UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Factorización Ortogonal en Grafos no Dirigidos Simples Finitos"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Maria Ramirez

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Matemática Discreta.
Tutor: Prof. (MSc) Julio Cesar Ysaccura Cancines

Barquisimeto, Venezuela. Julio de 2012

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"FACTORIZACIÓN ORTOGONAL EN GRAFOS NO DIRIGIDOS SIMPLES FINITOS"

Presentado por la ciudadana BR. MARIA RAMIREZ titular de la Cédula de Identidad Nº 16.831.564. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

______________________________	______________________________
TUTOR	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA
______________________________	______________________________
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

*Dedicado a mis padres Carmen y Benito,
a mi sobrino Javier y a mis hermanos
Benito, Carmen y Gabi.*

AGRADECIMIENTOS

A **DIOS** primeramente por darme la oportunidad de vivir y regalarme una familia maravillosa, por que a pesar de los obstaculos me llenaste de fuerza y voluntad para poder culminar mi carrera.

A mis **padres**, por su apoyo y esfuerzo, por la confianza depositada en mi, por estar a mi lado en todo momento a quienes debo este triunfo, por incentivarme a seguir adelante y por todos esos sacrificios que hicierón por mi para lograr que sea una profesional.

A mi **hermano**, por sus palabras y consejos que nunca faltaban siempre las tuve presente, por su espiritud luchador y emprendedor eres mi ejemplo a seguir.

A mi **hermana**, Ale, por que no sólo eres mi hermana, eres mi mejor amiga siempre aconsejandome para bien y confiando en mi, eres mi gran apoyo.

A mi **hermanita**, Gabi, por ser mi compañera de estudio, siempre brindandome entusiasmo y animo de estudiar.

A mis **abuelas** Eugenia y Agustina, por cuidarme y bendecirme desde el cielo.

A mis tias (Maura, Francisca, Elsa, Maria), primas (Amanda, Mary, Arelis) y primos (Jorge, Jesus) por sus consejos, por el apoyo brindado.

A mis amigos (Veronica, Elieser, Mariela), por compartir conmigo buenos y malos momentos, por las enseñanzas que me dejaron cada uno de ellos.

A mis compañeros de clase (Betty, Naudi), por su disposición para ayudarme cuando los necesitaba.

A Victor, por ser tan alegre y trasmitirme esa aptitud positiva ante las dificultades, por hacerme sonreir siempre no cambies.

A Sharon, por ser mi amiga, compartiendo mis tristezas, mis alegrias, mis logros, por estar ahi cuando te necesite dandome animos, ami eres la mejor.

A mis amigas Maria Celeste y Rangeli, por todas las experiencias que juntas vivimos.

A Juvenal Castillo, por que siempre creiste en mi, por tu apoyo incondicional que me permitio mantenerme constante y no decaer, por motivarme a luchar por lo que quiero.

A mis amigas (Nakaris, Zulimar, Yohannys, Elimar, Erika), por estar hay en esos momentos de agotamiento y preocupación, brindandome distracción y alegrias.

A mis amigos del GER (Jorge, Auristela, Yorget, Luiggi), por estar conmigo, por su apoyo y sonrisas.

A mi tutor JULIO YSACCURA por propinarme las herramientas necesaria para la realización de mi trabajo de grado, por ser un excelente educador y poseer una enorme calidad humana, por su incentivo a que estudiara cada dia más.

A todos los profesores no sólo de la carrera (Mario, Eibar, Romulo, Yzacura) sino de toda la vida (Audelina, Jose, Aura), por que gracias a sus enseñanzas logre mi sueño.

Y a todos aquellos que de una u otra forma colaborarón conmigo.

“Factorización Ortogonal en Grafos no Dirigidos Simples Finitos”

Resumen

Analizaremos con detalle que cada $[0, k_1+k_2+....+k_m-m+1]$- grafo no dirigido, simple finito G posee una $[0, k_i]_1^m$-factorización ortogonal a cualquier subgrafo H de G con m lados, donde $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son enteros positivos

Trabajo realizado por el Doctor Haodi Feng (profesor del Departamento de Ciencia de la Computación) en la Ciudad Universitaria de Hong Kong, Hong Kong; en conjunto con el Doctor Guizhen Liu (profesor del Departamento de Matemática y Ciencia de Sistema) en la Universidad Shandong de la Republica Nacional de China, trabajo publicado en la revista Wiley Inter Science, volumen 40, páginas 267-276, 2002

Palabras claves: grafo, factor, factorización ortogonal.

Índice

Índice de figuras

Introducción.

Muchas redes del mundo pueden ser modeladas mediante grafos, un ejemplo importante de estas son las redes de comunicación con nodos y enlaces, modelando ciudades y canales de comunicación respectivamente. Así como también pueden modelarse la web en todo el mundo, donde los nodos representan las paginas web y los enlaces correspondientes a hipervinculos entre estas paginas.

Muchos problemas de la vida diaria, situaciones de optimización y diseño de redes, por ejemplo el diseño de codificación, bloques de construcción, problemas de transferencia de archivos sobre redes del computador, etc, estan relacionados con factores, factorizaciones y factorizaciones ortogonales de grafos. El problema de la transferencia de archivos puede ser modelado como una (0,f)-factorización de un grafo y el diseño de cuadrado latino suele ser relacionado con factorización ortogonal.

Sea $G : [V(G), E(G)]$ un grafo con conjunto de vértice $V(G)$ y conjunto de lado $E(G)$. Solo se consideran grafos no dirigidos simples finitos. Para cada vértice x, se denota por $d_G(x)$, el grado de x en G. Consideramos g y f dos funciones de valores enteros definidas sobre $V(G)$ tal que $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in V(G)$. Un (g, f)-factor de G es un subgrafo generador H de G que satisface $g(x) \leqslant d_H(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in V(G)$. Si G en si mismo es un (g, f)-factor es también llamado un (g, f)-grafo. Dados a y b enteros, si g siempre toma el valor de a y f siempre toma el valor de b, entonces un (g, f)-factor es conocido como un $[a, b]$-factor y un (g, f)-grafo es considerado un $[a, b]$-grafo. Una (g, f)-factorización $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G es una partición de $E(G)$ en (g, f)-factores $F_1, F_2, ..., F_m$ de lados disjuntos. Similarmente se puede definir $[a, b]$-factorización. Consideramos H un subgrafo de G con m lados. Una factorización $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G es llamada ortogonal a H si cada F_i $(i = 1, ..., m)$ tiene exactamente un lado en común con H.

Alspach en su trabajo "Contemporary Design Theory" en 1992 [1], deja las siguientes preguntas abiertas :

(1) Dada una factorización $\mathfrak{F}$ de G, ¿Existe un subgrafo H de G con la propiedad de que $\mathfrak{F}$ sea ortogonal a H ?

(2)Dada un subgrafo H de G, ¿Existe una factorizacion $\mathfrak{F}$ de G con la propiedad de que $\mathfrak{F}$ sea ortogonal a H ?

Estas interrogantes son consideradas problemas de factorización ortogonal, que han tomado gran valor investigativo en años recientes debido a sus aplicaciones en diseños combinatorios, como por ejemplo, trazados de circuitos, diseño de redes, diseños de habitaciones cuadradas entre otros. En respuesta a la primera pregunta, [5] y [8] estudiarón k- factorizaciones ortogonal y la existencia de igualdades en las cuales 2- factorizaciones son ortogonales. Recientemente, más y más trabajos sobre la segunda pregunta han sido presentados en particular, [1,6-9] discutieron factorizaciones ortogonales de $(mg + m - 1, mf - m + 1)$-grafos. Feng [3] estudio la existencia de $(0, f)$-factorización ortogonal a cualquier subgrafo de $(0, mf - m + 1)$-grafos y la existencia de $[0, k_i]_1^m$-factorizaciones ortogonales a un grafo estrella de $[0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1]$-grafos.

El proposito central de este trabajo, es extender el contenido del articulo realizado por H. Feng en 1998, titulado Factorización ortogonal [3] y se demuestra que cada $[0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1]$- grafo G tiene una $[0, k_i]_1^m$-factorización ortogonal a cualquier subgrafo H con m lados. Tal situación fue analizada en 2002, por H. Feng y G. Liu, en su trabajo "Orthogonal factorizations of Graphs" [4].

Nuestro trabajo consta de tres capitulos:

- En el primer capitulo, proporcionamos todas y cada una de las definiciones necesarias para entender y desarrollar nuestro cometido, así como también damos un análisis mediante ejemplos de los conocidos problemas de factorización ortogonal.

- En el segundo capitulo, mostramos detalladamente la validez de los lemas utilizados para el desarrollo del teorema principal así como algunos ejemplos.
- Y por último en el tercer capitulo tenemos el desarrollo de nuestro teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares.

§1.1. Teoría de Grafos

Definición 1.1. Un grafo no dirigido es una estructura denotada por $G : [V(G), E(G)]$, donde $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto no vacío, denominado el conjunto de los vértices o (nodos) de G, y $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ el conjunto de aristas o lados de G, con $e = (v_k, v_j)$ formado por pares no ordenados de $V(G)$, para algún k,j $\in \{1, ...n\}$.

Observación 1.1.

- Otra notación usual para los lados es $e = \{v_k v_j\}$ diremos que v_k y v_j son los extremos del lado e.
- Si e $= \{v_i v_j\}$ es un lado de G, diremos que los vértices distintos v_i, v_j son adyacentes y que el lado e incide en sus vértices extremos. En caso de que i=j, los extremos del lado coinciden, a este lado "e" se le denomina bucle o lazo.

Definición 1.2. Sea G:[V(G),E(G)] un grafo. El orden del grafo G denotado por $|V(G)|$, es el número de vértices de G; en forma análoga la dimensión o tamaño del grafo G es el número de lados de G denotado por $|E(G)|$.

Ejemplo 1.1. Sea un grafo G:[V(G),E(G)], donde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$ (ver figura 1.1).

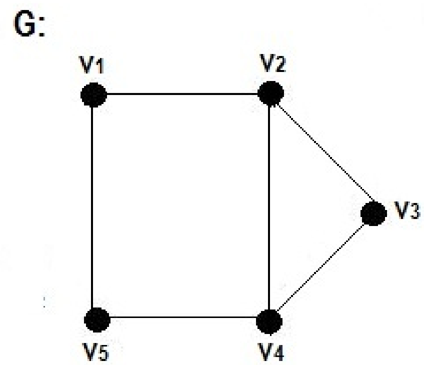

Figura 1.1: Grafo

Ejemplo 1.2. En la figura 1.1, el orden del grafo G es $|V(G)|$=5 y el tamaño de G es $|E(G)|$=6.

Definición 1.3. Sea G:[V(G),E(G)] un grafo. Si más de un lado de G, tienen los mismos vértices extremos son denominados lados paralelos.

Definición 1.4. Un grafo $G : [V(G), E(G)]$ simple es un grafo sin lazos ni lados paralelos. De tal modo que en un grafo simple, cada par de vértices determinan un solo lado.

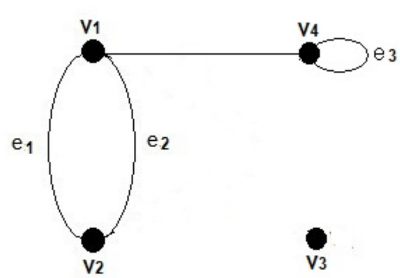

Figura 1.2: Grafo G

Ejemplo 1.3. En la figura 1.1 G representa un grafo simple y en la figura 1.2 G no es un grafo simple.

Definición 1.5. En un G:[V(G),E(G)] un grafo, el grado de un vértice v, denotado por $d_G(v)$, es el número de lados de G que son incidentes a este vértice. Un vértice de grado 0, se dice que es aislado.

Ejemplo 1.4. En la siguiente figura 1.2, los grados de los vértices del grafo son: $d_G(v_1) = 3$, $d_G(v_2) = 2$, $d_G(v_4) = 3$ y $d_G(v_3) = 0$ por lo que v_3 es un vértice aislado. Se puede observar que G no es simple.

Definición 1.6. Dos grafos G_1:[V_1,E_1] y G_2:[V_2,E_2] no dirigidos son isomorfos si hay una función f: $V_1 \to V_2$ biyectiva con la propiedad de que para cada par de vértices $a, b \in V_1$, a y b son adyacentes en G_1 si y solo si f(a), f(b) son adyacentes en G_2.

Ejemplo 1.5.

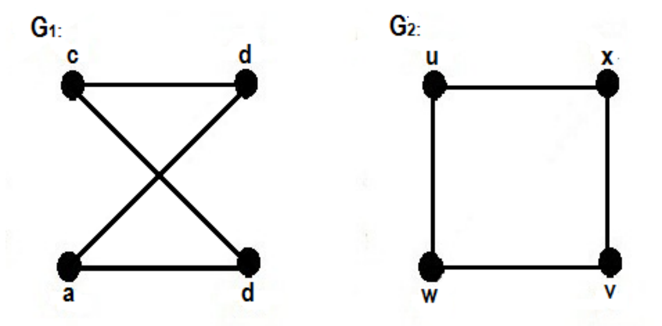

Figura 1.3: G_1 y G_2 son Isomorfos

Al construir una función f la cual sea un isomorfismo de grafos G_1 y G_2 (ver figura 1.3). Esta función f es la siguiente:

i	f(i)
a	v
b	x
c	u
d	w

Definición 1.7. Sea G:[V(G),E(G)] un grafo se dice que G es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado, si este grado es k se dice que G es k-regular .

Ejemplo 1.6. En los siguientes grafos tenemos que (A) es un 2-regular y (B) no es un grafo regular.

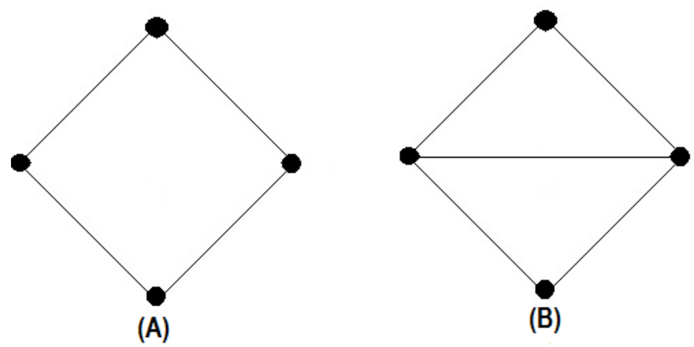

Figura 1.4: Grafos (A) y (B)

Definición 1.8. Sea G:[V(G),E(G)] un grafo simple de orden n ($|V(G)| = n$), diremos que G es completo si entre cada par de vértices distintos de dicho grafo existe un lado que los une. Los grafos completos son denotados por K_n donde n es el número de vértices y su dimensión es n(n-1)/2.

Ejemplo 1.7. En el siguiente ejemplo muestran los grafos completos de orden 1 al 5.

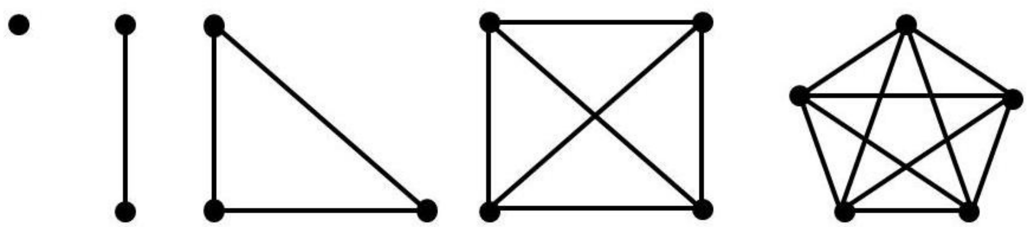

Figura 1.5: Grafos Completos K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

§1.2. Subgrafo, Subgrafo Generador y Subgrafo Inducido

Definición 1.9. Dado un grafo G:[V(G),E(G)]. Diremos que el grafo H=[V(H),E(H)] es un subgrafo de G si:

$$V(H) \subset V(G) \text{ y } E(H) \subset E(G).$$

Si además $V(H) = V(G)$ hablamos de un subgrafo generador de G.

