Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Posgrado

Teorema Generalizado de a-Browder

Autor: Lic. José Gabriel Mogollón Anzola

Tutor: Dr. Fernando Villafañe

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Magister, Mención Matemáticas

Barquisimeto, Marzo 2012

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Coordinación de Posgrado

Teorema Generalizado de a-Browder

AUTOR: Lic. José Gabriel Mogollón Anzola

TUTOR: Dr. Fernando Villafañe

Barquisimeto, Marzo 2012

RESUMEN

En principio se realizará un estudio de los aspectos asociados a la teoría de operadores tales como, la teoría local espectral, la propiedad de extensión univaluada (SVEP), la parte quasi-nilpotente de un operador, entre otros.

Se considera una importante y destacada clase de operadores que son los operadores de Fredholm, en la gran variedad de los operadores de tipo Fredholm se presentan diversos espectros, los que definen posteriormente algunos teoremas de tipo weyl y tipo Browder, como por ejemplo “El Teorema de a-Browder”.

Los operadores de Fredholm permiten una definición más generalizada en el sentido de Berkaní, así de esta manera surge una nueva variedad de espectros, como el espectro upper semi B-Fredholm, en el cual se deriva el teorema generalizado de a-Browder .

Esta monografía está enfocada a caracterizar los operadores lineales que satisfacen el teorema generalizado de a-Browder, mediante el empleo de la SVEP, la parte quasi-nilpotente, entre otros, tambien surgen nuevas caracterizaciones acerca de como un operador satisface el teorema generalizado de a-Browder .

Palabras Claves: Espectro, resolvente, SVEP, a-Browder, operadores de Fredholm, operadores de B-Fredholm.

Dedicatoria:

En memoria de **Jorge Arcadio García Mogollón**. Este trabajo es una ofrenda para tí, para agradecerte de mi parte y la de toda nuestra familia los momentos de alegría que nos regalaste con tus ocurrencias. Nunca te olvidaremos...

Agradecimientos:

- Primeramente a Dios, por darme claridad y calma en todo los momentos difíciles que se me presentaron a lo largo de toda mi carrera.
- A mis padres **Rafaela Egilda Anzola de Mogollón** y **Jorge Jose Mogollón Torrealba**, por darme la vida, la educación y sobre todo cariño y apoyo que necesito día a día.
- A mis segundos Padres **Eddy Anzola** y **Rafael Anzola**, que además de ser tíos, se portaron como verdaderos padres desde el comienzo de mi carrera.
- A mis hermanos **Nancy Zulay**, **Jessica Gabriela** y **José Ángel**, por motivarme, apoyarme y brindarme todo el aprecio en toda mi carrera universitaria.
- A mi tutor **Dr. Fernando Villafañe**, gracias por guiarme en todo el desarrollo de mi Trabajo y de mi formación académica.
- A mis tios, **Domingo**, **Gina**, **Pedro**, **Víctor**, por tener esa fé en mi.
- A mis otros tíos, **Luis Rosales** Y **Jorge García** , gracias por la motivación.
- A mis primos sobrinos y cuñados **Edgar**, **José**, **Gerardo**, **Sergio**, **Karina**, **Viviana**, **Brigitte**, **Claudia**, **Bladimir**, **Mayeri**, **Luis Alvarado**, **Pedro**, **Jenifer**, **Ricardo**, **Rodolfo**, **Alfredo** por estar pendiente en como me desarrollaba en mis estudios.
- A **Clavel**, **Elvis**, **Marbelis**, **Ernesto Lopez**, **Luís Sánchez**, **Andy**, **Jorge Pérez**, **Minoru**. Gracias por su apoyo, ayuda y motivación.

- A **Karmela Lozada** toda una especialista en latex, no tengo palabras para agradecerle toda su gran ayuda y colaboración en la transcripción de mi Trabajo, y por el cafecito de todos los días.

- A **Elena**, **Henry Rodríguez**, **Ibelise**, **Miyedis**, personal administrativo que hace día a día el buen funcionamiento del programa de Maestría.

- A los profesores **Edgar Guédez**, **Ebner Pineda** y a todos los demás profesores que contribuyeron con mi formación académica.

Índice general

Introducción

Consideremos T un endomorfismo acotado sobre un espacio vectorial de Banach complejo X infinito-dimensional, esto es $T \in L(X)$, denotemos por $\alpha(T)$ a la dimensión del kernel de T y por el $\beta(T)$ a la codimensión del rango $T(X)$. Así, un operador $T \in L(X)$ es llamado upper semi-Fredholm si $\alpha(T) < \infty$ y $T(X)$ es cerrado, mientras que $T \in L(X)$ es llamado lower semi-Fredholm si $\beta(T) < \infty$. Si T es un operador upper o lower semi-Fredholm decimos que T es un operador semi-Fredholm, mientras que T es un operador de Fredholm si T es upper y lower semi-Fredholm a la vez. A raíz de estas definiciones surge el índice de T, el cual es dado por $ind(T) := \alpha(T) - \beta(T)$. Otras importantes definiciones que se presentan en la teoría de operadores, son el ascent y el descent de un operador T, donde el ascent de T es el entero no negativo más pequeño $p := p(T)$ tal que $\ker T^p = \ker T^{p+1}$, si tal entero no existe decimos que $p(T) = \infty$. Análogamente el descent de T es definido como el entero no negativo más pequeño $q := q(T)$ tal que $T^q(X) = T^{q+1}(X)$, si tal entero no existe decimos que $q(T) = \infty$.

Si $x \in X$, el conjunto resolvente local de T en x, lo denotamos por $\rho_T(x)$ y se define como la unión de todos los subconjuntos abiertos U de $\mathbb{C}$ tales que existe una función analítica $f : U \to X$ que satisface la siguiente ecuación:

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x \quad \text{para todo} \quad \lambda \in U \qquad (1).$$

El espectro local de T en x está definido por $\sigma_T(x) = \mathbb{C} \backslash \rho_T(x)$ y es claro que $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T)$, donde $\sigma(T)$ denota el espectro de T. El operador $T \in L(X)$ se dice que tiene la propiedad de extensión univaluada en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (abreviado por SVEP) si, para toda vecindad U de λ_0, la única función analítica $f : U \to X$ que satisface la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in U$ es $f \equiv 0$. El operador $T \in L(X)$ se dice que tiene la SVEP si T tiene la SVEP en todo punto $\lambda \in \mathbb{C}$. Es claro que, si T tiene la SVEP en λ_0, entonces la solución analítica de (1) en una vecindad de U de λ_0 está determinada de forma única.

Asociado con $T \in L(X)$, existe un subespacio lineal de X, llamado la parte quasi-nilpotente de T, el cual se define como:

$$H_0(T) := \{x \in X : \lim_{n \to \infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0\}.$$

En general $H_0(\lambda I - T)$ no es cerrado y si $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado, entonces T tiene la SVEP en λ.

El subespacio $H_0(T)$ admite la siguiente caracterización local espectral. Denotamos por $\chi_T(F)$, al subconjunto glocal espectral asociado al subconjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{C}$, como el conjunto de todos los $x \in X$ para el cual existe una función analítica $f : \mathbb{C} \backslash F \to X$ que satisface la identidad $(\lambda I - T)f(\lambda) = x$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \backslash F$. Entonces $H_0(T) = \chi_T(\{0\})$, ver [1, teorema 2.20].

Dentro de los operadores semi-Fredholm dintinguimos los operadores con ascent o descent finito llamados semi-Browder:

Upper semi-Browder son aquellos operadores upper semi-Fredholm que tienen ascent finito. Lower semi-Browder son los operadores lower semi-Fredholm que tienen descent finito. La clase de todos los operadores de Browder, son los operadores upper y lower semi-Browder simultáneamente, mientras que los operadores semi-Browder son aquellos upper o lower semi-Browder.

Un operador $T \in L(X)$, decimos que es un operador de weyl si T es un operador de Fredholm con índice 0. También decimos que $T \in L(X)$ es un operador upper semi-weyl (lower semi-weyl) si T es un operador upper semi-Fredholm (lower semi-Fredholm) con $ind(T) \leq 0$ ($ind(T) \geq 0$).

Generalizamos toda la teoría anterior en el sentido de Berkaní de la siguiente forma: Para cada $T \in L(X)$ y n un entero no negativo, denotamos por $T_{[n]}$ a la restricción de T a $T^n(X)$ (donde $T_{[0]} = T$). Acordado por Berkaní ([5], [6] y [7]), decimos que un operador es semi B-Fredholm (resp., B-Fredholm, upper semi B-Fredholm, lower semi B-Fredholm) si para algún entero $n \geq 0$ el rango $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es un operador semi-Fredholm (resp., Fredholm, upper semi-Fredholm, lower semi-Fredholm). Notemos que $T_{[m]}$ es un operador semi-Fredholm para todo $m \geq n$ ([6]).

La clase todos los operadores upper semi B-Fredholm son denotados por $USBF(X)$. Un operador acotado decimos que es B-weyl si para algún entero $n \geq 0$ el rango $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es un operador de weyl, es decir, $T_{[n]}$ es un operador de Fredholm teniendo índice 0.

Sea $T \in L(X)$, decimos que T es left Drazin invertible si $p := p(T) < \infty$ y $T^{p+1}(X)$ es cerrado. Así el espectro left Drazin es definido entonces por

$$\sigma_{\ell d}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \text{no es left Drazin invertible}\}.$$

Un operador T es bounded below si es inyectivo y tiene rango cerrado. Denotemos por $\sigma_a(T)$ al clásico espectro aproximado puntual de T, dado por:

$$\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \text{no es bounded below}\}.$$

El conjunto de polos izquierdos $\pi^a(T)$ es definido como $\pi^a(T) = \sigma_a(T)\backslash\sigma_{\ell d}(T)$.

Denotemos por $USBF^-(X)$ a la clase de todos los operadores upper semi B-Fredholm tal que si $indT \leq 0$.

El espectro $USBF^-(X)$, es entonces dado por

$$\sigma_{USBF^-}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \text{no es} \quad USBF^-(X)\}.$$

Para $T \in L(X)$, denotemos por $\Delta^a(T)$ al conjunto

$$\Delta^a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in USBF^-(X), 0 < \alpha(\lambda I - T)\}.$$

Ahora, abordamos la definición del esperado Teorema generalizado de a-Browder, con la siguiente definición. Un operador $T \in L(X)$ decimos que satisface el teorema generalizado de a-Browder si

$$\Delta^a(T) = \pi^a(T), \quad \text{o si}$$

$$\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{\ell d}(T).$$

Una vez que caracterizamos los operadores lineales acotados que satisfacen la definicion del teorema generalizado de a-Browder, haremos la relación entre dicho teorema y la gran herramienta en la teoría de operadores llamada la SVEP, así como también su relacion con la parte quasi-nilpotente del respectivo operador, generando asi nuevos resultados.

Capítulo 1

Operadores Semi-Fredholm

1.1. Operadores con rango cerrado

Sean X,Y espacios vectoriales y consideremos la aplicación

$$T : X \to Y,$$

que satisface las siguientes propiedades:

i) Para todo $x,y \in X, T(x+y) = T(x) + T(y)$,

ii) Para todo escalar α y $x \in X, T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

A tal aplicación se le denomina transformación lineal o también operador lineal.

Sea T un operador lineal definido sobre el espacio vectorial normado X, diremos que T es un operador lineal acotado si existe un escalar k no negativo, tal que para todo $x \in X$

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|.$$

Sean X,Y espacios de Banach, denotamos por $L(X,Y)$ al espacio conformado por todos los operadores lineales acotados, actuando del espacio de Banach X en el espacio de Banach Y. Denotaremos $L(X)$ en lugar de $L(X,X)$. Asumiremos que los espacios de Banach son complejos e infinito-dimensionales.

Si $T \in L(X,Y)$, definimos la norma de T por

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Llamaremos dual de X al espacio vectorial normado cuyos elementos son todos los funcionales lineales acotados actuando del espacio de Banach X en $\mathbb{C}$. A tal espacio lo denotaremos por X^*, esto es, $X^* := L(X,\mathbb{C})$.

Si $T \in L(X,Y)$ denotamos por T^* al dual del operador T, definido como sigue:

$$\begin{cases} T^* : Y^* \to X^*, \quad f \to T^*(f). \\ \qquad \text{Donde} \\ T^*(f) : X \to \mathbb{C}, \quad x \to (T^*(f))(x) := f(T(x)). \end{cases}$$

Asi de esta manera $T^* \in L(Y^*,X^*)$.

Sea $T \in L(X,Y)$, definimos Kernel de T al conjunto

$$ker\, T := \{x \in X : Tx = 0\}.$$

Mientras que el rango de T es denotado por $T(X)$.

Un resultado clásico del análisis funcional establece que, para cada $T \in L(X)$.

$T(X)$ es cerrado $\Leftrightarrow T^*(X^*)$ es cerrado.

Ver teorema 97.1 de [3].

Definición 1.1. *Si $T \in L(X,Y), X, Y$ espacios de Banach, el módulo minimal reducido de T es dado por*

$$\gamma(T) := \inf_{x \notin \ker T} \quad \frac{\|T(x)\|}{dist(x, \ker\, T)},$$

donde $\gamma(0) = \infty$.

Ahora si T es biyectivo, entonces $\gamma(T) = \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$.

Para ver esto sean :

$$a = \inf_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad b = \left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \right)^{-1}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} b^{-1} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \Rightarrow b^{-1} &\geq \frac{\|x\|}{\|Tx\|}; \quad \text{para todo} \quad x \neq 0; \\ \Rightarrow b \quad &\leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \quad \text{para todo} \quad x \neq ,0 \end{aligned}$$

Así

$$b \leq \inf_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \quad \text{consecuentemente} \quad a > 0$$

y por lo tanto

$$\left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \right)^{-1} \leq \inf_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = a.$$

Por otro lado

$$a \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \quad \text{para todo} \quad x \neq 0,$$

$$\Rightarrow \quad a^{-1} \geq \frac{\|x\|}{\|Tx\|}; \quad \text{para todo} \quad x \neq 0.$$

Así, a^{-1} es cota superior del conjunto $\left\{ \dfrac{\|x\|}{\|Tx\|} ; x \neq 0 \right\}$, luego $a^{-1} \geq \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|x\|}{\|Tx\|}$, por lo que $a \leq \left(\sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|}\right)^{-1} = b.$

Por lo tanto

$$\inf_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \left(\sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|}\right)^{-1}.$$

Como ya teniamos la desigualdad contraria se concluye que

$$\inf_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left(\sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|}\right)^{-1}.$$

Ahora si T es inyectivo, ocurre que $dist(x, \ker T) = dist(x, \{0\}) = \|x\|$ y si T es sobreyectivo con $Tx = y \Leftrightarrow x = T^{-1}y$, se tiene que

$$\begin{aligned}\gamma(T) = \inf_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} &= \left(\sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|}\right)^{-1}\\ &= \left(\sup_{y\neq 0} \frac{\|T^{-1}y\|}{\|y\|}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{\|T^{-1}\|}\end{aligned}$$

□

Teorema 1.1. *Sea $T \in L(X,Y)$, X e Y espacios de Banach, entonces tenemos que:*

i) $\gamma(T) > 0$ *si y solo si* $T(X)$ *es cerrado*

ii) $\gamma(T) = \gamma(T^*)$

Prueba.

i) Si $T = 0$, es el operador nulo entonces (i) es válido. Supongamos que $T \neq 0$. Sea $\overline{X} := X/\ker T$ y definamos por $\overline{T} : \overline{X} \to Y$ la inyección contínua definida por

$$\overline{T}\bar{x} = Tx, \text{ para todo } x \in \bar{x}.$$

Si $y \in \bar{x}$ entonces $y = x + \ker T$ de manera que $Ty = Tx$.

Sean $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{x}$, ahora

$$\begin{aligned}
\overline{T}(\bar{x}_1) = \overline{T}(\bar{x}_2) &\Rightarrow T(x_1) = T(x_2) \\
&\Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \\
&\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker T \\
&\Rightarrow x_1 \sim x_2 \\
&\Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{T}$ es inyectivo.

Recordemos que T es acotado, así existe $k > 0$, tal que $\|Tx\| \leq k\|x\|$, $\forall x \in X$.

Ahora, sean $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{x}$ tal que $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\overline{T}(\bar{x}_1) - \overline{T}(\bar{x}_2)\| &= \|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \\
&\leq k\|x_1 - x_2\| < k\delta.
\end{aligned}$$

Se deduce así que $\overline{T}$ es contínuo.

Por otro lado, es fácil ver que $\overline{T}(\overline{X}) = T(X)$, por lema 36.1 de [3], tenemos que $\overline{T}(\overline{X})$ es cerrado si y solo si $\overline{T}$ tiene inversa contínua y por teorema 14.9 de [4], esto es equivalente a que existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda\|\bar{x}\| \leq \|\overline{T}\bar{x}\|, \text{ para cada } \bar{x} \in \overline{X}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \inf_{x \notin \ker T} \frac{\|Tx\|}{dis(x, \ker T)} = \inf_{x \notin \ker T} \frac{\|Tx\|}{\inf\limits_{y \in \ker T} \|x - y\|} \\
&= \inf_{x \notin \ker T} \frac{\|\overline{T}\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = \inf_{\bar{x} \neq \bar{0}} \frac{\|\overline{T}\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = \gamma(\overline{T})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma(T) = \gamma(\overline{T})$.

Luego se concluye que:

$$\begin{aligned} T(X) = \overline{T}(\overline{X}) \text{ es cerrado } &\Leftrightarrow \|\overline{T}\overline{x}\| \geq \lambda \|\overline{x}\|; \text{ para cada } \overline{x} \in \overline{X} \\ &\Leftrightarrow \frac{\|\overline{T}\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|} \geq \lambda > 0; \text{ para cada } \overline{x} \in \overline{x} \\ &\Leftrightarrow \inf_{\overline{x} \neq \overline{0}} \frac{\|\overline{T}\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|} > 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma(T) = \gamma(\overline{T}) > 0. \end{aligned}$$

ii) si $\gamma(T) = 0$ por la parte (i), se tiene que $T(X)$ no es cerrado, implicando que $T^*(X^*)$ no es cerrado y nuevamente por la parte (i) $\gamma(T^*) = 0$. Supóngase ahora que $\gamma(T) > 0$, entonces $T(X)$ es cerrado. Si $\overline{T}_0 : \overline{X} \to T(X)$ es definido por $\overline{T}_0\overline{x} := Tx$ para cada $x \in \overline{x}$, procediendo como en la parte (i) se tiene que $\gamma(T) = \gamma(\overline{T}_0)$.

Definamos también, la función inclusión natural $J : T(X) \to Y$ y la proyección canónica $Q : X \to \overline{X}$, definida por $Q(x) = \overline{x}$.

Entonces, $T = J\overline{T}_0Q$, implicando que $T^* = Q^*(\overline{T}_0)^*J^*$ y como $\overline{T}_0$ es biyectivo, se sigue que

$$\gamma(T) = \gamma(\overline{T}_0) = \frac{1}{\|(\overline{T}_0)^{-1}\|} = \gamma(\overline{T}_0^*) = \gamma(T^*).$$

Sea M un subconjunto del espacio de Banach X. El anulador de M es el subespacio cerrado de X^* definido por

$$M^\perp := \{f \in X^* : f(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad x \in M\}.$$

Mientras que el pre-anulador de un subconjunto W de X^*, es el subespacio cerrado de X definido por

$$^\perp W := \{x \in X : f(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad f \in W\}.$$

Plantearemos ahora las siguientes relaciones duales entre el kernel, el rango y el dual T^* de un operador acotado T sobre un espacio de Banach X.

(1) $\ker T =^{\perp} \overline{T^*(X^*)}$

(2) $\overline{T(X)}^{\perp} = \ker T^*$

(3) $^{\perp}\ker T^* = \overline{T(X)}$

(4) $\overline{T^*(X^*)} \subseteq \ker T^{\perp}$

La inclusión 4 es en general estricta y se tiene la igualdad cuanto T tiene rango cerrado. Probemos cada una de estas relaciones.

(1) Probemos que $\ker T \subseteq^{\perp} \overline{T^*(x^*)}$.

Sea $x \in \ker T$, tomemos $f \in \overline{T^*(X^*)}$ arbitrario, así existe una sucesión $g_n \in X^*$ tal que $f = \lim\limits_{n\to\infty} T^*(g_n)$.

De esta forma $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T^*(g_n)(x)$, implicando que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(Tx) = \lim_{n\to\infty} g_n(0) = 0$$

Por lo tanto $f(x) = 0$, para todo $f \in \overline{T^*(X^*)}$.

Teniéndose que, $x \in^{\perp} \overline{T^*(X^*)}$ y así $\ker T \subseteq^{\perp} \overline{T^*(X^*)}$.

Veamos ahora que $^{\perp}\overline{T^*(X^*)} \subseteq \ker T$.

