k \geq k_0$

□

El siguiente resultado es útil en los argumentos de rapidez de convergencia.

LEMA 2.1. *[Teorema de Taylor] Suponga que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable y que $p \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene que*

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x + tp)^T p$$

para algún $t \in (0, 1)$. Además, si f es dos veces continuamente diferenciable, se tiene que

$$\nabla f(x + p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x + tp) p dt$$

y que

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x + tp) p,$$

para algún $t \in (0, 1)$

Teorema extraído del texto [J.Nocedal-S.J.Wright (1999)].

Capítulo 3

El algoritmo y su convergencia global

En este capítulo se describe primeramente el modelo aproximado que usaron los autores

[Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)], haciendo notar las diferencias con los modelos estándar de región de confianza. Luego se presenta una descripción detallada del algoritmo la cual se hace de una manera mas sencilla que la exhibida por los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)]. Una vez descrito el algoritmo se presenta la prueba de la convergencia global del mismo.

§3.1. Modelo aproximado

En este algoritmo cada punto iterado x_k , el paso prueba es obtenido al resolver el siguiente subproblema:

$$\begin{aligned} \min \Phi(d) &= g_k^T d + \frac{1}{2} d^T (B_k + \mu_k I) d \\ \text{sujeto a } \|d\| &\leq c^p \|g_k\|^\gamma \triangleq \delta_k^p \end{aligned} \tag{3.1}$$

Puede notarse que el tamaño de la región de confianza depende de la magnitud del gradiente siendo este un rasgo propio de este método. Partiendo de que B_k es una aproximación a $G(x_k)$, se tiene entonces que $B_k + \mu_k I$ es una matriz positiva definida (bajo la elección adecuada de μ_k) por lo que $\Phi(d)$ es una función cuadrada convexa.

Antes de describir el algoritmo se define la reducción actual ($Ared_k(d_k^p)$), la reducción prevista $Pred_k(d_k^p)$ y el cociente entre ellas (r_k), como sigue:

$$Ared_k(d_k^p) = f(x_k + d_k^p) - f(x_k).$$

$$Pred_k(d_k^p) = \Phi_k(d_k^p).$$

$$r_k^p = \frac{Ared_k(d_k^p)}{Pred_k(d_k^p)}.$$

A continuación se dará paso a paso la descripción del algoritmo

ALGORITMO 3.2. *Dar un punto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$*

Dar $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica

Seleccionar $\eta \in (0, 1)$; $c \in (0, 1)$; $\varepsilon > 0$; $\gamma \in (0, 1)$; $\rho \in (0, 1)$;

$p = 0, k = 0$

Mientras $\|g_k(x)\| > \varepsilon$

Resuelva(3.1)

Calcule $Pred_k(d_k^p)$

Calcule $Ared_k(d_k^p)$

Calcule r_k .

Si $r_k \geq \eta$

$$x_{k+1} = x_k + d_k^p$$

Actualice B_{k+1} ,

$$k := k + 1$$

$$p = 0.$$

Escoja $\gamma \in (0, 1)$

Sino

$$p = p + 1$$

Fin del si

Fin del mientras

La condición $\|g_k(x)\| > \varepsilon$ dice que mientras el gradiente no sea suficientemente pequeño se continúa buscando un punto mejor, en dicho caso se resuelve el modelo aproximado y se chequea si la solución aproximada es una buena opción para f . La condición $r_k \geq \eta$ debe cumplirse en ese caso y se actualiza x_k, B_k . De no cumplirse se reduce el radio de la región, esto se logra aumentando p .

Para analizar la convergencia global del algoritmo, los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)] se valieron de las siguientes suposiciones.

SUPOSICIÓN 3.1. 1. f es continuamente diferenciable.

2. $\{x_k\}$ es una sucesión acotada.

3. $\{B_k\}$ es una sucesión acotada.

Por suposición (3.1), se tiene que $\{B_k + \mu_k I\}$ y $\{G_k\}$ son sucesiones acotadas. Así, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|B_k + \mu_k I\| &\leq M, \forall k, \\ &\text{y} \\ \|G_k\| &\leq M, \forall k. \end{aligned}$$

Los siguientes tres lemas tomados del artículo objeto de estudio son mostrados por los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)] para probar la convergencia global del algoritmo.

En el primero de estos lemas se plantea un resultado, el cual establece que el error entre la reducción actual $Ared$ y la reducción predicha $\phi_k(d_k^p)$ mediante el modelo aproximado está acotado por el cuadrado del tamaño de d .

LEMA 3.1. $|Ared_k(d_k^p) - Pred_k(d_k^p)| = O(\|d_k^p\|^2)$

Demostración.

$$\begin{aligned} Ared_k(d_k^p) - Pred_k(d_k^p) &= f(x_k + d_k^p) - f(x_k) - \Phi(d_k^p) \\ &= f(x_k + d_k^p) - f(x_k) - g_k^T d_k^p - \frac{1}{2} d_k^{pT} (B_k + \mu_k I) d_k^p \\ &= f(x_k) + g_k^T d_k^p + \frac{1}{2} d_k^{pT} G(x_k) d_k^p + o(\|d_k^p\|) \\ &\quad - f(x_k) - g_k^T d_k^p - \frac{1}{2} d_k^{pT} (B_k + \mu_k I) d_k^p \\ &= \frac{1}{2} d_k^{pT} (G_k - B_k - \mu_k I) d_k^p + o(\|d_k^p\|^2) \\ &= O(\|d_k^p\|^2) \end{aligned}$$

Donde se ha usado teoría de expansión de Taylor ($f(x_k + d_k^p) = f(x_k) + g_k^T d_k^p + \frac{1}{2} d_k^{pT} G_k d_k^p + o(\|d_k^p\|^2)$) y el hecho de que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|d_k^{pT} (G_k - B_k - \mu_k I) d_k^p\| &= \frac{1}{2} \|d_k^p\|^2 \|G_k - B_k - \mu_k I\| \\
&\leq \|d_k^p\|^2 \|G_k\| + \frac{1}{2} \|d_k^p\|^2 \|B_k + \mu_k I\| \\
&\leq \frac{2}{2} M \|d_k^p\|^2 \\
&= M \|d_k^p\|^2
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado establece que la reducción predicha está acotada superiormente en términos de la norma del gradiente $\|g_k\|$, este hecho se enuncia de manera precisa en el siguiente lema.