Ejemplo 1.8. En la figura 1.6 se muestra G_1 un grafo con $\mathrm{V(G_1)} = \{\mathrm{v}_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\mathrm{E(G_1)} = \{\mathrm{v}_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_1\}$. H_1 es un subgrafo generador de G_1, pues cumple $V(H_1)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}=V(G_1)$ y $E(H_1)=\{v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_1\}\subset \mathrm{E(G_1)}$

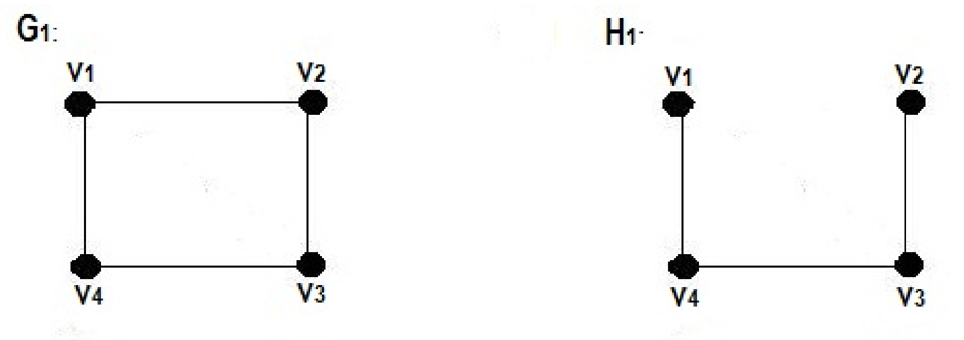

FIGURA 1.6: H_1 GRAFO GENERADOR DE G_1

Definición 1.10. Sea G:[V(G),E(G)] un grafo y H:[U,E(G)] un subgrafo de G. Diremos que H es inducido si todo lado de G con extremos en U, esta en H. Denotado por G[U].

Ejemplo 1.9. En la figura 1.7 Sean V(G)=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y U= $\{v_1, v_2, v_4\}$ subconjunto de V. El segundo grafo G[U] es un subgrafo del primer grafo G. Ademas G[U] es el subgrafo de G inducido por U.

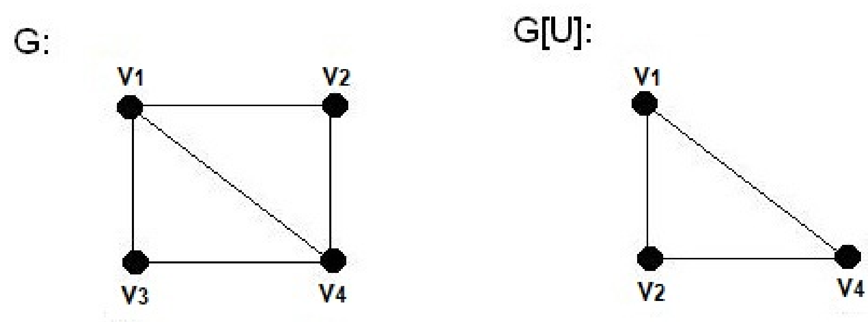

FIGURA 1.7: GRAFO INDUCIDO

Definición 1.11. Un grafo G:[V(G),E(G)] es bipartito si el conjunto de vértices V(G) puede ser expresado como la unión de dos subconjuntos no vacíos, digamos V_1

y V_2, tal que cada lado e tiene la forma $\{v_1, v_2\}$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. De modo pues que cada lado e conecta un vértice en V_1 con otro en V_2, y ningún par de vértices de V_1 (o de V_2) es adyacente.

Ejemplo 1.10. Sea G:[V(G),E(G)] un grafo con V(G)=$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, considerando V_1= $\{v_1, v_3, v_5\}$ y V_2=$\{v_2, v_4, v_6\}$. G es un grafo bipartito (ver figura 1.8).

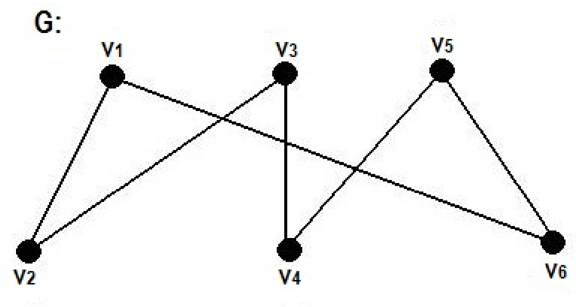

Figura 1.8: G es Bipartito

Definición 1.12. Un grafo G:[V(G),E(G)] bipartito se dice que es completo con $|V_1|$=m y $|V_2|$=n, y lo denotamos por $K_{m,n}$ si cada vértice de V_1 es adyacente a todo vértice en V_2 y viceversa.

Ejemplo 1.11. Sea G:[V(G),E(G)] un grafo y sean A y B subconjuntos de V(G) tal que A=$\{v_1, v_2\}$ y B=$\{v_3, v_4, v_5\}$. $|A|$=2 y $|B|$=3 (ver figura 1.9).

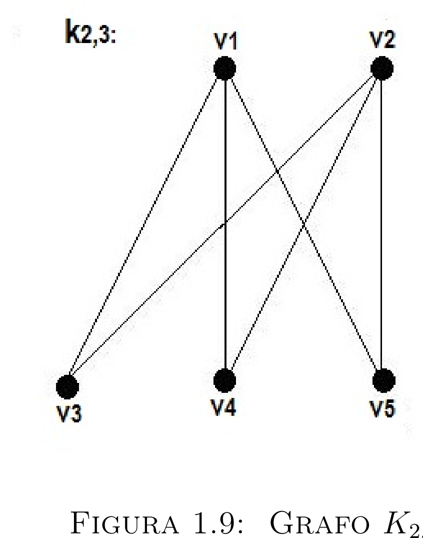

Figura 1.9: Grafo $K_{2,3}$

Observación 1.2.

- Un grafo bipartito completo de la forma $K_{1,n}$ se llama estrella.
- El grafo estrella $K_{1,3}$ es conocido como un grafo garra.

Ejemplo 1.12. El grafo garra $k_{1,3}$ (ver figura 1.10)

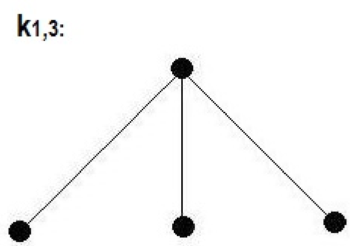

Figura 1.10: Grafo $K_{1,3}$

§1.3. Camino y Ciclo

Definición 1.13. En el grafo G:[V(G),E(G)] un camino es una sucesión finita de vértices y aristas alternos, $v_0e_1v_1e_2...v_{n-1}e_nv_n$, tal que $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$; donde v_0 y v_n son los vértices extremos del camino. La longitud de un camino es el número de lados que hay en el camino.

Observación 1.3. Si en el camino no se repiten lados o vértices, diremos que el camino es simple o elemental respectivamente. En caso de que el vértice final e inicial coincidan ($v_0 = v_n$), dicho camino simple es conocido como ciclo.

Ejemplo 1.13. En la figura 1.11 algunos caminos del grafo G son: P: $x_1x_2x_3x_4x_5$, R: $x_1x_4x_5x_3$ y S: $x_3x_1x_2x_5$. Estos caminos son simples, la longitud de P es 4, la longitud de R y S es 3. Un ciclo en G es C: $x_1x_2x_3x_5x_4x_1$.

§1.4. Grafos Conexo

Definición 1.14. Un grafo G:[V(G),E(G)] es conexo, si siempre es posible encontrar un camino entre cualesquiera dos vértices distintos de G.

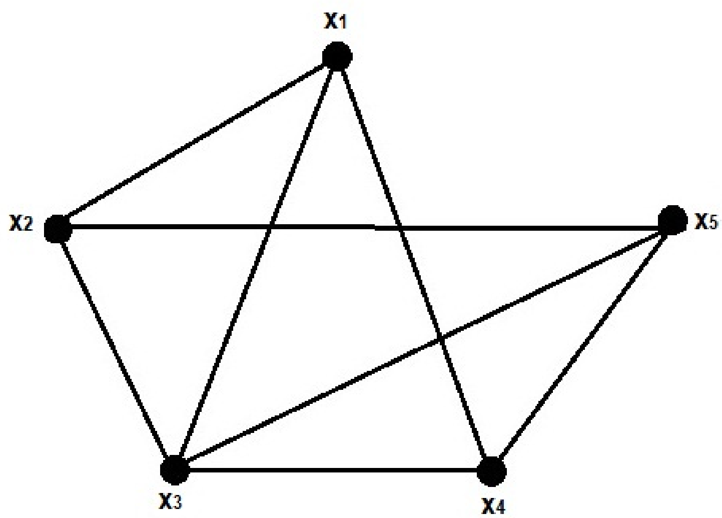

FIGURA 1.11: GRAFO G

Ejemplo 1.14. La figura 1.1 y la figura 1.11 representa grafos conexos.

Definición 1.15. Un grafo G:[V(G),E(G)] no dirigido es K-conexo si para cada par de vértices u,v en V(G), podemos determinar por lo menos K caminos disjuntos.

Ejemplo 1.15. El grafo K_4 es 3-conexo (ver figura 1.5).

Definición 1.16. Una componente conexa de un grafo G es un subgrafo conexo que no esta propiamente contenido en ningun otro subgrafo conexo de G.

El grafo G de la figura 1.12 tiene cinco componentes conexas.

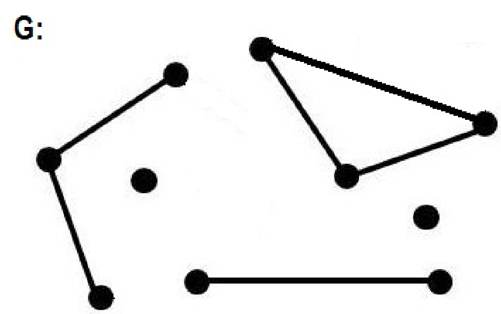

FIGURA 1.12: COMPONENTES CONEXAS

§1.5. Factorización en Grafos

Definición 1.17. f es una función de valores enteros definidas sobre $V(G)$ sii cada vértice v_i de $V(G)$ se le asigna un valor k_i entero, esto es, f: $V(G) \to Z$ tal que f$(v_i) = k_i$ con $k_i \in Z$.

Definición 1.18. Sean g,f dos funciones de valores enteros definidas sobre $V(G)$. Un (g,f)-factor de G es un subgrafo generador H de G que satisface (1): $g(x) \leqslant d_H(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in V(x)$

Observación 1.4. Sean $G : [V(G), E(G)]$ un grafo, $g(x)$ y $f(x)$ funciones de valores reales definidas sobre $V(G)$ siempre es posible determinar (g,f)-factor de G. Tomando a H un subgrafo generador de G y fijando $g(x)$ = grado menor de x y $f(x)$ = grado mayor de x para todo $x \in V(G)$, por lo tanto se cumple $g(x) \leqslant d_H(x) \leqslant d_G(x) \leqslant f(x)$, para G más aún para H, así se garantiza la existencia de (g,f)-factor de G.

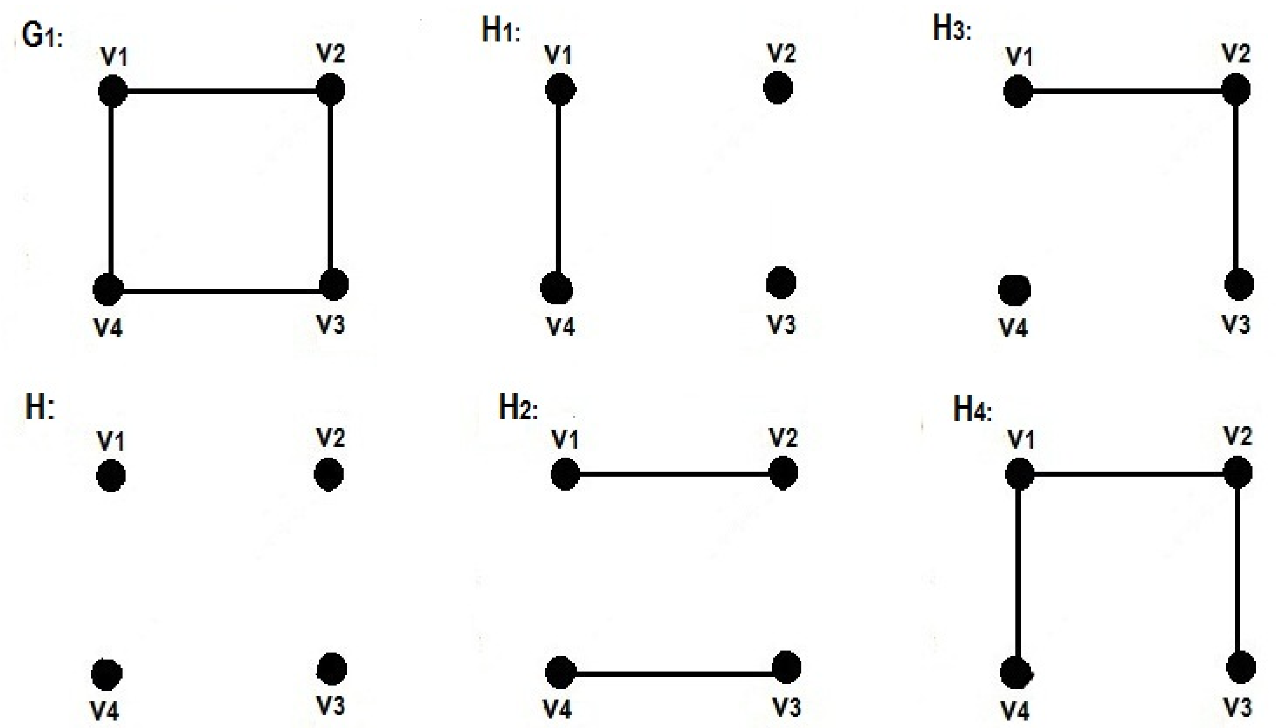

Figura 1.13: Grafo G_1 y Subgrafos Generadores de G_1

Ejemplo 1.16. En la figura 1.13 se muestra G_1, H, H_1, H_2, H_3 y H_4 los posibles subgrafos generadores de G_1, cualquier otro es isomorfo a alguno de los H_i (i=1,2,3,4). G_1,H, H_1, H_2, H_3 y H_4 son (g,f)-factores de G_1. Veamos primeramente si G_1 H, H_1,

H_2, H_3 y H_4 son subgrafos generadores de G_1 y luego comprobemos que sastisfacen la ecuación (1) fijando f y g.

Analicemos G_1:
$V(G_1)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E(G_1)$=$\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$. Por lo que G_1 es subgrafo generador de si mismo

Tomando g(v_i) = 0, f(v_i) = 2 con $i \in (1, 2, 3, 4)$
Veamos si cumple:

$$0 \leqslant d_{G_1}(v_1) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{G_1}(v_2) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{G_1}(v_3) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{G_1}(v_4) = 2 \leqslant 2$$

Por lo tanto, G_1 es un (g,f)-factor de G_1.
2) Observar que para G_1 también podríamos haber considerado
g(v_i) = 2, f(v_i) = 2 con $i \in \{1, 2, 3, 4)\}$, cumpliendose nuevamente que :

$2 = d_{G_1}(v_i) = 2 = 2$
Por lo tanto G_1 es un (g,f)-factor.

Analizando para H:
$V(H)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$=$V(G_1)$ y $E(H)$=$\emptyset \subset$E(G$_1$). Por lo que H es subgrafo generador de G_1

Tomando g(v_i) = 0, f(v_i) = 1 con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$
Veamos si cumple:

$$0 \leqslant d_H(v_1) = 0 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant d_H(v_2) = 0 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant d_H(v_3) = 0 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant d_H(v_4) = 0 \leqslant 1$$

Por lo tanto, H es un (g,f)-factor de G_1.

3) Observar que para H también podríamos haber considerado g(v_i) $= 0$, f(v_i) $= 0$ con $i \in \{1,2,3,4)\}$, cumpliendose que :

$0 = d_H(v_i) = 0 = 0$

Por lo tanto H es un (g,f)-factor de G_1.