Sea $x \notin \ker T$ así la $dist(x, \ker T) > 0$, luego existe por teorema de Hanh Banach un funcional $g \in X^*$ tal que $g(y) = 0$ para todo $y \in \ker T$ y $g(x) \neq 0$.

Sea $P : X \to X$ un operador lineal tal que $P(Tx) = x$ y $P(z) = 0$ si $z \in X - T(X)$. Ahora $g \circ P : X \to \mathbb{C}$ y $g \circ P \in X^*$ puesto que $g \in X^*$. Así

$$\begin{aligned} T^*(g \circ P)(x) &= g \circ P(T(x)) \\ &= g(P(Tx)) \\ &= g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

De esta manera existe un funcional $F = T^*(g \circ P) \in T^*(X^*) \subseteq \overline{T^*(X^*)}$ tal que $F(x) \neq 0$. Por lo que $x \notin^{\perp} \overline{T^*(X^*)}$.

En consecuencia $^{\perp}\overline{T^*(X^*)} \subseteq \ker T$.

(2) Probemos que $\overline{T(X)}^{\perp} \subseteq \ker T^*$.

$$f \in \overline{T(X)}^{\perp} \Rightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in \overline{T(X)} \quad (I).$$

Ahora, dado $x \in X$, $T^*(f)(x) = f(Tx)$, como $Tx \in \overline{T(X)}$, tenemos por (I) que $T^*(f)(x) = 0$. Así de deduce que $T^*(f) = 0$, implicando que $f \in \ker T^*$, entre tanto se tiene que

$$\overline{T(X)}^{\perp} \subseteq \ker T^*.$$

Probemos ahora que $\ker T^* \subseteq \overline{T(X)}^{\perp}$

$$\begin{aligned} g \in \ker T^* &\Rightarrow T^*(g) \equiv 0 \\ &\Rightarrow (T^*g)(x) = 0 \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow g(T(x)) = 0 \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Sea $y \in \overline{T(X)}$ arbitrario, existe una suceción $y_n \in X$ tal que $T(y_n) \to y$ si $n \to \infty$. Ahora,

$$g(y) = g\left(\lim_{n\to\infty} T(y_n)\right) = \lim_{n\to\infty} g(T(y_n)) = \lim_{n\to\infty} (0) = 0.$$

De manera que $g(y)=0$, para todo $y\in\overline{T(X)}$. Por lo que $g\in\overline{T(X)}^{\perp}$, con $g\in\ker T^*$, se deduce asi que

$$\ker T^*\subseteq\overline{T(X)}^{\perp}.$$

(3) Probemos que $\overline{T(X)}\subseteq{}^{\perp}\ker T^*$.

$x\in\overline{T(X)}$, entonces existe una sucesión $(x_n)\in X$ tal que $T(x_n)\to x$. Debemos probar que $f(x)=0$ para todo $f\in\ker T^*$.

En efecto,

$$\begin{aligned}\text{Sea}\quad f\in\ker T^* &\Rightarrow T^*(f)=0\\ &\Rightarrow (T^*f)(x)=0,\quad \forall x\in X\\ &\Rightarrow f(T(x))=0,\quad \forall x\in X.\end{aligned}$$

Ahora

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}Tx_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(Tx_n)=0.$$

Así

$$x\in{}^{\perp}\ker T^*$$

y por lo tanto

$$\overline{T(X)}\subseteq{}^{\perp}\ker T^*$$

Veamos ahora que ${}^{\perp}\ker T^*\subseteq\overline{T(X)}$.

Sea $y\notin\overline{T(X)}$, así $dist(y,\overline{T(X)})>0$, luego existe un funcional acotado F tal que $F(y)\neq 0$ y $F\mid_{\overline{T(X)}}=0$.

Como $F\big|_{\overline{T(X)}}=0$, entonces $F\in\overline{T(X)}^{\perp}$ y por la parte (2) tenemos que $F\in\ker T^*$. Así se ha encontrado un funcional $F\in\ker T^*$ tal que $F(y)\neq 0$. Luego tenemos que

$$y\notin{}^{\perp}\ker T^*$$

Por lo tanto

$$^{\perp}\ker T^* \subseteq \overline{T(X)}.$$

(4) Probemos que $\overline{T^*(X^*)} \subseteq \ker T^{\perp}$.

$f \in \overline{T^*(X^*)}$ entonces existe una sucesión $(g_n) \in T^*(X^*)$ tal que $g_n \to f$, luego existe (h_n) en X^* con $g_n = T^*(h_n) \quad \wedge \quad g_n \to f$, ahora sea $x \in \ker T$, $g_n(x) = (T^*h_n)(x) = h_n(Tx) = h_n(0) = 0$. Así entonces $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Por lo tanto $f \in \ker T^{\perp}$.

La igualdad se tiene cuando $T(X)$ es cerrado. Ver proposición 36.4 de [3].

Teorema 1.2. *Sea M un subespacio cerrado del espacio de Banach X. Entonces M^* es isométricamente isomorfo al cociente $X^*/M^{\perp}$, mientras que $\left(X/M\right)^*$ es isométricamente isomorfo a $M^{\perp}$.*

Prueba

Sea $J_M : M \to X$ la función inclusión natural de M en X, dada por

$$J_M(x) = x \quad \text{para todo} \quad x \in M.$$

Entonces, el dual $J_M^* : X^* \to M^*$ es el operador $J_M^*(f) = f\big|_M$, donde $f\big|_M$ es la restricción de $f \in X^*$ a M. Esta igualdad se tiene, ya que para $f \in X^*, J_M^*(f) \in M^*$, así para cada $x \in M$

$$J_M^*(f)(x) = f(J_M(x)) = f(x).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f \in \ker J_M^* \Leftrightarrow J_M^*(f) \equiv 0 &\Leftrightarrow f\big|_M = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in M \\ &\Leftrightarrow f \in M^{\perp}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\ker J_M^* = M^\perp.$$

Definamos ahora $W : X^*/M^\perp \to M^*$ por

$$W(f+M^\perp) := J_M^*(f) \quad \text{para cada} \quad f \in X^*.$$

Veamos que W es una isometría.

$$\begin{aligned}\|W(f+M^\perp)\| = \|J_M^*(f)\| = \|f\big|_M\| &= \sup_{\substack{x\in M\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}\\ &= \sup_{\substack{x\in M\\ x\neq 0\\ g\in M^\perp}} \frac{|(f+g)(x)|}{\|x\|}\end{aligned}$$

Ahora

$$\sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in M\\ g\in M^\perp}} \frac{|(f+g)(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in X\\ g\in M^\perp}} \frac{|(f+g)(x)|}{\|x\|} = \|f+g\|$$

De esta forma

$$\operatorname*{ínf}_{g\in M^\perp} \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in M}} \frac{|(f+g)(x)|}{\|x\|} \leq \operatorname*{ínf}_{g\in M^\perp} \|f+g\| = \|f+M^\perp\|$$

Por lo tanto

$$\|W(f+M^\perp)\| \leq \|f+M^\perp\|$$

Pero

$$\begin{aligned}
\|f+M^{\perp}\| = \inf_{g\in M^{\perp}} \|f+g\| &= \inf_{g\in M^{\perp}} \left(\sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in X}} \frac{\|(f+g)(x)\|}{\|x\|} \right) \\
&\leq \inf_{g\in M^{\perp}} \left(\sup_{x\in M-\{0\}} \frac{\|(f+g)(x)\|}{\|x\|} \right) \\
&\leq \sup_{\substack{g\in M^{\perp}\\ x\in M-\{0\}}} \left(\frac{\|(f+g)(x)\|}{\|x\|} \right) \\
&= \sup_{x\in M-\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\
&= \|f\big|_M\| \\
&= \|W(f+M^{\perp})\|,
\end{aligned}$$

y junto a lo anterior se tiene que

$$\|W(f+M^{\perp})\| = \|f+M^{\perp})\|.$$

Teniéndose que W es una isometría, y consecuentemente W es inyectiva.

Veamos ahora que W es sobreyectiva.

En efecto, si $f\in M^*$, por consecuencia del teorema de Hahn-Banach existe $F\in X^*$ tal que $F\big|_M = f$.

Ahora

$$W(F+M^{\perp}) = J_M^*(F) = F\big|_M = f.$$

Esto demuestra que la aplicación W es sobreyectiva.

Luego W es biyectiva y por lo tanto M^* es isométricamente isomorfo a $X^*/M^{\perp}$.

Probemos el segundo enunciado, que $\big(X/M\big)^*$ es isométricamente isomorfo a $M^{\perp}$.

Sea $Q_M : X \to X/M$ dada por $Q_M(x) = \bar{x}$ consideremos su dual

$$Q_M^* : (X/M)^* \to X^*.$$

Veamos que Q_M^* es una isometría.

En efecto, sea $f \in (X/M)^*$

$$\begin{aligned}
\|Q_M^* f\| &= \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|Q_M^* f)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|f(Q_M(x))\|}{\|x\|}, \\
&= \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|f(x+M)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X - M} \frac{\|f(x+M)\|}{\|x\|}, \\
&\leq \sup_{\bar{x} \neq \bar{0}} \frac{\|f(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} = \|f\|, \quad \text{ya que} \quad \|x\| \geq \|\bar{x}\|.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|f\| = \sup_{\bar{x} \neq \bar{0}} \frac{\|f(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} = \sup_{x \in X - M} \frac{\|f(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} &\leq \sup_{x \in X} \frac{\|f(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|}, \|\bar{x}\| \neq 0 \\
&= \sup_{x \in X} \frac{\|f(Q_M(x))\|}{\|\bar{x}\|}, \|\bar{x}\| \neq 0 \\
&= \sup_{x \in X} \frac{\|Q_M^*(f(x))\|}{\|\bar{x}\|}, \|\bar{x}\| \neq 0
\end{aligned}$$

pero para $\varepsilon > 0$.

$$\|\bar{x}\| + \varepsilon = \inf_{y \in M} \|x - y\| + \varepsilon \geq \|x - y_0\| \text{ con } y_0 \in M.$$

luego

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in X} \frac{\|Q_M^*(f(x))\|}{\|\bar{x}\| + \varepsilon} &\leq \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y_0 \in M}} \frac{\|Q_M^*(f(x))\|}{\|x - y_0\|} \\
&= \sup_{w \in X - \{y_0\}} \frac{\|Q_M^*(f(w + y_0))\|}{\|w\|}, w = x - y_0 \\
&= \|Q_M^* f\|
\end{aligned}$$

Entre tanto $\|Q_M^* f\| = \|f\|$, para todo $f \in \left(X/M\right)^*$, teniéndose que Q_M^* es una isometría.

Además

$$\begin{aligned} Q_M(x) = 0 &\Rightarrow x + M = 0 \\ &\Rightarrow x \in M \end{aligned}$$

por lo tanto $\ker(Q_M) \subseteq M$.
y si $y \in M$ entonces $Q_M(y) = y + M = M = \widetilde{0}$
Por lo que $y \in \ker(Q_M)$.
Se decuce asi que $\ker(Q_M) = M$.
Teniéndose que $\ker(Q_M)^{\perp} = M^{\perp}$ y $Q_M^*((X/M)^*) = (\ker Q_M)^{\perp} = M^{\perp}$, puesto que $Q_M(X)$ es cerrado.
Por lo tanto $(X/M)^*$ es isométricamente isomorfo a $M^{\perp}$.

Definición 1.2. *Dado un operador $T \in L(X)$ decimos que es bounded below si T es inyectivo y tiene rango cerrado.*

Teorema 1.3. *Un operador $T \in L(X)$ es bounded below si y solo si existe un $k > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \geq k\|x\| \quad \textit{para todo} \quad x \in X. \tag{5}$$

Prueba.
Supongamos que $Tx = 0$. Entonces,

$$k\|x\| \leq 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Así tenemos que T es inyectiva.

Veamos que $T(X)$ es cerrado, por hipótesis existe $k > 0$ tal que $\|x\|k \leq \|Tx\|$ para todo $x \in X$.

Consideremos una sucesión (x_n) en X para la cual (Tx_n) converge a un $y \in X$, luego la sucesión (Tx_n) es de Cauchy, esto es, dado $\varepsilon > 0, \exists N$ tal que para todo $n, m > N$

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| < \varepsilon.$$

Pero

$$k\|x_n - x_m\| \leq \|T(X_n - X_m)\| < \varepsilon.$$
$$\Rightarrow \quad \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Así (x_n) es una sucesión de Cauchy y en consecuencia converge a algún $x \in X$. Dado que T es contínuo, entonces $Tx = y$ y por lo tanto $T(X)$ es cerrado.

Recíprocamente, si T es inyectivo y tiene rango cerrado por teorema 36.1 de [3] se tiene que T tiene inversa contínua, y por teorema 14.9 de [4] se sigue que existe $k > 0$, tal que

$$\|Tx\| \geq k\|x\|, \text{ para todo } x \in X. \qquad \square$$

Definimos el módulo de inyectividad de T a la cantidad

$$j(T) := \inf_{\|x\|=1} \|Tx\| = \inf_{x \neq 0} \frac{\|T_x\|}{\|x\|}.$$

De (5) tenemos que T es bounded below $\Leftrightarrow j(T) > 0$.

En efecto, supongamos que T es bounded below, así tenemos que existe $k > 0$ tal que para todo $x \in X - \{0\}$.

$$\|Tx\| \geq k\|x\| \qquad x \neq 0,$$
$$\Rightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq k > 0 \qquad x \neq 0,$$

luego k es cota inferior del conjunto

$$\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; x \neq 0 \right\}.$$

Así $j(T) := \inf\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq k > 0$.

Recíprocamente, si $j(T) := \inf\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} > 0$, entonces existe $k > 0$ tal que $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq k$, teniéndose que $\|Tx\| \geq k\|x\|$, y por teorema 1.3 se sigue que T es bounded below y en este caso $j(T) = \gamma(T)$.

Teorema 1.4. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach. Entonces:*

i) T es sobreyectivo (respectivamente, bounded below) si y solo si T^* es bounded below (respectivamente, sobreyectivo);

ii) Si T es bounded below (respectivamente, sobreyectivo) entonces $\lambda I - T$ es bounded below (respectivamente, sobreyectivo) para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.

Prueba

i) Supongamos que T es sobreyectivo, esto es $T(X) = X$, así T tiene rango cerrado y por lo tanto T^* tiene rango cerrado. Por otro lado de la igualdad

$$\ker T^* = \overline{T(X)}^{\perp} = T(X)^{\perp} = X^{\perp} = \{0\}$$

Concluimos que T^* es inyectivo y por lo tanto T^* es bounded below.

Supongamos que T es bounded below, así T tiene rango cerrado y es inyectivo por lo tanto T^* tiene rango cerrado. Luego de la igualdad siguiente:

$$T^*(X^*) = \overline{T^*(X^*)} = \ker T^{\perp} = \{0\}^{\perp} = X^*.$$

Tenemos que T^* es sobreyectivo.

Por otro lado, supongamos que T^* es bounded below. Entonces T^* tiene rango cerrado y por ende T también tiene rango cerrado. Además de la igualdad

$$T(X) = \overline{T(X)} =^{\perp} \ker T^* =^{\perp} \{0\} = X.$$

Concluimos que T es sobreyectivo.

Si suponemos que T^* es sobreyectivo, entonces T^* tiene rango cerrado y por ende T tiene rango cerrado. Por otro lado de la igualdad

$$\ker T =^{\perp} \overline{T^*(X^*)} =^{\perp} T^*(X^*) =^{\perp} X^* = \{0\},$$

tenemos que T es inyectivo, y por lo tanto T es bounded below.

ii) Supóngase que T es bounded below; es decir, T es inyectivo y tiene rango cerrado. Entonces $\gamma(T) > 0$ y de la definición de $\gamma(T)$ obtenemos que

$$\gamma(T).dis(x, \ker T) = \gamma(T)\|x\| \leq \|Tx\| \text{ para todo } x \in X.$$

Luego, de la desigualdad anterior tenemos que

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \|Tx\| - |\lambda|\,\|x\| \geq (\gamma(T) - |\lambda|)\|x\|.$$

Así, para todo $|\lambda| < \gamma(T)$ y por teorema 1.3, tenemos que $\lambda I - T$ es bounded below.

En el caso que T sea sobreyectivo, se sigue usando la parte (i) y el dual T^*.

Teorema 1.5. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach y supóngase que existe un subespacio cerrado Y de X, tal que $T(X) + Y$ es cerrado y $T(X) \cap Y = \{0\}$.*

Entonces el subespacio $T(X)$ es también cerrado.

Prueba

Consideremos el espacio producto $X \times Y$ bajo la norma

$$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|, x \in X, y \in Y.$$

Entonces $X \times Y$ es un espacio de Banach.

La función lineal contínua $S : X \times Y \to X$ definida por $S(x,y) := Tx + y$ tiene rango

$$S(X \times Y) = T(X) + Y,$$

el cual es cerrado por hipótesis. En consecuencia

$$\gamma(S) := \inf_{(x,y) \notin \ker S} \frac{\|S(x,y)\|}{dist((x,y), kerS)} > 0 \text{ (por teorema 1.1).}$$

Además, $\ker S = \ker T \times \{0\}$, así

$$dis((x,0), kerS) = dist(x, \ker T).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \|Tx\| = \|S(x,0)\| &\geq \gamma(S) dis((x,0), kerS)) \\ &= \gamma(S) dist(x, \ker T). \end{aligned}$$

De esto se sigue que, $\dfrac{\|Tx\|}{dist(x, \ker T\}} \geq \gamma(S)$, implicando que $\gamma(T) \geq \gamma(S) > 0$.

Por lo tanto, T tiene rango cerrado.

Recordemos que la suma $M + N$ de dos subespacios M y N de un espacio vectorial X, es también un subespacio. Si $M \cap N = \{0\}$, entonces esta suma es llamada la suma directa de M y N denotada por $M \oplus N$. Si $X = M \oplus N$, entonces N es llamado el complemento algebraico de M. A partir de esto, se define la codimensión de un subespacio M de X a la dimensión de cada complemento algebraico N de M, o equivalentemente la dimensión del cociente X/M.

Corolario 1.1. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, Y un subespacio finito-dimensional de X tal que $T(X)+Y$ es cerrado. Entonces $T(X)$ es cerrado. En particular, si $T(X)$ tiene codimensión finita, entonces $T(X)$ es cerrado.*

Prueba

Sea Y_1 cualquier subespacio de Y para el cual

$$Y_1 \cap T(X) = \{0\} \quad \text{y} \quad T(X)+Y_1 = T(X)+Y.$$

Tenemos por hipótesis que $T(X)+Y_1$, es cerrado, así por teorema 1.5 $T(X)$ es cerrado.

El segundo enunciado es claro, ya que cada subespacio finito-dimensional de un espacio de Banach X es cerrado. $\square$

Consideremos ahora que $X = M \oplus N$ y $x = y+z$ con $y \in M$ y $z \in N$.

Definimos $P : X \to M$, por $Px := y$, la función proyección lineal de X sobre M a lo largo de N, es claro que $I-P$ es la proyección de X sobre N a lo largo de M y tenemos que

$$P(X) = \ker(I-P) = M, \ker P = (I-P)(X) = N \quad \text{con} \quad P^2 = P.$$

Es decir, P es un operador idempotente. Supóngase ahora que X es un espacio de Banach. Si $X = M \oplus N$ y la proyección P es contínua, entonces decimos que M es complementado y decimos que N es el complemento topológico de M.

Definición 1.3. *$T \in L(X,Y), X$ es espacio de Banach, decimos que T es relativamente regular, si existe un operador $S \in L(Y,X)$ para el cual*

$$T = TST \text{ y } S = STS.$$

Teorema 1.6. *Un operador acotado $T \in L(X,Y)$ es relativamene regular si y solo si $\ker T$ y $T(X)$ son complementados.*

Prueba. *Ver teorema 1.10 de [2].*

1.2. Ascent y Descent

Denotemos por $T^n, n \in \mathbb{N}$ la iteración-composición del operador lineal T, donde T^0 denota la identidad en X. Sabemos que la cadena de los núcleos de las iteraciones es una cadena creciente; esto es,

$$\ker T^o = \{0\} \subseteq \ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq ...$$

y los rangos de las iteraciónes T^n, es una cadena decreciente.

$$T^o(X) = X \supseteq T(X) \supseteq T^2(X) \supseteq ...$$

Definimos el subespacio

$$\mathcal{N}^\infty(T) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^n$$

como el Hiper-Kernel de T, mientras que el subespacio

$$T^\infty(X) := \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(X)$$

es llamado el Hiper-Rango de T.