LEMA 3.2. $Pred_k(d_k^p) \leq -\frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\|g_k\|}{M}, \delta_k^p \right\} \|g_k\|$

Demostración. Sea d_k^p , solución de (3.1) correspondiente a p , entonces para algún $\alpha \in (0, 1)$ se tiene

$$\begin{aligned}
Pred_k(d_k^p) &= \Phi_k(d_k^p) \\
&\leq \Phi_k\left(\frac{-\alpha \delta_k^p g_k}{\|g_k\|}\right) \\
&= g_k^T \left(\frac{-\alpha \delta_k^p g_k}{\|g_k\|}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-\alpha \delta_k^p g_k}{\|g_k\|}\right)^T (B_k + \mu_k I) \left(\frac{-\alpha \delta_k^p g_k}{\|g_k\|}\right) \\
&= -\alpha \delta_k^p \|g_k\| + \frac{\alpha^2 (\delta_k^p)^2 g_k^T (B_k + \mu_k I) g_k}{2 \|g_k\|^2} \\
&\leq -\alpha \delta_k^p \|g_k\| + \frac{\alpha^2 (\delta_k^p)^2 g_k^T M g_k}{2 \|g_k\|^2} \\
&= -\alpha \delta_k^p \|g_k\| + \frac{1}{2} \alpha^2 (\delta_k^p)^2 M
\end{aligned}$$

Donde la segunda desigualdad resulta del hecho de que $\|B_k + \mu_k I\| \leq M$, $\forall k$. Como los valores de interés para α están en el intervalo $[0, 1]$ pues el vector $\frac{-\alpha \delta_k^p g_k}{\|g_k\|}$ se mantiene en la región factible del modelo (3.1) se tiene que:

$$Pred_k(d_k^p) \leq \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ -\alpha \delta_k^p \|g_k\| + \frac{1}{2} \alpha^2 (\delta_k^p)^2 M \right\}$$

Ahora bien, hágase $S(\alpha) = -\alpha \delta_k^p \|g_k\| + \frac{1}{2} \alpha^2 (\delta_k^p)^2 M$

Derivando respecto a α se tiene que

$$S'(\alpha) = -\delta_k^p \|g_k\| + \alpha (\delta_k^p)^2 M.$$

Así,

$$\begin{aligned} S'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow -\delta_k^p \|g_k\| + \alpha (\delta_k^p)^2 M = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{-\delta_k^p \|g_k\|}{(\delta_k^p)^2 M} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{-\|g_k\|}{\delta_k^p M} \end{aligned}$$

Por lo tanto S alcanza un mínimo en $\alpha = \frac{-\|g_k\|}{\delta_k^p M}$

Como consecuencia el mínimo es $-\frac{1}{2} \frac{\|g_k\|^2}{M}$

Por otra parte $-\frac{1}{2} \delta_k^p \|g_k\|$ es un mínimo de la función S

En conclusión

$$Pred_k(d_k^p) \leq \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ -\alpha \delta_k^p \|g_k\| + \frac{1}{2} \alpha^2 (\delta_k^p)^2 M \right\} \leq -\frac{1}{2} \min\{\|g_k\|/M, \delta_k^p\} \|g_k\|$$

□

Los algoritmos de región de confianza logran mejoras sustanciales en iteraciones en las cuales la solución del modelo aproximado da un buen valor para la función original f . Cuando esto ocurre se hace un avance $x_{k+1} = x_k + d_k^p$, pero cuando no es así el algoritmo permanece en el mismo punto ($x_{k+1} = x_k$). En esta situación el algoritmo propuesto pasa por el sino del condicional incrementando p . Si el algoritmo queda atascado en este último caso el avance hacia la solución queda comprometido. El siguiente lema aclara el panorama.

LEMA 3.3. *El algoritmo (3.2) no pasa por el sino del condicional consecutiva e infinitamente.*

Demostración. Supóngase, por reducción al absurdo, que el algoritmo pasa por el sino del condicional consecutiva e infinitamente en x_k , entonces para todo $i=1,2,3\dots$

se tiene

$$x_{k+1} = x_k, \quad p = i \quad \text{y} \quad \|g_k\| > \varepsilon.$$

Como $x_{k+1} = x_k$ entonces $g(x_{k+1}) = g(x_k)$, además $0 < c < 1$ y $p \rightarrow +\infty$ lo que implica que $\delta_{k+1}^i = c^i \|g_{k+1}\|^\gamma = c^i \|g_k\|^\gamma = \delta_k^i \rightarrow 0$, por tanto se tiene que

$$\delta_k^i \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad r_k^i < \eta. \quad (3.2)$$

Por consiguiente por los lemas (3.1) y (3.2), como $i \rightarrow +\infty$

$$|r_k^i - 1| = \left| \frac{Ared_k(d_k^i) - Pred_k(d_k^i)}{Pred_k(d_k^i)} \right| \leq \frac{O(\delta_k^{i^2})}{0,5\delta_k^i \varepsilon} \rightarrow 0.$$

Así, para i suficientemente grande $r_k^i \geq \eta$, lo cual contradice (3.2) por tanto el algoritmo (3.2) no pasa por el sino del condicional consecutiva e infinitamente. \square

El siguiente resultado describe la convergencia global del método propuesto por los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)].

TEOREMA 3.1. *Suponga que la suposición (3.1) se cumple.*

Si $\varepsilon = 0$, o el algoritmo converge en un número finito de iteraciones a la solución de (2.1) o genera una sucesión infinita $\{x_k\}$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|g_k\| = 0 \quad (3.3)$$

Por tanto, todo punto de acumulación de $\{x_k\}$ es un punto estacionario de (2.1)

Demostración. Debido a la suposición (3.1) (i) y (ii) la sucesión $\{f(x_k)\}$ es acotada por debajo .

Supongase que el algoritmo no termina en un número finito de iteraciones y (3.3) no es cierto.