Analizando para H_1:

$V(H_1)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$=$V(G_1)$ y $E(H_1)$=$\{v_1v_4\} \subset E(G_1)$. Por lo que H_1 es subgrafo generador de G_1

Tomando g(v_1) $= -1$, g(v_2) $= -1$, g(v_3) $= -2$, g(v_4) $= -2$ y f(v_1) $= 1$, f(v_2) $= 2$, f(v_3) $= 3$, f(v_4) $= 2$

Veamos si cumple:

$$-1 \leqslant d_{H_1}(v_1) = 1 \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant d_{H_1}(v_2) = 0 \leqslant 2$$
$$-2 \leqslant d_{H_1}(v_3) = 0 \leqslant 3$$
$$-2 \leqslant d_{H_1}(v_4) = 1 \leqslant 2$$

Por lo tanto, H_1 es un (g,f)-factor de G_1

Analizando para H_2:

$V(H_2)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$=$V(G_1)$ y $E(H_2) = \{v_1v_2, v_3v_4\} \subset E(G_1)$. Por lo que H_2 es subgrafo generador de G_1

Tomando g(v_i) $= 0$, f(v_i) $= 2$ con $i \in (1,2,3,4)$

Veamos que cumple:

$$0 \leqslant d_{H_2}(v_1) = 1 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{H_2}(v_2) = 1 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{H_2}(v_3) = 1 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{H_2}(v_4) = 1 \leqslant 2$$

Por lo tanto, H_2 es un (g,f)-factor de G_1.

Analizando para H_3:
$V(H_3)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$=$V(G_1)$ y $E(H_3)$=$\{v_1v_2, v_2v_3\} \subset E(G_1)$. Por lo que H_2 es subgrafo generador de G_1
Tomando g(v_1) $= -1$, g(v_2) $= -1$, g(v_3) $= -2$, g(v_4) $= 1$ y f(v_1) $= 1$, f(v_2) $= 2$, f(v_3) $= 3$, f(v_4) $= 2$ se cumple:

Veamos que cumple:

$$\begin{aligned} -1 &\leqslant d_{H_3}(v_1) = 1 \leqslant 1 \\ -1 &\leqslant d_{H_3}(v_2) = 2 \leqslant 2 \\ -2 &\leqslant d_{H_3}(v_3) = 1 \leqslant 3 \\ 1 &> d_{H_3}(v_4) = 0 \leqslant 2 \end{aligned}$$

Por lo que H_3 no es un (g,f)-factor de G_1.

Analizando para H_4:
$V(H_4)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$=$V(G_1)$ y $E(H_4)$=$\{v_1v_2, v_2v_3, v_4v_1\} \subset E(G_1)$. Por lo que H_4 es subgrafo generador de G_1.
Tomando g(v_i) $= -1$, f(v_i) $= 2$ con $i \in (1, 2, 3, 4)$
Veamos que cumple:

$$\begin{aligned} -1 &\leqslant d_{H_4}(v_1) = 2 \leqslant 2 \\ -1 &\leqslant d_{H_4}(v_2) = 2 \leqslant 2 \\ -1 &\leqslant d_{H_4}(v_3) = 1 \leqslant 2 \\ -1 &\leqslant d_{H_4}(v_4) = 1 \leqslant 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, H_4 es un (g,f)-factor de G_1

Observación 1.5.
- Si G en si mismo es un (g,f)-factor es también llamado un (g,f)-grafo. En el ejemplo 1.16
  $-G_1$ es un (g,f)-grafo en el ejemplo se probo que G_1 es un (g,f)-factor de G_1.

- Sean a,b enteros. Si g siempre toma el valor de a y f siempre toma el valor de b entonces un (g,f)-factor es un [a,b]-factor y un (g,f)-grafo es un [a,b]-grafo. En el ejemplo 1.16
  $-H_2$ es un [0,2]-factor, H es un [0,1]-factor, H_4 es un [-1,2]-factor y G_1 es un [0,2]-grafo de G_1.

- Si a=b=k entonces un [a,b]-factor es un k-factor. En el ejemplo 1.16
  $-G_1$ en 2) es un 2-factor, H en 3) es un 0-factor de G_1.

- Dado un grafo G cualquiera, construimos subgrafos generadores de G, manipulando a f y g respectivamente de tal manera que cumpla la condición $g(x) \leqslant d_H(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in V(G)$ así logramos encontrar (g,f)-factores de G, es decir, estos dependen de f y g. En el ejemplo 1.16
  $-H_1$, H_2 y H_4 son (g,f)-factores de G_1.
  $-H_3$ no es un (g,f)-factor de G_1.

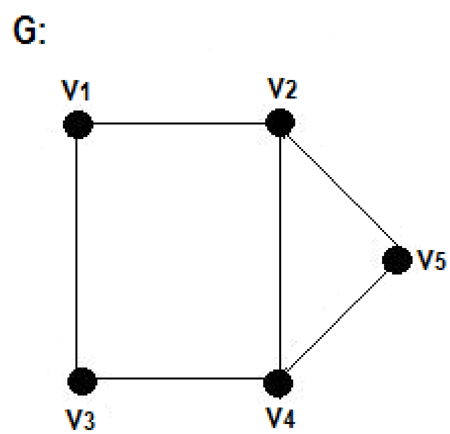

FIGURA 1.14: GRAFO G

Definición 1.19. Una (g, f)-factorización $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G es una partición de $E(G)$ en (g, f)-factores $F_1, F_2, ..., F_m$ de lados disjuntos.

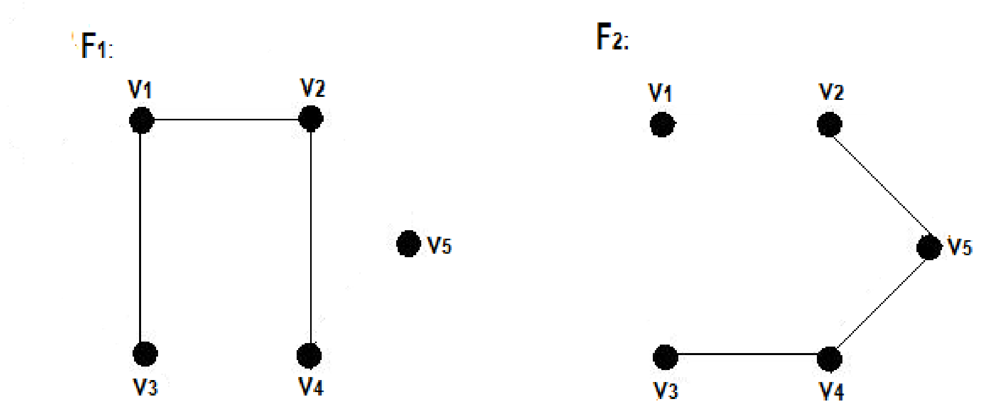

FIGURA 1.15: (G,F)-FACTORIZACIONES DE G

Ejemplo 1.17. Sea $G = [V(G), E(G)]$ un grafo donde $V(G)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E(G)$=$\{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$ como se muestra en la figura 1.14.

Estudiando a F_1 y F_2 dadas en la figura 1.15 se tiene.
F_1 es un subgrafo generador de G, puesto que, $E(F_1) \subset E(G)$ y $V(F_1) = V(G)$. Considerando $g(v_i) = 0$ y $f(v_i) = 3$, con $i \in (1, 2, 3, 4, 5)$ notamos que:

$$0 \leqslant d_{F_1}(v_1) = 2 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_2) = 2 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_3) = 1 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_4) = 1 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_5) = 0 \leqslant 3$$

Por lo que F_1 es un (g, f)-factor de G

Por otro lado, F_2 es un subgrafo generador de G, dado que, $E(F_2) \subset E(G)$ y $V(F_2) = V(G)$. Considerando $g(v_i) = 0$ y $f(v_i) = 2$, con $i \in (1, 2, 3, 4,5)$ se cumple:

$$0 \leqslant d_{F_2}(v_1) = 0 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{F_2}(v_2) = 1 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{F_2}(v_3) = 1 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{F_2}(v_4) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{F_2}(v_5) = 2 \leqslant 2$$

Por lo que F_2 es un (g, f)-factor de G

$\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$ es una partición de $E(G)$. En efecto, $E(F_1) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_4\} \neq \emptyset$ y $E(F_2) = \{v_2v_5, v_3v_4, v_4v_5\} \neq \emptyset$ además $E(F_1) \cap E(F_2) = \emptyset$ y $E(F_1) \cup E(F_2) = E(G_1)$, formada por (g,f)-factores F_1, F_2 de lados disjuntos, por lo tanto $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$ es una (g,f)-factorización de G

Definición 1.20. Una $[a, b]$-factorización $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G es una (g, f)-factorización donde g y f son funciones constantes de valores enteros a y b respectivamente. En otras palabras una $[a, b]$-factorización $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G es una partición de $E(G)$ en un conjunto de factores $F_1, F_2, ..., F_m$ de lados disjuntos donde cada F_i es un [a,b]-factor con $i \in \{1, 2, ..., m\}$

Ejemplo 1.18. Fijando a $g(v_i) = 0$ y $f(v_i) = 3$ con $i \in (1, 2, 3, 4, 5)$ para F_1 y F_2 tomadas del ejemplo anterior, $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$ es una $[0, 3]$-factorización de G, pues tanto F_1 como F_2 son $[0, 3]$-factores de G además forma la partición de $E(G)$.

Definición 1.21. Una k-factorización $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G es una $[a, b]$-factorización $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G con a=b=k siendo k un entero.

Ejemplo 1.19. Fijando a $g(v_i) = 2 = f(v_i)$ con $i \in (1, 2, 3, 4, 5)$. Consideremos a $G_2 = F$ un grafo dada en la figura 1.16, es un subgrafo generador de si mismo, y cumple $g(x) = d_F(v_i) = 2 = f(x)$ para cada $v_i \in G_2$ por lo que, $\mathfrak{F}= \{F\}$ es una 2-factorización de G_2, dado que, F es una partición de $E(G_2)$.

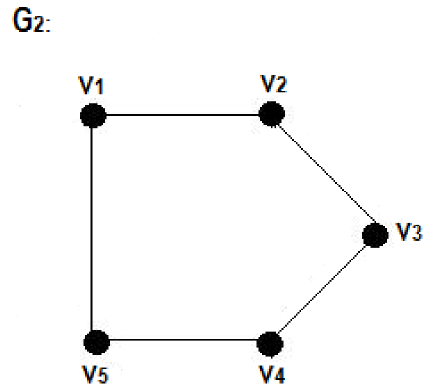

FIGURA 1.16: 2-FACTORIZACIÓN DE G_2

Ejemplo 1.20. Fijando a $g(v_i) = 1 = f(v_i)$ con $i \in (1, 2, 3, 4)$. Consideremos a G_1 un grafo dada en la figura 1.13, y escogemos a $\mathfrak{F} = \{F_1^{'}, F_2^{'}\}$ donde $F_1^{'}$ y $F_2^{'}$ son subgrafos generadores de G_1 dadas en la figura 1.17, cumplen $g(x) = d_{F_1^{'}}(v_i) = d_{F_2^{'}}(v_i) = 1 = f(x)$ para cada $v_i \in G_1$ por lo que, $\mathfrak{F}$ es una 1-factorización de G_1, pues tanto $F_1^{'}$ como $F_2^{'}$ forman una partición de $E(G_1)$.

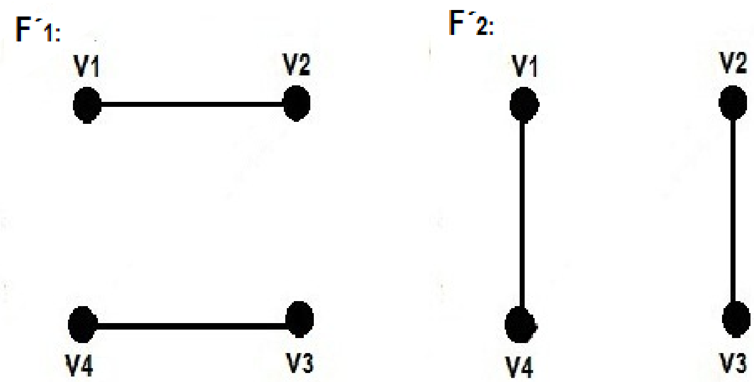

FIGURA 1.17: 1-FACTORIZACIÓN DE G_1

Definición 1.22. Sean $k_1, k_2, ..., k_m$ enteros positivos. Una $[0, k_i]_1^m$-factorización $\mathfrak{F}=$ $\{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G es una partición de $E(G)$ en un conjunto de factores $F_1, F_2, ..., F_m$

de lados disjuntos donde cada F_i es un $[0, k_i]$-factor $1 \leqslant i \leqslant m$.

Ejemplo 1.21. Tomando $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, F_1 y F_2 del ejemplo 1.17, se tiene que F_1 es un $[0, 3]$-factor y F_2 es un $[0, 2]$-factor, por lo que, $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$ es una $[0, k_i]_1^2$-factorización de G.

Observación 1.6. En lo que sigue cuando se habla de $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ se refiere a una (g, f)-factorización o una $[a, b]$-factorización o una k-factorización o una $[0, k_i]_1^m$-factorización de G.

Definición 1.23. Sea H un subgrafo de G de dimensión m. Una factorización $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G es llamada ortogonal a H si cada F_i $i \in \{1, 2, ..., m\}$ tiene exactamente un lado en común con H.

Ejemplo 1.22. Sean el grafo G, F_1 y F_2 considerados del ejemplo 1.17 con la figura 1.14, 1.15 respectivamente. $H = H_2$ de la figura 1.13 formado por $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E(H) = \{v_1v_2, v_3v_4\}$ es un subgrafo de G ($E(H) \subset E(G)$ y $V(H) \subset V(G)$). H contiene dos lados $(v_1v_2) \in F_1$ y $(v_3v_4) \in F_2$ F_i $i \in \{1, 2\}$ tiene exactamente un lado en común con H, por lo que $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$ de G es ortogonal a H.

Al analizar las preguntas propuestas por Alspach: (1) Dada una factorización $\mathfrak{F}$ de G, ¿Existe un subgrafo H de G con la propiedad de que $\mathfrak{F}$ sea ortogonal a H ? y (2) Dada un subgrafo H de G, ¿Existe una factorizacion $\mathfrak{F}$ de G con la propiedad de que $\mathfrak{F}$ sea ortogonal a H ?
Se describe un procedimiento para la construcción tanto de la factorización $\mathfrak{F}$ como del subgrafo H de G de tal manera que sean ortogonales.

Analizando (1)
Sean $G = (V(G), E(G))$ un grafo, $g(x)$ y $f(x)$ funciones de valores enteros definidas sobre $V(G)$, considerando a $\mathfrak{F}= \{F_1\}$ una factorización de G, F_1 es una partición de $E(G)$ y un (g,f)-factor de G, (F_1 es un subgrafo generador de G, que cumple $g(x) \leqslant d_{F1}(x) \leqslant f(x)$), como $m = 1$, el subgrafo H de G a construir debe tener un lado, dicho lado esta en $F_1 = G$, así se garantiza que $\mathfrak{F}$ es ortogonal a H.
Ahora consideramos $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$ una factorización de G, tanto F_1 como F_2 forman una partición de $E(G)$ y son (g,f)-factores de G, (F_1 y F_2 son subgrafos generadores de G, que cumple $g(x) \leqslant d_{Fi}(x) \leqslant f(x)$ con $i \in (1, 2)$), como $m = 2$, el subgrafo H de G a construir debe tener dos lados de G, dichos lados son tomados uno de F_1 y el otro de F_2, así se garantiza que $\mathfrak{F}$ sea ortogonal a H.
Consideramos a $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, F_3\}$ una factorización de G, F_1, F_2, F_3 forman una partición de $E(G)$ y cada una son (g,f)-factores de G, (F_1, F_2 y F_3 son subgrafos generadores de G, que cumple $g(x) \leqslant d_{Fi}(x) \leqslant f(x)$ con $i \in (1, 2, 3)$), como $m = 3$, el subgrafo H de G a construir debe tener exactamente tres lados, estos lados son tomados uno de F_1, otro de F_2 y el último de F_3, así se garantiza la ortogonalidad de $\mathfrak{F}$ respecto a H.