Ambos subespacios $\mathcal{N}^\infty(T)$ y $T^\infty(X)$ son subespacios lineales T-invariantes; es decir,

$$T(\mathcal{N}^\infty(T)) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \quad \text{y} \quad T(T^\infty(X)) \subseteq T^\infty(X),$$

pués si $y \in T(\mathcal{N}^\infty(T))$ entonces existe $x \in \mathcal{N}^\infty(T)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$y = T(x) \quad \text{y} \quad x \in \ker T^n.$$

Ahora, $T^{n-1}(y) = T^{n-1}(T(x)) = T^n(x) = 0$, es decir $y \in \ker T^{n-1}$, y por lo tanto $y \in \mathcal{N}^\infty(T)$, así

$$T(\mathcal{N}^\infty(T)) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T).$$

Por otro lado, sea $y \in T(T^\infty(X))$ entonces existe $x \in T^\infty(X)$, tal que $y = T(x)$, pero si $x \in T^\infty(X)$ tenemos que $x \in T^n(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así existe $x_n \in X$ tal que $T^n(x_n) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $y \in T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $T(T^\infty(X)) \subseteq T^\infty(X)$.

Lema 1.1. *Para cada operador lineal T en un espacio vectorial X tenemos que*

$$T^m(\ker T^{m+n}) = T^m(X) \cap \ker T^n \quad \textit{para todo} \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

Prueba

Si $x \in \ker T^{m+n}$, entonces $T^n(T^m x) = 0$, luego $T^m(x) \in \ker T^n$ y $T^m(x) \in T^m(X)$. Así que

$$T^m(\ker T^{m+n}) \subseteq T^m(X) \cap \ker T^n.$$

Por otro lado, sea $y \in T^m(X) \cap \ker T^n$ entonces $y = T^m(x)$ para algún $x \in X$ y $T^n(y) = 0$, así que $T^n(y) = T^n(T^m(x)) = 0$, lo que implica que $x \in \ker T^{m+n}$ y por lo tanto $T^m(X) \cap \ker T^n \subseteq T^m(\ker T^{m+n})$. □

El próximo resultado establece la relación entre los Kernel y los rangos de los iterados T^n de un operador T en un espacio vectorial X.

Teorema 1.7. *Para un operador lineal T en un espacio vectorial X, las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) $\ker T \subseteq T^m(X)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$;

ii) $\ker T^n \subseteq T(X)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$;

iii) $\ker T^n \subset T^m(X)$ *para cada* $m,n \in \mathbb{N}$;

iv) $\ker T^n = T^m(\ker T^{m+n})$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Prueba

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Sea

$$y \in \ker T^n = T^m(\ker T^{m+n}),$$

por el lema anterior

$$T^m(\ker T^{m+n}) = T^m(X) \cap \ker T^n,$$

para cada $m,n, \in \mathbb{N}$, por lo tanto $y \in T^m(X)$.

Así $\ker T^n \subset T^m(X)$ para cada $m,n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Es trivial ya que $T^m(X) \subseteq T(X)$ para $m \geq 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Aplicando la inclusión (ii) al operador T^m, tenemos que $\ker(T^m)^n \subseteq T^m(X)$ y dado que $\ker T \subseteq \ker(T^m)^n$ tenemos que

$$\ker T \subseteq \ker(T^m)^n \subseteq T^m(X).$$

(i) $\Rightarrow$ (iv). Aplicando la inclusión (i) al operador T^n, tenemos que

$$\ker T^n \subseteq (T^n)^m(X) \subseteq T^m(X).$$

Por el lema 1.1 tenemos que

$$T^m(\ker T^{m+n}) = T^m(X) \cap \ker T^n = \ker T^n.$$

$\square$

Corolario 1.2. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Entonces los enunciados del teorema anterior son equivalentes a las inclusiones siguientes:*

i) $\ker T \subseteq T^{\infty}(X)$;

ii) $\mathcal{N}^{\infty}(T) \subseteq T(X)$;

iii) $\mathcal{N}^{\infty}(T) \subseteq T^{\infty}(X)$.

Definición 1.4. *Dado un operador lineal T en un espacio vectorial X, decimos que T tiene ascent finito si $\mathcal{N}^{\infty}(T) = \ker T^{k+1} = \ker T^{k}$ para algún entero positivo k, en este caso el entero positivo más pequeño $p := p(T)$ tal que $\ker T^{p} = \ker T^{p+1}$, lo llamaremos el ascent de T. Si tal entero no existe, entonces tenemos que $p(T) := \infty$.*

Análogamente, decimos que T tiene descent finito si $T^{\infty}(X) = T^{k+1}(X) = T^{k}(X)$ para algún entero k. Al entero positivo más pequeño $q := q(T)$ tal que $T^{q}(X) = T^{q+1}(X)$ es llamado el descent de T. Si tal entero no existe, entonces $q(T) := \infty$.

Es claro que $p(T) = 0$ si y solo si T es inyectivo y $q(T) = 0$ si y solo si T es sobreyectivo.

Lema 1.2. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Para un natural positivo m, las siguientes condiciones son válidas.*

i) $p(T) \leq m < \infty$ *si y solo si para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $T^{m}(X) \cap \ker T^{n} = \{0\}$;

ii) $q(T) \leq m < \infty$ *si y solo si para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe un subespacio* $Y_n \subseteq \ker T^{m}$ *tal que* $X = Y_n \oplus T^{n}(X)$.

Prueba

i) Supongamos que $p(T) \leq m < \infty$, sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $y \in T^{m}(X) \cap \ker T^{n}$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = T^{m}(x)$ y $T^{n}(y) = 0$, así $T^{m+n}(x) = T^{n}(y) = 0$, por lo tanto $x \in \ker T^{m+n} = \ker T^{m}$, de allí tenemos que $y = T^{m}(x) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $T^m(X) \cap \ker T^n = \{0\}$ para algún natural m y todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in \ker T^{m+1}$ entonces $T^{m+1}x = T(T^m x) = 0$, así $T^m x \in \ker T$ y por lo tanto

$$T^m x \in (T^{m+1}(X) \cap \ker T) \subseteq (T^m(X) \cap \ker T^n) = 0.$$

Así $x \in \ker T^m$ y ya que la inclusión $\ker T^m \subseteq \ker T^{m+1}$ es válida, tenemos que $\ker T^m = \ker T^{m+1}$, esto indica que $p(T) \leq m < \infty$.

ii) Sea $q := q(T) \leq m < \infty$ y sea Y un subespacio complementario de $T^n(X)$ en X. Sea $\{x_j : j \in J\}$ una base de Y. Dado que $T^q(Y) \subseteq T^q(X) = T^{q+n}(X)$ se tiene que para cada elemento x_j de la base, existe un elemento $y_j \in X$ tal que $T^q(x_j) = T^{q+n}y_j$.
Sea $z_j := x_j - T^n(y_j)$, entonces
$T^q(z_j) = T^q(x_j) - T^{q+n}(y_j) = 0.$

Luego se sigue que el subespacio lineal Y_n generado por los elementos z_j está contenido en el $\ker T^q$ y por ende en el $\ker T^m$ (II).

De la descomposición $X = Y \oplus T^n(X)$, tenemos, para cada $x \in X$ una representación de la forma

$$\begin{aligned} x = \sum_{j\in J} \lambda x_j + T^n(y) &= \sum_{j\in J} \lambda_j (z_j + T^n y_i) + T^n y, \\ &= \sum_{j\in J} \lambda_j z_j + \lambda_1 T^n y_1 + \lambda_2 T^n y_2 + \ldots + T^n y, \\ &= \sum_{j\in J} \lambda_j z_j + T^n(z),\, z = \sum_{j\in J} \lambda_j T^n y_j + T^n(y) \quad (T^n \text{ es lineal y continuo}). \end{aligned}$$

Asì, $X = Y_n + T^n(X)$. Para mostrar que la suma es directa, tenemos que probar que $Y_n \cap T^n(X) = \{0\}$, en efecto, sea

$$w \in Y_n \cap T^n(X), \quad \text{así} \quad w = \sum_{j\in J} \mu_j z_j \quad \text{y} \quad w = T^n(v).$$

$w = \sum\limits_{j \in J} \mu_j z_j = T^n(v)$ y por lo tanto

$$\sum_{j \in J} \mu_j x_j - \sum_{j \in J} \mu_j T^n(y_j) = T^n(v) \in T^n(X).$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j \in J} \mu_j x_j = \sum_{j \in J} \mu_j T^n(y_i) + T^n(v) \in T^n(X).$$

De la descomposición $X = Y \oplus T^n(X)$ y como $\sum\limits_{j \in J} \mu_j x_j \in Y$ obtenemos que $\mu_j = 0$, para todo $j \in J$ y en consecuencia $w = 0$ y por lo tanto

$$X = Y_n \oplus T^n(X), \quad \text{con} \quad Y_n \subseteq \ker T^m.$$

Recíprocamente, si para cada $n \in \mathbb{N}$ el subespacio $T^n(X)$ tiene un complemento $Y_n \subseteq \ker T^m$, entonces $T^m(X) = T^m(Y_n) + T^{m+n}(X) = T^{m+n}(X)$, y por lo tanto $q(T) \leq m$.

Teorema 1.8. *Si $p(T)$ y $q(T)$ son ambos finitos, entonces $p(T) = q(T)$.*

Prueba

Sean $p(T) := p$ y $q(T) := q$ con $p \leq k < \infty$ y $q \leq m < \infty$, y probaremos que $p \leq q$ y $q \leq p$.

Supongamos primero que $p \leq q$, luego la inclusión $T^q(X) \subseteq T^p(X)$ es válida. Podemos asumir que $0 < q < m$. Así, por parte (ii) del lema 1.2 tenemos que con el subespacio $\ker T^q \subseteq \ker T^m$ podemos escribir $X = \ker T^q + T^q(X)$, así para cada $y := T^p x \in T^p(X)$ con $T^p(X) \subseteq X$, admitimos la siguiente descomposición $y = z + T^q(w)$, con $z \in \ker T^q$. De allí $z = T^p x - T^q(w) \in T^p(X)$ luego obtenemos que $z \in \ker T^q \cap T^p(X) = \{0\}$ por la parte (i) del lema 1.2. Por lo tanto $y = T^q(w) \in T^q(X)$, así se sigue que $T^p(X) \subseteq T^q(X)$, y de aquí tenemos que $q \leq p$, así que $p = q$.

Supongamos ahora que $q \leq p$ y $p > 0$, luego la inclusión $\ker T^q \subseteq \ker T^p$ es válida. Por la parte (ii) del lema 1.2 tenemos que $X = \ker T^q + T^p(X)$, así que para un elemento arbitrario $x \in \ker T^p \subseteq X$, admitimos la siguiente representación:

$$x = u + T^p(v), \quad \text{con} \quad u \in \ker T^q \qquad (I).$$

como $kerT^q \subseteq \ker T^p$, entonces $T^p(x) = T^p(u) = 0$ y por (I) se sigue que $T^{2p}(v) = 0$, así que $v \in \ker T^{2p} = \ker T^p$ luego $T^p(v) = 0$ y consecuentemente $x = u \in \ker T^q$ lo que implica que $\ker T^p \subseteq \ker T^q$ obteniendo que $q \geq p$ y por lo tanto $p = q$. $\square$

En lo que sigue, para cada operador acotado $T \in L(X,Y)$ denotamos por $\alpha(T)$ la nulidad de T; definida como $\alpha(T) := dim \ker T$, mientras que $\beta(T)$ es definida como $\beta(T) := codim T(X) = dim Y/T(X)$.

Denotamos por $\Delta(X)$ al conjunto de todos los operadores lineales definidos sobre un espacio vectorial X para el cual la nulidad $\alpha(T)$ y la deficiencia $\beta(T)$ son ambos finitos.

Ahora, para cada $T \in \Delta(X)$, el índice de T es definido por

$$ind\, T := \alpha(T) - \beta(T).$$

Teorema 1.9. *(Teorema del Índice)*
Sea X un espacio vectorial, $T,S, \in \Delta(X)$. Entonces $ST \in \Delta(X)$. Además

$$ind\, TS = ind\, T + ind\, S$$

Prueba

Ver teorema 23.1 de [3].

Nota 1:

Sean T y $A \in L(X)$ dos operadores tales que $\beta(T)$ y $\beta(A)$ son finitos asi $T(X)$ y $A(X)$ admiten al menos un complemento algebraico.

Digamos que:

$$\begin{cases} X := T(X) \oplus N \\ X := A(X) \oplus M \end{cases} \qquad (I)$$

Con N y M finitos dimensionales.

Notemos que de (I)

$$X = T(X) \oplus N = T(A(X)) + T(M) + N$$

con $T(M)$ y N finitos dimensionales.

Así $\beta(TA)$ es finito, similarmente $\beta(AT)$ es finito.

De lo anterior concluimos que la compuesta o producto de operadores que son finitos codimensionales es finito codimensional.

Se prueba más adelante que $\alpha(T) = \beta(T^*)$, ahora supongamos que $\alpha(T)$ y $\alpha(A)$ son finitos, entonces se tiene que $\beta(A^*)$ y $\beta(T^*)$ son finitos, luego $\beta(T^*A^*)$ es finito, consecuentemente $\alpha(TA)$ es finito.

Así, el producto de operadores con nulidad finita, tiene nulidad finita.

Establecemos ahora unas relaciones entre las cantidades $\alpha(T), \beta(T), p(T)$ y $q(T)$.

Teorema 1.10. *Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial X, entonces los siguientes enunciados son válidos.*

i) Si $p(T) < \infty$ entonces $\alpha(T) \leq \beta(T)$;

ii) Si $q(T) < \infty$ entonces $\beta(T) \leq \alpha(T)$;

iii) Si $p(T) = q(T) < \infty$ entonces $\alpha(T) = \beta(T)$, posiblemente infinitos;

iv) Si $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y si $p(T)$ o $q(T)$ es finito , entonces $p(T) = q(T)$.

Prueba

i) Sea $p := p(T) < \infty$. Claramente si $\beta(T) = \infty$ no hay nada por probar. Asumimos que $\beta(T) < \infty$ lo que implica que $\beta(T^p)$ es finito. En vista del lema 1.2 parte (i) tenemos que $\ker T \cap T^p(X) \subseteq \ker T^n \cap T^p(X) = \{0\}$, lo que implica que $\ker T \cap T^p(X) = \{0\}$, como $\beta(T^p)$ es finito, entonces $\alpha(T) < \infty$, puesto que $\ker T - \{0\}$ está contenido en la codimensión de T^p.

Del teorema del Índice tenemos que para todo $n \geq p$ se sigue la igualdad:

$$n.ind\, T = ind\, T^n = \alpha(T^n) - \beta(T^n) \qquad (I).$$

Ahora, supongamos que $q := q(T) < \infty$. Para todo entero $n \geq \text{máx}\{p,q\}$, tenemos que

$$\ker T^p = \ker T^{p+1} = ... = \ker T^n = \ker T^{n+1} = ...$$

$$T^q(X) = T^{q+1}(X) = ... = T^n(X) = T^{n+1}(X) = ...$$

Luego,

$$\alpha(T^p) = \alpha(T^{p+1}) = ... = \alpha(T^{n+1}) = ... \quad \text{y} \quad \beta(T^q) = \beta(T^{q+1}) = ... = \beta(T^{n+1}) = ...$$

Así que, la cantidad $n.ind\, T = \alpha(T^n) - \beta(T^n)$ es entonces constante,para que tenga sentido la igualdad (I) debe tenerse que $ind\, T = 0$, teniéndose que $\alpha(T) = \beta(T)$.

Supongamos ahora que $q := q(T) = \infty$, entonces $\beta(T^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, así $n.ind\, T$ eventualmente es negativo, y en consecuencia $ind\, T < 0$. Y por lo tanto $\alpha(T) < \beta(T)$.

ii) Sea $q := q(T) < \infty$. Claramente si $\alpha(T) = \infty$ no hay nada que probar. Supongamos que $\alpha(T) < \infty$ lo que implica que $\alpha(T^q) < \infty$. Por la parte (ii) del lema 1.2, $X = Y \oplus T(X)$ con $Y \subset \ker T^q$ de aquí se sigue que

$$\beta(T) = dim Y \leq dim \ker T^q = \alpha(T^q) < \infty,$$

lo que implica que $\beta(T^q)$ es finito.

Por el teorema del Índice, tenemos que

$$n\, ind\, T = ind\, T^n = \alpha(T^n) - \beta(T^n)$$

Ahora, si $p := p(T) < \infty$ por el mismo argumento usado en la parte (i) tenemos que para todo $n \geq \text{máx}\{p, q\}$ la cantidad $n.ind\, T = \alpha(T^n) - \beta(T^n)$ es constante, por lo que $ind\, T = 0$ teniendo que $\alpha(T) = \beta(T)$.

Además de lo anterior, supongamos que $p = \infty$, luego tenemos que $\alpha(T^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, así que $n.ind\, T$ es eventualmente positivo, y en consecuencia $ind\, T > 0$, y por lo tanto tenemos que $\beta(T) < \alpha(T)$.

iii) Es claro por la parte (i) y (ii)

iv) Es inmediato, ya que $\alpha(T^n) - \beta(T^n) = ind\, T^n = n.ind\, T = 0$ es válido para cada $n \in \mathbb{N}$. Teniéndose que $\alpha(T^n) = \beta(T^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (II).

Luego,

si $p(T) < \infty$, entonces para $n \geq p, \alpha(T^p) = \alpha(T^{p+1}) = ...\alpha(T^n) = \alpha(T^{n+1}) < \infty$, y $q(T)$ no debe ser infinito, ya que si fuese así $\beta(T^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, contradiciendo la igualdad (II). Similarmente si $q(T)$ es finito, resulta que $p(T)$ finito, y por teorema 1.8 $p(T) = q(T)$.

1.3. Core analítico y Core algebraico

Definición 1.5. *Dado un operador lineal T definido sobre un espacio vectorial X, el core algebraico $C(T)$ de T es definido por el subespacio lineal M más grande, tal que $T(M) = M$.*

Note que para cada operador lineal T tenemos que $C(T) = T^n(C(T)) \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

También se prueba que $C(T)$ es el conjunto de todos los $x \in X$ tal que existe una sucesión $(x_n)_{n=0,1,...}$ de manera que $x_o = x, Tx_{n+1} = x_n$ para todo $n = 0, 1, 2, ...$

Prueba

Definamos $A = \{x \in X/$ existe una sucesión $(x_n) \subset X$, tal que $x_o = x, T(x_{n+1}) = x_n\}$.

Sea $x \in C(T) \Rightarrow x \in T^n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, y consideremos $x_n \in T^n(X) = T(T^{n-1}(X))$, entonces existe un $b \in T^{n-1}(X)$ tal que $T(b) = x_n$.

Ahora hacemos $x_{n+1} = b$ y definimos $x_o = x$, luego la sucesión (x_n) cumple con la condición de A por lo que $x \in A$, entre tanto se concluye que $C(T) \subset A$.

Ahora veamos que $A \subseteq C(T)$, para esto basta con probar que $T(A) = A$.

Claramente $T(A) \subseteq A$, veamos que $A \subseteq T(A)$.

Sea $x \in A$, así existe una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $x_0 = x$ y $T(x_{n+1}) = x_n$, luego $T(x_1) = x_o = x$.Definimos (y_n) en X como sigue: $y_0 = x_1$, $y_n = x_{n+1}$, así $T(y_{n+1}) = T(x_{n+2}) = x_{n+1} = y_n$ de donde $x_1 \in A$.

Concluyéndose que $x = T(x_1) \in T(A)$.

Así $A \subseteq T(A)$ y por lo tanto $A = T(A)$ y en consecuencia $A \subseteq C(T)$.

Trivialmente se prueba que si $T \in L(X)$ es sobreyectivo, entonces $C(T) = X$.

Lema 1.3. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\ker T \cap T^m(X) = \ker T \cap T^{m+k}(X) \quad \textit{para todo entero} \quad k \geq 0$$

entonces

$$C(T) = T^\infty(X).$$

Prueba

Sabemos que $C(T) \subseteq T^\infty(X)$, probaremos que $T^\infty(X) \subseteq C(T)$.

Para esto, basta con probar que $T(T^\infty(X)) = T^\infty(X)$ (por la maximalidad de $C(T)$).

Dado que $T^\infty(X)$ es T-invariante, se tiene que $T(T^\infty(X)) \subset T^\infty(X)$.

Veamos ahora que $T^\infty(X) \subseteq T(T^\infty(X))$,pues, por hipótesis

$$\begin{aligned} D &= \ker T \cap T^m(X) \\ &= \ker T \cap T^{m+k}(X) \quad \text{para todo entero} \quad k \geq 0 \\ &= \ker T \cap T^\infty(X) \end{aligned}$$

Ahora, sea $y \in T^\infty(X)$, así $y \in T^n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ en particular $y \in T^{m+k}(X)$ para todo $k \geq 0$, esto implica que existen $x_k \in X$ tal que $y = T^{m+k}(x_k) \quad \forall k \geq 0$.