Entonces existe una constante positiva $\bar{\varepsilon}$ y una subsucesión infinita $\{k_i\}$ tal que,

$$\|g_{k_i}\| \geq \bar{\varepsilon} \quad (3.4)$$

Definase $T = \{k : \|g_k\| \geq \bar{\varepsilon}\}$, entonces T es un conjunto infinito por (3.4). Por lema (3.2) y prueba del condicional del algoritmo (3.2) se tiene:

$$\begin{aligned}
r_k^p \geq \eta &\Rightarrow \frac{Ared_k(d_k^p)}{Pred_k(d_k^p)} \geq \eta \\
&\Rightarrow Ared_k(d_k^p) \leq \eta Pred_k(d_k^p) \\
&\Rightarrow f(x_k + d_k^p) - f(x_k) \leq \eta Pred_k(d_k^p) \\
&\Rightarrow f(x_k) - f(x_k + d_k^p) \geq -\eta Pred_k(d_k^p) \\
&\geq \frac{1}{2} \|g_k\| \min \left\{ \frac{\|g_k\|}{M}, \delta_k^p \right\} \\
&\geq \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \min \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}}{M}, \delta_k^{p(k)} \right\}
\end{aligned}$$

Pues en el caso en el cual el algoritmo esté en una secuencia de pasos $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p}$ pasando por el sino y cambia al si, la búsqueda se realiza en el modelo aproximado en una esfera de radio $\delta_k^p = c^p \|g_k\|^\gamma$. Las secuencias de esto tipo son acotadas por lema anterior, entonces existe una secuencia mas larga la cual da el radio $\delta_k^{p(k)}$ que es el mas pequeño de todos esos radios.

Sumando sobre los $k \in T$, se tiene

$$\sum_{k \in T} [f(x_k) - f(x_{k+1})] \geq - \sum_{k \in T} \eta Pred_k \geq \sum_{k \in T} \eta \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \min \left\{ \delta_k^{p(k)}, \frac{\bar{\varepsilon}}{M} \right\},$$

donde $p(k)$ es el valor de p mas grande obtenido en el paso 2 en cada iterado x_k

Como $\{f(x_k)\}$ es acotada por debajo, se tiene: $\sum_{k \in T} \eta \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \min \left\{ \delta_k^{p(k)}, \frac{\bar{\varepsilon}}{M} \right\} < +\infty$

Debido a que esta última serie es convergente y a que $\delta_k^{p(k)}$ es el único valor no constante se tiene que $\delta_k^{p(k)} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$ y $k \in T$

Como $\|g_k\| \geq \bar{\varepsilon}$ para todo $k \in T$, $p(k) \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$ y $k \in T$

Por tanto, se puede asumir que $p(k) \geq 1$ para todo $k \in T$. De la regla de determinación de $p(k)$ ($k \in T$) en el condicional del si, se sabe que la solución \check{d}_k correspondiente al siguiente subproblema :

$$\min \Phi_k(d) = g_k^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d + \frac{1}{2} \mu_k \|d\|^2$$

sujeto a $\|d\| \leq c^{p(k)-1} \|g_k\|^\gamma = \frac{\delta_k^{p(k)}}{c}$ no es aceptable.

Esto es, sea $\bar{x}_{k+1} = x_k + \bar{d}_k$, se tiene

$$\frac{f(x_k) - f(\bar{x}_{k+1})}{-\Phi_k(\bar{d}_k)} < \eta, \quad k \in T \quad (3.5)$$

de otra manera, se tiene

$$\delta_k^{p(k)-1} \rightarrow 0, \quad k \in T.$$

Se sigue del lema (3.1) que

$$f(\bar{x}_{k+1}) - f(x_k) - \Phi_k(\bar{d}_k) = O(\|\bar{d}_k\|^2).$$

Por lema (3.2), $\delta_k^{p(k)-1} \rightarrow 0, k \in T$ y la definición de T , para k suficientemente grande, se tiene

$$\left| \frac{f(x_k) - f(\bar{x}_{k+1})}{-\Phi_k(\bar{d}_k)} - 1 \right| \leq \frac{O(\|\bar{d}_k\|^2)}{\frac{1}{2}\|g_k\| \min\{\delta_k^{p(k)-1}, \frac{\|g_k\|}{M}\}} \leq \frac{O((\delta_k^{p(k)-1})^2)}{\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\delta_k^{p(k)-1}}. \quad (3.6)$$

Sea $k \rightarrow \infty, k \in T$, (3.6) implica

$$\frac{f(x_k) - f(\bar{x}_{k+1})}{-\Phi_k(\bar{d}_k)} \rightarrow 1,$$

Lo cual contradice (3.5)

Por lo tanto el teorema es verdadero. □

Se ha probado la convergencia global, pero aún así, el algoritmo pudiese ser muy lento. En el siguiente capítulo se demuestra que el algoritmo tiene una rapidez de convergencia bastante buena.

Capítulo 4

Convergencia Superlineal

Este capítulo está dedicado al estudio de la convergencia local del algoritmo. La secuencia de pasos es como sigue: se enumeran las condiciones bajo las cuales el algoritmo alcanza la tasa de convergencia superlineal. Se describen las factorizaciones de $G(x_k)$ y B_k basándose en sus valores propios. Luego se establece una serie de resultados previos relacionados con la distancia al iterado actual al conjunto de soluciones con el propósito de mostrar que la matriz B_k es una buena aproximación de la matriz G_k . Finalmente con estos resultados se prueba que el algoritmo converge superlinealmente.

§4.1. Convergencia superlineal

En el siguiente capítulo se estudia la rapidez con la cual los iterados se aproximan a la solución al estar cerca de esta. Para dicho estudio, los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)] hacen uso de las siguientes suposiciones.

SUPOSICIÓN 4.1. (i) $x_k \rightarrow x^*$.

(ii) f es LC^2 y convexa.

(iii) Para k suficientemente grande, B_k es una matriz semidefinida positiva y

$$\|B_k - G_k\| = O(\|d_k^0\|^{\frac{1}{\gamma}});$$

(iv) $\|g(x)\|$ provee una cota de error local para el problema (2.1) cerca de x^* , es decir, existe una vecindad Ω de x^* y una constante $\bar{c} > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$

$$\|g(x)\| \geq \bar{c} \text{dist}(x, X). \quad (4.1)$$

(v) $\mu_k = \Theta(\text{dist}(x_k, X)^\rho)$ ($0 < \rho \leq 1$) es decir, existen dos constantes $0 < c_1 < C_1$ tales que

$$c_1 \text{dist}(x_k, X)^\rho \leq \mu_k \leq C_1 \text{dist}(x_k, X)^\rho$$

Primero se prueba que para k suficientemente grande, la fórmula iterativa generada por el algoritmo (3.2) es

$$x_{k+1} = x_k + \tilde{d}_k \quad (4.2)$$

donde $\tilde{d}_k = -(B_k + \mu_k I^{-1})g_k$

Para este propósito se necesitan dos cosas: una es demostrar que \tilde{d}_k es solución de (3.1) correspondiente a $p = 0$ para k suficientemente grande; otra es probar que \tilde{d}_k es aceptable. Primero se darán algunas propiedades de \tilde{d}_k .