Ejemplo 1.23. Considerando a $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$ una factorización de G, mostrado en el ejemplo 1.17 donde F_1 y F_2 son (g,f)-factores de G. H_1, H_2 y H_3 dados en la figura 1.18 son subgrafos de G formados por exactamente dos lados tomados uno de F_1 y el otro lado de F_2. Por lo que $\mathfrak{F}$ es ortogonal a cada H_i $i \in (1, 2, 3)$

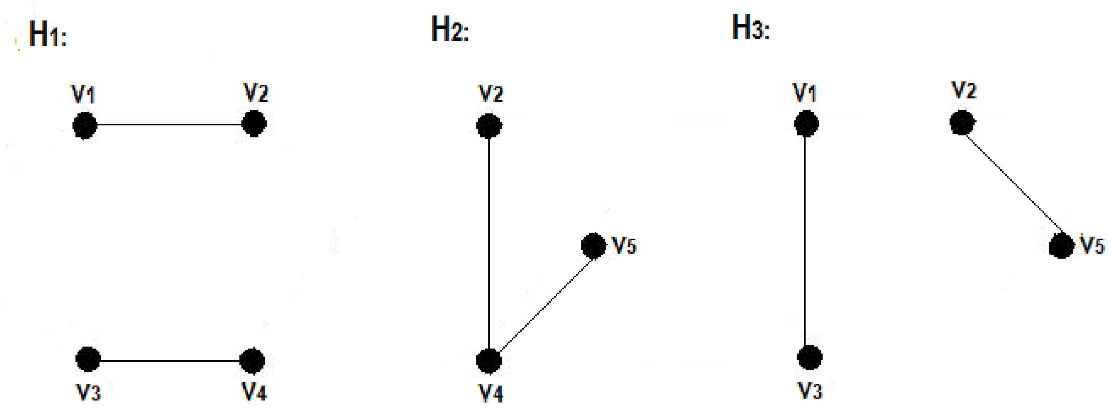

FIGURA 1.18: H_1, H_2, H_3 SUBGRAFOS DE G

Observación 1.7.
- Se pueden obtener todos los subgrafos de G para los cuales $\mathfrak{F}$ sea ortogonal, esto se logra haciendo combinaciones con exactamente un lado de cada (g,f)-factor que forma la factorización.

Analizando (2)

Sean $G = (V(G), E(G))$, $g(x)$ y $f(x)$ funciones de valores enteros definidas sobre $V(G)$, dado H un subgrafo de G con m lados, si $m = 1$ la factorización a construir es $\mathfrak{F}= \{F_1\}$ de G debe contener el lado de H, así se garantiza que $\mathfrak{F}$ sea ortogonal a H. Basta considerar a $F_1 = G$ es una partición de $E(G)$ y es un subgrafo generador de si mismo, que cumple $g(x) \leqslant d_{F1}(x) \leqslant f(x)$, el lado de H esta en G (pues H es un subgrafo de G).

Considerando que H posee dos lados $m = 2$, la factorización a construir es $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$ de G, tal que F_1 y F_2 son subgrafos generadores de G tomados de tal manera que cumplan $g(x) \leqslant d_{Fi}(x) \leqslant f(x)$, donde $i \in (1, 2)$ y formen la partición de $E(G)$, por lo que los $E(H)$ necesariamente se encuentran en $\mathfrak{F}$, para garantizar la ortogonalidad con respecto a H, se distribuyen estos lados de H, uno en F_1 y el otro en F_2.

Considerando que H posee dos lados $m = 3$, la factorización a construir es $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, F_3\}$ de G, tal que F_1, F_2 y F_3 son (g,f)-factores (subgrafos generadores de G que cumplan $g(x) \leqslant d_{Fi}(x) \leqslant f(x)$, donde $i \in (1, 2, 3)$) y formen la partición de $E(G)$, por lo que los $E(H)$ necesariamente se encuentran en $\mathfrak{F}$, para garantizar la ortogonalidad con respecto a H, se distribuyen estos lados de H, uno en F_1, otro en F_2 y el último en F_3

Ejemplo 1.24. Consideramos a H_1 subgrafo de G tomando de la figura 1.18 y consideramos f(x)=0 y g(x)=3 para todo $x \in V(G)$. Como H_1 tiene dos lados, la factorización es $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2\}$, se toma F_1 y F_2 subgrafos generadores de G y que formen una partición de $E(G)$, verificando que se cumple $0 \leqslant d_{Fi}(x) \leqslant 3$ para todo $x \in V(G)$ (i=1,2). En la figura 1.19 se muestra F_1 y F_2 que forman a $\mathfrak{F}$ una factorización ortogonal a H_1 distinta a la dada en el ejemplo anterior

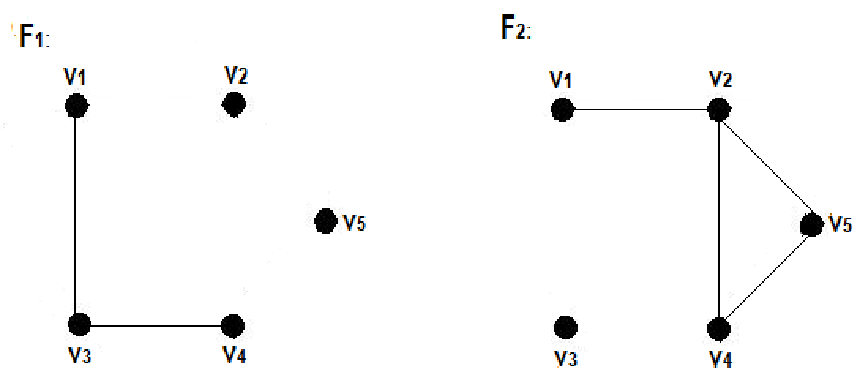

FIGURA 1.19: F_1 Y F_2 FORMAN A $\mathfrak{F}$

Observación 1.8.

- Se pueden determinar todas las posibilidades de (g,f)-factor que forman $\mathfrak{F}$ para que sea ortogonal a H subgrafo de G. Esto se logra considerando los subgrafos generadores de G, que formen una partición de $E(G)$, y que tengan exactamente un lado de H.

Capítulo 2

Factorización Ortogonal en Grafos

§2.1. Desarrollo de los lemas

Para el análisis exhaustivo del teorema principal (teorema 3.1) haremos uso de 4 lemas indispensables para su demostración. Para el estudio de estos lemas, consideramos las condiciones hipotéticas del teorema en cuestión, considerando a G un $[0, K_1 + K_2 + \ldots + K_m - m + 1]$-grafo donde $m \geqslant 1$ es un entero y $K_1, K_2, \ldots, K_m$ enteros positivos, donde $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1$ funciones de valores enteros tal que $g(x) \leqslant f(x)$ aclarando que G es un subgrafo generador en si mismo y un $[0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1]$-factor satisfaciendo $0 \leqslant d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1$.

Nuestro proposito es determinar $[0, k_i]$-factorización $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ de G, $i \in (1, 2, ..., m)$ ortogonales a un subgrafo H de G con m lados $m \geqslant 1$. Debiendo indicar que si existe un $i \in (1, 2, ..., m)$ tal que $k_i = 0$ tales F_i serian [0,0]-factor, esto es, F_i es un subgrafo generador de G y satisface $0 \leqslant d_{Fi}(x) \leqslant 0$, por tanto $d_{Fi}(x) = 0$, los F_i no poseen lados, de esta manera las F_i no pueden ser ortogonal a algún H subgrafo de G. Ahora bien para todo $i \in (1, 2, ..., m)$ los k_i son enteros positivos se tiene que $k_i \geqslant 1$, así $\sum_1^m k_i \geqslant m$, por tanto $f(x) = \sum_1^m k_i - m + 1 \geqslant 1$. En consecuencia en las siguientes discusiones no se consideran vértices aislados y consideramos a G descrito como antes .

$*$) $k_i \geqslant 1$ $i \in (1, 2, ..., m)$.

$**$) $g(x) \neq f(x)$

Para el análisis de los lemas, también tomaremos en cuenta una serie de terminologias y notaciones dadas a continuación.

Sea S un subconjunto de $V(G)$. $G-S$ denota el subgrafo de G que se obtiene eliminando los vértices in S y los lados incidentes sobre los vértices en S de G. Sean S y T dos subconjuntos disjuntos de $V(G)$. Se denota por $E_G(S,T)$ el conjunto de lados en G con extremo en S y otro en T. Denotamos $e_G(S,T)=|E_G(S,T)|$, respectivamente. Dadas g y f dos funciones de valores enteros defindas sobre $V(G)$. Sea $C_{S,T}$ una componente conectada de $G-(S\cup T)$. $C_{S,T}$ es llamada par (o impar) si $g(x)=f(x)$ para todo $x\in V(C_{S,T})$ y $e_G(T,V(C_{S,T}))+\sum_{x\in V(C_{S,T})} f(x)$ es par (o impar). $C_{S,T}$ de G es llamada una componente neutral si esta no es par ni impar (esto ocurre, cuando no todo $g(x)$ coincide con $f(x)$). Se denota por $h_G(S,T)$ el número de componentes impares de $G-(S\cup T)$. Por conveniencia, se escribe $f(S)=\sum_{x\in S} f(x)$, $g(T)=\sum_{x\in T} g(x)$ y $d_G(T)=\sum_{x\in T} d_G(x)$. Denotando

$$\delta_G(S,T){=}\, d_{G-S}(T)-g(T)-h_G(S,T)+f(S).$$

Es fácil ver que, $h_G(S,T)=0$ si $g(x)<f(x)$ para todo $x\in V(G)$.
En efecto.
Como $g(x)<f(x)$ la componente $C_{S,T}$ de G es una componente neutral no es par ni impar, por lo que cero es el número de componentes pares o impares.

Por otro lado,

Consideramos S y T dos subconjuntos disjuntos de $V(G)$ y E_1 y E_2 dos subconjuntos de $E(G)$ $D{=}V(G)\backslash(S\cup T)$, $E(S){=}\{xy\in E(G): x,y\in S\}$, $E(T){=}\{xy\in E(G): x,y\in T\}$ y $E_G(S,T)$ es el conjunto de los lados de G con un extremo en S y el otro en T.

$$E_1^{'}=E_1\cap E(S),\ E_1^{''}=E_1\cap E_G(S,D),$$
$$E_2^{'}=E_2\cap E(T),\ E_2^{''}=E_2\cap E_G(T,D),$$

$$H_1 = G(E_1^{'} \cup E_1^{''}) \text{ y } H_2 = G(E_2^{'} \cup E_2^{''}) \text{ son subgrafos de } G$$
$$\text{cuyos lados son } E_1^{'} \cup E_1^{''} \text{ y } E_2^{'} \cup E_2^{''} \text{ respectivamente}$$
$$\alpha_G(S,T,E_1,E_2){=}2|E_1^{'}| + |E_1^{''}|{=}\textstyle\sum_{x\in S} d_{H_1}(x) \geqslant 0,$$
$$\beta_G(S,T,E_1,E_2){=}2|E_2^{'}| + |E_2^{''}|{=}\textstyle\sum_{x\in T} d_{H_2}(x) \geqslant 0$$
$$\Delta_G(S,T,E_1,E_2){=}\alpha_G(S,T,E_1,E_2) + \beta_G(S,T,E_1,E_2)$$

Observación 2.1. Por comodidad, cuando no surge alguna ambiguedad, denotaremos $\alpha_G(S,T,E_1,E_2)$, $\beta_G(S,T,E_1,E_2)$ y $\Delta_G(S,T,E_1,E_2)$ por α, β y Δ, respectivamente.

L. Lovász en su trabajo "Subgraphs with prescribed valencies" obtuvo el siguiente resultado en 1970 [10].

Lema 2.1. Sea G un grafo, no dirigido simple finito, f y g dos funciones de valores enteros definidas sobre $V(G)$ tal que $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in V(G)$. Entonces G posee un (g,f)-factor, si y sólo si, $\delta_G(S,T){\geqslant}\ 0$ para todo subconjuntos disjunto S y T de $V(G)$.

Demostración. Sean $k_1, k_2, \ldots, k_m$ enteros positivos y $m \geqslant 1$ entero, consideramos a G un $[0, k_1{+}k_2{+}...{+}k_m{-}m{+}1]$-grafo fijadas $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1{+}k_2{+}...{+}k_m{-}m{+}1$. Suponer que G posee un (g,f)-factor H de G, esto es, H es un subgrafo generador de G, se satisface $0 \leqslant d_H(x) \leqslant k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1$.
Solo se considera el caso cuando $g(x) < f(x)$ por $**$). Se tiene entonces que $h_G(S,T) = 0$ por lo que $\delta_G(S,T){=}\ d_{G-S}(T) - g(T) + f(S)$ estudiemos las componentes del $\delta_G(S,T)$.

Mostrar que $d_{G-S}(T) = \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) \geqslant 0$. En efecto.
$d_{G-S}(x) \geqslant 0$ para todo $x \in T$. Seguidamente $g(T) = \sum_{x\in T} g(x)$ sustiyendo el valor de $g(x) = 0$ se tiene $g(T) = 0$ para todo $x \in T$. Finalmente $f(S) = \sum_{x\in S} f(x)$ sustituyendo el valor de f(x) se tiene $f(S) = \sum_{x\in S} k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1 = |S|(k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1) > 0$ por hipótesis $f(x) > 0$, $|S| \geqslant 0$, si $S = \emptyset$ entonces $|S| = 0$ si $S \neq \emptyset$ entonces $|S| > 0$. En cualquiera de los casos se cumple $\delta_G(S,T){\geqslant}\ 0$

Supongamos ahora que $\delta_G(S,T){=}\ d_{G-S}(T) - g(T) - h_G(S,T) + f(S) \geqslant 0$, basta considerar a H subgrafo generador aislado de G, $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1$ se cumple $0 \leqslant d_H(x) \leqslant k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1$, pues $d_H(x) = 0$ para todo $x \in V(H)$.

Así,

G posee un (g,f)-factor H de G.

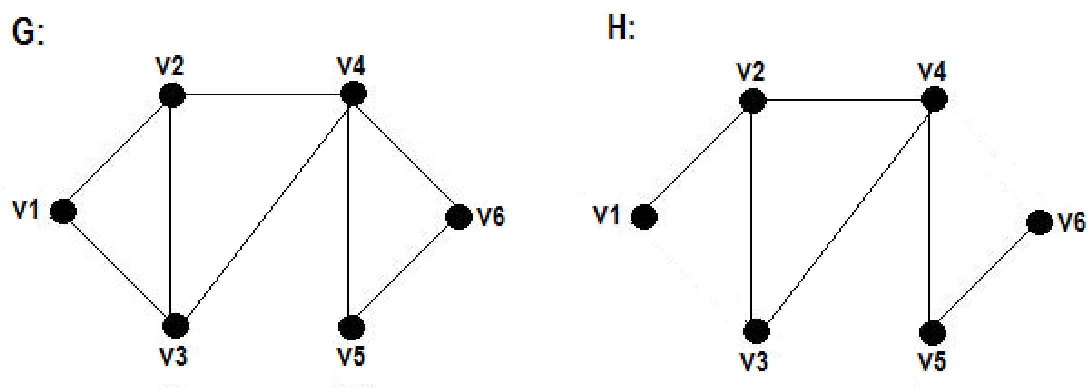

FIGURA 2.1: GRAFO G Y H UN (G,F)-FACTOR DE G

Ejemplo 2.1. Sean G un $[0,4]$-grafo, donde $g(x) = 0$ y $f(x)$, funciones de valores enteros definidas sobre $V(G)$, con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y
$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\}$. Dado H un subgrafo generador de G como se muestra en la figura 2.1. Supongamos que G posee un (g, f)-factor H. Verifiquemos que G es un $[0,4]$-grafo En efecto

G es un subgrafo generador de si mismo y cumple:

$$0 \leqslant d_G(v_1) = 2 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_2) = 3 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_3) = 3 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_4) = 4 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_5) = 2 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_6) = 2 \leqslant 4$$

Ahora veremos que H es un (g, f)-factor de G. H es un subgrafo generador de G, que satisface:

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant d_H(v_1) = 1 \leqslant 4\\
0 \leqslant d_H(v_2) = 3 \leqslant 4\\
0 \leqslant d_H(v_3) = 2 \leqslant 4\\
0 \leqslant d_H(v_4) = 3 \leqslant 4\\
0 \leqslant d_H(v_5) = 2 \leqslant 4\\
0 \leqslant d_H(v_6) = 1 \leqslant 4
\end{aligned}
$$

Por otro lado, tenemos,

$\delta_G(S,T)$= $d_{G-S}(T) + f(S)$, pues $g(x) = 0$, entonces $g(T) = 0$ y como $g(x) < f(x)$, se tiene $h_G(S,T) = 0$ para todo $x \in V(G)$. Consideramos a $S = \{v_1, v_2\}$ y $T = \{v_3, v_4, v_6\}$, una de las $\begin{pmatrix} 62 \\ 2 \end{pmatrix}$ posilidades o combinaciones con 6 vértices.