Definamos

$$B = \{z_k \in X / z_k = T^m(x_1) - T^{m+k-1}(x_k), \quad \forall k \geq 0\}.$$

Notemos que $T^{m+k}(X) \subseteq T^{m+k-1}(X) \subseteq T^m(X)$, luego

$T^{m+k-1}(x_k) \in T^{m+k-1}(X) \subseteq T^m(X)$. Asi

$T^{m+k-1}(x_k) \in T^m(X)$,

y dado que $\quad T^m(x_1) \in T^m(X) \quad$ se tiene que

$z_k = T^m(x_1) - T^{m+k-1}(x_k) \in T^m(X)$.

Ahora

$$\begin{aligned} T(z_k) &= T(T^m(x_1) - T^{m+k-1}(x_k)) \\ &= T^{m+1}(x_1) - T^{m+k}(x_k) = y - y = 0 \end{aligned}$$

teniendo que $\; z_k \in \ker T$.

Así

$$z_k \in D = \ker T \cap T^{m+k}(X) \subseteq \ker T \cap T^{m+k-1}(X)$$

Por lo que $\quad z_k \in T^{m+k-1}(X)$.

Luego como

$$T^m(x_1) = z_k + T^{m+k-1}(x_k)$$

$$\Rightarrow T^m(x_1) \in T^{m+k-1}(X) \quad \forall k \geq 0$$

$$\Rightarrow T^m(x_1) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} T^{m+k-1}(X) = T^{\infty}(X)$$

$$\Rightarrow T^m(x_1) \in T^{\infty}(X)$$

$$\Rightarrow T(T^m(x_1)) \in T(T^{\infty}(X)$$

$$\Rightarrow T^{m+1}(x_1) \in T(T^{\infty}(X))$$

$$\Rightarrow y \in T(T^{\infty}(X)) \quad \text{(dado que)} \quad y = T^{m+k}(x_k) \quad \forall k \geq 0)$$

$$\text{entre tanto} \quad T^{\infty}(X) \subseteq T(T^{\infty}(X)).$$

Teorema 1.11. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Supóngase que una de las siguientes condiciones son válidas:*

i) $\alpha(T) < \infty$;

ii) $\beta(T) < \infty$;

iii) $\ker T \subseteq T^n(X)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $C(T) = T^\infty(X)$.

Prueba

i) Si $\ker T$ es de dimensión finita, entonces existe un entero positivo m tal que

$$\ker T \cap T^m(X) = \ker T \cap T^{m+k}(X) \quad \text{para todo} \quad k \geq 0.$$

y es suficiente con aplicar el lema anterior.

ii) Supongamos que $\beta(T) < \infty$, sea $X = F \oplus T(X)$ con $dim(F) < \infty$.

Sea $D_n = \ker T \cap T^n(X), \quad n \in \mathbb{N}$

$D_{n+1} = \ker T \cap T^{n+1}(X) \subseteq \ker T \cap T^n(X) = D_n$

luego, $D_{n+1} \subseteq D_n$.

Supongamos que existe un k, tal que los subespacios D_n son distintos; es decir,

$$D_j \neq D_{j+1}, \quad \forall j = 1,2,3,...,k.$$

Así, existen $T^j(w_j) \in D_j$ pero $T^j(w_j) \notin D_{j+1}$ con $w_j \in X$.

Como $X = F \oplus T(X)$, existen $u_j \in F, v_j \in T(X)$, tales que $w_j = u_j + v_j$.

Veamos que los u_j son linealmente independientes. Supongamos que $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = 0$

Así, $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j w_j = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$, como $w_j \in X$ es tal que $T^j(w_j) \in D_j$, entonces

$$T^j(w_j) \in \ker T \cap T^j(X).$$

Por lo tanto

$T^j(w_j) \in \ker T$, para $j = 1, 2, ..., k$

luego,

$$\begin{array}{ccc} T(w_1) \in \ker T & \Rightarrow & T^k(w_1) = 0 \\ T^2(w_2) \in \ker T & \Rightarrow & T^k(w_2) = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ T^{k-1}(w_{k-1}) \in \ker T & \Rightarrow & T^k(w_{k-1}) = 0 \end{array}$$

De aquí, dado que $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j w_j = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$, entonces $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j w_j + \lambda_k w_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$

$\Rightarrow T^k\left(\sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j w_j + \lambda_k w_k\right) = T^k\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j v_j\right)$

$\Rightarrow \lambda_k T^k(w_k) = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j T^k(v_j) \in T^{k+1}(X)$ (ya que $v_j \in T(X)$) $\quad (I)$

Como

$T^k(w_k) \in D_k = \ker T \cap T^k(X)$

$\Rightarrow T^k(w_k) \in \ker T \Rightarrow \lambda_k T^k(w_k) \in \ker T \quad$ (II)

De (I) y (II) se tiene que, $\lambda_k T^k(w_k) \in D_{k+1}$, y dado que $T^k w_k \notin D_{k+1}$, esto es posible solo si $\lambda_k = 0$.

Siguiendo este proceso se muestra que $\lambda_{k-1} = \lambda_{k-2} = ... = \lambda_1 = 0$, así los vectores $u_1, u_2, ..., u_k$ son linealmente independientes.

De esto tenemos que $k \leq dim(F) < \infty$, pero entonces para un m suficientemente grande tenemos que $\ker T \cap T^m(X) = \ker T \cap T^{m+j}(X) \quad \forall_j \geq 0$ luego se aplica el Lema 1.3.

iii) Si $\ker T \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\ker T \cap T^n(X) = \ker T \cap T^{n+k}(X) = \ker T \quad \text{para todo entero} \quad k \geq 0.$$

Aplicando lema 1.3 se tiene que $C(T) = T^{\infty}(X)$.

Teorema 1.12. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Entonces tenemos*

i) Si $p(T)$ o $q(T)$ es finito, entonces $T/T^{\infty}(X)$ es sobreyectivo; para ser más preciso $C(T) = T^{\infty}(X)$.

ii) Si $\alpha(T) < \infty$ o $\beta(T) < \infty$, entonces $p(T) < \infty \Leftrightarrow T/T^{\infty}(X)$ es inyectivo.

Prueba

i) Si $p := p(T) \leq m < \infty$ entonces, por el lema 1.15 $\ker T^n \cap T^m = \{0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, asì

$\ker T \cap T^p(X) = \ker T \cap T^{p+k}(X)$ para todo $k \geq 0$

y luego aplicamos el Lema 1.3.

Si $q = q(T) < \infty$, entonces $T^q(X) = T^{q+k}(X)$ para todo $k \geq 0$, así

$$\ker T \cap T^q(X) = \ker T \cap T^{q+k}(X) \quad \textit{para todo} \quad k \geq 0$$

Nuevamente, por el Lema 1.3, tenemos que $C(T) = T^{\infty}(X)$.

ii) Supongamos que $p(T) < \infty$, por la parte (i) tenemos que $C(T) = T^{\infty}(X)$, en consecuencia se tiene que $T(T^{\infty}(X)) = T^{\infty}(X)$.

Sea $\widetilde{T} := T/T^{\infty}(X)$, entonces $q(\widetilde{T}) = 0$.

Por otro lado, $\ker \widetilde{T}^n = \ker T^n \cap T^{\infty}(X)$.

Además, si

$$p(T) < \infty \Rightarrow \ker T^p = \ker T^{p+k} \quad \forall k \geq 0.$$

Así

$$\ker T^p \cap T^\infty(X) = \ker T^{p+k} \cap T^\infty(X)$$

Por lo tanto

$$\ker \widetilde{T^p} = \ker T^{p+k} \cap T^\infty(X) = \ker \widetilde{T^{p+k}}$$

lo que implica que $p(\widetilde{T}) < \infty$*. Por Teorema 1.8, como* $q(\widetilde{T}) = 0$ *y* $p(\widetilde{T}) < \infty$*, entonces* $p(\widetilde{T}) = 0$*. Por lo tanto*

$$T/T^\infty(X) \quad \textit{es inyectivo}.$$

Recíprocamente, si $\widetilde{T}$ *es inyectivo, entonces* $\ker T \cap T^\infty(X) = \{0\}$.

Supongamos que $\alpha(T) < \infty$ *o* $\beta(T) < \infty$*, siguiendo la demostración del Teorema 1.11, se sigue que*

$$\begin{aligned} \ker T \cap T^m(X) &= \ker T \cap T^{m+k}(X) \quad \forall k \geq 0 \\ &= \ker T \cap T^\infty(X) \end{aligned}$$

Pero $\ker \widetilde{T} = \ker T \cap T^\infty(X)$ *es inyectivo, así* $\ker T \cap T^m(X) = \{0\}$.

Luego, aplicando el Lema 1.2, se sigue que $p(T) < \infty$.

Teorema 1.13. *Supóngase que* T *es un operador lineal sobre un espacio vectorial* X*. Si* $p = p(T) = q(T) < \infty$*, entonces se tiene la descomposición*

$$X = \ker T^p \oplus T^p(X).$$

Recíprocamente, si para un número natural m, se tiene la descomposición $X = T^m(X) \oplus \ker T^m$, entonces $p(T) = q(T) \leq m$. En este caso $T/T^p(X)$ es biyectivo.

Prueba

Supongamos que $p = p(T) = q(T) \leq m < \infty$, por el lema 1.2 (ii), si $q(T) < \infty$, entonces, para todo n, existe un subespacio $Y_n \subseteq \ker T^m$ tal que $X = Y_n \oplus T^n(X)$.

En particular, para $n = p$

$$X = Y_p \oplus T^p(X) \text{ con } Y_p \subseteq \ker T^p \text{ tambien}$$

$$X = \ker T^p + T^p(X).$$

Por otro lado, por el Lema 1.2, parte (i), si $p(T) \leq m < \infty$, entonces

$$\ker T^p \cap T^m(X) \subseteq \ker T^p \cap T^p(X) = \{0\}.$$

Luego, tenemos que

$$X = \ker T^p \oplus T^p(x).$$

Recíprocamente, si $X = T^m(X) \oplus \ker T^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces, nuevamente por el Lema 1.2 se tiene que $p(T), q(T) \leq m$, y por el Teorema 1.8 tenemos que $p(T) = q(T) < \infty$.

Sea $\widetilde{T} = T/T^p(X)$, obsérvese que si $p(T) = q(T) < \infty$, entonces $T^p(X), T^q(X), T^{q+k}(X)$ para $k \geq 0$ son iguales, así $T^p(X) = T^\infty(X)$, luego, aplicando el teorema 1.12 tenemos que $\widetilde{T} = T/T^p(X)$ es sobreyectiva.

Por otro lado, $\ker \widetilde{T} = \ker T \cap T^p(X)$, lo que implica que

$$\ker \widetilde{T} \subseteq \ker T \subseteq \ker T^p \text{ asi}$$

$$\ker \widetilde{T} \subseteq T^p(X),$$

así la descomposición siguiente

$$X = \ker T^p \oplus T^p(X)$$

establece que

$$\ker \widetilde{T} = \{0\},$$

y por lo tanto

$$\widetilde{T} = T/T^p(X) \quad \text{es inyectiva.}$$

El core analítico.

Definición 1.6. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. El core analítico de T es el conjunto $K(T)$ de todos los $x \in X$ tal que existe una sucesión $(u_n) \subset X$ y una constante $\delta > 0$, tal que:*

1. *$x = u_0$, y $T(u_{n+1}) = u_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$*
2. *$\|u_n\| \leq \delta^n \|x\|$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$*

Veamos ahora algunas propiedades elementales de $K(T)$.

Teorema 1.14. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach. Entonces,*

i) $K(T)$ es un subespacio lineal de X;

ii) $T(K(T)) = K(T)$;

iii) $K(T) \subseteq C(T)$.

Prueba

i) Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in K(T)$ entonces

- $\exists (u_n) \subseteq X$ tales que $x = u_0, T(u_{n+1}) = u_n, n \in \mathbb{N}$
- $\exists \delta > 0 / \|u_n\| \leq \delta^n \|x\|$

Luego, sea $(y_n) = (\lambda u_n)$ así $y_0 = \lambda u_0 = \lambda x$, $T(y_{n+1}) = T(\lambda u_{n+1}) = \lambda T(u_{n+1}) = \lambda u_n = y_n$

Tambien $\|\lambda u_n\| = |\lambda| \, \|u_n\| \leq |\lambda| \delta^n \|x\| = \delta^n \|\lambda x\|$ (para cada n)

Por lo tanto

$$\lambda x \in K(T).$$

Por otro lado, sean $x, y \in K(T)$, entonces

- $\exists (u_n) \subset X$, tal que $u_0 = x \; T(u_{n+1}) = u_n, paracadan$
- $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\|u_n\| \leq \delta_1^n \|x\|$ para cada n
- $\exists (v_n) \subset X$ tal que $v_0 = y$ y $T(v_{n+1}) = v_n$ para cada n
- $\exists \delta_2 > 0$ tal que $\|v_n\| \leq \delta_2^n \|y\|$ para cada n.

  Luego, para $x + y$ existe $(b_n) = (u_n + v_n)$ tal que

- $b_0 = u_0 + v_0 = x + y$, y

$$T(b_{n+1}) = T(u_{n+1} + v_{n+1}) = T(u_{n+1}) + T(v_{n+1}) = u_n + v_n = b_n$$

- Sea $\delta = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2\}$, así

$$\begin{aligned}
\|u_n + v_n\| &\leq \|u_n\| + \|v_n\| \leq \delta_1^n \|x\| + \delta_2^n \|y\| \\
&\leq \delta^n \|x\| + \delta^n \|y\| \\
&= \delta^n (\|x\| + \|y\|).
\end{aligned}$$

Considerando $x + y \neq 0$.

Sea $u = \dfrac{\|x\| + \|y\|}{\|x+y\|} \quad \Rightarrow u \geq 1 \quad \Rightarrow u^n \geq u$,

luego

$$\begin{aligned}
\|u_n + v_n\| &\leq \delta^n \frac{\|x+y\|}{\|x+y\|} \Big(\|x\| + \|y\| \Big) = \delta^n \|x+y\| \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{\|x+y\|} \right) \\
&= \delta^n \|x+y\| u \leq \delta^n u^n \|x+y\| = (\delta u)^n \|x+y\| \\
&= \varepsilon^n \|x+y\| \quad \text{con} \quad (\varepsilon = \delta u) \quad \text{y para todo}\, n.
\end{aligned}$$

así, $x + y \in K(T)$.

ii) Sea $y \in T(K(T))$, entonces existe $x \in K(T)$ tal que $T(x) = y$. Como $x \in K(T)$, entonces

- $\exists (u_n) \subset X$ tal que $u_0 = x,\ T(u_{n+1}) = u_n$
- $\exists (u_n) \subset X$ tal que $u_0 = x,\ T(u_{n+1}) = u_n$
- $\exists \delta > 0$ tal que $\|u_n\| \leq \delta^n \|x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $(y_n) = T(u_n)$, luego
- $y_0 = T(u_0) = Tx = y,\ T(T(u_{n+1})) = T(y_{n+1}) = y_n$

  Además

$$\|y\| = \|Tx\| \leq \|T\|\, \|x\| \Rightarrow 1 \leq \frac{\|T\|\, \|x\|}{\|y\|} = \mu \leq \mu^n.$$

Así

$$\|y_n\| = \|Tu_n\| \leq \|T| \, \|u_n\| \leq \|T\|\delta^n\|x\|,$$
$$=< \delta^n\mu^n\|y\|.$$

Por lo tanto $y \in K(T)$. Asi que $T(K(X)) \subseteq K(T)$.

Veamos ahora

$$K(T) \subseteq T(K(T)).$$

En efecto,

$$\text{sea} \quad x \in K(T) \Rightarrow \exists(u_n) \subseteq X \quad \text{tal que} \quad x = u_0 \quad \text{y} \quad T(u_{n+1}) = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\exists\delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \|u_n\| \leq \delta^n\|x\|.$$

Por otro lado, $x = T(u_1)$.

Para u_1 hacemos $b_n = (u_{n+1})$, así $b_0 = u_1$ $T(b_{n+1}) = T(u_{n+2}) = u_{n+1} = b_n$.

Además

$$\|b_n\| = \|u_{n+1}\| \leq \delta^{n+1}\|x\| = \delta^{n+1}\|T(u_1)\|$$
$$\leq \delta^{n+1}\|T\| \, \|u_1\| = \delta^n\delta\|T\| \, \|u_1\|$$

Tomando $\mu \geq \text{máx}\{1, \delta\|T\|\}$ tenemos que

$$\|b_n\| \leq \delta^n\mu\|u_1\| \leq \delta^n\mu^n\|u_1\| = (\delta\mu)^n\|u_1\|$$

Por lo tanto $u_1 \in K(T)$ y ya que $x = T(u_1)$, se tiene que $x \in T(K(T))$.

iii) Se sigue por (ii) y la definición de $C(T)$).

1.4. Operadores Compactos

Haremos un breve resumen de una clase importante de operadores que son los operadores compactos, para ver más detalles, ver capítulo 1, sección 4 de [2].

Definición 1.7. *Un operador acotado T de un espacio normado X es un espacio normado Y, decimos que es compacto si para cada sucesión acotada (x_n) de elementos de X la correspondiente sucesión (T_n) contiene una subsucesión convergente.*

Denotamos por $\mathcal{F}(X,Y)$ el conjunto de todos los operadores contínuos finito-dimensionales y por $\mathcal{K}(X,Y)$ el conjunto de todos los operadores compactos.

En el siguiente teorema veremos una serie de propiedades de los conjuntos antes mencionados (ver sección 13 de [3]).

Teorema 1.15. *Sean X,Y y Z espacios de Banach, entonces*

i) $\mathcal{F}(X,Y)$ *y* $\mathcal{K}(X,Y)$ *son espacios lineales de* $L(X,Y)$. *Además,*

$$\mathcal{F}(X,Y) \subseteq \mathcal{K}(X,Y).$$

ii) Si $T \in \mathcal{F}(X,Y), S \in L(Y,Z), U \in L(Z,X)$ *entonces*

$$ST \in \mathcal{F}(X,Z) \quad y \quad TU \in \mathcal{F}(Z,Y)$$

. Análogamente el estamento es válido para $T \in \mathcal{K}(X,Y)$

iii) Si (T_n) *es una sucesión de* $\mathcal{K}(X,Y)$, *el cual converge a* T, *entonces* $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, *consecuentemente,* $\mathcal{K}(X,Y)$ *es un subespacio cerrado de* $L(X,Y)$.

Teorema 1.16. *(Teorema de Schauder)*

Si $T \in L(X,Y), X$ y Y son espacios de Banach, entonces T es compacto si y solo si T^* es compacto.

Prueba

Ver sección 42 de [3].

Teorema 1.17. *Sea $T \in \mathcal{K}(X), X$ un espacio de Banach, entonces $\alpha(\lambda I - T) < \infty$ y $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado para todo $\lambda \neq 0$.*

Prueba

Ver teorema 1.35 de [2].

Teorema 1.18. *Si $T \in \mathcal{K}(X), X$ un espacio de Banach, entonces*

$$p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty \quad \textit{para todo} \quad \lambda \neq 0.$$

Prueba

Ver teorema 1.36 de [2].

1.5. Operadores Semi-Fredholm

En esta seccion se estudia la importante clase de operadores Semi-Fredholm, de los cuales se deriva gran parte de la teoria local espectral, pues esta clase se considera para establecer todos los teoremas generalizados o no de tipo weyl.

Definición 1.8. *Dado dos espacios de Banach X e Y, el conjunto de todos los operadores upper semi-Fredholm es definido por*

$$\Phi_+(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : \alpha(T) < \infty \text{ y } T(X) \text{ es cerrado}\}.$$

mientras que el conjunto de todos los operadores lower Semi-Fredholm es definido por

$$\Phi_-(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : \beta(T) < \infty.\}$$

El conjunto de todos los operadores Semi-Fredholm es definido por

$$\Phi_\pm(X,Y) := \Phi_+(X,Y) \cup \Phi_-(X,Y).$$

La clase $\Phi(X,Y)$ de todos los operadores de Fredholm es definido por

$$\Phi(X,Y) := \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y).$$

Las definiciones de los operadores Semi-Fredholm, los operadores upper y lower Semi-Fredholm no son del todo simétricas, ya que dada la condición de que $\beta(T) < \infty$ por el corolario 1.1 se tiene que $T(X)$ es cerrado.

Si tenemos que el espacio de Banach $X = Y$, denotamos

$$\Phi_+(X) := \Phi_+(X,X) \quad \text{y} \quad \Phi_-(X) := \Phi(X,X),$$

mientras que

$$\Phi_+(X) := \Phi_\pm(X,X) \quad \text{y} \quad \Phi(X) := (X,X).$$

Si $T \in \Phi_\pm(X,Y)$ el índice de T es definido por

$$ind\, T := \alpha(T) - \beta(T).$$

Si T es un operador bounded below, entonces T es upper Semi-Fredholm con índice menor o igual a cero, mientras que un operador sobreyectivo es un operador lower Semi-Fredholm con índice mayor o igual a cero.