Como $G(x^*)$ es simétrica positiva semidefinida, existe una matriz ortogonal

$$Q = (Q_1, Q_2) \text{ tal que : } G(x^*) = (Q_1, Q_2) \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix},$$

donde Λ es una matriz diagonal con elementos en la diagonal positivos.

Sea $Q_k = (Q_{1k}, Q_{2k})$ una matriz ortogonal conforme a $Q = (Q_1, Q_2)$ tal que

$$B_k = (Q_{1k}, Q_{2k}) \begin{pmatrix} \Lambda_{1k} & 0 \\ 0 & \Lambda_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1k}^T \\ Q_{2k}^T \end{pmatrix}, \text{ donde } \Lambda_{1k} \text{ y } \Lambda_{2k} \text{ son matrices diagonales.}$$

Se sigue de la suposición (4.1) y teorema (3.1) que $B_k \rightarrow G(x^*)$. Entonces por teoría de perturbación de matrices [Stewart, G.W., Sun, J.G. (1990)], se tiene que $\Lambda_{1k} \rightarrow \Lambda$ y $\Lambda_{2k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Sea $\hat{x} \in X$ la proyección de x sobre X , es decir, $\hat{x} \in X$ y $\|x - \hat{x}\| = \text{dist}(x, X)$.

La componente Q_{2k} de Q_k que aproxima a Q que a su vez está relacionada a $G(x^*)$ actúa sobre g_k de forma que la imagen de g_k por Q_{2k}^T se comporta asintóticamente igual a $x_k - \hat{x}$, esto con el objetivo de que B_k no sea singular.

Una vez presentada la factorización tanto de la matriz B como de la matriz G , los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X. (2007)] prosiguen a mostrar una serie de lemas que son usados para probar que la matriz B es una buena aproximación de la matriz

G , y además los mismos presentan la prueba de la convergencia local del algoritmo. El siguiente resultado muestra que $Q_{2k}^T g_k$ se hace cero más rápido que $\text{dist}(x_k, X)$ y que $Q_{1k}^T g_k$ está acotada inferiormente por $\text{dist}(x_k, X)$ esto con el fin de tener la certeza de que B_k es una buena aproximación de G_k .

LEMA 4.1. *Para k suficientemente grande, se tiene*

$$(i) \quad \|Q_{2k}^T g_k\| = o(\|x_k - \hat{x}_k\|) = o(\text{dist}(x_k, X));$$

(ii) Si $\|g_k\|$ provee una cota de error local cerca de x^* , entonces existen constantes $c_2 > 0$ y $c_3 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \|Q_{1k}^T g_k\| &\geq c_2 \|x_k - \hat{x}_k\| = c_2 \text{dist}(x_k, X) \\ & \quad y \\ \|Q_{1k}^T (x_k - \hat{x}_k)\| &\geq c_3 \|x_k - \hat{x}_k\| = c_3 \text{dist}(x_k, X) \end{aligned}$$

respectivamente.

Demostración. (i) como f es LC^2 , y por el teorema de Taylor (2.1) se deduce que

$$\begin{aligned} \|Q_{2k}^T g_k\| &= \|Q_{2k}^T (g(x_k) - g(\hat{x}_k))\| \\ &= \|Q_{2k}^T \int_0^1 G(\hat{x}_k + \tau(x_k - \hat{x}_k)) d\tau (x_k - \hat{x}_k)\| \\ &= \|Q_{2k}^T G_k (x_k - \hat{x}_k)\| + o(\|x_k - \hat{x}_k\|) \\ &= \|Q_{2k}^T (G_k + B_k - B_k) (x_k - \hat{x}_k)\| \\ &= \|Q_{2k}^T B_k (x_k - \hat{x}_k)\| + o(\|x_k - \hat{x}_k\|) + \|Q_{2k}^T (B_k - G_k) (x_k - \hat{x}_k)\| \\ &= \|\Lambda_{2k} Q_{2k}^T (x_k - \hat{x}_k)\| + o(\|x_k - \hat{x}_k\|) \\ &= o(\|x_k - \hat{x}_k\|). \end{aligned}$$

donde la primera igualdad sigue porque $g(\hat{x}_k) = 0$, la sexta porque

$$\begin{aligned}
 Q_{2k}^T B_k &= Q_{2k}^T(Q_{1k}, Q_{2k}) \begin{pmatrix} \Lambda_{1k} & 0 \\ 0 & \Lambda_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1k}^T \\ Q_{2k}^T \end{pmatrix} \\
 &= (0, I) \begin{pmatrix} \Lambda_{1k} & 0 \\ 0 & \Lambda_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1k}^T \\ Q_{2k}^T \end{pmatrix} \\
 &= (0, \Lambda_{2k}) \begin{pmatrix} Q_{1k}^T \\ Q_{2k}^T \end{pmatrix} \\
 &= \Lambda_{2k} Q_{2k}^T.
 \end{aligned}$$

y la séptima porque $\Lambda_{2k} \rightarrow 0$. Luego queda confirmada la primera parte de el lema.

(ii) se sigue de (4.1) e (i), que

$$\begin{aligned}
 \|Q_{1,k}^T g_k\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} Q_{1,k}^T \\ Q_{2,k}^T \end{pmatrix} g_k \right\|^2 - \|Q_{2,k} g_k\|^2 \\
 &= \|g_k\|^2 - o(\|x_k - \hat{x}_k\|^2) \\
 &\geq \bar{c}^2 \|x_k - \hat{x}_k\|^2 - o(\|x_k - \hat{x}_k\|^2) \\
 &\geq \frac{1}{2} \bar{c}^2 \|x_k - \hat{x}_k\|^2,
 \end{aligned}$$