Luego, $f(S) = \sum_{x \in S} f(x) = f(v_1)+f(v_2) = 4+4 = 8$ y $d_{G-S}(T) = \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) = d_{G-S}(v_3) + d_{G-S}(v_4) + d_{G-S}(v_5) + d_{G-S}(v_6) = 1 + 3 + 2 + 2 = 8$. Por lo que, $\delta_G(S,T) = 8 + 8 = 16 > 0$.

Observación 2.2. El lema 2.1 nos brinda una posibilidad táctica en la busqueda de (g, f)-factores, solo nos indica bajo que condiciones existe más no cual es. Sin embargo, al determinar todas las combinaciones posibles de subconjuntos S y T de $V(G)$ tales que $\delta_G(S,T) \geqslant 0$, determinamos las posibilidades de las que hablamos y como en nuestro caso G es un $[0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1]$, donde; $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1$, por tal $g(T) = 0$, $h_G(S,T) = 0$ y $\delta_G(S,T)$= $d_{G-S}(T) + f(S) \geqslant 0$

G. Li y G. Liu en su trabajo "(g,f)-factorization orthogonal to a subgraph" obtuvierón el siguiente resultado en 1998 [6].

Lema 2.2. Sea G un grafo no dirigido simple finito, f y g dos funciones de valores enteros definidas sobre $V(G)$ tal que $0 \leqslant g(x) < f(x) \leqslant d_G(x)$. Sean E_1 y E_2

subconjuntos disjuntos de $E(G)$. Entonces G tiene un (g,f)-factor F tal que $E_1 \subseteq E(F)$ y $E_2 \cap E(F) = \phi$, si y sólo si, para todo subconjuntos disjunto S y T de $V(G)$,
$\delta_G(S,T) \geqslant \Delta_G(S,T,E_1,E_2)$

Ejemplo 2.2. Consideremos a G dado en la figura 2.2. Sean $g(x) = 0$ y $f(x) = 2$ funciones de valores enteros definidas sobre $V(G)$, que cumplen la hipótesis del lema $0 = g(x) < f(x) = 2 = d_G(x)$ para todo $x \in V(G)$.
G es un [0,2]-grafo. En efecto.
G es un subgrafo generador de si mismo y cumple:

$$0 \leqslant d_G(v_1) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_G(v_2) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_G(v_3) = 2 \leqslant 2$$

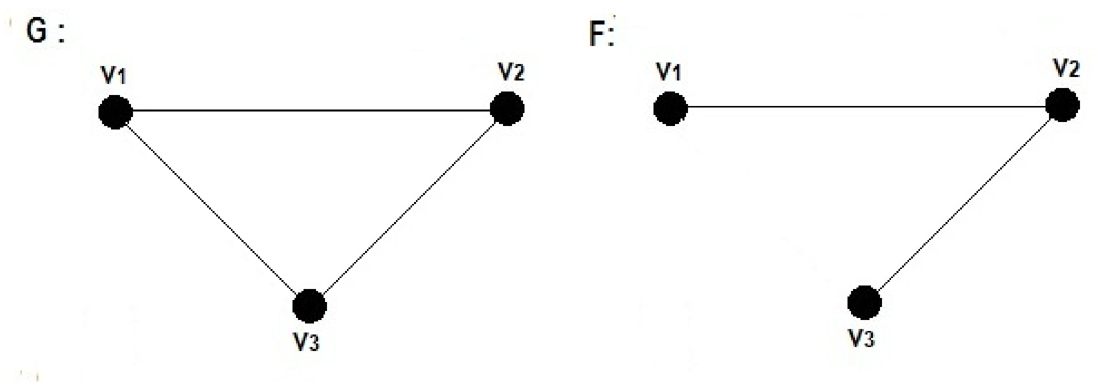

Figura 2.2: Grafo G y F un (g,f)-factor de G

Sean S y T subconjuntos de $V(G)$, el numero de subconjuntos que pueden formarse a partir de 3 vértices es $2^3 = 8$ estos son $\{\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_2,v_3\}\}$ sin considerar $\{\emptyset\}$ y $\{v_1,v_2,v_3\}$ puesto que se quiere formar a S y T disjuntos. Tomando de estas combinaciones $S = \{v_1\}$ y $T = \{v_2\}$ ambos subconjuntos de $V(G)$. También $E_1 = \{v_1v_2\}$ y $E_2 = \{v_1v_3\}$ subconjuntos disjuntos de $E(G)$, se considera F con $E(F) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ dado en la figura 2.2 un subgrafo generador de G que satisface:

$$0 \leqslant d_F(v_1) = 1 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_F(v_2) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_F(v_3) = 1 \leqslant 2$$

Por lo que F es un (g, f)-factor de G tal que $E_1 \subseteq E(F)$ y $E_2 \cap E(F) = \emptyset$. Estudiando a $\delta_G(S,T)$= $d_{G-S}(T) + f(S)$, pues $g(x) = 0$, por lo que $g(T) = 0$ y como $g(x) < f(x)$ entonces $h_G(S,T) = 0$ para todo $x \in V(G)$.

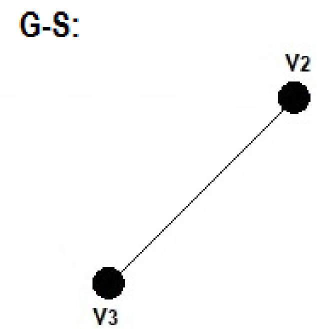

FIGURA 2.3: GRAFO G-S SUBGRAFO DE G

Determinemos a $d_{G-S}(T) = \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) = d_{G-S}(v_2) + d_{G-S}(v_3) = 1 + 1 = 2$ y $f(S) = \sum_{x \in S} f(x) = f(v_1) = 2$. Por lo que $\delta_G(S,T) = 2 + 2 = 4$.

Por otro lado, se tiene
$\Delta_G(S,T,E_1,E_2)$=$\alpha_G(S,T,E_1,E_2)$ + $\beta_G(S,T,E_1,E_2)$.
Estudiemmos α y β:
$E(S) = \emptyset$ pues $S = \{v_1\}$, entonces $E_1^{'} = E_1 \cap E(S) = \emptyset$
$E_G(S,D) = \{v_1v_3\}$ pues $D = E(G) - (S \cup T) = \{v_3\}$ $E_1^{''} = E_1 \cap E_G(S,D) = \emptyset$
$E(T) = \emptyset$ pues $T = \{v_2\}$, entonces $E_2^{'} = E_2 \cap E(T) = \emptyset$
$E_G(T,D) = \{v_2v_3\}$ pues $D = E(G) - (S \cup T) = \{v_3\}$, por lo que, $E_2^{''} = E_2 \cap E_G(T,D) = \emptyset$.

Luego,
$\alpha_G(S,T,E_1,E_2)$=$2|E_1^{'}| + |E_1^{''}| = 0$
$\beta_G(S,T,E_1,E_2)$=$2|E_2^{'}| + |E_2^{''}| = 0$, por tanto, $\Delta_G(S,T,E_1,E_2) = 0$.

Así, se cumple $\delta_G(S,T) > \Delta_G(S,T,E_1,E_2)$.

Los casos $S = \{v_1\}$ y $T = \{v_3\}$, $S = \{v_2\}$ y $T = \{V_3\}$ son análogos al anterior dado.

Analicemos para $S = \{v_1\}$ y $T = \{v_2, v_3\}$, E_1, E_2, F escogidos igual que en la parte anterior, con tal escogencia se verifica que se cumple con la hipótesis del lema. Estudiando a $\delta_G(S,T)= d_{G-S}(T) + f(S)$. Como S no varia, $\delta_G(S,T) = 4$

Por otro lado, se tiene
$\Delta_G(S,T,E_1,E_2)$=$\alpha_G(S,T,E_1,E_2)$ + $\beta_G(S,T,E_1,E_2)$.
Estudiemmos α y β:
$E(S) = \emptyset$ pues $S = \{v_1\}$, entonces $E_1^{'} = E_1 \cap E(S) = \emptyset$
$E_G(S,D) = \emptyset$ pues $D = E(G) - (S \cup T) = \emptyset$ $E_1^{''} = E_1 \cap E_G(S,D) = \emptyset$
$E(T) = \{v_2v_3\}$, entonces $E_2^{'} = E_2 \cap E(T) = \emptyset$
$E_G(T,D) = \emptyset$ pues $D = E(G) - (S \cup T) = \emptyset$, por lo que, $E_2^{''} = E_2 \cap E_G(T,D) = \emptyset$.

Luego,
$\alpha_G(S,T,E_1,E_2)$=$2|E_1^{'}| + |E_1^{''}| = 0$
$\beta_G(S,T,E_1,E_2)$=$2|E_2^{'}| + |E_2^{''}| = 0$, por tanto, $\Delta_G(S,T,E_1,E_2) = 0$.

Así, se cumple $\delta_G(S,T) > \Delta_G(S,T,E_1,E_2)$.

En los casos $S = \{v_2\}$ y $T = \{v_1, v_3\}$, $S = \{v_3\}$ y $T = \{v_1, v_2\}$ el análisis es análogo al anterior.

Observación 2.3. El lema 2.2 además de obsequiarnos otra posibilidad constructiva de la generación de (g, f)-factores F_i con $i = 1, 2, ..., m$ de un grafo G dadas las funciones de valores enteros f y g basadas nuevamente en las combinaciones de dos subconjuntos disjuntos S y T de $V(G)$, nos indica que $E(F_i)$ se construyen con la unión de dos subconjuntos de lados E_1 y E_2 de $E(F_i)$ tal que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Por lo que al manipular adecuadamente los E_i $(i = 1, 2)$ posemos recorrer cualquier subgrafo H de m lados de G al aislar cada lado uv de H en $E_1 = \{uv\}$ y el resto $E_2 = E(H) - E_1$ construyendo los F_i distintos, al variar E_1 de m formas distintas al seleccionar cada

uno de sus m lados siempre que $T \neq \emptyset$ y $S \neq \emptyset$.
Notar que como $\alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$, se tiene que $\Delta \geqslant 0$ para todo $S, T \subset V(G)$ tal que $S \cap T = \emptyset$ con $T \neq \emptyset$ y $S \neq \emptyset$. Cuando se cumpla el lema 2.2 se garantiza la existencia de un (g, f)-factor de G por el lema 2.1.

H. Feng en su trabajo "Orthogonal Factorizations" obtuvo el siguiente resultado en 1998 [3].

Lema 2.3. . Sea G un $[0, k_1 + k_2 + \ldots + k_m - m + 1]$-grafo, donde $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son enteros positivos. Si K es el subgrafo estrella de G con m lados, entonces G posee una $[0, k_i]_1^m$-factorizacion ortogonal a K.

Ejemplo 2.3. Consideramos a $m = 3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$ G el grafo dado en el figura 2.1 con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y
$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\}$ y a K un subgrafo estrella de G con 3-lados $E(K)$=$\{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4\}$ como se muestra en la figura 2.4.

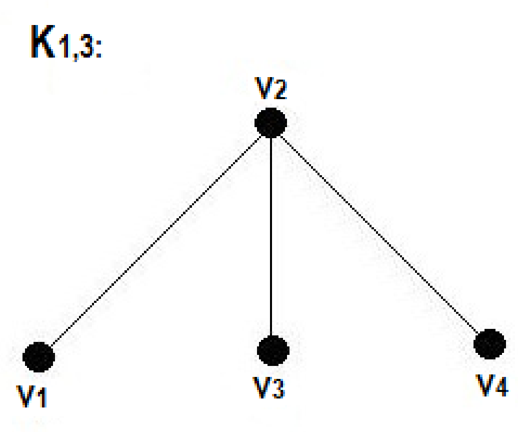

FIGURA 2.4: GRAFO ESTRELLA K

Consideremos a g(x)=0, f(x)=4, G es un [0,4]-grafo.

En efecto
G es un subgrafo generador de si mismo y cumple:

$$0 \leqslant d_G(v_1) = 2 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_2) = 3 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_3) = 3 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_4) = 4 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_5) = 2 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant d_G(v_6) = 2 \leqslant 4$$

Se quiere verificar que G posee una $[0, k_i]_1^3$-factorizacion ortogonal a K, esto es, $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, F_3\}$ es una partición de $E(G)$ en factores de lados disjuntos donde F_1 es un [0,1]-factor, F_2 es un [0,2]-factor y F_3 es un [0,3]-factor. Además cada F_i $i \in (1, 2, 3)$ debe tener exactamente un lado en común con K.

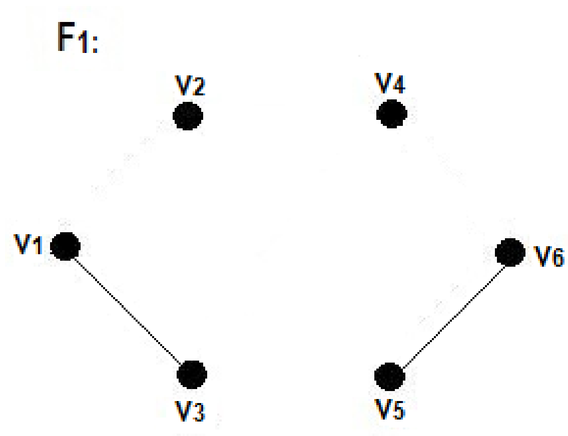

FIGURA 2.5: [0,1]-FACTOR F_1

Estudiemos F_1
F_1 es subgrafo generador de G, puesto que, $V(F_1)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$=$V(G)$ y $E(F_1)$=$\{v_1v_2, v_5v_6\} \subset E(G)$. Tomando $g(x) = 0$ y $f(x) = 1$ se tiene:

$$0 \leqslant d_{F_1}(v_1) = 1 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_2) = 1 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_3) = 0 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_4) = 0 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_5) = 1 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant d_{F_1}(v_6) = 1 \leqslant 1$$

Por lo que F_1 es un [0,1]-factor de G

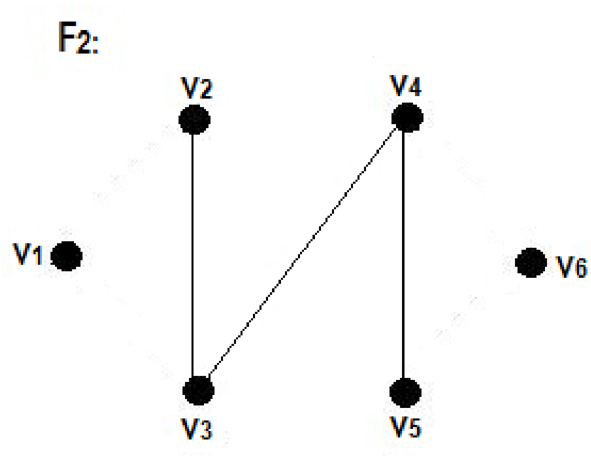

FIGURA 2.6: [0,2]-FACTOR F_2

Estudiemos F_2

F_2 es subgrafo generador de G, puesto que, $V(F_2)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$=$V(G)$ y $E(F_2)$=$\{v_3v_4, v_2v_3, v_4v_5\} \subset E(G)$. Tomando $g(x) = 0$ y $f(x) = 2$ se tiene:

$$0 \leqslant d_{F_2}(v_1) = 0 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{F_2}(v_2) = 1 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{F_2}(v_3) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{F_2}(v_4) = 2 \leqslant 2$$
$$0 \leqslant d_{F_2}(v_5) = 1 \leqslant 2$$

$$0 \leqslant d_{F_2}(v_6) = 0 \leqslant 2$$

Por lo que F_2 es un [0,2]-factor de G

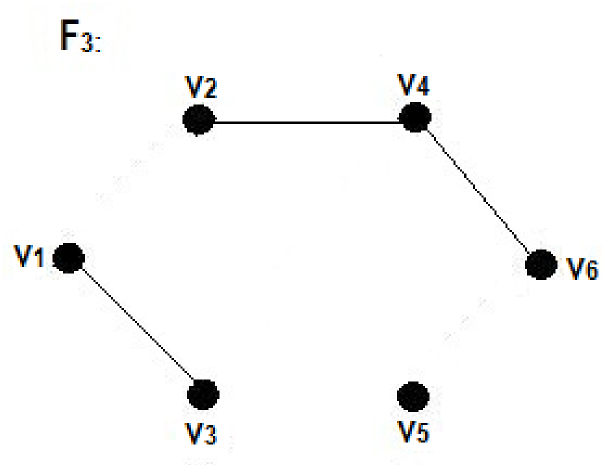

FIGURA 2.7: [0,3]-FACTOR F_3

Estudiemos F_3

F_3 es subgrafo generador de G, puesto que, $V(F_3)$=$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$=$V(G)$ y $E(F_3)$=$\{v_1v_3, v_2v_4, v_4v_6\} \subset E(G)$. Tomando $g(x) = 0$ y $f(x) = 3$ se tiene:

$$0 \leqslant d_{F_3}(v_1) = 1 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_3}(v_2) = 1 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_3}(v_3) = 1 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_3}(v_4) = 2 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_3}(v_5) = 0 \leqslant 3$$
$$0 \leqslant d_{F_3}(v_6) = 1 \leqslant 3$$

Por lo que F_3 es un [0,3]-factor de G

Hemos verificado que F_1, F_2, F_3 son $[0, k_i]_1^3$-factores de G respectivamente. Es obvio, que $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, F_3\}$ es una partición de $E(G)$, además $\{v_1v_2\}\subset F_1$, $\{v_2v_3\}\subset F_2$, $\{v_2v_4\}\subset F_3$. Por lo que $[0, k_i]_1^3$-factorizacion $\mathfrak{F}= \{F_1, F_2, F_3\}$ es ortogonal a K.