Notemos que si $T \in \Phi_+(X,Y)$ y no es un operador de Fredholm, entonces $ind\,T = -\infty$ mientras que si $T \in \Phi_-(X,Y)$ y no es un operador de Fredholm entonces $ind\,T = \infty$.

La clase $\Phi(X)$ no es vacío, ya que el operador identidad tiene nulidad y deficiencia finita y por tanto es un operador de Fredholm.

Sea M un subespacio cerrado del espacio de Banach X, es un hecho conocido que existe una biyección entre M^* y $X^*/M^\perp$, ahora recordemos que

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0, \quad \forall x \in M\}.$$

Definamos $J_M : M \to X$, el embedimiento natural de M en X.

Consideremos $J_M^* : X^* \to M^*$, la cual toma un funcional $f \in X^*$ y lo restringe a M, esto es $J_M^*(f) = f/M$.

Es claro que $\ker J_M^* = M^\perp$. Por otro lado, consideremos

$$I : X^*/M^\perp \to M^*$$

dada por

$$I(f + M^\perp) = J_M^*(f) = f/M$$

así I es una biyección.

Luego, al ser I lineal, deducimos que

$$dim(M^*) = dim\big(X^*/M^\perp\big) \qquad (i)$$

Supongamos que $T \in L(X,Y)$ con rango cerrado, luego $T^*(X^*)$ es cerrado, así

$$(\ker T)^{\perp} = T^*(X^*) \qquad (ii).$$

Ahora, se tiene usando (i) y (ii) y el teorema 1.2 que

$$\begin{aligned}\alpha(T) &= dim(\ker T) = dim(\ker T)^* = dim(X^*/(\ker T)^{\perp})\\ &= dim(X^*/T^*(X^*)) = \beta(T^*).\end{aligned}$$

Análogamente, como $T(X)$ es cerrado, entonces

$$T(X)^{\perp} = \overline{T(X)}^{\perp} = \ker T^* \qquad (iii).$$

Luego, aplicando (i), (iii) y teorema 1.2, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta(T) = dim(Y/T(X)) &= dim(Y/T(X))^* = dimT(X)^{\perp}\\ &= dim \ker T^* = \alpha(T^*).\end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que

•) $\alpha(T) < \infty \Leftrightarrow \beta(T^*) < \infty$

•) $\beta(T) < \infty \Leftrightarrow \alpha(T^*) < \infty$.

Luego,

•) $T \in \Phi_+(X,Y) \Leftrightarrow T^* \in \Phi_-(Y^*X^*)$.

•) $T \in \Phi_-(X,Y) \Leftrightarrow T^* \in \Phi_+(Y^*,X^*)$.

Además, si $T \in \Phi_{\pm}(X,Y)$, entonces $indT^* = \alpha(T^*) - \beta(T^*) = \beta(T) - \alpha(T) = -ind(T)$

Teorema 1.19. *Supóngase que X,Y y Z son espacios de Banach.*

i) Si $T \in \Phi_-(X,Y)$ y $S \in \Phi(Y,Z)$, entonces $ST \in \Phi_-(X,Z)$

ii) Si $T \in \Phi_+(X,Y)$ y $S \in \Phi_+(Y,Z)$, entonces $ST \in \Phi_+(X,Z)$

iii) Si $T \in \Phi(X,Y)$ y $S \in \Phi(Y,Z)$, entonces $ST \in \Phi(X,Z)$.

En particular, si T corresponde a una de las clases $\Phi_-(X,Y), \Phi_+(X,Y), \Phi(X,Y)$, entonces T^n corresponde a la misma clase para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prueba

i) $T(X)$ y $S(Y)$ son complementados, ya que son cerrados y tienen codimensión-finita, escribimos:

$$Y = T(X) \oplus M \quad \text{y} \quad Z = S(Y) \oplus N,$$

entonces

$$Z = N + S(T(X)) + S(M) = ST(X) + (N + S(M))$$

donde $N + S(M)$ es de dimensión finita, ya que N y M son de dimensión finita. Por lo tanto $ST(X)$ tiene codimensión finita, $ST \in \Phi_-(X,Z)$

ii) Si $\quad T \in \Phi_+(X,Y) \Rightarrow T^* \in \Phi_-(Y^*,X^*)$

$S \in \Phi_+(Y,Z) \Rightarrow S^* \in \Phi_-(Z^*,Y^*)$, por lo tanto, T^*S^* es Semi Fredholm y así $(T^*S^*)^* = ST$ es upper lower Semi Fredholm.

iii) Si $\quad T \in \Phi(X,Y) \Rightarrow T \in \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y)$

$S \in \Phi(Y,Z) \Rightarrow S \in \Phi_+(Y,Z) \cap \Phi_-(Y,Z)$

$\Rightarrow \quad ST \in \Phi_+(X,Z) \cap \Phi_-(X,Z) = \Phi(X,Z) \qquad$ (por (i), (ii)).

Corolario 1.3. *Si* $T \in \Phi_{\pm}(X)$ *entonces* $p(T) = q(T^*)$ *y* $q(T) = p(T^*)$.

Prueba.

Si $T \in \Phi_{\pm}(X)$, entonces $T^n \in \Phi_{\pm}(X)$, asi T^n tiene rango cerrado, para todo n. Análogamente, si $T^* \in \Phi_{\pm}(X) \Rightarrow (T^*)^n \in \Phi_{\pm}(X), (T^*)^n$ tiene rango cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\ker(T^n)^* = \overline{T^n(X)}^{\perp} = T^n(X)^{\perp}$$

$$\ker T^n = {}^{\perp}\overline{(T^n)^*(X^*)} = {}^{\perp}(T^n)^*(X^*) = {}^{\perp}(T^*)^n(X^*).$$

De aquí, se sigue que $p(T^*) = q(T)$ y $p(T) = q(T^*)$.

Teorema 1.20. *Supóngase que* X, Y *y* Z *son espacios de Banach,* $T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z)$*, asi:*

i) Si $ST \in \Phi_-(X,Z)$*, entonces* $S \in \Phi_-(Y,Z)$

ii) Si $ST \in \Phi_+(X,Z)$*, entonces* $T \in \Phi_+(X,Y)$

iii) Si $ST \in \Phi(X,Z)$*, entonces* $T \in \Phi_+(X,Y)$ *y* $S \in \Phi_-(Y,Z)$.

Prueba:

i) Como $ST(X) \subseteq S(Y)$, entonces $codim(S(Y)) \leq codim(ST(X)) < \infty$, luego $S \in \Phi_-(Y,Z)$.

ii) Si $ST \in \Phi_+(X,Z)$, entonces $(ST)^* = T^*S^* \in \Phi_-(Z^*,X^*)$, así $T^* \in \Phi_-(Y^*,X^*)$ por (i) y tenemos que $T \in \Phi_+(X,Y)$.

iii) Es obvia de (i) y (ii).

Teorema 1.21. *Sea* $T \in \Phi_-(X,Y)$ *y* $S \in \Phi_-(Y,X)$ *(o* $T \in \Phi_+(X,Y)$ *y* $S \in \Phi_+(Y,X)$*), entonces* $ind(ST) = ind\, S + ind\, T$

Prueba

Ver teorema 1.47 de [2].

Lema 1.4. *Si $T \in L(X,Y)$, entonces $T \in \Phi_+(X,Y)$ si y solo si existe un subespacio cerrado M finito-codimensional tal que $T|_M$ es bounded below.*

Prueba

Si $T \in \Phi_+(X,Y)$, entonces el Kernel de T es finito-dimensional, luego es complementado, escribimos $X = \ker T \oplus M$.

Entonces la restricción $T\big|_M$ es inyectiva, la restricción es sobreyectiva, luego su imagen es cerrada. Por lo tanto $T\big|_M$ es bounded below.

Recíprocamente, supóngase que existe un subespacio cerrado M finito-codimensional tal que $T\big|_M$ es bounded below. Luego $X = M \oplus N$, con $dim(N) < \infty$, como
$T\big|_M$ es inyectiva $\Rightarrow \ker(T\big|_M) = \{0\} = \ker T \cap M$.

Así, $\ker T \bigcap M = \{0\}$, implicando que dimensión del Kernel de T es finita, luego es complementado. Sea H tal que

$$X = M \oplus H \oplus \ker T = M \oplus [\ker T \oplus H] \quad \text{con} \quad \ker T \oplus H = N.$$

Así, $dim(N) = dim(\ker T + H)$. Como $dim(N)$ es finita y la $dim(\ker T)$ es finita. Se deduce que la $dim(H)$ es finita, luego $T(X) = T(M) + T(N)$, con $T(M)$ cerrado por hipótesis. Dado que $T(N)$ es finito-dimensional, entonces se sigue que $T(X)$ es cerrado, en consecuencia $T \in \Phi_+(X,Y)$.

Capítulo 2

La Propiedad de extensión univaluada

2.1. Puntos aislados del espectro

Dedicamos esta sección al cálculo funcional de operadores acotados, actuando sobre espacios de Banach complejos.

Introduciremos las nociones básicas sobre el espectro de un operador.

Definición 2.1. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach complejo. El espectro de T es definido como el conjunto*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es biyectivo}\}.$$

Recordemos por el teorema de la función inversa, que si T es biyectivo, entonces T^{-1} es acotada.

Definición 2.2. *Sea $T \in L(X)$, entonces el radio espectral de T está definido por*

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Definamos el conjunto resolvente de un endomorfismo contínuo T sobre un espacio de Banach X, al conjunto

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ es invertible}\}.$$

Esto es, si $\sigma(T)$ es el espectro de T, entonces $\rho(T) := \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$.

Llamaremos el operador resolvente a la función definida sobre $\rho(T)$, dada por

$$R_\lambda : \lambda \to R_\lambda := (\lambda I - T)^{-1}.$$

La demostración del siguiente teorema se encuenra en el teorema 44.1 de [3].

Teorema 2.1. *Para un operador $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, las siguientes condiciones son válidas:*

a) Si $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}\|$, entonces $\lambda \in \rho(T)$,

a.1) $R_\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}$, *y*

a.2) $\|R_\lambda - R_{\lambda_0}\| \leq \dfrac{|\lambda - \lambda_0|}{1 - |\lambda - \lambda_0|}$;

en particular, $\rho(T)$ es abierto y R_λ depende continuamente de λ.

b) Para $|\lambda| > \lim \|T^n\|^{1/n}$ tenemos que $\lambda \in \rho(T)$ y

b.1) $R_\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{T^n}{\lambda^{n+1}}$

Para $|\lambda| > \|T\|$ se tiene además

b.2) $\|R_\lambda\| \leq \dfrac{1}{|\lambda|}\left(1 - \dfrac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^{-1}$

y en particular, R_λ tiende a 0 cuando $|\lambda| \to \infty$

c) $\sigma(T)$ es cerrado y dado que

c.1) $|\lambda| \leq \lim \|T_n\|^{1/n}$ *para todo $\lambda \in \sigma(T)$.*

También es acotado, luego $\sigma(T)$ es compacto.

d) Si λ y μ pertenecen a $\rho(T)$, entonces se tiene la ecuación resolvente.

d.1) $R_\lambda - R_\mu = -(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu$.

Para demostrar (d.1) hacemos lo siguiente. Recordemos que

$R_\lambda := (\lambda I - T)^{-1}$ *para* $\lambda \in \rho(T)$, *y*

$R_\mu := (\mu I - T)^{-1}$ *para* $\mu \in \rho(T)$, *así*

$$
\begin{aligned}
R_\lambda = R_\lambda(\mu I - T)R_\mu &= R_\lambda[(\mu-\lambda)I + \lambda I - T]R_\mu \\
&= [(\mu-\lambda)R_\lambda + R_\lambda(\lambda I - T)]R_\mu \\
&= (\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu + R_\mu
\end{aligned}
$$

luego,

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu$$

De esta ecuación, conmutando, se sigue que

d.2) $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

Teorema 2.2. *Para cada $T \in L(X), X$ espacio de Banach complejo tenemos que*

$$\sigma(T) \neq \phi \quad y \quad r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

Además, $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Prueba

Para $T' \in (L(X))^*$ $T' : L(X) \to \mathbb{C}$ se define la forma lineal contínua $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(\lambda) := T'(R_\lambda)$, por el teorema anterior, parte (d.1). Para ese $T \in L(X)$, si λ y μ están en $\rho(T)$, entonces

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu \qquad (I)$$

Por otra parte, de (a.1) tenemos que si $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}\|$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ y

$$\|R_\lambda - R_{\lambda_0}\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{1 - |\lambda - \lambda_0| \, \|R_{\lambda_0}\|} \|R_{\lambda_0}\|^2$$

así que, $R_\lambda \to R_{\lambda_0}$, cuando $\lambda \to \lambda_0$, lo que nos dice que R_λ depende contínuamente de λ, por otro lado,

$$\begin{aligned} f(\lambda) - f(\mu) &= T'(R_\lambda) - T'(R_\mu) = T'(R_\lambda - R_\mu) \\ &= -(\lambda - \mu) T'(R_\lambda R_\mu) \quad \text{por} \quad \text{(I)}, \end{aligned}$$

implicando que

$$\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = -T'(R_\lambda R_\mu) \to -T'(R_\lambda^2) \quad \text{cuando} \quad \lambda \to \mu$$

Del cual se deduce que f es una función holomorfa sobre $\rho(T)$.

Por otro lado, por (b.2) para $|\lambda| > \|T\|$ tenemos que

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^{-1} = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{|\lambda| - \|T\|}{|\lambda|}\right)^{-1} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

luego, cuando $|\lambda| \to \infty$, $\|R_\lambda\| \to 0$, y como

$$|f(\lambda)| = |T'(R_\lambda) \leq \|T'\| \, \|R_\lambda\|$$

se tiene que, cuando $|\lambda| \to \infty$, entonces $f(\lambda) \to 0$. (II).
Ahora, si $\sigma(T)$ fuese vacío, es decir, $\rho(T) = \mathbb{C}$. Como f es holomorfa sobre $\rho(T) = \mathbb{C}$ y es acotada, entonces, por el teorema de Liouville, f es constante.

Así, por (II), $f(\lambda) = T'(R_\lambda) = 0$ para todo λ y para todo $T' \in (L(X))^*$. Luego, $_\lambda$ tiene que ser cero, pero en un álgebra donde la identidad no es cero, cada inversa es distinta de cero, lo cual es una contradicción. Esto muestra que $\sigma(T) \neq \phi$.

La demostración del estamento $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ se encuentra en el teorema 45.1 de [3].

Como $\sigma(T)$ es no vacío y cerrado, por el teorema 2.1 $\sigma(T)$ es acotado, luego $\sigma(T)$ es compacto.

Teorema 2.3. *Si $T \in L(X)$ y $S \in L(X)$ conmutan, entonces*

$$r(T+S) \leq r(T) + r(S) \quad y \quad r(TS) \leq r(T)r(S).$$

Prueba

Para la demostración, recordemos que $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$ del teorema 2.2, tenemos que

$$\begin{aligned} r(TS) &= Lim \|(TS)^n\|^{1/n} \quad \text{(T,S conmutan)} \\ &=\leq Lim(\|T^n\|^{1/n} \|S^n\|^{1/n}) \\ &= Lim \|T^n\|^{1/n} Lim \|S^n\|^{1/n} \\ &= r(T)r(S). \end{aligned}$$

Veamos ahora que $r(T+S) \leq r(T) + r(S)$.

Sea el número $\alpha > r(T)$ y $\beta > r(S)$ dados arbitrariamente y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ tenemos que

$$\|T^n\| \leq \alpha^n \quad , \quad \|S^n\| \leq \beta^n \qquad (I).$$

Sean $\xi := \|T\|$ y $\eta := \|S\|$, así tenemos que

$$\|T^k\| \leq \xi^k \quad \text{y} \quad \|S^k\| \leq \eta^k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(II)}.$$

Ahora, para $n \geq 2m$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|(T+S)^n\| &= \|\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}T^vS^{n-v}\| \leq \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\|T^v\|\,\|S^{n-v}\|. \\
&= \sum_{v=0}^{m-1}\binom{n}{v}\|T^v\|\,\|S^{n-v}\| + \sum_{v=m}^{n-m}\|T^v\|\,\|S^{n-v}\| + \sum_{v=n-m+1}^{n}\|T^v\|\,\|S^{n-v}\| \\
&\leq \sum_{v=0}^{m-1}\binom{n}{v}\xi^v\beta^{n-v} + \sum_{v=m}^{n-m}\binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v} + \sum_{v=n.m+1}^{n}\binom{n}{v}\alpha^v\eta^{n-v} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(por (I), (II) para } n \geq 2m) \\
&= \sum_{v=0}^{m-1}\binom{n}{V}\alpha^v\beta^{n-v}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^v + \sum_{v=m}^{n-m}\binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v} + \sum_{v=n-m+1}^{n}\binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v}\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{n-v} \\
&\leq \gamma\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v} = \gamma(\alpha+\beta)^n,
\end{aligned}$$

con $\gamma := \max\limits_{0\leq v\leq m-1}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^v + 1 + \max\limits_{0\leq v\leq m-1}\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^v$

De aquí se sigue que

$$\|(T+S)^n\|^{1/n} \leq \gamma^{1/n}(\alpha+\beta)$$

Luego, para $n \in \mathbb{N}$ hacemos $\alpha = r(T) + \frac{1}{n} > r(T)$ y $\beta = r(S) + \frac{1}{n} > r(S)$.

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(T+S)^n\|^{1/n} &\leq \gamma^{1/n}(\alpha+\beta) = \gamma^{1/n}(r(T)\frac{1}{n} + r(S) + \frac{1}{n}) \\
&= \gamma^{1/n}(r(T) + r(S) + \frac{2}{n}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$r(T+S) \leq \lim_{n\to\infty}\gamma^{1/n}\lim_{n\to\infty}[r(T) + r(S) + \frac{2}{n}] = r(T) + r(S).$$

Por lo tanto

$$r(T+S) \leq r(T)+r(S).$$

Observemos que para cada natural m tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|(T^m)^n\|^{1/n} = \left(\lim_{n\to\infty} \|T^{m.n}\|^{1/mn}\right)^m.$$

Así, $r(T^m) = [r(T)]^m$.

Mencionaremos ahora dos clases especiales de espectro.

El espectro aproximado puntual, que se define como

$\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ no es bounded below $\}$, y el espectro sobreyectivo, definido como

$$\sigma_s(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \text{no es sobreyectivo}\}.$$

Teorema 2.4. *Si $T \in L(X)$ entonces $\sigma_a(T)$ y $\sigma_s(T)$ son subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{C}$. Además, ambos espectros contienen la frontera $\partial\sigma(T)$ de $\sigma(T)$. También*

$$\sigma_a(T) = \sigma_s(T^*) \quad y \quad \sigma_s(T) = \sigma_a(T^*).$$

Prueba Ver teorema 2.5 de [2].

Según el concepto clásico de análisis complejo, una función a valores vectoriales $f : \Delta \to X$ con X , un espacio de Banach complejo, y Δ un subconjunto no vacío y abierto de $\mathbb{C}$, se dice que es localmente analítica si esta es diferenciable en cada punto de Δ; es decir, si $\lambda_0 \in \Delta$ entonces $f'(\lambda_0) \in X$ tal que

$$\left\| \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - f'(\lambda_0) \right\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad \lambda \to \lambda_0.$$

Si Δ es conexo y f es localmente analítica, entonces decimos que f es analítica.

En la demostración del teorema 2.2, se probó también que la función resolvente $R(\lambda, T)$ depende continuamente de λ, y que además es analítica sobre $\rho(T)$.

Muchos teoremas, junto con sus pruebas de la teoría de funciones complejas pueden ser transferidas a las funciones a valores vectoriales localmente analíticas, tales como (Teorema de Cauchy, expansión de Taylor y Lauren, Teorema de Liouville, fórmula integral de Cauchy).

Un camino de integración Γ curva cerrada y orientada en $\mathbb{C}$ y para cada función continua $f : \Gamma \to X$, la integral de línea es definida como en el caso clásico, como el límite de las sumas de Riemann.

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda := Lim \sum f(\xi_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1}).$$

La cadena composición $(\lambda I - T)$ está íntimamente relacionada a los polos de la resolvente $R(\lambda, T)$. Si $f : \mathbb{D}(\lambda_0, \delta) \backslash \{\lambda_0\} \to X, X$ un espacio de Banach, es una función analítica definida en un disco abierto centrado en λ_0 a valores en X, entonces por la expansión de Laurent, f puede ser representada en la forma

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda - \lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(\lambda - \lambda_0)^k}.$$

Con $a_k, b_k \in X$ y $\lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \delta) \backslash \{\lambda_0\}$. Los coeficientes son dados por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} d\lambda, \ b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{k-1} d\lambda,$$

Donde Γ es un círculo orientado positivamente $|\lambda - \lambda_0| = r$ con $0 < r < \delta$. Decimos que λ_0 es un polo de orden p si $b_p \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > p$.