Así $\|Q_{1k}^T g_k\| \geq c_2 \text{dist}(x_k, X)$

y

$$\begin{aligned}
 \bar{c} \|x_k - \hat{x}_k\| &\leq \|g_k\| \\
 &= \|Q_k^T (g(x_k) - g(\hat{x}_k))\| \\
 &= \|Q_k^T G_k (x_k - \hat{x}_k)\| + o(\|x_k - \hat{x}_k\|) \\
 &= \|Q_k^T B_k (x_k - \hat{x}_k)\| + o(\|x_k - \hat{x}_k\|) \\
 &= \|\Lambda_{1k} Q_{1k}^T (x_k - \hat{x}_k)\| + o(\|x_k - \hat{x}_k\|) \\
 &\leq 2 \|\Lambda_{1k}\| \|Q_{1k}^T (x_k - \hat{x}_k)\|
 \end{aligned}$$

la primera igualdad se sigue porque $\|Q_k^T\| = 1$, $g(\hat{x}) = 0$, la segunda por

aproximación de Taylor y la cuarta porque

$$\begin{aligned}
Q_k^T B_k &= Q_k^T(Q_{1k}, Q_{2k}) \begin{pmatrix} \Lambda_{1k} & 0 \\ 0 & \Lambda_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1k}^T \\ Q_{2k}^T \end{pmatrix} \\
&= (I, I) \begin{pmatrix} \Lambda_{1k} & 0 \\ 0 & \Lambda_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1k}^T \\ Q_{2k}^T \end{pmatrix} \\
&= (\Lambda_{1k}, \Lambda_{2k}) \begin{pmatrix} Q_{1k}^T \\ Q_{2k}^T \end{pmatrix} \\
&= \Lambda_{1k} Q_{1k}^T.
\end{aligned}$$

pues $\Lambda_{2k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Así (ii) se cumple

□

LEMA 4.2. *Para k suficientemente grande, se tiene:*

1. Existe una constante $c_4 > 0$ tal que $\|Q_{1k}^T \check{d}_k\| \geq c_4 \text{dist}(x_k, X)$
2. $\|\check{d}_k\| = O(\text{dist}(x_k, X))$
3. Existen 2 constantes positivas $c_5 < c_6$ tal que $c_5 \text{dist}(x_k, X) \leq \|\check{d}_k\| \leq c_6 \text{dist}(x_k, X)$

Demostración. 1. Notese que \check{d}_k es solución de la siguiente ecuación

$$(B_k + \mu_k I)d + g_k = 0 \tag{4.3}$$

multiplicando (4.3) por Q_{1k}^T

$$Q_{1k}^T(B_k + \mu_k I)d + Q_{1k}^T g_k = (\Lambda_{1k} + \mu_k I)Q_{1k}^T \check{d}_k + Q_{1k}^T g_k \tag{4.4}$$

donde se ha usado el hecho de que $Q_{1k}^T B_k = \Lambda_{1k} Q_{1k}^T$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
\|Q_{1k}^T \check{d}_k\| &= \|(\Lambda_{1k} + \mu_k I)^{-1} Q_{1k}^T g_k\| \\
&\geq \|(\Lambda_{1k} + \mu_k I)\|^{-1} \|Q_{1k}^T g_k\| \\
&\geq c_2 \|(\Lambda_{1k} + \mu_k I)\|^{-1} \|x_k - \hat{x}_k\|
\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde la primera desigualdad sigue porque

$$\begin{aligned}\|Q_{1k}^T g_k\| &= \|(\Lambda_{1k} + \mu_k I)^{-1} (\Lambda_{1k} + \mu_k I) Q_{1k}^T g_k\| \\ &\leq \|\Lambda_{1k} + \mu_k I\| \|(\Lambda_{1k} + \mu_k I)^{-1} Q_{1k}^T g_k\|\end{aligned}$$

así $\|\Lambda_{1k} + \mu_k I\|^{-1} \|Q_{1k}^T g_k\| \leq \|(\Lambda_{1k} + \mu_k I)^{-1} Q_{1k}^T g_k\|$.

Como $\Lambda_{1k} \rightarrow \Lambda$ y B_k es semidefinida positiva, $2\Lambda > \Lambda_{1k} > \frac{1}{2}\Lambda > 0$ y $\{\Lambda_{1k} + \mu_k I\}$ es uniformemente definida positiva.

Además, $\mu_k \leq C_1 \|x_k - \hat{x}_k\|^\rho$ entonces (4.5) implica que (i) se cumple con alguna constante conveniente c_4

2. Multiplicando (4.3) por Q_{2k}^T tenemos $(\Lambda_{2k} + \mu_k I Q_{2k}^T) \check{d}_k + Q_{2k}^T g_k = 0$

Donde se ha usado el hecho de que $Q_{2k}^T B_k = \Lambda_{2k} Q_{2k}^T$, esto implica

$$\begin{aligned}\|Q_{2k} \check{d}_k\| &\leq \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} Q_{2k}^T g_k\| \\ &\leq \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} Q_{2k}^T (g(x_k) - g(\hat{x}_k) - G_k(x_k - \hat{x}_k) + \\ &\quad G_k(x_k - \hat{x}_k) + B_k(x_k - \hat{x}_k) - B_k(x_k - \hat{x}_k))\| \\ &\leq \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} Q_{2k}^T (g(x_k) - g(\hat{x}_k) - G_k(x_k - \hat{x}_k))\| \\ &\quad + \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} Q_{2k}^T B_k(x_k - \hat{x}_k)\| + \\ &\quad \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} Q_{2k}^t (B_k - G_k)(x_k - \hat{x}_k)\| \\ &\leq \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1}\| O(\|x_k - \hat{x}_k\|^2) + \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} \Lambda_{2k} Q_{2k}^T (x_k - \hat{x}_k)\| + \\ &\quad \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1}\| O(\|x_k - \hat{x}_k\|^2)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Donde la segunda desigualdad sigue del hecho de que $g(\hat{x}_k) = 0$ y la tercera desigualdad debido a que $\|Q_{2k}^T\| \leq 1$, $Q_{2k}^T B_k = \Lambda_{2k} Q_{2k}^T$ y $\|B_k - G_k\| = O(\|d_k^0\|^{\frac{1}{\gamma}}) \leq O(\|g_k\|) = O(\|x_k - \hat{x}_k\|)$.