Observación 2.4. Caso particular inicial de la implementación del lema 2.3, siendo nuestro teorema principal la generalización de tal implementación donde H más que un subgrafo estrella es un subgrafo cualquiera de G.

Lema 2.4. Sea $m \geqslant 2$ un entero. Entonces para cada vértice x de $V(G)$, se tiene:

$$0 \leqslant p(x) < q(x) \leqslant k_m$$

donde $p(x){=}max\{0, d_G(x){-}(k_1{+}k_2{+}....{+}k_{m-1}{-}(m{-}1){+}1)\}$ y $q(x){=}min\{k_m, d_G(x)\}$

Demostración.

Probemos por inducción matemática.

Para m=2.

Consideramos a G un $[0, k_1 + k_2 - 1]$-grafo, donde $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1 + k_2 - 1$ funciones de valores enteros tal que $g(x) \leqslant f(x)$ y G en si mismo es un $[0, k_1{+}k_2{-}2]$-factor satisfaciendo I) $0 \leqslant d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 - 1$.

Tenemos a $p(x){=}max\{0, d_G(x) - (k_1)\}$ y $q(x){=}min\{k_2, d_G(x)\}$.

p(x) puede tomar dos valores cero o $d_G(x) - k_1$.

Estudiemos estas alternativas:

a) Si $p(x) = 0$ entonces $0 \geqslant d_G(x) - (k_1)$ por la definición de p(x) como máximo.

b) Si $p(x) = d_G(x) - (k_1)$ entonces $d_G(x) - (k_1) \geqslant 0$ por la definición de p(x) como máximo.

De a) y b) se tiene $0 \leqslant p(x)$ IV)

También q(x) puede tomar dos valores k_2 o $d_G(x)$.
Estudiemos estas alternativas.

c) Si $q(x) = k_2$ entonces $k_2 \leqslant d_G(x)$ por la definición de q(x) como mínimo.

d) Si $q(x) = d_G(x)$ entonces $d_G(x) \leqslant k_2$ por la definición de q(x) como mínimo.
De c) y d) se tiene $q(x) \leqslant k_2$

Falta ver que $p(x) < q(x)$.
Tanto p(x) como q(x) tiene dos alternativas (0 o $d_G(x) - k_1$) y (k_2 o $d_G(x)$) respectivamente. Serían 4 las posibilidades a estudiar para que $p(x) < q(x)$.

Estas son estudiadas acontinuación:

1) $0 < k_2$, pues k_2 es un entero positivo $k_2 \geqslant 1$

2) $0 < d_G(x)$, pues $d_G(x) \geqslant 0$ pero no se consideran vértices aislado por ello la desigualdad es estricta

3) $d_G(x) - k_1 < k_2$.
En efecto.

Tenemos por I):
$d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 - 1$
$\Longrightarrow d_G(x) - k_1 \leqslant k_2 - 1 < k_2$
$\Longrightarrow d_G(x) - k_1 < k_2$

4) $d_G(x) - k_1 < d_G(x)$
En efecto.

Como p(x)=$d_G(x) - k_1$ por IV) se tiene: $d_G(x) - k_1 \geqslant 0$ por lo que $d_G(x) \geqslant k_1$
Si $d_G(x) = k_1$ o $d_G(x) > (k_1 + k_2 - 1)$ en ambas se cumple $d_G(x) - k_1 < d_G(x)$.

Para m=3.
Consideramos a G un $[0, k_1 + k_2 + k_3 - 2]$-grafo, donde $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1 + k_2 + k_3 - 2$ funciones de valores enteros tal que $g(x) \leqslant f(x)$ y G en si mismo es un $[0, k_1 + k_2 + k_3 - 2]$-factor satisfaciendo II) $0 \leqslant d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + k_3 - 2$.
Tenemos a $p(x)$=$max\{0, d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1)\}$ y $q(x)$=$min\{k_3, d_G(x)\}$.

p(x) puede tomar dos valores cero o $d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1)$.
Estudiemos estas alternativas:

a) Si $p(x) = 0$ entonces $0 \geqslant d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1)$ por la definición de p(x) como máximo.

b) Si $p(x) = d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1)$ entonces $d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1) \geqslant 0$ por la definición de p(x) como máximo.
De a) y b) se tiene $0 \leqslant p(x)$ III)

También q(x) puede tomar dos valores k_3 o $d_G(x)$.
Estudiemos estas alternativas:

c) Si $q(x) = k_3$ entonces $k_3 \leqslant d_G(x)$ por la definición de q(x) como mínimo.

d) Si $q(x) = d_G(x)$ entonces $d_G(x) \leqslant k_3$ por la definición de q(x) como mínimo.
De c) y d) se tiene $q(x) \leqslant k_3$

Falta ver que $p(x) < q(x)$.
Tanto p(x) como q(x) tiene dos alternativas (0 o $d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1)$) y (k_3 o $d_G(x)$) respectivamente. Serían 4 las posibilidades a estudiar para que $p(x) < q(x)$.

Estas son estudiadas acontinuación:

1) $0 < k_3$, pues k_3 es un entero positivo $k_3 \geqslant 1$.

2) $0 < d_G(x)$, pues $d_G(x) \geqslant 0$ pero no se consideran vértices aislado por ello la

desigualdad es estricta

3) $d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1) < k_3$.
En efecto.

Tenemos por II):
$d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + k_3 - 2$
$\Longrightarrow d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + k_3 - 1 - 1$
$\Longrightarrow d_G(x) \leqslant (k_1 + k_2 - 1) + k_3 - 1$
$\Longrightarrow d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1) \leqslant k_3 - 1 < k_3$
$\Longrightarrow d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1) < k_3$

4) $d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1) < d_G(x)$
En efecto.

Como p(x)=$d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1)$ y por III) se tiene: $d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1) \geqslant 0$ por lo que $d_G(x) \geqslant (k_1 + k_2 - 1)$
Si $d_G(x) = (k_1 + k_2 - 1)$ o $d_G(x) > (k_1 + k_2 - 1)$ en ambas se cumple $d_G(x) - (k_1 + k_2 - 1) < d_G(x)$.

Para m=n.
Consideramos a G un $[0, k_1 + k_2 + ... + k_n - n + 1]$-grafo, donde $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1 + k_2 + ... + k_n - n + 1$ funciones de valores enteros tal que $g(x) \leqslant f(x)$ y G en si mismo es un $[0, k_1 + k_2 + ... + k_n - n + 1]$-factor satisfaciendo II) $0 \leqslant d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + ... + k_n - n + 1$.
Teniendo a $p(x)$=$max\{0, d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - (n-1) + 1)\}$ y $q(x)$=$min\{k_n, d_G(x)\}$.
p(x) puede tomar dos valores cero o $d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2)$.

Estudiemos estas alternativas:

a) Si $p(x) = 0$ entonces $0 \geqslant d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2)$ por la definición de p(x) como máximo.

b) Si $p(x) = d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2)$ entonces $d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2) \geqslant 0$ por la definición de p(x) como máximo.
De a) y b) se tiene $0 \leqslant p(x)$ III)

También q(x) puede tomar dos valores k_n o $d_G(x)$.
Estudiemos estas alternativas:

c) Si $q(x) = k_n$ entonces $k_n \leqslant d_G(x)$ por la definición de q(x) como mínimo.

d) Si $q(x) = d_G(x)$ entonces $d_G(x) \leqslant k_n$ por la definición de q(x) como mínimo.
De c) y d) se tiene $q(x) \leqslant k_n$

Falta ver que $p(x) < q(x)$.
Tanto p(x) como q(x) tiene dos alternativas (0 o $d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2)$ y (k_n o $d_G(x)$) respectivamente. Serían 4 las posibilidades a estudiar para que $p(x) < q(x)$.

Estas son estudiadas acontinuación:

1) $0 < k_n$, pues k_n es un entero positivo $k_n \geqslant 1$

2) $0 < d_G(x)$, pues $d_G(x) \geqslant 0$ pero no se consideran vértices aislado por ello la desigualdad es estricta

3) $d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2) < k_n$.
En efecto.

Tenemos por II):
$d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + ... + k_n - n + 1$
$\Longrightarrow d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} + k_n - n + 1$
$\Longrightarrow d_G(x) \leqslant (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2) + k_n - 1$
$\Longrightarrow d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2) \leqslant k_n - 1 < k_n$
$\Longrightarrow d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} - n + 2) < k_n$

4) $d_G(x)-(k_1+k_2+...+k_{n-1}-n+2)<d_G(x)$
En efecto.

Como p(x)=$d_G(x)-(k_1+k_2+...+k_{n-1}-n+2)$ y por III) se tiene: $d_G(x)-(k_1+k_2+...+k_{n-1}-n+2)\geqslant 0$ por lo que $d_G(x)\geqslant(k_1+k_2+...+k_{n-1}-n+2)$ Si $d_G(x)=(k_1+k_2+...+k_{n-1}-n+2)$ o $d_G(x)>d_(k_1+k_2+...+k_{n-1}-n+2)$ en ambas se cumple $d_G(x)-(k_1+k_2+...+k_{n-1}-n+2)<d_G(x)$

Capítulo 3

Teorema principal

§3.1. Demostración del teorema

Teorema 3.1. Sea G un $[0, k_1 + k_2 + \ldots + k_n - n + 1]$-grafo no dirigido simple finito. Donde $n \geqslant 1$ es un entero y $k_1, k_2, \ldots, k_n$ enteros positivos. Sea H un subgrafo arbitrario de G con n-lados o de dimensión n. Entonces G posee una $[0, k_i]_1^n$-factorización ortogonal H.

Demostración. Se probara el teorema usando inducción sobre n.

Para el caso $n = 1$, la prueba es trivial. En efecto.
Dado que G es un $[0, k_1]$-grafo, donde $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1$ son funciones de valores enteros satisfaciendo I: $0 \leqslant d_G(x) \leqslant k_1$ para todo $x \in V(G)$.

Al considerar un subgrafo arbitrario H de G de un único lado. Se quiere probar la existencia de un $[0, k_1]$-factorización ortogonal a H, es decir, determinar a $\mathfrak{F}= \{F_1\}$ una factorización de G, pues $n = 1$ y esta debe ser una partición de $E(G)$ en un factor F_1 que es un $[0, k_1]$-factor. Además se espera que F_1 tenga exactamente un lado en común con H.

Bien basta considerar a $F_1 = G$, así tendriamos la partición de lados de G, F_1 subgrafo generador de G satisfaciendo $0 \leqslant d_{F_1}(x) \leqslant k_1$ para todo $x \in V(G)$ (por hipótesis), y por tal F_1 es un $[0, k_1]$-factor. Ahora bien, el lado que posee H esta en

G, y obviamente en F_1, puesto que H es un subgrafo de G. Por tanto, G posee una $[0, k_1]$-factorización ortogonal H.

Ahora consideramos que tal situación es cierta para $2 \leqslant n < m$ (hipótesis inductiva). Es decir, para todo G un $[0, k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1} - (m-1) + 1]$-grafo no dirigio simple. G posee una $[0, k_i]_1^{m-1}$-factorización ortogonal a H, donde H es un subgrafo arbitrario de G con m-1 lados.

Por último probaremos que se cumple para $n = m$.
Consideramos a G un $[0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1]$-grafo no dirigio simple, donde $g(x) = 0$ y $f(x) = k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1$ funciones de valores enteros satisfaciendo $0 \leqslant d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1$. Sea H un subgrafo arbitrario de G con m lados.

Denotaremos

$\mathrm{A}_1 = \{xy \in E(H) : p(x), p(y) \geqslant 1\}$;
$A_2 = \{xy \in E(H) : p(x) + p(y) \geqslant 1\}$;

$$A = \begin{cases} \mathrm{A}_1, \text{ si } A_1 \neq \emptyset, \\ \mathrm{A}_2, \text{ si } A_1 = \emptyset \text{ y } A_2 \neq \emptyset, \\ \mathrm{E(H)}, \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Escogamos al lado uv en A tal que $d_H(u) + d_H(v)$ sea el mayor. E_1, E_2 subconjuntos de $E(G)$. Aclarando que E_1, E_2 es una partición de los $E(H)$ y cada vez que escogemos un lado distinto de $A = E(H)$ construimos posibles F_i $(i = 1, 2, ..., m)$ (g, f)-factores con un lado en común con H, $E_1 = \{uv\}$ y $E_2 = E(H) \backslash E_1 = E(H) - E_1$ entonces $|E_1| = 1$ y $|E_2| = m - 1$, puesto que $|H| = m$. Consideremos dos subconjuntos disjuntos S y T de $V(G)$, $E_1^{'}, E_1^{''}, E_2^{'}, E_2^{''}, H_1, H_2, \alpha, \beta$ y Δ definidos como antes.

Es fácil comprobar que:

$$\alpha \leqslant min\{2,|S|\} \text{ y } \beta = 2|E_2^{'}| + |E_2^{''}|$$

En efecto.

$$E_1^{'} = E_1 \cap E(S) = \begin{cases} \emptyset, \text{ si } \; uv \notin E(S), \\ \text{uv}, \; si \text{ uv} \in E(S) \text{ y } uv \notin E(S,D) \text{ pues } D = V(G) - (S \cup T) \end{cases}$$

Por tanto $0 \leqslant |E_1^{'}| \leqslant 1$

$$E_1^{''} = E_1 \cap E(S,D) = \begin{cases} \emptyset, \text{ si } \; uv \notin E(S,D), \\ \text{uv}, \; si \text{ uv} \in E(S,D) \text{ y } uv \notin E(S) \text{ pues } D = V(G) - (S \cup T) \end{cases}$$

Por tanto $0 \leqslant |E_1^{''}| \leqslant 1$

Se tiene entonces,

$$\alpha = 2|E_1^{'}| + |E_1^{''}| = \begin{cases} 0, & si \quad \text{E}_1^{'} = \emptyset \wedge E_1^{''} = \emptyset, \\ 1, & si \quad \text{uv} \in E(S,D) \wedge E_1^{'} = \emptyset \\ 2, & si \quad \text{E}_1^{''} = \emptyset \wedge uv \in E(S) \end{cases}$$

Además, $S \cap T = \emptyset$, por lo que $|S| \geqslant 0$. Por tanto $0 \leqslant min\{2,|S|\} \leqslant 2$. En consecuencia, $\alpha \leqslant min\{2,|S|\}$.

Por otro lado,

$$\begin{cases} \text{xy} \in E(T) \Rightarrow x,y \in V(T) \Rightarrow xy \notin E(T,D) \\ \text{xy} \in E(T,D) \Rightarrow (x \in V(T) \wedge y \in V(D)) \veebar (x \in V(D) \wedge y \in V(T)) \Rightarrow xy \notin E(T) \end{cases}$$

Por tanto $\beta = 2|E_2^{'}|+|E_2^{''}|$ es a lo más 2(m-1) en el caso $E_2 \cap E(T) = E_2$ y $E_2^{''} = \emptyset$

Escogiendo subconjuntos disjuntos S y T en $V(G)$ disjuntos tales que:
(1)$\delta_G(S,T) - \Delta_G(S,T,E_1,E_2)$ es el menor posible;

(2)$|T|$ como el menor para que (1) lo sea;
(3)$|S|$ como el menor tal que (1) y (2) lo sean.