Sea λ_0 un punto aislado de $\sigma(T)$ y consideremos un caso particular de la expansión de Laurent de la función analítica $R_\lambda : \lambda \in \rho(T) \to (\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$ en una vecindad de λ_0. Por las consideraciones anteriores tenemos que

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\lambda-\lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{(\lambda-\lambda_0)^k} \text{ con } P_k, Q_k \in L(X).$$

Para todo $0 < |\lambda-\lambda_0| < \delta$. Los coeficientes son calculados según las fórmulas

$$(I) \qquad Q_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R_\lambda}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}} d\lambda.$$

$$(II) \qquad P_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\lambda(\lambda-\lambda_0)^{k-1} d\lambda.$$

Donde Γ es un círculo positivamente alrededor de λ_0.

Teorema 2.5. *Sea $T \in L(X)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma(T)$ es un polo de $R(\lambda, T)$ si y solo si $0 < p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$. Además, si $p := p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T)$ entonces p es el orden del polo, cada polo $\lambda_0 \in \sigma(T)$ es un autovalor de T, y si P_0 es la proyección espectral asociado a $\{\lambda_0\}$, entonces*

$$P_0(X) = \ker(\lambda_0 I - T)^p, \ker P_0 = (\lambda_0 I - T)^p(X).$$

Prueba

Ver proposición 50.2 de [3].

Teorema 2.6. *Si $\lambda_0 \in \sigma(T)$, entonces $\lambda_0 I - T$ es un operador de Fredholm con ascent y descent finito si y solo si λ_0 es un punto aislado en el espectro de T y la correspondiente proyección espectral de P_0 es finito dimensional.*

Prueba

Ver proposición 50.3 de [3].

2.2. LA SVEP

La SVEP (Propiedad de Extensión Univaluada) es una propiedad importante de la teoría local espectral. Para hacer un breve recuento de lo que es la propiedad, consideremos la función resolvente, antes vista $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}$ con $T \in L(X), X$ es espacio de Banach, es una función a valores vectoriales analítica definido sobre el resolvente $\rho(T)$. Dado por $f_x(\lambda) := R(\lambda, T)x$ para algún $x \in X$, la función analítica a valores vectoriales. $f_x : \rho(T) \to X$ satisface la ecuación $(\lambda I - T)f_x(\lambda) = x$ para todo $\lambda \in \rho(T)$.

Ahora nos preguntaríamos, ¿es posible encontrar una función analítica que satisfaga la ecuación $(\lambda I - T)f_x(\lambda) = x$, para algún o para cada valor λ en el espectro de T?. De aquí se deriva la definición de la SVEP.

Definición 2.3. *Dado un operador arbitrario $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, sea $\rho_T(X)$ denota el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para el cual existe una vecindad abierta U_λ de λ en $\mathbb{C}$ y una función analítica $f : U_\lambda \to X$ que satisface la ecuación*

$$(\mu I - T)f(\mu) = x \quad \textit{para todo} \quad \mu \in U_\lambda.$$

Si la función f es definida sobre el conjunto $\rho_T(x)$, entonces la llamaremos la función resolvente local de T en x. El conjunto $\rho_T(x)$ es llamado el resolvente local de T en x. El espectro local $\sigma_T(x)$ de T en el punto $x \in X$ es definido por el conjunto

$$\sigma_T(x) := \mathbb{C} \backslash \rho_T(x).$$

$\rho_T(x)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$, ya que

$$\rho_T(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \text{ un abierto } U_\lambda \text{ de } \lambda \ y\ f : U_\lambda \to X \text{ tal que } (\mu I - T)f(\mu) = x, \mu \in U_\lambda\},$$

luego $\rho_T(x)$, queda determinado por la unión de los dominios de todas las funciones resolventes locales.

Además, $\rho(T) \subseteq \rho_T(x)$ y $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T)$, en efecto, sea $\lambda \in \rho(T)$, por ser el resolvente un conjunto abierto existe una vecindad U_λ de λ tal que $U_\lambda \subset \rho(T)$. Luego, sea

$$f_x(\mu) := R(\mu, T) : U_\lambda \subset \rho(T) \to (\mu I - T)^{-1}x.$$

Así, $(\mu I - T) f_x(\mu) = x \quad \forall \mu \in U_\lambda \quad x \in X$.

Luego $\lambda \in \rho_T(x)$.

Por otro lado, como $\rho(T) \subseteq \rho_T(x)$, el complemento de $\rho_{(T)}(x)$, está contenido en el complemento de $\rho(T)$, teniendo así que

$$\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T).$$

Veamos algunas propiedades de $\sigma_T(x)$:

a) $\sigma_T(0) = \phi$;

b) $\sigma_T(\alpha x + \beta y) \subseteq \sigma_T(x) \bigcup \sigma_T(y)$ para todo $x, y \in X$.

c) $\sigma_{(\lambda I - T)}(x) \subseteq \{0\}$ si y solo si $\sigma_T(x) \subseteq \{\lambda\}$.

d) $\sigma_T(S(x)) \subseteq \sigma_T(x)$ para cada $S \in L(X)$ que conmuta con T.

Prueba

a) Probemos que $\sigma_T(0) = \phi$, para esto probaremos que $\rho_T(0) = \mathbb{C}$. Como $\rho_T(0) \subset \mathbb{C}$ solo demostraremos que $\mathbb{C} \subset \rho_T(0)$. En efecto, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrario y una vecindad

U_λ de λ, y consideremos la función nula $f : U_\lambda \to X$, dada por $f(\mu) = 0$, para todo $\mu \in U_\lambda$. Como la función nula es analítica y satisface la ecuación

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in U_\lambda.$$

Entonces, esto prueba que $\mathbb{C} \subseteq \rho_T(0)$.

b) Para demostrar que $\sigma_T(\alpha x + \beta y) \subset \sigma_T(x) \cup \sigma_T(y)$ para todo $x, y \in X$, probemos que $\rho_T(x) \cap \rho_T(y) \subseteq \rho_T(\alpha x + \beta y)$, en efecto, sea $\lambda \in \rho_T(x) \cap \rho_T(y)$, como $\lambda \in \rho_T(x)$ existe una vecindad U_λ de λ y una función analítica $f : U_\lambda \to X$ tal que

$$(\mu I - T)f(\mu) = x \quad \text{para todo} \quad \mu \in V_\lambda.$$

y como también $\lambda \in \rho_T(y)$ existe una vecindad V_λ, de λ y una función analítica $g : \_\lambda \to X$, tal que $(\mu I - T)g(\mu) = x$ para todo $\mu \in V_\lambda$. Tomando $\beta_\lambda = U_\lambda \cap V_\lambda$ una vecindad de λ y definimos $\alpha f + \beta g : B_\lambda \to X$ una función analítica, entonces:

$$\begin{aligned}(\mu I - T)(\alpha f + \beta g)(\mu) &= (\mu I - T)(\alpha f) + (\mu I - T)(\beta g) \text{ (por linealidad)}\\ &= \alpha(\mu I - T)f(\mu) + \beta(\mu I - T)g(\mu)\\ &= \alpha x + \beta y\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lambda \in \rho_T(\alpha x + \beta y).$$

c) La propiedad, $\sigma(\lambda I - T)(X) \subseteq \{0\}$ si y solo si $\sigma_T(x) \subseteq \{\lambda\}$ se debe a una perturbación del operador $(\lambda I - T)$ del operador T.

d) Veamos que $\sigma_T(Sx) \subseteq \sigma_T(x)$ para cada $S \in L(X)$ que conmuta con T. En efecto, sea $\lambda \in \rho_T(x)$, luego existe una vecindad abierta U_λ de λ y una función analítica $f : U_\lambda \to X$ tal que

$$(\mu I - T)f(\mu) = x \quad \text{para cada} \quad \mu \in U_\lambda.$$

Si $TS = ST$ entonces la función $S \circ f : U_\lambda \to X$ es analítica y satisface la ecuación,

$$(\mu I - T)(S \circ f)(\mu) = S((\mu I - T)f(\mu)) = Sx \quad \text{para todo} \quad \mu \in U_\lambda.$$

Asì, $\lambda \in \rho_T(Sx)$, luego $\rho_T(x) \subseteq \rho_T(Sx)$ y por lo tanto $\sigma_T(Sx) \subseteq \sigma_T(x)$.

Definición 2.4. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El operador T decimos que tiene la propiedad de extensión univaluada en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, abreviado T tiene la SVEP en λ_0, si para cada vecindad U de λ_0, la única función analítica $f : U \to X$ que satisface la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ es la función constante $f \equiv 0$.*

Decimos que el operador T tiene la SVEP si T, tiene la SVEP en cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

En lo que sigue mencionaremos algunas propiedades básicas de la SVEP:

a) La SVEP asegura la consistencia de la solución local de la ecuación

$$(\mu I - T)f(\mu) = x \quad \forall \mu \in U_\lambda.$$

Esto es, supongamos que T tiene la SVEP en $\lambda_0 \in \rho_T(x)$ luego, como $\lambda_0 \in \rho_T(x)$ existe una vecindad U de λ_0 y las funciones analíticas $f, g : U \to X$ que cumplen con

$$(I) \qquad \begin{cases} (\mu I - T)f(\mu) = x & \text{para cada} \quad \mu \in U \\ (\mu I - T)g(\mu) = x & \end{cases}$$

Pero de (I) tenemos que $(\mu I - T)(f - g)(\mu) = 0$, pero como T tiene la SVEP en λ_0, entonces $(f - g) \equiv 0 \Rightarrow f = g$.

Otra consecuencia importante de la SVEP es la existencia de una extensión analítica maximal $\widetilde{f}$ de $R(\lambda, T)x = (\lambda I - T)^{-1}x$ al conjunto $\rho_T(x)$ para cada $x \in X$. Esta función verifica la ecuación.

$$(\mu I - T)\widetilde{f}(\mu) = x \quad \text{para cada} \quad \mu \in \rho_T(x)$$

y, claramente

$$\widetilde{f}(\mu) = (\mu I - T)^{-1}x \quad \text{para cada} \quad \mu \in \rho(T).$$

b) La SVEP se hereda por la restricción sobre espacios cerrados invariantes. Es decir, si $T \in L(X)$ tiene la SVEP en λ_0 y M es un subespacio cerrado T-invariante, entonces $T|_M$ tiene la SVEP en λ_0. Además,

$$\sigma_T(x) \subseteq \sigma_{T|_M}(x) \quad \text{para cada} \quad x \in M$$

en efecto; probamos que $\rho_{T|_M}(x) \subseteq \rho_T(x)$.

Sean $x \in M, \lambda \in \rho_{T|_M}(x)$, entonces existe una vecindad U_λ de λ y una función analítica $f : U_\lambda \to M \subset X$ tal que

$$(\mu I - T|_M)f(\mu) = x \qquad \forall \mu \in U_\lambda \quad \text{y} \quad x \in M.$$

Pero, $T = T|_M$, ya que M es T-invariante, así

$$(\mu I - T|_M)f(\mu) = (\mu I - T)f(\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in U_\lambda.$$

En consecuencia, $\lambda \in \rho_T(x)$ y por lo tanto $\rho_{T|_M}(x) \subseteq \rho_T(x)$,

luego, $\sigma_T(x) \subset \sigma_{T|_M}(x)$.

c) Sea $\sigma_p(T)$ denota el espectro punto de $T \in L(X)$

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un autovalor de } T\}.$$

De la definición de la SVEP, se tiene que:

Si λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_p(x) \Rightarrow T$ tiene la SVEP en λ_0.

En efecto, veamos primero que:

$$\begin{aligned}\text{Si } \lambda \text{ es un auto valor de } T &\Rightarrow Tx = \lambda x, \text{ para } x \neq 0\\ &\Rightarrow (\lambda I - T)x = 0, \quad x \neq 0\\ &\Rightarrow \lambda I - T \text{ no es inyectivo,}\end{aligned}$$

luego, si λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_p(T)$, entonces existe una vecindad U de λ_0 tal que $(\lambda I - T)$ es inyectivo para cada $\lambda \in U, \lambda \neq \lambda_0$.

Sea $f : V \to X$ una función analítica definida sobre otra vecindad V de λ_0 para el cual la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ es válida para cada $\lambda \in V$.

Podemos claramente asumir que $V \subseteq U$. Entonces $f(\lambda) \in \ker(\lambda I - T) = \{0\}$, ya que $\lambda I - T$ es inyectivo en U, así $f(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in V, \lambda \neq \lambda_0$. Por la continuidad de f en λ_0 tenemos que $f(\lambda_0) = 0$, en consecuencia $f \equiv 0$, y por lo tanto T tiene la SVEP en λ_0.

Recordemos que $\sigma_a(T)$ es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $\lambda I - T$ no es bounded below, luego usando el mismo argumento de la prueba anterior, tenemos que,
si λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_a(T) \Rightarrow T$ tiene la SVEP en λ_0.

Por dualidad, como $\sigma_s(T) = \sigma_a(T^*)$ tenemos que
si λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_s(T) \Rightarrow T^*$ tiene la SVEP en λ_0.

d) De la parte c) se deduce que cada operador T tiene la SVEP en un punto aislado del espectro.

Definición 2.5. *Para cada subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ el subespacio local espectral de T asociado con Ω es el conjunto*

$$X_T(\Omega) := \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq \Omega\}.$$

Claramente, si $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ entonces $X_T(\Omega_1) \subseteq X_T(\Omega_2)$, ya que, si

$$x \in X_T(\Omega_1) \Rightarrow \sigma_T(x) \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_2$$

$$x \in X_T(\Omega_2).$$

Las demostraciones de los siguientes teoremas se encuentran en [1 Capítulo 2].

Teorema 2.7. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, y Ω cada subconjunto de $\mathbb{C}$. Entonces las siguientes propiedades son válidas:*

i) *$X_T(\Omega)$ es un subespacio lineal T-hyper-invariante de X; es decir, para cada operador acotado S tal que conmuta con T se tiene que $S(X_T(\Omega)) \subseteq X_T(\Omega)$;*

ii) *Si $\lambda \notin \Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces $(\lambda I - T)(X_T(\Omega)) = X_T(\Omega)$;*

iii) *$X_T(\Omega) = X_T(\Omega \cap \sigma(T))$;*

iv) *Supóngase que $\lambda \in \Omega$ y $(\lambda I - T)x \in X_T(\Omega)$ para algún $x \in X$. Entonces $x \in X_T(\Omega)$;*

v) *Para cada familia $(\Omega_j)_{j\in J}$ de subconjuntos de $\mathbb{C}$, tenemos*

$$X_T\left(\bigcap_{j\in J}\Omega_j\right) = \bigcap_{j\in J} X_T(\Omega_j);$$

vi) *Si Y es un espacio cerrado T-invariante de X, para el cual $\sigma(T|_Y) \subseteq \Omega$, entonces $Y \subseteq X_T(\Omega)$.*

Observemos que el operador nulo 0, tiene espectro local vacío. En efecto. para probar que $\sigma_0(x) = \phi$, demostramos que $\rho_0(x) = \mathbb{C}$. En efecto, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrario. Tomemos una vecindad U_λ de λ, entonces la función analítica $f : U_\lambda \to X$ definida por

$$f(\mu) = \frac{x}{\mu}, \quad \forall \mu \in U_\lambda$$

satisface que

$$(\mu I - 0)f(\mu) = \mu I(\frac{x}{\mu}) = x \quad \forall \mu \in U_\lambda,$$

entonces $\lambda \in \rho_0(x) \Rightarrow \mathbb{C} \subset \rho_0(x)$, y por lo tanto $\rho_0(x) = \mathbb{C}$.

El próximo teorema muestra que si T tiene la SVEP, entonces 0 es el único elemento de X, teniendo espectro local vacío.

Teorema 2.8. *Sea $T \in L(X), X$ es espacio de Banach, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) T tiene la SVEP;

ii) $X_T(\phi) = \{0\}$;

iii) $X_T(\phi)$ es cerrado.

Prueba

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Probemos que $X_T(\phi) = \{0\}$.

Supóngase que T tiene la SVEP y $\sigma_T(x) = \phi$. Entonces $\rho_T(x) = \mathbb{C}$, así existe una función analítica $f : \mathbb{C} \to X$, tal que $(\lambda I - T)f(\lambda) = x$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ (I).

Si $\lambda \in \rho(T)$ tenemos $f(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}x$, por (I) y en consecuencia, dado que $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \to 0$ cuando $|\lambda| \to +\infty$ [ver demostración del teorema 2.2], $f(\lambda)$ es una función acotada sobre $\mathbb{C}$, por el teorema de Liouville $f(\lambda)$ es constante y, dado que $(\lambda I - T)^{-1}x \to 0$ cuando $|\lambda| \to +\infty$, f es cero sobre $\mathbb{C}$, así

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = (\lambda I - T)(0) = 0 = x \quad \text{por} \quad \text{(I)}.$$

Esto prueba que $x = 0$. Por lo tanto $X_T(\phi) \subseteq \{0\}$.

Por otro lado, como $0 \in X_T(\phi)$, concluimos que $X_T(\phi) = \{0\}$.

Recíprocamente, sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario y supóngase que para cada $0 \neq x \in X$ tenemos que $\sigma_T(x) \neq \phi$.

Consideremos cualquier función analítica $f : U \to X$, definido sobre una vecindad U de λ_0 tal que la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in U$.

De la igualdad $\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(0) = \phi$. Ver teorema 2.2. de [1].

Se deduce que $f \equiv 0$ sobre U y por lo tanto T tiene la SVEP en λ_0, dado que λ_0 es arbitrario, entonces T tiene la SVEP.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ es claro.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Ver teorema 2.8 de [1].

Un operador $T \in L(X)$ decimos que es quasi-nilpotente si $\lambda I - T$ es invertible para todo $\lambda \neq 0$; es decir, $\sigma(T) = \{0\}$.

La prueba del siguiente corolario se encuentra en [1, corolario 2.12.].

Corolario 2.1. *Supóngase que $T \in L(X)$ tiene la SVEP y Q es un operador quasi-nilpotente que conmuta con T. Entonces $T + Q$ tiene la SVEP.*

Definición 2.6. *Un operador $U \in L(X,Y)$ entre dos espacios de Banach X y Y decimos que es quasi-afinidad, si U es inyectivo y tiene rango denso. El operador $S \in L(Y)$ decimos que es una transformación quasi-afín de $T \in L(X)$.*

Si existe una quasi-afinidad $U \in L(X,Y)$ tal que $TU = US$.

Teorema 2.9. *Si $T \in L(X)$ tiene la SVEP en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ y $S \in L(Y)$ es una transformación quasi-afin de T, entonces S tiene la SVEP en λ_0.*

Prueba

Sea $f : U \to Y$ una función analítica definida sobre una vecindad U de λ_0 tal que

$(\mu I - S)f(\mu) = 0$ para todo $\mu \in U$. Como S es una transformación quasi-afín de T, existe una quasi-afinidad U tal que $TU = US$, luego

$$\begin{aligned}(\mu I - S)f(\mu) &= 0 \quad \forall \mu \in u \\ U(\mu I - S)f(\mu) &= (\mu UI - US)f(\mu) \\ &= (\mu IU - TU)f(\mu) \\ &= (\mu I - T)Uf(\mu) = 0.\end{aligned}$$

Como T tiene la SVEP en λ_0, entonces se establece que $Uf(\mu) = 0$ para cada $\mu \in u$. Dado que U es inyectivo, entonces $f(\mu) = 0$ para todo $\mu \in u$. Por tanto, S tiene la SVEP en λ_0.

Teorema 2.10. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, entonces $K(T) = X_T(\mathbb{C}/\{0\}) = \{x \in X : 0 \in \rho_T(x)\}$.*

Prueba.

Veamos que $K(T) \subset X_T(\mathbb{C}/\{0\})$.

Sea $x \in K(T)$. Supongamos que $x \neq 0$, considerando la definición del core analítico, sea $\delta > 0$ y $(u_n) \subset X$ una sucesión para el cual

$$x = u_0, Tu_{n+1} = u_n,\ \|u_n\| \leq \delta^n \|x\| \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sea la función $f : \mathbb{D}(0, 1/\delta) \to X$, donde $\mathbb{D}(0, 1/\delta)$ es el disco abierto centrado en 0 y radio $\frac{1}{\delta}$, definida por

$$(I) \quad f(\lambda) := -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{\delta}).$$

Por [1, Proposición 47.1] tenemos que la serie converge, ya que $|\lambda| < 1/\delta \leq r$, donde r es el radio de convergencia $r = \dfrac{1}{Lim\,Sup \sqrt[n]{\|a_n\|}}$, esto se debe a que

$$\begin{aligned}\|u_n\| \leq \delta^n \|x\| &\Rightarrow Lim\,Sup \sqrt[n]{\|u_n\|} \leq Lim \delta \|x\|^{1/n} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\delta} \leq \frac{1}{Lim\,Sup \sqrt[n]{\|a_n\|}}.\end{aligned}$$

Luego, f es analítica, definida en $\mathbb{D}(0, 1/\delta)$.