Notese que (4.1) implica

$$\|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1}\| \leq \mu_k^{-1} \leq c^{-1} \|x_k - \hat{x}_k\|^\rho\tag{4.7}$$

Además como Λ_{2k} es una matriz diagonal con elementos en la diagonal no negativo, se tiene

$\|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} \Lambda_{2k}\| \leq 1$ Entonces

$$\begin{aligned} \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} \Lambda_{2k} Q_{2k}^T (x_k - \hat{x}_k)\| &\leq \|(\Lambda_{2k} + \mu_k I)^{-1} \Lambda_{2k}\| \|Q_{2k}^T (x_k - \hat{x}_k)\| \\ &\leq \|Q_{2k}^T (x_k - \hat{x}_k)\| \\ &= O(\|x_k - \hat{x}_k\|) \end{aligned}$$

usando (4.6) y (4.7) y $0 < \rho \leq 1$ se obtiene.

$$\|Q_{2k}^T \check{d}_k\| \leq O(\|x_k - \hat{x}_k\|) \quad (4.8)$$

Por (4.4), se tiene

$$\|Q_{1k} \check{d}_k\| = \|(\Lambda_{1k} + \mu_k I)^{-1} Q_{1k}^T g_{\hat{x}_k}\| \leq \|\lambda_{1k}\|^{-1} \|Q_{1k}^T g_k\| \leq O(\|x_k - \hat{x}_k\|) \quad (4.9)$$

(4.8), (4.9) y $\|\check{d}_k\|^2 = \|Q_{1k}^T \check{d}_k\|^2 + \|Q_{2k}^T \check{d}_k\|^2$ implican que (2) se cumple.

3. Como Q_k es ortogonal, se tiene que $\|\check{d}_k\|^2 = \|Q_{1k}^T \check{d}_k\|^2 + \|Q_{2k}^T \check{d}_k\|^2$. Por tanto (3) se cumple usando (1) y (2). □

El siguiente resultado establece, que la tasa de convergencia para el algoritmo bajo estudio es superlineal.

TEOREMA 4.1. *Suponga que la Suposición (4.1) se cumple. Para k suficientemente grande la fórmula iterativa es como sigue*

$$x_{k+1} = x_k + d_k^0 = x_k + \check{d}_k \quad (4.10)$$

y

$$\text{dist}(x_{k+1}, X) = O((\text{dist}(x_k, X))^{1+\rho}),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^{1+\rho}} < \infty$$

es decir el algoritmo (3.2) converge superlinealmente

Demostración. De (4.1) se tiene que

$$\delta_k^0 = \|g_k\|^\gamma \geq \tilde{c}^\gamma (\text{dist}(x_k, X))^\gamma \quad (4.11)$$

Por lema (4.2) (iii), se tiene

$$\|\check{d}_k\| \leq c_6 \text{dist}(x_k, X) \quad (4.12)$$

Se sigue de la suposición (4.1)(i) que $\text{dist}(x_k, X) < 1$ para todo k suficientemente grande.

Entonces por (4.11), (4.12) y $\gamma < 1$ se sabe que \check{d}_k es solución factible de (3.1) correspondiente a $p = 0$. Por suposición (4.1)(ii) se sabe que (3.1) es un programa cuadrático estrictamente convexo para k suficientemente grande. Así $d_k^0 = \check{d}_k$. Ahora se probará que $d_k^0 = \check{d}_k$ es aceptable. Notese que $\gamma < 1$, entonces $\frac{1}{\gamma} > 1$ así,

$$\begin{aligned} \text{Pred}_k(d_k^0) - \text{Ared}_k(d_k^0) &= f(x_k) - f(x_k + d_k^0) + g_k^T d_k^0 + \frac{1}{2} d_k^{0T} B_k d_k^0 + \frac{1}{2} \mu_k \|d_k^0\|^2 \\ &= \frac{1}{2} d_k^{0T} (B_k - G_k) d_k^0 + O(\|d_k^0\|^{2+\rho}) \\ &= O(\|d_k^0\|^{2+\frac{1}{\gamma}}) + O(\|d_k^0\|^{2+\rho}) \\ &= O((\text{dist}(x_k, X))^{2+\rho}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde la segunda igualdad se cumple porque

$$f(x_k + d_k^0) = f(x_k) + g_k^T d_k^0 + \frac{1}{2} d_k^{0T} G_k d_k^0 + O(\|d_k^0\|^3).$$

$\gamma < 1$ y lema (3.2) implica que para k suficientemente grande

$$\begin{aligned} |\text{Pred}_k(d_k^0)| &\geq \frac{1}{2} \|g_k\| \min \left\{ \|g_k\|^\gamma, \frac{\|g_k\|}{M} \right\} \\ &= \frac{1}{2M} \|g_k\|^2 \\ &\geq \frac{\bar{c}^2}{2M} (\text{dist}(x_k, X))^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

se sigue de (4.13) y (4.14) que

$$|r_k^0 - 1| = \frac{|\text{Ared}_k(d_k^0) - \text{Pred}_k(d_k^0)|}{\text{Pred}_k(d_k^0)} \text{ Así, } r_k^0 > \eta \text{ para } k \text{ suficientemente grande, es}$$

decir, $d_k^0 = \check{d}_k$ para k suficientemente grande. De (4.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\bar{c}dist(x_{k+1}, X) &= \bar{c}dist(x_k + \check{d}_k, X) \\
&\leq \|g(x_k + \check{d}_k)\| \\
&\leq \|g(x_k + \check{d}_k) - g_k - G_k \check{d}_k\| + \|(G_k - B_k) \check{d}_k\| + \mu_k \|\check{d}_k\| \\
&\leq O(\|d_k\|^2) + O(\|\check{d}_k\|^{1+\frac{1}{\gamma}}) + O(\|\check{d}_k\|^{1+\rho}) \\
&= O(\|\check{d}_k\|^{1+\rho}) \\
&= O((dist(x_k, X))^{1+\rho})
\end{aligned}$$

Se sigue del Lema (4.2)(iii) que

$$\|d_{k+1}^{\check{}}\| = O(\|\check{d}_k\|^{1+\rho}) \quad (4.16)$$

Como para k suficientemente grande, la fórmula iterativa es $x_{k+1} = x_k + \check{d}_k$ y x^* es el punto límite de $\{x_k\}$, existe un entero positivo $K > 0$ tal que $x^* = x_k + \sum_{i=k}^{\infty} \check{d}_i, \forall k > K$

Por (4.16), existe $a \in (0, 1)$ y un entero positivo $\bar{K} > K$ tal que para todo $k \geq \bar{K}$

$$a\|\check{d}_k\| \geq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|\check{d}_i\|.$$

se sigue de la desigualdad triangular que para todo $k \geq \bar{K}$

$$\left\| \sum_{i=k}^{\infty} \check{d}_i \right\| \geq \|\check{d}_k\| - \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \check{d}_i \right\| \geq (1-a)\|\check{d}_k\| \quad (4.17)$$

y

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \check{d}_i \right\| \leq \|d_{k+1}^{\check{}}\| + \left\| \sum_{i=k+2}^{\infty} \check{d}_i \right\| \leq (1+a)\|d_{k+1}^{\check{}}\|. \quad (4.18)$$

Así $\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^{1+\rho}} \leq \frac{(1+a)\|d_{k+1}^{\check{}}\|}{(1-a)^{1+\rho}\|\check{d}_k\|^{1+\rho}}$ para todo $k \geq \bar{K}$.

para todo $k \geq \bar{K}$. Como $\|d_{k+1}^{\check{}}\| = O(\|\check{d}_k\|^{1+\rho})$, finalmente se tiene

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^{1+\rho}} < +\infty,$$

esto es

$\{x_k\}$ converge a x^* superlinealmente

□

Se observa que en varios argumentos se utilizaron las propiedades de la notación O previamente enunciadas.