Observación 3.1. La razón de tal escogencia es que nos asegura que tan pequeño pueden ser S y T a fín de que se logre nuestro objetivo, garantizando que se cumple para cualquier otra escogencia de S y T donde $S \cap T = \emptyset$.

Aclaración 3.1. ¿Que sucede si $T \neq \emptyset$?. Si $T \neq \emptyset$, se tiene $p(x) \geqslant 1$ para cada $x \in T$, y consecuentemente $p(x)$=$d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1)\}$ para cada $x \in T$.

Demostración. Caso contrario $\exists x \in T$ tal que $p(x) < 1$ por tanto, $p(x) = 0$ dada la definición de $p(x)$, en consecuencia: Si $T^* = \{x \in T : p(x) = 0\} \neq \emptyset$ y $T_0 = T \backslash T^*$, $\{T_0, T^*\}$ es una partición de T. Notar que:
(a)$S \cap T = \emptyset$ pues S y T son subconjuntos disjuntos.
(b)$h_G(S,T) = 0$ pues $g(x) < f(x)$
(c)$g(T) = \sum_{x \in T} g(x) = 0$ pues el valor de $g(x) = 0$ para todo $x \in V(G) \supset V(T)$
(d)$f(S) = \sum_{x \in S} f(x) = |S|(k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1)$
(e)$d_{G-S}(T) = \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) = d_G(T) - e_G(S,T)$. Pues al sumar los grados de los vértices de T en $G-S$, eliminando los $V(S)$ y los $E(S)$ incidentes a G con extremos entre S y G, más aún, entre S y T pues $T \subset V(G)$ que son los considerados en la sumatoria y $S \cap T = \emptyset$
(f)$d_{G-S}(T) = d_{G-S}(T^*) + d_{G-S}(T_0)$
(g)$g(T) = \sum_{x \in T} g(x) = \sum_{x \in T^*} g(x) + \sum_{x \in T_0} g(x)$
(h)$p(T) = p(T^*) + p(T_0)$
(i)$h_G(S,T) =$h$_G(S,T^*) \cup h_G(S,T_0)$
(j)$e_G(S,T) = e_G(S,T^*) + e_G(S,T_0)$
(l)$p(T) = \sum_{x \in T} p(x) = |T|p(x)$
(m)$q(S) = \sum_{x \in S} q(x) = |S|q(x)$

Sean p y q dos funciones de valores enteros definidas sobre V(G), por la notación del $\delta_G(S,T)$ dada, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= d_{G-S}(T) - p(T) - h_G(S,T) + q(S) \\
&= d_G(T) - e_G(S,T) - p(T) + q(S) \quad (por\ (b)\ y\ (e)) \\
&= d_G(T^*) - e_G(S,T^*) + d_G(T_0) - e_G(S,T_0) - p(T^*) - p(T_0) + q(S) \quad (por\ (f),(j),(h)) \\
&= (d_G(T_0) - e_G(S,T_0) - p(T_0) + q(S)) - d_G(T^*) - e_G(S,T^*) - p(T^*) \\
&= \delta_G(S,T_0) + d_{G-S}(T^*) - p(T^*) \quad (\text{por la notación del } \delta_G(S,T)) \\
&= \delta_G(S,T_0) + d_{G-S}(T^*) \quad (\text{por la definición de } T^*)
\end{aligned}$$

Por tanto, I: $\delta_G(S,T) = \delta_G(S,T_0) + d_{G-S}(T^*)$.

Por otro lado,

II: $\Delta_G(S,T,E_1,E_2) \leqslant \Delta_G(S,T_0,E_1,E_2) + \beta_G(S,T^*,E_1,E_2)$

En efecto.

$$\begin{aligned}
\Delta_G(S,T,E_1,E_2) &= \alpha_G(S,T,E_1,E_2) + \beta_G(S,T,E_1,E_2) \\
&\leqslant \alpha_G(S,T_0,E_1,E_2) + \beta_G(S,T,E_1,E_2)
\end{aligned}$$

Puesto que $\alpha_G(S,T,E_1,E_2) \leqslant \alpha_G(S,T_0,E_1,E_2)$, ya que $T_0 \subset T$ en consecuencia $E(S,D)$ varia dependiendo de T y T_0

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta_G(S,T,E_1,E_2) &\leqslant \alpha_G(S,T_0,E_1,E_2) + \beta_G(S,T_0,E_1,E_2) + \beta_G(S,T^*,E_1,E_2) \\
&= \Delta_G(S,T_0,E_1,E_2) + \beta_G(S,T^*,E_1,E_2)
\end{aligned}$$

De I y II se tiene, entonces,

$$
\begin{aligned}
\delta_G(S,T)-\Delta_G(S,T,E_1,E_2) &= \delta_G(S,T_0)+d_{G-S}(T^*)-\Delta_G(S,T,E_1,E_2)\\
&\geqslant \delta_G(S,T_0)+d_{G-S}(T^*)-(\Delta_G(S,T_0,E_1,E_2)+\beta_G(S,T^*,E_1,E_2))\\
&= \delta_G(S,T_0)+d_{G-S}(T^*)-\Delta_G(S,T_0,E_1,E_2)-\beta_G(S,T^*,E_1,E_2))\\
&= (\delta_G(S,T_0)-\Delta_G(S,T_0,E_1,E_2))+(d_{G-S}(T^*)-\beta_G(S,T^*,E_1,E_2)))\\
&\geqslant (\delta_G(S,T_0)-\Delta_G(S,T_0,E_1,E_2))
\end{aligned}
$$

Notar que III: $d_G(T^*)\geqslant\beta_G(S,T^*,E_1,E_2)$, donde $d_{G-S}(T^*)=\sum_{x\in T^*}d_{G-S}(x)$ y $\beta_G(S,T^*,E_1,E_2)=\sum_{x\in T^*}d_{H_2}(x)$; con $H_2=G(E_2^{'}\cup E_2^{''})=(x\in V(H_2)/x\in T^*\vee x\in D,E_2^{'}\cup E_2^{''})$.

Además, $G-S=(V(G)-S,E(G)-[E(S)\cup E(G-S,S)])$. Ahora bien, como $S\cap T=\emptyset$ entonces: $S\cap T^*=\emptyset$ pues $T^*\subset T$, $T\subset V(G)-S$ por lo que, $T^*\subset V(G)-S$ y $V(G)-(S\cap T^*)\subset V((G)-S$. Por tanto, $V(H_2)\subset V(G)-S$.
Por otro lado:

Consideramos $E_2^{'}\cup E_2^{''}\neq\emptyset$, $E_2^{'}\cup E_2^{''}=E_2\cap[E(T^*)\cup E(T^*,D)]$, donde $D=V(G)-(S\cup T^*)$; tomamos $xy\in[E(T^*)\cup E(T^*,D)]$ si y solo si $xy\in E(T^*)$ ó $xy\in E(T^*,D)$. Pero $E(T^*)\subset E(G)-[E(S)\cup E(G-S,S)]$ pues $T^*\cap S=\emptyset$ y $E(T^*)\subset E(G)$ y $E(T^*)\subset E(G)-[E(S)\cup E(G-S,S)]$, dado que: los extremos de $E(S)\cup E(G-S,S)$ no son extremos de T^* y $E(T^*)\subset E(G)$. Luego $H_2\subset G-S$.

Una contradicción a la escogencia de T. Por tanto $T^*=\emptyset$

Aclaración 3.2. ¿Que sucede si $S\neq\emptyset$?. Si $S\neq\emptyset$, se tiene $q(x)\leqslant d_G(x)-1<d_G(x)$ para cada $x\in S$, y consecuentemente $q(x)=k_m$ para cada $x\in S$.

Demostración. Caso contrario $\exists x\in S$ tal que $q(x)\geqslant d_G(x)$. Si $S^*=\{x\in S:q(x)\geqslant d_G(x)\}\neq\emptyset$. Sea $S_0=S\backslash S^*$, $\{S_0,S^*\}$ es una partición de S.
Sean p y q dos funciones de valores enteros definidas sobre V(G), por notación del $\delta_G(S,T)$ dada, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= d_{G-S}(T) - p(T) - h_G(S,T) + q(S) \\
&= d_G(T) - e_G(S,T) - p(T) + q(S) \qquad (por\ (b)\ y\ (e)) \\
&= d_G(T) - e_G(S_0,T) - e_G(S^*,T) - p(T) + q(S_0) + q(S^*) \qquad (por\ (f),(j),(h)) \\
&= d_G(T) - e_G(S_0,T) - p(T) + q(S_0) - e_G(S^*,T) + q(S^*) \\
&= \delta_G(S_0,T) + q(S^*) - e_G(S^*,T) \\
&\geqslant \delta_G(S_0,T) + d_G(S^*) - e_G(S^*,T) \qquad \text{(por la definición de } S^*) \\
&= \delta_G(S_0,T) + d_{G-T}(S^*) \qquad (por\ (e))
\end{aligned}$$

Por tanto, IV: $\delta_G(S,T) = \delta_G(S_0,T) + d_{G-T}(S^*)$.

Por otro lado,

V: $\Delta_G(S,T,E_1,E_2) \leqslant \Delta_G(S_0,T,E_1,E_2) + \alpha_G(S^*,T,E_1,E_2)$

En efecto.

$$\begin{aligned}
\Delta_G(S,T,E_1,E_2) &= \alpha_G(S,T,E_1,E_2) + \beta_G(S,T,E_1,E_2) \\
&\leqslant \alpha_G(S,T,E_1,E_2) + \beta_G(S_0,T,E_1,E_2)
\end{aligned}$$

Puesto que $\beta_G(S,T,E_1,E_2) \leqslant \beta_G(S_0,T,E_1,E_2)$ ya que $S_0 \subset S$ en consecuencia $E(T,D)$ varia dependiendo de S y S_0.

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta_G(S,T,E_1,E_2) &\leqslant \alpha_G(S_0,T,E_1,E_2) + \alpha_G(S^*,T,E_1,E_2) + \beta_G(S_0,T,E_1,E_2) \\
&= \Delta_G(S_0,T,E_1,E_2) + \alpha_G(S^*,T,E_1,E_2)
\end{aligned}$$

De IV y V se tiene, entonces,

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) - \Delta_G(S,T,E_1,E_2) &= \delta_G(S_0,T) + d_{G-T}(S^*) - \Delta_G(S,T,E_1,E_2) \\
&\geqslant \delta_G(S_0,T) + d_{G-T}(S^*) - (\Delta_G(S_0,T,E_1,E_2) + \alpha_G(S^*,T,E_1,E_2)) \\
&= \delta_G(S_0,T) + d_{G-T}(S^*) - \Delta_G(S_0,T,E_1,E_2) - \alpha_G(S^*,T,E_1,E_2)) \\
&= (\delta_G(S_0,T) - \Delta_G(S_0,T,E_1,E_2)) + (d_{G-S}(S^*) - \alpha_G(T^*,T,E_1,E_2))) \\
&\geqslant (\delta_G(S_0,T) - \Delta_G(S_0,T,E_1,E_2))
\end{aligned}$$

Notar que $d_G(S^*) \geqslant \alpha_G(S^*,T,E_1,E_2)$.

En efecto.

Como $G-T$ es un subgrafo de G se cumple: $0 \leqslant d_{G-T}(x) \leqslant d_G(x) \leqslant k_1+k_2+...+k_m-m+1$, pues, G es un $[0,k_1+k_2+...+k_m-m+1]$-grafo. Así $d_{G-T}(x)$ a lo menos es igual a 1, ya que $k_i \geqslant 1$ y $\sum k_i \geqslant m$ $i \in (1,2,...,m)$

Por otro lado,

$\alpha_G(S,T,E_1,E_2)$=$\sum_{x\in S} d_{H_1}(x)$, donde $E_1^{'} \cup E_1^{''} = uv$ o $E_1^{'} \cup E_1^{''} = \emptyset$, por lo que $\sum_{x\in S} d_{H_1}(x) = 1$ no consideramos vértices aislados, tenemos que, $d_{G-T}(x) \geqslant d_{H_1}(x)$

Una contradicción a la escogencia de T. Por tanto $S^* = \emptyset$

Aclaración 3.3. Si $T \neq \emptyset$ y si $S \neq \emptyset$, se tiene $\delta_G(S,T)$= $t|T| + K_m|S| - e_G(S,T)$, donde $t = k_1+k_2+....+k_{m-1}-(m-1)+1$

Como $T \neq \emptyset$ y $S \neq \emptyset$ por las aclaraciones anteriores tenemos,

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= d_G(T) - p(T) - e_G(S,T) + q(S) \\
&= d_G(T) - (d_G(T) - (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1)|T|) + K_m|S| - e_G(S,T) \\
&= d_G(T) - d_G(T) + (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1)|T|) + K_m|S| - e_G(S,T) \\
&= (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1)|T| + K_m|S| - e_G(S,T) \\
&= t|T| + k_m|S| - e_G(S,T) \qquad (\textit{sust. el valor de } t)
\end{aligned}$$

Con el fin de demostrar nuestro teorema principal, probamos que G tiene un $[0, ki]$-factor F_i para algún $1 \leqslant i \leqslant m$, donde $g(x) = 0$ y $f(x) = k_i$ funciones de valores enteros para todo $x \in V(G)$, satisfaciendo $0 \leqslant d_{F_i}(x) \leqslant k_i$, tal que $E_1 \subseteq E(F_i)$ y $E_2 \cap E(F_i) = \phi$. Necesitamos solamente considerar el caso $k_i \geqslant 2$ con $1 \leqslant i \leqslant m$. De lo contrario existe un indice i tal que $k_i = 1$. Y sin perdida de generalidad, al suponer que este indice $i = m$ y $k_m = 1$. Entonces un $[0, k_m]$-factor es un [0,1]-factor y viceversa. Obviamente el subgrafo generador F con exactamente un lado uv es un [0,1]-factor, que cumple $0 \leqslant d_F(x) \leqslant 1$ pues los grados de los vértices de F toman el valor de cero o uno, por tanto F es un $[0, k_m]$-factor. Denotamos este factor F por F_m. Aclarando $E_1 = \{uv\} \subseteq E(F_m)$ y $E_2 \cap E(F_m) = \phi$ (puesto que $uv \in E(F_m)$ más a aún es el único lado de F_m pero uv no esta en E_2 ya que E_1 y E_2 son disjuntos). Por otro lado notando que $k_m = 1$, tenemos:

$$0 \leqslant d_G(x) \leqslant k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1 \qquad (\text{G } \textit{es un } [0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1] - grafo)$$

$$\begin{aligned}
0 \leqslant d_{G-F_m}(x) \leqslant d_G(x) &\leqslant k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1 \qquad (F_m \textit{ es un subgrafo generador de } G) \\
&= k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} + 1 - m + 1 \qquad (\textit{pues } k_m = 1) \\
&= k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1
\end{aligned}$$

En consecuencia, $G-F_m$ es un $[0, k_1+k_2+...+k_{m-1}-(m-1)+1]$-grafo. Por hipótesis inductiva, $G - F_m$ tiene una $[0, k_i]_1^{m-1}$-factorización $\mathfrak{F}' = \{F_1, F_2, ..., F_{m-1}\}$ ortogonal a $H \backslash \{uv\}$. Subsecuentemente, G tiene una $[0, k_i]_1^m$-factorización $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' \cup \{F_m\}$ ortogonal a H. Lo que nos indica que en la siguientes discusiones, siempre suponemos $k_i \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Se probara que G tiene un (p, q)-factor F tal que $E_1 \subseteq E(F)$ y $E_2 \cap E(F) = \phi$.

Así pues, por lema 2.2 y 2.4, basta probar $\delta_G(S,T) \geqslant \Delta_G(S,T,E_1,E_2) = \alpha + \beta$, recordar por el lema 2.1 $\delta_G(S,T) \geqslant 0$. De lo contrario $\delta_G(S,T) < \alpha + \beta$ siendo su cota superior $\alpha + \beta - 1$ asumamos que $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$ y probemos que generan contradicciones en cada caso posible. Tenemos la siguiente aclaración.

Aclaración 3.4. $S \neq \emptyset$ y $T \neq \emptyset$.

En efecto.