Además

$$\begin{aligned}(\lambda I - T) f(\lambda) &= (\lambda I - T)\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n \right) \\ &= (T - \lambda I)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n \right)\end{aligned}$$

Estudiemos el siguiente límite:

$$\sum_{k\to\infty}^{k} (T - \lambda I)(\lambda^{n-1} u_n)$$

$$\begin{aligned}&= \underset{k\to\infty}{Lim} \sum_{n=1}^{k} (\lambda^{n-1} T u_n - \lambda^n u_n)) \\ &= \underset{k\to\infty}{Lim} \sum_{n=1}^{k} (\lambda^{n-1} T u_n - \lambda^n T u_{n+1}) \\ &= \underset{k\to\infty}{Lim} (x - \lambda T u_2 + \lambda T u_2 - \lambda^2 T u_3 + \lambda^2 T u_3 - \lambda^3 T u_4 + \lambda^3 T u_4 - \lambda^4 T u_5 +, \ldots, -\lambda^k T u_{k+1}) \\ &= \underset{k\to\infty}{Lim} (x - \lambda^k T u_{k+1}) = x - \lambda \underset{k\to\infty}{Lim} \lambda^{k-1} u_k = x\end{aligned}$$

Así

$$(\lambda I - T) f(\lambda) = (T - \lambda I)\big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} U_n \big) = x.$$

Implicando que $(\lambda I - T) f(\lambda) = x \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}(0, 1/\delta)$.

Por lo tanto, $0 \in \rho_T(x)$.

Recíprocamente, si $0 \in \rho_T(x)$, entonces existe un disco abierto $\mathbb{D}(0,\varepsilon)$ y una función analítica $f : \mathbb{D}(0,\varepsilon) \to X$, tal que

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon).$$

Dado que f es analítica sobre $\mathbb{D}(0,\varepsilon)$, existe una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$f(\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n \qquad \forall \lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon).$$

$f(0) = -u_1$, y sustituyendo $\lambda = 0$ en $(\lambda I - T)f(\lambda) = x$, tenemos que

$$-T(f(0)) = T(u_1) = x.$$

Así, para todo $\lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)$, con $Tu_1 = x$ tenemos que $Tu_{n+1} = u_n$, para $n = 1,2,3,...,$. Haciendo $u_0 = x$ tenemos que $u_0 = x$ y $Tu_{n+1} = u_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, veamos que $\|u_n\| \leq \delta^n \|x\|$, para $\delta > 0$ y para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. En efecto, dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n$ converge, entonces $|\lambda^{n-1}|\, \|u_n\| \to 0, n \to \infty$.

Para todo $|\lambda| < \varepsilon$ y en particular, $(\frac{1}{\mu^{n-1}})\|u_n\| \to 0$ así que existe un $c > 0$ tal que $\|u_n\| \subseteq C\mu^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así obtenemos que

$$\|u_n\| \leq \big(\mu + \frac{C}{\|x\|}\big)^n \|x\|.$$

2.3. La Parte Quasi-nilpotente de un Operador

Definición 2.7. *Sea $T \in L(X)$,X un espacio de Banach. La parte quasi-nilpotente de T es definido como el conjunto*

$$H_0(T) := \{x \in X : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0\}.$$

Es claro que $H_o(T)$ es un subespacio lineal de X.

Lema 2.1. *Para cada $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, tenemos:*

i) $\ker(T^m) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \subseteq H_0(T)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$.

ii) $x \in H_0(T) \Leftrightarrow Tx \in H_0(T)$.

iii) $\ker(\lambda I - T) \cap H_0(T) = \{0\}$ *para cada* $\lambda \neq 0$.

Prueba

i) Sea $x \in \ker T^m \Rightarrow T^m x = 0 \Rightarrow T^n x = 0$, para cada $n \geq m \Rightarrow x \in \mathcal{N}^\infty(T)$.

Por otro lado, sea $x \in \mathcal{N}^\infty(T)$, entonces $T^n x = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, así $\underset{n\to\infty}{Lim} T^n x = 0$.

Esto es, dado $\varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m$; $\|T^n x\| < \varepsilon$.

Luego, para

$$n \geq m \quad \text{se sigue que} \quad \|T^n x\|^{1/m} < \varepsilon^{1/m} = \varepsilon_1 \ \varepsilon = \varepsilon^{1/m},$$

del cual se deduce que

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \|T^n x\|^{1/n} = 0$$

Implicando que $x \in H_0(T)$.

ii) Consideremos la desigualdad $\|T^n Tx\| \leq \|T\| \, \|T^n x\|$. $\qquad (I)$

Ahora, si $x \in H_0(T)$ entonces $\underset{n\to\infty}{Lim} \|T^n x\|^{1/n} = 0$ y por la desigualdad (I) se deduce que

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \|T^n Tx\|^{1/n} = 0$$

implicando que $Tx \in H_0(T)$.

Recíprocamente, si $Tx \in H_0(T)$, entonces $\underset{m\to\infty}{Lim}\|T^m Tx\|^{1/m} = 0$, luego, haciendo $n = m+1$, tenemos que si $m \to \infty$, entonces $n \to \infty$, y de la igualdad

$$\|T^m Tx\|^{1/m} = \|T^{n-1}Tx\|^{1/n_1} = (\|T^n_x\|^{1/n})^{n/n-1}$$

Concluimos que $\underset{n\to\infty}{Lim}\|T^n x\|^{1/n} = 0$. Por lo tanto, $x \in H_0(T)$.

iii) Probemos que

$$\ker(\lambda I - T) \cap H_0(T) = \{0\} \quad \text{para cada} \quad n \geq m.$$

En efecto, veamos que $ker(\lambda I - T) \cap H_0(T) \subseteq \{0\}$.

Supongamos que existe $x \neq 0$, tal que

$$x \in \ker(\lambda I - T) \cap H_0(T).$$

Dado que

$$\begin{aligned} x \in \ker(\lambda I - T) &\Rightarrow (\lambda I - T)(x) = 0 \\ &\Rightarrow Tx = \lambda x \\ &\Rightarrow T^2 x = \lambda T x = \lambda^2 x \\ &\Rightarrow T^n x = \lambda^n x \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Así

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\|T^n x\|^{1/n} = \underset{n\to\infty}{Lim}|\lambda|\,\|x\|^{1/n} = |\lambda|,$$

teniéndose que $x \notin H_0(T)$, el cual es una contradicción.

Por lo tanto,

$x = 0$, y así $\ker(\lambda I - T) \cap H_0(T) \subseteq \{0\}$, y como $\{0\} \subseteq \ker(\lambda I - T) \cap H_0(T)$, entonces

$$\ker(\lambda I - T) \cap H_0(T) = \{0\}.$$

Teorema 2.11. *Sea X un espacio de Banach, entonces $T \in L(X)$ es quasi-nilponte si y solo si $H_0(T) = X$.*

Prueba

Si T es quasi-nilpotente, entonces $\underset{n\to\infty}{Lim}\|T^n\|^{1/n} = 0$, pero,

$$\|T^n x\| \leq \|T^n\|\,\|x\| \quad \text{para cada} \quad x \in X, \text{ Así,}$$

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\|T^n x\|^{1/n} = 0 \quad \text{para cada} \quad x \in X.$$

Por lo tanto

$$H_0(T) = X.$$

Recíprocamente, supongamos que $H_0(T) = X$.

Por el criterio de la raíz enésima para series, tenemos que la serie

$$(I) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n x\|}{|\lambda|^{n+1}} \quad \text{converge para cada} \quad x \in X.$$

Definamos

$$y := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}, \quad \text{para} \quad \lambda \neq 0, \text{luego,}$$

$$(\lambda I - T)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} = (\lambda I - T)\underset{k\to\infty}{Lim}\sum_{n=0}^{k} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned}
(\lambda I - T)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} &= (\lambda I - T)\underset{k\to\infty}{Lim}\sum_{n=0}^{k} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} = \underset{k\to+\infty}{Lim}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{T^n x}{\lambda^n} - \frac{T^{n+1}x}{\lambda^n}\right) \\
&= \underset{k\to+\infty}{Lim}\left(x - \frac{Tx}{\lambda} + \frac{Tx}{\lambda} - \frac{T^2 x}{\lambda^2} + \frac{T^2 x}{\lambda^2} - \ldots + \frac{T^k x}{\lambda^k} - \frac{T^{k+1}x}{\lambda^{k+1}}\right) \\
&= \underset{k\to+\infty}{Lim}\left(x - \frac{T^{k+1}x}{\lambda^{k+1}}\right) = x - \underset{k\to+\infty}{Lim}\frac{T^{k+1}x}{\lambda^{k+1}} \\
&= x - \underset{k\to\infty}{Lim}\frac{T^k(Tx)}{\lambda^{k+1}}
\end{aligned}$$

Pero, la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n(T_x)}{\lambda^{n+1}}$ converge absolutamente Así, $\underset{k\to\infty}{Lim} \frac{T^k(Tx)}{\lambda^{k+1}} = 0$. Y por lo tanto $(\lambda I - T)y = x$, verificando que $(\lambda I - T)$ es sobreyectiva para todo $\lambda \neq 0$. Por otro lado

$$\{0\} = \ker(\lambda I - T) \cap H_0(T) = \ker(\lambda I - T) \cap X = \ker(\lambda I - T),$$

el cual muestra que $(\lambda I - T)$ es invertible y por lo tanto $\sigma(T) = \{0\}$.

Teniéndose que el radio espectral es cero y por lo tanto, T es quasi-nilpotente.

Teorema 2.12. *Si $T \in L(X)$, entonces*

$$H_0(T) \subseteq X_T(\{0\}) = \left\{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq \{0\}\right\}.$$

Si $T \in L(X)$ tiene la SVEP, entonces $H_0(T) = X_T(\{0\})$.

Prueba ver teorema 2.20 de [1].

Veamos las relaciones que se presentan entre el core analítico y la parte quasi-nilpotente de un operador.

Teorema 2.13. *Para cada operador acotado $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, tenemos:*

i) $H_0(T) \subseteq^{\perp} K(T^*)$ y $K(T) \subseteq^{\perp} H_0(T^*)$;

ii) Si T es Semi-Fredholm. Entonces

$$\overline{H_0(T)} = \overline{N^\infty(T)} =^{\perp} K(T^*) \quad y \quad K(T) =^{\perp} H_0(T^*).$$

Prueba

i) Veamos que $H_0(T) \subseteq^{\perp} K(T^*)$, recordemos que

$${}^{\perp}K(T^*) = \{x \in X : f(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad f \in K(T^*)\}.$$

Sea $x \in H_0(T)$, y $f \in K(T^*)$, por la definición de $K(T^*)$ existe $\delta > 0$ y una sucesión (g_n) de $X^* n \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$g_o = f, T^*_{g_{n+1}} = g_n \quad \text{y} \quad \|g_n\| \leq \delta^n \|f\| \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ahora,

$$f = g_o = T^* g_1 = T^* T^* g_2 = (T^*)^2 (T^* g_3) = (T^*)^3 g_3 ...$$

Así, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$

$$f(x) = (T^*)^n g_n(x) = g_n(T^n x).$$

Además, por las desigualdades anteriores tenemos

$$|f(x)| = |g_n(T^n x)| \leq \|g_n\| \, \|T^n x\| \leq \delta^n \|f\| T^n x\| \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad (I)$$

Luego, como $x \in H_0(T)$ entonces $\underset{n \to \infty}{Lim} \|T^n x\|^{1/n} = 0$.

Tomando raíz n-ésima en (I) y haciendo tender n al infinito, tenemos que $f(x) = 0$.

Por lo tanto, como f es un funcional arbitrario en $K(T^*)$ para el cual $f(x) = 0$, en consecuencia $x \in^{\perp} K(T^*)$.

Por lo tanto

$$H_0(T) \subseteq^{\perp} K(T^*).$$

La inclusión $K(T) \subseteq^{\perp} H_0(T^*)$ se prueba de manera similar.

ii) Probemos que si T es semi-Fredholm, entonces

$$\overline{H_0(T)} = \overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)} =^{\perp} K(T^*),$$

en efecto, supongamos que $T \in \Phi_{\pm}(X)$. Entonces T^* es semi-Fredholm y por el teorema 1.19 $T^{*n}(X^*)$ tiene rango cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. De la parte (i) sabemos que

$$\overline{H_0(T)} \subseteq^{\perp} \overline{K(T^*)} =^{\perp} K(T^*) \text{ cerrado} \quad (I).$$

Además, si

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}^{\infty}(T) &\Rightarrow x \in \ker T^n, \quad \text{para algún} \quad n \in \mathbb{N}, \\ &\Rightarrow T^n x = 0, \quad \text{para algún} \quad n \in \mathbb{N}, \\ &\Rightarrow \|T^n x\|^{1/n} = 0 \\ &\Rightarrow x \in H_0(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{N}^{\infty}(T) \subseteq H_0(T) \Rightarrow \overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)} \subseteq \overline{H_0(T)}$$

Luego, de (I) tenemos que

$$\overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)} \subseteq \overline{H_0(T)} \subseteq^{\perp} \overline{K(T^*)} =^{\perp} K(T^*).$$

Y para mostrar las igualdades que queremos, solo nos restaría mostrar que

$$^{\perp}K(T^*) \subseteq \overline{\mathcal{N}^{\infty}(T^*)},$$

en efecto, veamos que la inclusión es cierta.

Para cada $T \in L(X)$ y cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\ker T^n \subseteq \mathcal{N}^{\infty}(T)$, y esto implica que $\mathcal{N}^{\infty}(T)^{\perp} \subseteq (\ker T^n)^{\perp}$, en efecto, sea

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{N}^{\infty}(T)^{\perp} &\Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{N}^{\infty}(T) \\ &\Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \ker T^n \quad \text{y algún} \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow f \in \ker T^{n\perp}. \end{aligned}$$

Por otro lado, por (4) tenemos que

$$\mathcal{N}^{\infty}(T)^{\perp} \subseteq \ker T^{n\perp} = \overline{T^{*n}(X^{*})} = T^{*n}(X^{*})$$

Esto se debe a que $T^{*n}(X^{*})$ es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así

$$\mathcal{N}^{\infty}(T)^{\perp} \subseteq T^{*n}(X^{*}) \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)}^{\perp} \subseteq T^{*n}(X^{*}) \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)}^{\perp} \subseteq T^{\infty}(X^{*})$$

Pero, por el corolario 1.45 de [2] tenemos que $T^{*\infty}(X^{*}) = K(T^{*})$ por lo tanto $\overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)}^{\perp} \subseteq K(T^{*})$, esto implica que ${}^{\perp}K(T^{*}) \subseteq \overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)}$.

En conclusión, se ha demostrado que

$${}^{\perp}K(T^{*}) \subseteq \overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)}$$

y por lo tanto, tenemos la cadena de igualdades

$$\overline{H_0(T)} = \overline{\mathcal{N}^{\infty}(T)} = {}^{\perp}K(T^{*}).$$

La igualdad $K(T) = {}^{\perp}H_0(T^{*})$ se prueba de manera similar.

2.4. La SVEP localizada

Teorema 2.14. *Supongamos que $T \in L(X), X$ un espacio de Banach. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *T tiene la SVEP en λ_0;*

ii) $\ker(\lambda_0 I - T) \cap X_T(\phi) = \{0\}$*;*

iii) $\ker(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\}$*;*

iv) *Para cada* $0 \neq x \in \ker(\lambda_0 I - T)$ *tenemos* $\sigma_T(x) = \{\lambda_0\}$.

Prueba

Sin perder generalidad, podemos reemplazar $\lambda_0 I - T$ por T, haciendo $\lambda_0 = 0$.

Veamos que (i)$\Rightarrow$ (ii), para probar que $\ker T \cap X_T(\phi) = \{0\}$. Debemos probar que, el elemento $x \in \ker T$, tal que $\sigma_T(x) = \phi$ es $x = 0$. Veamos que en efecto, el estamento se cumple. Sea $x \in \ker T$ tal que $\sigma_T(x) = \phi$. Entonces $0 \in \rho_T(x)$, así existe un disco abierto $\mathbb{D}(0,\varepsilon)$ y una función analítica $f : \mathbb{D}(0,\varepsilon) \to X$ tal que

$$(I) \qquad (\lambda I - T)f(\lambda) = x \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon).$$

Entonces

$$(II) \quad T((\lambda I - T)f(\lambda)) = (\lambda I - T)T(f(\lambda)) = Tx = 0 \ (x \in \ker T) \text{ para cada } \lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon).$$

Dado que T tiene la SVEP en 0, entonces $T(f(\lambda)) = 0$ por lo tanto $T(f(0)) = 0$.

Pero por (I), $T(f(0)) = x = 0$.

Por lo tanto $x = 0$, teniéndose que

$$\ker(T) \cap X_T(\phi) = \{0\}.$$

Recíprocamente, veamos que (ii)$\Rightarrow$ (i).

Supongamos que para cada $0 \neq x \in \ker T$ tenemos que $\sigma_T(x) \neq \phi$.

Sea $f : \mathbb{D}(0,\varepsilon) \to X$ una función analítica tal que

(III) $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)$.

Luego

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \text{ para una sucesión adecuada } (u_n) \subset X.$$

Ahora

$$f(0) = u_0 \Rightarrow T(u_0) = T(f(0)) = 0 \quad \text{por} \quad (III).$$

Así, $u_0 \in \ker T$. Además de la igualdad $\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(0) = \phi$ para cada $\lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)$ obteniéndose que $\sigma_T(f(0)) = \sigma_T(u_0) = \phi$, por lo tanto, como $u_0 \in \ker T$ tal que $\sigma_T(u_0) = \phi$, entonces $u_0 = 0$.

Para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 = (\lambda I - T)f(\lambda) = (\lambda I - T)\sum_{n=0}^{\infty} u_n &= (\lambda I - T)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n \\ &= \lambda(\lambda I - T)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$0 = (\lambda I - T)\big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{n+1}\big) \text{ para todo } 0 \neq \lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon).$$

Por continuidad, esto es cierto para cada $\lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)$, usando el mismo argumento es posible mostrar que $u_1 = 0$ e iterando este procedimiento concluimos que $u_2, u_3 = ... = 0$. Esto muestra que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}(0,\varepsilon)$, y por lo tanto T tiene la SVEP en 0.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ es suficiente probar la igualdad

$$\ker T \cap K(T) = \ker T \cap X_T(\phi).$$

Demostraremos entonces esta igualdad.

Del teorema 2.12 y teorema 2.10, tenemos

$$\ker T \subseteq H_0(T) \subseteq X_T(\{0\}),$$

pero además

$$\ker T \cap K(T) = \ker T \cap X_T(\mathbb{C}/\{0\}) \subseteq X_T(\{0\}) \cap X_T(\phi).$$

Dado que

$$X_T(\phi) \subseteq X_T(\mathbb{C}/\{0\}) = K(T),$$

concluimos que

$$\ker T \cap K(T) = \ker T \cap K(T) \cap X_T(\phi) = \ker T \cap X_T(\phi).$$

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$ Dado que $\ker T \subseteq H_0(T)$ del teorema 2.12, se sigue que $\sigma_T(x) \subseteq \{0\}$ para cada $0 \neq x \in \ker T$.

Asumiendo que $\sigma_T(x) \neq \phi$, tenemos $\sigma_T(x) = \{0\}$.

$(iv) \Leftrightarrow (ii)$ es claro.

Si $\lambda_0 I - T$ es inyectivo, entonces $\ker(\lambda_0 I - T) = \{0\}$ y como $\{0\} \in X_T(\phi)$ entonces

$$\ker(\lambda_0 I - T) \cap X_T(\phi) = \{0\},$$

y por teorema 2.14 T tiene la SVEP en λ_0.

Veamos ahora que resultado tenemos si $\lambda_0 I - T$ es sobreyectivo.

Corolario 2.2. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, tal que $\lambda_0 I - T$ es sobreyectivo. Entonces T tiene la SVEP en λ_0 si y solo si $\lambda_0 I - T$ es inyectivo.*

Prueba

Supongamos que $(\lambda_0 I - T)$ es sobreyectivo, esto es

$$(\lambda_0 I - T)(X) = X.$$

luego, por teorema 1.29 de [2], tenemos que $X \subseteq K(\lambda_0 I - T)$ por lo tanto $K(\lambda_0 I - T) = X$ y por teorema 2.14, tenemos que

$$\ker(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T) \cap X = \ker(\lambda_0 I - T) = \{0\}.$$

Por lo tanto, $\lambda_0 I - T$ es inyectivo. El recíproco ya fue mostrado.