En el capítulo que se presenta a continuación se dan las pruebas numéricas presentada por los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)] para mostrar que el método es computacionalmente eficiente.

Resultados Numéricos

Para verificar la eficiencia del método propuesto por los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)], los mismos realizaron experimentos numéricos de algunos problemas degenerados y algunos problemas de test clásicos desde CUTEr y compararon los resultados de su método con los que se obtiene usando métodos de región de confianza tradicionales.

En cada punto iterativo, el paso prueba se obtiene al resolver el subproblema

$$\begin{aligned} \min \Phi_k(d) &= g_k^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{sujeto a } \|d\| &\leq \Delta_k. \end{aligned} \quad (5.1)$$

y B_k se escoge como G_k .

El radio de la región de confianza es actualizado como sigue

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} \frac{c_3 \|s_k\| + c_4 \Delta_k}{2}, & \text{si } r < c_2 \\ \frac{(1 + c_1) \Delta_k}{2}, & \text{si } r \geq c_2 \end{cases}$$

donde $c_1 = 2$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = \frac{1}{4}$ y $c_4 = \frac{1}{2}$.

en el nuevo método de región de confianza, los parámetros son tomados como $\eta = 10^{-4}$, $\gamma = 0,6$, $\mu_k = \min\{0,01, \|g_k\|^\rho\}$ y $\rho = 0,8$, $c = 0,2$.

Todos los algoritmos son implementados en Fortran 77, y las corridas son hechas en 2,4GHz PC con 512 M de memoria. El criterio de parada usado es $\|g_k\| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 10^{-6}$. Para conveniencia de la comparación, la subrutina que resuelve el

problema cuadrático es GQTPAR en Minpack y todos los algoritmos resuelven la misma subrutina para resolver el subproblema cuadrático .

En el capítulo anterior la convergencia superlineal de el algoritmo propuesto fue probada teóricamente bajo la condición de cota de error local $\|g(x)\| \geq \bar{c} \text{dist}(x, X)$. En caso tal los autores [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)] se concentraron en la cota de error local. Tal problema de prueba es diseñado como sigue:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 4x_2)^2.$$

Y el conjunto solución es $\{(x_1, x_2) | x_1 - 4x_2 = 0\}$. Se establece el punto inicial en $(-5000, 5000)$ y se trata de encontrar el mínimo. La matriz hessiana es singular en la solución, y la condición de cota de error local es satisfecha cuando $\bar{c} \in [0, 4]$. Resultados numéricos indican que la secuencia generada por el algoritmo converge a $x^* = (-3,446379E + 03, -8,6159494E + 02)$, la cual es una solución óptima. El paso iterativo x_k y la norma del gradiente en cada iteración son recopiladas en la Tabla 4.1. Esos resultados indican que el nuevo método de región de confianza converge rápidamente cuando x_k se aproxima a la solución óptima.

Ahora se considera el problema singular de Powell's en [Powell, M.J.D (2962)], el cual es un problema de prueba típico,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4.$$

<i>Iteración k</i>	x_k	$\ g(x_k)\ $
1	(-0.5000000E+04,0.5000000E+04)	0.2061553E+06
2	(-0.4608029E+04,0.3432116E+04)	0.1512066E+06
3	(-0.4280549E+04,0.2122195E+04)	0.1052986E+06
4	(-0.4014761E+04,0.1059044E+04)	0.6803898E+05
5	(-0.3807774E+04,0.2310955E+03)	0.3902236E+05
6	(-0.3656664E+04,-0.3733458E+03)	0.1783887E+05
7	(-0.3570446E+04,-0.7182162E+03)	0.5752403E+04
8	(-3.4463797E+03,-8.6159494E+02)	0.0000000E+00

TABLA 5.1: RESULTADOS NUMÉRICOS DEL PROBLEMA DISEÑADO

	iteraciones
Método propuesto	18
Tradicional ($\Delta_0 = 0,01$)	52
Tradicional ($\Delta_0 = 1$)	40
Tradicional ($\Delta_0 = 100$)	43

TABLA 5.2: RESULTADOS NUMÉRICOS DEL PROBLEMA SINGULAR POWELLS

Ambos métodos tanto el tradicional como el método propuesto tratan de encontrar el mínimo $(0, 0, 0, 0)$ arrancando desde $(3, -1, 0, 1)$. Los resultados son resumidos en la tabla 4,2, donde iteraciones denota el número de subproblemas resueltos. Los resultados numéricos en la tabla 4,2 demuestran que el método propuesto tiene ventaja sobre el método tradicional para este problema.

Además, la eficiencia del algoritmo del método propuesto se prueba para algunos problemas a larga escala [Bongarts, I., Conn, A.R., Gould, N.I.M., Toint, Ph.L (1995)] Los resultados son resumidos en la tabla 4,3. La tabla 4,3 puede ser leída como sigue:

- Columna 1 representa el nombre del problema y el tamaño del problema o dimensión n .
- Columna 2-5 reporta el resultado numérico de varios algoritmos.
- Δ_0 denota el radio de la región de confianza inicial para el método de región de confianza tradicional
- En las columnas 2-5, " $\#f$ " denota el número de cálculos de la función objetivo. " $\#g$ " denota el número de cálculos del gradiente. "tiempo.^{es}" el tiempo de corrida en segundos.