Posibilidad 1: Si $S = \emptyset$ o $T = \emptyset$, entonces $e_G(S,T) = 0$ ($E_G(S,T) = \emptyset$) y subsecuentemente; $\delta_G(S,T) = d_G(T) - p(T) + q(S)$

Posibilidad 2: Si $S = \emptyset$ y $T \neq \emptyset$, entonces $\alpha = 0$ ($E_1^{'} = \emptyset$ y $E_1^{''} = \emptyset$)

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= d_G(T) - p(T) \qquad (pues\ q(S) = \sum\nolimits_{x \in S} q(x) = 0) \\
&= d_G(T) - |T|p(x) \\
&= d_G(T) - (d_G(T) - (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1)|T|) \text{ (por aclaración 3.1)} \\
&= d_G(T) - d_G(T) + (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1)|T| \\
&= (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - m + 2)|T| \\
&\geqslant m|T| \qquad (pues\ k_i \geqslant 2\ y\ \sum\nolimits_{i=1}^{m-1} k_i \geqslant (2m-2))
\end{aligned}$$

Si $|T| \geqslant 2$, entonces $\delta_G(S,T) \geqslant 2m \geqslant \beta = \beta + \alpha$ pues ($\beta \leqslant (2m-2) \leqslant 2m \leqslant m$) y $\alpha = 0$, una contradicción a $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$.
Por otro lado, $|T| = 1$ y por lo tanto $\beta \leqslant m - 1$ pues ($E_2^{'} = \emptyset$ y a lo más $E_2^{''} = m-1$)), pero ahora $\delta_G(S,T) \geqslant m|T| = m \geqslant \beta + \alpha$ una contradicción a $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$.

Posibilidad 3: Si $S \neq \emptyset$ y $T = \emptyset$, entonces $\beta = 0$ ($E_2^{'} = \emptyset$ y $E_2^{''} = \emptyset$)
$\delta_G(S,T) = q(S) = k_m|S| \geqslant |S| \geqslant \alpha = \alpha + \beta$ pues ($d_G(T) = 0$ y $p(T) = 0$, k_m es un entero positivo y $\alpha \leqslant min\{2, |S|\} \leqslant |S|$) una contradicción a $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$.

Posibilidad 4: Si $S = \emptyset$ y $T = \emptyset$ entonces $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\delta_G(S,T) \geqslant \alpha + \beta$, una contradicción a $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$.

En la discusión siguiente, siempre suponemos $S \neq \emptyset$ y $T \neq \emptyset$. Para probar el teorema, se consideran dos casos.

Caso 3.1. $E_2^{'} = \emptyset$.
En este caso $\beta \leqslant (m-1)$
Si $|S| \geqslant |T|$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= t|T| + k_m|S| - e_G(S,T) \quad \text{como } S \neq \emptyset \text{ y } T \neq \emptyset \text{ por aclaración 3.3)} \\
&= t|T| + k_m|T| - k_m|T| + k_m|S| - e_G(S,T) \\
&= (t + k_m)|T| + k_m(|S| - |T|) - e_G(S,T) \\
&= (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1 + k_m)|T| + k_m(|S| - |T|) - e_G(S,T) \qquad (sust.\ t) \\
&= (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} + k_m - m + 1)|T| + 1|T| + k_m(|S| - |T|) - e_G(S,T) \\
&\geqslant d_G(T) + |T| + k_m(|S| - |T|) - e_G(S,T)\ (G\ un\ [0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1] - grafo) \\
&= d_{G-S}(T) + k_m(|S| - |T|) + |T| \qquad (por\ (e)) \\
&\geqslant d_{G-S}(T) + (|S| - |T|) + |T| \qquad (pues\ k_m \geqslant 1) \\
&\geqslant \beta + |S| \qquad (por\ III) \\
&\geqslant \beta + \alpha \qquad (puesto\ que\ \alpha \leqslant min\{2, |S|\} \leqslant |S|)
\end{aligned}$$

Lo cual contradice lo asumido $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$

Si $|S| < |T|$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= t|T| + k_m|S| - e_G(S,T) \qquad \text{(como } S \neq \emptyset \text{ y } T \neq \emptyset \text{ por aclaración 3.3)} \\
&= t|T| + t|S| - t|S| + k_m|S| - e_G(S,T) \\
&= t(|T| - |S|) + (t + k_m)|S| - e_G(S,T) \\
&\geqslant t + (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} + k_m - m + 1 + 1)|S| - e_G(S,T) \qquad (sust.\ t\ y\ |T| - |S| > 0) \\
&\geqslant t + d_G(S) + |S| - e_G(S,T) \quad (G\ es\ un\ [0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1] - grafo) \\
&= (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1 + d_{G-T}(S) + |S| \qquad (por\ (e)\ y\ valor\ t) \\
&\geqslant (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1 + |S| \qquad (puesto\ que\ d_{G-T}(S) \geqslant 1) \\
&\geqslant m + \alpha \qquad (cada\ k_i \geqslant 2,\ \sum_{i=1}^{m-1} k_i \geqslant (2m-2)\ y\ \alpha \leqslant min\{2, |S|\} \leqslant |S|) \\
&\geqslant \beta + \alpha \qquad (pues\ \beta \leqslant (m-1) \leqslant m)
\end{aligned}$$

Todavía una contradicción.

Caso 3.2. $E_2^{'} \neq \emptyset$.
Si $|S| \geqslant |T|$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= t|T| + k_m|S| - e_G(S,T) \text{ (como } S \neq \emptyset \text{ y } T \neq \emptyset \text{ por aclaración 3.3)} \\
&= t|T| + k_m|T| - k_m|T| + k_m|S| - e_G(S,T) \\
&= (t + k_m)|T| + k_m(|S| - |T|) - e_G(S,T) \\
&= (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1 + k_m)|T| + k_m(|S| - |T|) - e_G(S,T) \qquad (sust.\ t) \\
&= (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} + k_m - m + 1)|T| + 1|T| + k_m(|S| - |T|) - e_G(S,T) \\
&\geqslant d_G(T) + |T| + k_m(|S| - |T|) - e_G(S,T)\ (G\ un\ [0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1] - grafo) \\
&= d_{G-S}(T) + k_m(|S| - |T|) + |T| \qquad (por\ (e)) \\
&\geqslant d_{G-S}(T) + (|S| - |T|) + |T| \qquad (pues\ k_m \geqslant 1) \\
&\geqslant \beta + |S| \qquad (por\ III) \\
&\geqslant \beta + \alpha \qquad (puesto\ que\ \alpha \leqslant min\{2, |S|\} \leqslant |S|)
\end{aligned}$$

Lo cual contradice lo asumido $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$

Si $|S| < |T|$, hay dos subcasos. Un subcaso es que $|S| \leqslant |T| - 2$, dado que $E_2^{'} = E_2 \cap E(T) \neq \emptyset$, entonces existe $xy \in E_2^{'}$, tal que $|T| > 2$ $(T \neq 2)$ pues $|S| > 0$, ya que $S \neq \emptyset$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= t|T| + k_m|S| - e_G(S,T) \qquad \text{(como } S \neq \emptyset \text{ y } T \neq \emptyset \text{ por aclaración 3.3)} \\
&= t|T| + t|S| - t|S| + k_m|S| - e_G(S,T) \\
&= t(|T| - |S|) + (t + k_m)|S| - e_G(S,T) \\
&\geqslant 2t + (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} + k_m - m + 2)|S| - e_G(S,T) \qquad (sust.\ t\ y\ |T| - |S| \geqslant 2) \\
&\geqslant 2t + d_G(S) + |S| - e_G(S,T)\ (G\ es\ un\ [0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1] - grafo) \\
&\geqslant 2(k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - m + 2) + d_{G-T}(S) + |S| \qquad (sust.\ t\ y\ (e)) \\
&\geqslant 2m + \alpha \qquad (cada\ k_i \geqslant 2,\ \sum_{i=1}^{m-1} k_i \geqslant (2m-2)\ y\ \alpha \leqslant min\{2, |S|\} \leqslant |S|) \\
&\geqslant \beta + \alpha \qquad (pues\ \beta \leqslant (m-1) \leqslant m)
\end{aligned}$$

Lo cual contradice lo asumido $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$. El otro subcaso es $|T| = |S| + 1$ (Como $|S| < |T|$ pueden diferir por lo menos de uno) y $E_2^{'} \neq \emptyset$. En los casos $|T| > |S| + 1$ son estudiados en el subcaso anterior.

Veremos que $p(x) = 0$ para cada $x \in S$ en este subcaso. De lo contrario, como $T \neq \emptyset$ elegimos a $x^* \in S$ tal que $p(x^*) \geqslant 1$ por la aclaración 3.1. Entonces $p(x^*) = d_G(x^*) - (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - m + 2)\} \geqslant 1$, $d_G(x^*) \geqslant (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - m + 2) + 1$ lo que sugiere que $d_G(x^*) \geqslant m + 1$, pues los $k_i \geqslant 2$. Sea $S_0 = S \backslash x^*$, x^* y S_0 forman una partición de S

$$
\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= t|T| + k_m|S| - e_G(S,T) \qquad (\text{como } S \neq \emptyset \text{ y } T \neq \emptyset \text{ por aclaración 3.3})\\
&= t|T| + t|S| - t|S| + k_m|S| - e_G(S,T)\\
&= t(|T| - |S|) + (t + k_m)|S| - e_G(S,T)\\
&= t(|T| - |S|) + (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} + k_m - m + 2)|S| - e_G(S,T) \qquad (sust.\ t\ )\\
&\geqslant t(|T| - |S|) + d_G(S) + |S| - e_G(S,T)\ (G\ un\ [0, k_1 + k_2 + ... + k_m - m + 1] - grafo)\\
&> t + d_G(S) + |S| - e_G(S,T) \qquad (pues\ |T| - |S| > 0)\\
&\geqslant t + d_G(x^*) + d_G(S_0) + |S| - e_G(x^*,T) - e_G(S_0,T)\\
&= t + d_G(x^*) + d_{G-T}(S_0) + |S| - e_G(x^*,T) \qquad (por\ (e))\\
&= (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - m + 2) + d_G(x^*) + d_{G-T}(S_0) + |S| - e_G(x^*,T) \qquad (sust.\ t)\\
&\geqslant m + (m+1) + d_{G-T}(S_0) + |S| - e_G(x^*,T) \qquad (cada\ k_i \geqslant 2\ y\ d_G(x^*) \geqslant m+1)\\
&\geqslant m + (m+1) + d_{G-T}(S_0) + |S| - |T| \qquad (|E_G(x^*,T)| \leqslant |T|)\\
&= 2m + 1 + d_{G-T}(S_0) + |S| - |S| - 1 \qquad (pues\ |T| = |S| + 1)\\
&= 2m + d_{G-T}(S_0)\\
&\geqslant 2m \qquad (puesto\ que\ d_{G-T}(x) \geqslant 1)
\end{aligned}
$$

Pero $\beta \leqslant 2m-2$ y $\alpha \leqslant 2$. Por tanto, $\delta_G(S,T) \geqslant \alpha + \beta$, lo cual contradice lo supuesto $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha + \beta - 1$. Por tanto para cada $x \in S$, $p(x) = 0$. Por otro lado, por la escogencia de u, v y la condición $E_2^{'} \neq \emptyset$, $uv \in E(T)$ por lo que $|T| \neq \emptyset$ y por aclaración 3.1, $p(u) \geqslant 1$ y $p(v) \geqslant 1$. Como resultado, se tiene $u, v \notin S$ pues S y T son disjuntos y subsecuentemente $\alpha = 0$. Por aclaración 3.3 $\delta_G(S,T) = t|T| + k_m|S| - e_G(S,T)$.
Si $k_m \leqslant |T|$, entonces,

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &= t|T| + k_m(|T|-1) - e_G(S,T) \qquad (pues\ |T| = |S|-1) \\
&= (t+k_m)|T| - k_m - e_G(S,T) \\
&= (k_1+k_2+....+k_{m-1}+k_m-m+2)|T| - k_m - e_G(S,T) \qquad (sust.\ t\ ) \\
&\geqslant d_G(T) + |T| - k_m - e_G(S,T)\ (G\ un\ [0,k_1+k_2+...+k_m-m+1]-grafo) \\
&= d_{G-S}(T) + |T| - k_m \qquad (por\ (e) \\
&\geqslant d_{G-S}(T) \qquad (pues\ |T| - k_m \geqslant 0) \\
&\geqslant \beta \qquad (por\ III) \\
&= \alpha + \beta \qquad (pues\ \alpha = 0)
\end{aligned}$$

Lo cual contradice lo supuesto $\delta_G(S,T) \leqslant \alpha+\beta-1$.
Si $k_m > |T|$, entonces,

$$\begin{aligned}
\delta_G(S,T) &> t|T| + |T||S| - e_G(S,T) \qquad (pues\ km > |T|\ y\ |S| = |T|-1) \\
&\geqslant t|T| + |T||S| - |T||S| \qquad (pues\ e_G(S,T) \leqslant |T||S|) \\
&= t|T| \\
&\geqslant 2(k_1+k_2+....+k_{m-1}-(m-1)+1) \qquad (sust.\ t\ y\ |T| \geqslant 2) \\
&\geqslant 2m \qquad (pues\ k_i \geqslant 2\ y\ \sum_{i=1}^{m-1} k_i \geqslant (2m-2)) \\
&\geqslant \beta \qquad (pues\ \beta \leqslant 2m-2 \leqslant 2m) \\
&= \alpha + \beta \qquad (pues\ \alpha = 0)
\end{aligned}$$

Una contradicción aquí.

En conclusión $\delta_G(S,T) \geqslant \Delta_G(S,T,E_1,E_2)$. Por la escogencia de S y T, se tiene que $\delta_G(S',T') \geqslant \Delta_G(S',T',E_1,E_2)$ para todo subconjuntos S' y T' de $V(G)$. Consecuentemente por lema 2.2, G posee un (p,q)-factor F, cumple $p(x) \leqslant d_F(x) \leqslant q(x)(\star)$, tal que $E_1 \subseteq E(F)$ y $E_2 \cap E(F) = \phi$, por lo que F posee un único lado $uv \in E_1$ común a H. Por lema 2.4, un (p,q)-factor de G es también un $[0,k_m]$-factor de G.

Por otro lado,

$d_{G-F}(x) = d_G(x) - d_F(x) \geqslant d_G(x) - q(x) \geqslant d_G(x) - d_G(x) = 0$
(por $(\star)$ y q(x)=min{k$_m, d_G(x)\} \leqslant d_G(x)$)
y

$$
\begin{aligned}
d_{G-F}(x) &= d_G(x) - d_F(x) \\
&\leqslant d_G(x) - p(x) \qquad (por(\star)) \\
&\leqslant d_G(x) - (d_G(x) - (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1) \text{ (pues p(x) es un máximo)} \\
&= d_G(x) - d_G(x) + (k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1) \\
&= k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1
\end{aligned}
$$

Lo cual implica que $G - F$ es un $[0, k_1 + k_2 + ... + k_{m-1} - (m-1) + 1]$-grafo. Por lo tanto, el teorema 3.1 esta probado.

Referencias bibliográficas.

[1] B. Alpasch, K. Heinrich, anda G Lui, Contemporary Desgn Theory - A collection of Surveys, John Wiley and Sons, New York, 1992, pp 13-37

[2] J. A. Bondy and U.S.R Murty, Graph Theory with Aplications, Macmillan, London, 1976

[3] H. Feng, Orthogonal Factorization, J Advances in matematics (in China) 27(2)1998, pp 184-186.

[4] H. Feng and G. Liu, Orthogonal factorizations of graphs, Wiley Inter Science (2002), J Graph Theory (40) pp 267-276.

[5] M. Kouider and D. Sotteau, On the existence of a matching ortogonal to a 2-factorization, Discrete Math, 73(3) (1989), pp 301-304.

[6] G. Li and G. Liu, (g,f)-factorization orthogonal to a subgraph in graphs, J Sci China (Ser. A), 41 (3) (1998), pp 267-272.

[7] G. Liu, (g,f)-factorization orthogonal to a star in graphs, J Sci China A, 25(4) (1995), pp 367-373.

[8] G. Liu, B. Alspach, and K. Heinrich, Some results concerning orthogonal factorization, J Adv Math (in China), 21(2) (1992), pp 211-215.

[9] G. Liu, Orthogonal (g,f)-factorizations in graphs, Discrete Math 143 (1995), pp 153-158.

[10] L. Lovász, Subgraphs with prescribed valencies, J Combin Theory, 8 (4)(1970), pp 319-416.

[11] L. Lovász and D. Plummer, Matching theory, Ann Discrete Math 29, North Holland (1986), ISBN 0444879161.