De la tabla 3, se puede ver que la eficiencia del método de región de confianza tradicional depende del radio inicial de la región de confianza. Para algunos problemas, el método tradicional con radio inicial grande es eficiente. Pero para otros problemas, el método tradicional con radio de región de confianza pequeño llega a ser mas eficiente. Sin embargo no existe una regla general para escoger el radio inicial de la región de confianza. El método de región de confianza propuesto toma una estrategia de ajuste de la región de confianza auto-adaptativa. En general, la ejecución del nuevo método es competitiva a los métodos de región de confianza tradicionales.

Para problemas CHAINWOO, CRAGGLVY, DIXMAANB, DIXMAANC, FREUROTH, SENSORS, SINQUAD, el nuevo método ejecuta mucho mejor que los métodos tradicionales con los tres radios. Para problemas BRYBND, COSINE, DIXMAAND, NCB20B, el nuevo método ejecuta peor que el método tradicional con una escogencia del radio de región de confianza inicial pero mucho mejor que en las otras dos escogencias.

Estas evidencias demuestran que el nuevo método de región de confianza es notable en cálculos prácticos.

La ejecución del nuevo método depende de la elección de parámetros μ_k , c y γ . Durante los experimentos, los autores notaron que el método propuesto es insensible a c . μ_k debería ser $\min\{0,01, \|g(x_k)\|^\rho\}$. Si se toma $\mu_k = \|g(x_k)\|^\rho$, μ_k podría ser muy grande y el paso prueba d_k sería pequeño en el inicio del método. Esto puede resultar ineficiente. La elección de γ tiene efectos significantes en la eficiencia del método. Si se escoge γ muy pequeño o muy grande, el método no es eficiente. Generalmente se toma $\gamma \in [0.6, 0.8]$.

	Tamaño	Nuevo TRM			TRM Tradicional ($\Delta_0 = 0,01$)			TRM Tradicional ($\Delta_0 = 1$)			TRM Tradicional ($\Delta_0 = 100$)		
		#f	#g	Tiempo	#f	#g	Tiempo	#f	#g	Tiempo	#f	#g	Tiempo
<i>BRYBND</i>	1000	18	12	49.05	24	24	31.63	123	115	152.26	14	10	27.78
<i>CHAINWOO</i>	1000	84	51	141.9	238	179	434.21	356	256	729	283	203	561.98
<i>COSINE</i>	1000	17	14	25.03	23	23	26.38	12	12	16.36	$f > 10000$		
<i>CRAGGLVY</i>	1000	15	15	14.19	30	30	29.85	19	19	18.83	16	16	14.12
<i>DIXMAANA</i>	3000	10	10	305.45	30	30	726.94	18	18	470.36	14	13	339.02
<i>DIXMAANB</i>	3000	11	11	1091.57	30	30	1234.09	19	19	1231.34	16	14	1018.42
<i>DIXMAANC</i>	3000	13	11	1222.53	32	31	1694.42	19	19	1342.73	16	14	1032.04
<i>DIXMAAND</i>	3000	27	16	1385.46	31	31	1581.74	20	20	1481.89	15	15	1318.41
<i>EIGENALS</i>	930	255	159	883.81	150	138	414.56	138	126	380.71	138	123	383.35
<i>FREUROTH</i>	1000	12	8	15.19	30	30	34.48	19	19	25.34	13	12	12.84
<i>MANCINO</i>	100	36	11	2.12	31	31	4.78	22	21	3.25	10	10	1.54
<i>NCB20B</i>	1000	18	12	34.89	27	20	56.93	16	8	31.9	22	10	64.59
<i>SENSORS</i>	100	26	14	0.7	41	34	1.5	30	22	1.01	28	16	0.79
<i>SINQUAD</i>	1000	19	11	31.7	29	28	39.24	18	18	30.76	17	13	20.04
<i>SPARSINE</i>	1000	101	39	411.25	31	30	36.83	27	26	33.77	55	44	124.31

TABLA 5.3: RESULTADOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS A GRAN ESCALA.

Conclusión

§6.1. Conclusión

Se estudió un método de región de confianza para minimizar problemas con soluciones singulares y los autores en su estudio probaron que la convergencia global es obtenida bajo condiciones estándar.

Además probaron que el algoritmo posee una tasa de convergencia superlineal sin la suposición de que la matriz hessiana en la solución fuese no singular.

Este es el primer método de región de confianza que posee esta propiedad. Es importante resaltar que el nuevo método es eficiente en problemas con soluciones singulares, si embargo en problemas con soluciones no singulares no se tiene la certeza de que el método sea eficiente o no.

Un aporte importante es que se cambió la forma en que los autores

[*Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)*] presentan el algoritmo esto para entenderlo de una manera sencilla y clara. Además se da una versión mas detallada de las demostraciones para su mayor comprensión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [Zhang J. Wu L. Zhang X.(2007)] Zhang Juliang, Wu Lingyun, Zhang Xiangsun.:
A trust region method for optimization problem with singular solutions. Appl
Math Optim (2007) 56: 379-394.
- [J. Fan y Y. Yuan (2005)] Fan, J. Y., Yuan, Y.: On the quadratic convergence of the
Levenberg-Marquadt method whitout nonsingularity assumption. Computing
74, 23-39 (2005).
- [Yamashita N. y Fukushima M. (2001)] Yamashita, N., Fukushima, M.: On the rate
of convergence of the Levenberg-Marquadt method. Computing 15, 239-
249(2001).
- [Zhang, J. L., Wang, Y. (2003)] Zhang, J. L., Wang, Y.: A new trust region method for
nonlinear equation. Math. Methods Oper. Res. 58, 283-298 (2003)
- [Andrew R. Conn, Nicholas I.M Gould, Philippe L Toint] . Trust-Region Methods.
MPS/SIAM series on optimization 2000
- [Stewart, G. W., Sun, J. G. (1990)] Stewart, G. W., Sun, J. G.: Matrix Pertubation Theory.
Academic, New York.
- [J. Nocedal-S. J. Wright (1999)] J. Nocedal-S. J. Wright: Numerical Optimization.
Springer Verlag.
- [Powell, M. J. D (2962)] Powell, M. J. D.: An iterative method for finding stationary
values of a function of several variables . Comput. J. 5(2), 147-151 (1962).

[*Bongarts,I.,Conn, A.R.,Gould, N.I.M.,Toint, Ph.L (1995)*] Bongarts,I.,Conn,
A.R.,Gould, N.I.M.,Toint, Ph.L .:constrained and unconstrained testing
environment. ACM Trans. Math. Softw. 21,123-160(1995).

[www.dma.uvigo.es/aurea/transparencias2.pdf] .