Teorema 2.15. *Para cada operador $T \in L(X)$ sobre un espacio de Banach X, se tiene que*

$$\sigma_S(T) = \bigcup_{x \in X} \sigma_T(x).$$

Prueba Ver teorema 2.26 de [2].

Definamos como

$$\Xi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T \quad \text{no tiene la SVEP en} \quad \lambda\}.$$

Es claro que si T tiene la SVEP, entonces $\Xi(T) = \phi$. El conjunto $\Xi(T)$ es abierto y está contenido en el interior de $\sigma(T)$.

Corolario 2.3. *Si X es un espacio de Banach y $T \in L(X)$, entonces* $\sigma(T) = \Xi(T) \cup \sigma_S(T)$. *En particular, $\sigma_S(T)$ contiene $\partial\Xi(T)$, la frontera topológica de $\Xi(T)$.*

Prueba

La inclusión $\Xi(T) \cup \sigma_S(T) \subseteq \sigma(T)$ es clara, ya que $\Xi(T)$ y $\sigma_S(T)$ están contenidos en $\sigma(T)$.

Recíprocamente, sea $\lambda \notin \Xi(T) \cup \sigma_S(T)$ entonces $\lambda I - T$ es sobreyectivo y T tiene la SVEP en λ por el corolario 2.2 $\lambda I - T$ es inyectivo, en consecuencia $\lambda I - T$ es invertible, luego $\lambda \notin \sigma(T)$. Esto demuestra que $\sigma(T) \subseteq \Xi(T) \cup \sigma_S(T)$.

Por otro lado, $\partial\Xi(T) \subseteq \sigma(T) = \Xi(T) \cup \sigma_S(T)$, como $\Xi(T)$ es abierto, entonces $\partial\Xi(T) \cap (T) = \phi$, así $\partial\Xi(T) \subseteq \sigma_S(T)$.

Corolario 2.4. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$, entonces, las siguientes condiciones son válidas:*

i) Si T tiene la SVEP, entonces $\sigma_S(T) = \sigma(T)$.

ii) Si T^* tiene la SVEP, entonces $\sigma_a(T) = \sigma(T)$.

iii) Si ambos T y T^* tienen la SVEP, entonces

$$\sigma(T) = \sigma_S(T) = \sigma_a(T).$$

Prueba

i) *Si T tiene la SVEP, entonces $\Xi(T)=\phi$ y del corolario 2.3 tenemos que*

$$\sigma(T)=\Xi(T)\cup\sigma_S(T)=\sigma_S(T).$$

implicando que $\sigma(T)=\sigma_S(T)$.

ii) *Si T^* tiene la SVEP, entonces $\Xi(T^*)=\phi$ y por el corolario 2.3 y teorema 2.3, tenemos que*

$$\sigma(T)=\sigma(T^*)=\Xi(T^*)\cup\sigma_S(T^*)=\phi\cup\sigma_a(T)=\sigma_a(T),$$

teniéndose que

$$\sigma(T)=\sigma_a(T)$$

iii) *Se sigue por la parte (i), (ii).*

Todos los subespacios vistos anteriormente, están íntimamente relacionados con la SVEP en un punto. Veamos ahora las consideraciones para $\lambda_0\in\mathbb{C}$ y un operador $T\in L(X)$, con las cadenas crecientes de los kernel:

$$\ker(\lambda_0 I-T)\subseteq\mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I-T)\subseteq H_0(\lambda_0 I-T)\subseteq X_T(\{\lambda_0\}),$$

y la cadena decreciente con los rangos

$$X_T(\phi)\subseteq X_T(\mathbb{C}\backslash\{\lambda_0\})=K(\lambda_0 I-T)\subseteq(\lambda_0 I-T)^\infty(X)\subseteq(\lambda_0 I-T)(X).$$

En lo que sigue todos los resultados son relativos a la SVEP en 0. Por una perturbación del operador T, tenemos que T tiene la SVEP en λ_0 si y solo si $S:=\lambda_0 I-T$ tiene la SVEP en 0.

Por lo tanto, todos los resultados que se darán a continuación, podemos reemplazar al operador $\lambda_0 I - T$ por T, y en este caso la SVEP de T en λ_0 será reemplazado por la SVEP de T en 0.

Corolario 2.5. *Supóngase que $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, verifica una de las siguientes condiciones:*

i) $\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\}$;

ii) $\mathcal{N}^\infty(T) \cap K(T) = \{0\}$;

iii) $\mathcal{N}^\infty(T) \cap X_T(\phi) = \{0\}$;

iv) $H_0(T) \cap K(T) = \{0\}$;

v) $\ker T \cap T(X) = \{0\}$.

Entonces T tiene la SVEP en 0.

Prueba:

Usaremos las cadenas de los kernel y de los rangos, vistas anteriormente, junto con el teorema 2.14.

i) $\ker(T) \cap K(T) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\}$. Por el teorema 2.14, T tiene la SVEP en 0.

ii) $\ker T \cap K(T) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \cap K(T) = \{0\}$. Por teorema 2.14 T tiene la SVEP en 0.

iii) $\ker(T) \cap X_T(\phi) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \cap X_T(\phi) = \{0\}$. Por el teorema 2.14 T tiene la SVEP en 0.

iv) $\mathcal{N}^\infty(T)\cap K(T)\subseteq H_0(T)\cap K(T)=\{0\}$. Por (ii) tenemos que T tiene la SVEP en 0.

v) $\ker T\cap X_T(\phi)\subseteq \ker T\cap T(X)=\{0\}$. Por el teorema 2.14 T tiene la SVEP en 0.

Teorema 2.16. *Sea $T\in L(X), X$ un espacio de Banach. Entonces T tiene la SVEP si y solo si $H_0(\lambda I-T)\cap K(\lambda I-T)=\{0\}$ para cada $\lambda\in\mathbb{C}$.*

Prueba

Supongamos que T tiene la SVEP, del teorema 2.10, tenemos que

$$K(\lambda I-T)=X_{\lambda I-T}(\mathcal{C}\backslash\{0\})=X_T(\mathbb{C}\backslash\{\lambda\})\quad \text{para cada}\quad \lambda\in\mathbb{C}$$

y por teorema 2.12

$$H_0(\lambda I-T)=X_{\lambda I-T}(\{0\})=X_T(\{\lambda\})\quad \text{para cada}\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

En consecuencia, por el teorema 2.8

$$H_0(\lambda I-T)\cap K(\lambda I-T)=X_T(\{\lambda\})\cap X_T(\mathcal{C}\backslash\{\lambda\})=X_T(\phi)=\{0\}.$$

El recíproco es claro, usando el corolario 2.5.

Corolario 2.6. *Supóngase que $T\in L(X), X$ un espacio de Banach. Si T es quasi-nilpotente, entonces $K(T)=\{0\}$.*

Prueba

Ver teorema 2.32 de [2].

Teorema 2.17.

Supóngase que $T\in L(X), X$ un espacio de Banach, tiene la parte quasi-nilpotente $H_0(T)$ cerrada. Entonces $H_0(T)\cap K(T)=\{0\}$ y en consecuencia T tiene la SVEP en 0.

Prueba

Supongamos que $H_0(T)$ es cerrado. Denotamos por $\widetilde{T}$ la restricción de T a $H_0(T)$; esto es, $\widetilde{T} = T\big|_{H_0(T)}$.

Por otro lado, probemos que $H_0(T) = H_0(\widetilde{T})$, en efecto, es claro que $H_0(\widetilde{T}) \subseteq H_0(T)$ ya que

$$H_0(\widetilde{T}) = \{x \in H_0(T) : \underset{n\to\infty}{Lim} \|\widetilde{T}_x^n\|^{1/n} = 0\}.$$

Ahora, sea

$$\begin{aligned} x \in H_0(T) &\Rightarrow \underset{n\to\infty}{Lim} \|T_x^n\|^{1/n} = 0 \\ &\Rightarrow \underset{n\to\infty}{Lim} \|\widetilde{T}_x^n\|^{1/n} = 0 \\ &\Rightarrow x \in H_0(\widetilde{T}). \end{aligned}$$

Así

$$H_0(\widetilde{T}) = H_0(T).$$

En consecuencia, $\widetilde{T}$ es quasi-nilpotente por teorema 2.11. Por lo tanto $K(\widetilde{T}) = \{0\}$, por el corolario 2.6.

Ademas, como $H_0(T) \cap K(T) = K(\widetilde{T})$, entonces

$$H_0(T) \cap K(T) = \{0\},$$

y en consecuencia, T tiene la SVEP en 0.

Teorema 2.18. *Supongamos que para un operador acotado $T \in L(X)$, la suma $H_0(T) + T(X)$ es denso en X. Entonces T^* tiene la SVEP en* 0.

Prueba

Supongamos que $H_0(T) + T(X)$ es denso en X; esto es, $\overline{H_0(T) + T(X)} = X \quad (I)$.

Luego, por el teorema 2.13 sabemos que

$$H_0(T) \subseteq^{\perp} K(T^*) \Rightarrow K(T^*) \subseteq K(T^*) \subseteq H_0(T)^{\perp} \quad (II).$$

Así, por (2) y (II), tenemos que

$$\ker(T^*) \cap K(T^*) \subseteq \overline{T(X)}^{\perp} \cap H_0(T)^{\perp} = (T(X) + H_0(T))^{\perp} \quad (III)$$

pero

$$(T(X) + H_0(T))^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in (T(X) + H_0(T))\}.$$

Por (I) tenemos que para cada $v \in X$, existe una sucesión $u_n \in (T(X) + H_0(T))$ tal que $u_n \to v$, luego para $f \in (T(X) + H_0(T))^{\perp}$, tenemos que $f(u_n) \to f(v)$.

Por la continuidad de f se deduce que $f(v) = 0$, para todo $v \in X$, luego $f \equiv 0$, implicando que

$$(T(X) + H_0(T))^{\perp} = \{0\}.$$

Asì, de (III) tenemos que $\ker T^* \cap K(T^*) = \{0\}$, y por el teorema 2.14 T^* tiene la SVEP en 0.

Corolario 2.7. *Supongamos que $H_0(T) + K(T)$ ó $\mathcal{N}^{\infty}(T) + T^{\infty}(X)$ es denso en norma en X, entonces T^* tiene la SVEP en* 0.

Prueba

Un esquema de la demostración sería el siguiente

$$H_0(T) + K(T) \subseteq H_0(T) + T^{\infty}(X) \subseteq H_0(T) + T(X).$$

Si $H_0(T)+K(X)$ es denso en X, entonces

$$X = \overline{H_0(T)+K(T)} \subseteq \overline{H_0(T)+T(X)}$$

Así $H_0(T)+T(X)$ es denso en X y por lo tanto T^* tiene la SVEP en 0.

Si $\mathcal{N}^\infty(T)^+T^\infty(T)$ es denso, se prueba de manera similar que T^* tiene la SVEP en 0.

Teorema 2.19. *Para un operador T sobre un espacio de Banach X las siguientes implicaciones son válidas:*

$$p(T) < \infty \Rightarrow \mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(T) = \{0\} \Rightarrow T \textit{ tiene la SVEP en } 0,$$

y

$$q(T) < \infty \Rightarrow X = \mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(T) \Rightarrow T^* \textit{ tiene la SVEP en } \ 0.$$

Prueba

Supongamos que $p := p(T) < \infty$. Entonces $\mathcal{N}^\infty(T) = \ker T^p$ y por el lema 1.2, tenemos que

$$\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) \subseteq \ker T^p \cap T^p(X) = \{0\},$$

y como $\{0\} \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(T)$ se tiene que $\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\}$ por el corolario 2.5, esto implica que T tiene la SVEP en 0.

Mostremos ahora la segunda implicación, supongamos que

$$q := q(T) < \infty \text{ entonces } T^\infty(X) = T^q(X)$$

y

$$\mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X) = \mathcal{N}^\infty(T) + T^q(X) \supseteq \ker T^q + T^q(X) \quad (I).$$

Del hecho de que $q < \infty$, implica que

$$T^{2q}(X) = T^q(X),$$

así, para cada $x \in X$ existe $y \in T^q(X)$ tal que

$$T^q(y) = T^q(x).$$

Esto implica que $T^q(y) - T^q(x) = 0$, por la linealidad de T^q tenemos que $T^q(y-x) = 0$. Así $(x-y) \in \ker T^q$; esto es existe $v \in \ker T^q$ tal que

$$x - y = v \Rightarrow x = v + y \quad v \in \ker T^q.$$

Por lo tanto

$$X = \ker T^q + T^q(X).$$

De la inclusión (I) y la igualdad anterior tenemos que

$$\mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X) \supseteq \ker T^q + T^q(X) = X,$$

implicando que

$$X = \mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X),$$

luego

$$X = \overline{\mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X)},$$

y por corolario 2.7, tenemos que T^* tiene la SVEP en 0.

2.5. La SVEP para operadores tipo Kato

En esta sección caracterizamos la SVEP en 0 para operadores tipo Kato. Antes de definir cuando un operador es de tipo kato, diremos que un operador acotado $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, es semi-regular si $T(X)$ es cerrado y $\ker T \subseteq T^n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Un operador $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, decimos que admite una descomposición generalizada kato, abreviado GKD, si existe un par de subespacios cerrados T-invariantes (M,N) tal que $X = M \oplus N$, la restricción $T\big|N$ es quasi-nilpotente y $T\big|M$ es semi-regular

Un operador $T \in L(X)$ es esencialmente semi-regular si admite una GKD (M,N) tal que N es finito-dimensional.

Notemos que, si T es esencialmente semi-regular, entonces $T\big|N$ es nilpotente, dado que cada operador sobre un espacio de dimensión finita es nilpotente.

Por teorema 1.62 de [1] tenemos que cada operador Semi-Fredholm es esencialmente semi-regular.

Si $T\big|N$ es nilpotente de orden d, entonces decimos que T es un operador tipo kato de orden d.

De todo lo anterior, tenemos una serie de implicaciones:

$$\begin{aligned} T \text{ semi-regular} \Rightarrow\ & T \text{ es esencialmente semi-regular} \\ \Rightarrow\ & T \text{ es de tipo kato} \\ \Rightarrow\ & T \text{ admite una GKD.} \end{aligned}$$

las demostraciones de los siguientes resultados pueden encontrarse en [1, capítulo 1].

Teorema 2.20. *Supóngase que $T \in L(X)$ es semi-regular. Entonces $\overline{H_0(T)} = \overline{\mathcal{N}^\infty(T)}, K(T)$ cerrado y $K(T) = T^\infty(X)$.*

Además, para operadores semi-regulares, las siguientes equivalentes son válidas:

i) T tiene la SVEP en 0, precisamente cuando T es inyectivo o equivalentemente cuando T es bounded below;

ii) T^* tiene la SVEP en O cuanto T es sobreyectivo.

Teorema 2.21. *Supongamos que $T \in L(X)$ admite una GKD (M,N), entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) T tiene la SVEP en 0;

ii) $T\big|M$ tiene la SVEP en 0;

iii) $T\big|M$ es inyectivo;

iv) $H_0(T) = N$;

v) $H_0(T)$ es cerrado;

vi) $H_0(T) \cap K(T) = \{0\}$;

vii) $H_0(T) \cap K(T)$ es cerrado.

En particular, si T es Semi-regular, entonces las condiciones (i)-(vii) son equivalentes al siguiente estamento: $(viii) \quad H_0(T) = \{0\}$.

Teorema 2.22. *Supongamos que $T \in L(X)$ admite una GKD(M,N). Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) T^* *tiene la SVEP en* 0*;*

ii) $T\big|M$ *es sobreyectivo;*

iii) $K(T) = M$

iv) $X = H_0(T) + K(T)$*;*

v) $H_0(T) + K(T)$ *es denso en* X*.*

En particular, si T *es semi-regular, entonces las condiciones i)-v) son equivalentes a:*

vi) $K(T) = X$*.*

Teorema 2.23. *Sea* $T \in L(X), X$ *un espacio de Banach, y asuma que* T *es de tipo kato. Entonces las condiciones (i)-(vii) del teorema 2.21 son equivalentes a las condiciones*

viii) $p(T) < \infty$*,*

ix) $\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\}$*;*

En este caso, si $p := p(T)$ *entonces* $H_0(T) = \mathcal{N}^\infty(T) = \ker T^p$*.*

Teorema 2.24. *Sea* $T \in L(X), X$ *es espacio de Banach, y asuma que* T *es de tipo kato. Entonces, las condiones (i)-(v) del teorema 2.22 son equivalentes a las siguientes condiciones:*

vi) $q(T) < \infty$*,*

vii) $X = \mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X)$*;*

viii) $\mathcal{N}^\infty(T) + T^\infty(X)$ *es denso en* X.

En este caso, si $q := q(T)$. *Entonces*

$$T^\infty(X) = K(T) = T^q(X).$$

Nota 2:

Si T es un operador semi-Fredholm, entonces, por los teoremas 2.21, 2,22, 2.23, y 2.24, los recíprocos de las implicaciones

$$p(T) < \infty \Rightarrow T \text{ tiene la SVEP en } 0,$$

$$q(T) < \infty \Rightarrow T^* \text{ tiene la SVEP en } 0,$$

son válidas.

Teorema 2.25. *Sea* $T \in L(X), X$ *un espacio de Banach, y supongamos que* $T \in \Phi_\pm(X)$. *Tenemos:*

i) *Si* T *tiene la SVEP en* 0*, entonces* $\operatorname{ind} T \leq 0$*;*

ii) *Si* T^* *tiene la SVEP en* 0*, entonces* $\operatorname{ind} T \geq 0$.

En consecuencia, si ambos operadores T *y* T^* *tiene la SVEP en* 0*, entonces* T *tiene índice* 0.

Teorema 2.26. *Sea* $T \in L(X), X$ *es espacio de Banach, y supóngase que* $0 < q(T) < \infty$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) T *tiene la SVEP en* 0*;*

ii) $p(T) < \infty$*;*

iii) 0 *es un polo del resolvente;*

iv) 0 *es un punto aislado de* $\sigma(T)$.

2.6. Operadores de Browder y Weyl

Estudiaremos dos clases importantes de operadores en la teoría de Fredholm. Dados por las clases de operadores semi-Fredholm que poseen ascent y descent finitos. Estas clases son:

La clase de los operadores Upper Semi-Browder definido sobre un espacio de Banach X, están dados por

$$B_+(X) := \{T \in \phi_+(X) : p(T) < \infty\},$$

y la clase de los operadores lower semi-Browder, definidos por

$$B_-(X) := \{T \in \phi_-(X) : q(T) < \infty\}.$$

La clase de los operadores de Browder, están definidos por

$$B(X) := B_+(X) \cap B_-(X) = \{T \in \phi(X) : p(T), q(T) < \infty\}.$$

Recordemos, por el teorema 1.10 que si $p(T) < \infty$, entonces $\alpha(T) \leq \beta(T)$ y si $q(T) < \infty$, entonces $\beta(T) \leq \alpha(T)$.

Así

$$T \in B_+(X) \Rightarrow indT \leq 0,$$

y

$$T \in B_-(X) \Rightarrow indT \geq 0.$$

Luego

$$T \in B(X) \Rightarrow indT = 0.$$

De la relación dual entre los operadores semi-Fredholm, tenemos que:

$$T \in B_+(X) \Leftrightarrow T^* \in B_-(X^*),$$

en efecto;

$$\begin{aligned} T \in B_+(X) &\Leftrightarrow T \in \phi_+(X), p(T) < \infty \\ &\Leftrightarrow \beta(T^*) = \alpha(T) < \infty \text{ y } p(T) = q(T^*) < \infty \\ &\Leftrightarrow T^* \in \phi_-(X^*), q(T^*) < \infty \\ &\Leftrightarrow T^* \in B_-(X^*). \end{aligned}$$

Una relación análoga establece que

$$T \in B_-(X) \Leftrightarrow T^* \in B_+(X^*).$$

Definición 2.8. *Un operador acotado $T \in L(X)$ se dice que es un operador de Weyl si T es un operador de Fredholm con índice cero.*

Denotemos por $W(X)$ la clase de todos los operadores de Weyl. $B(X) \subseteq W(X)$ en efecto, si $T \in B(X)$, entonces $T \in \phi(X)$ y $ind\, T = 0$.

Si T es un operador de Weyl, se tiene la siguiente equivalencia:

T tiene la SVEP en $0 \Leftrightarrow T^*$, tiene la SVEP en 0.

En efecto, si T es un operador de Weyl, entonces T es un operador de Fredholm, luego T es esencialmente semi-regular, luego T es tipo kato.

Asì,por nota 2, tenemos que T tiene la SVEP en $0 \Leftrightarrow p(T) = q(T) < \infty \Leftrightarrow T^*$ tiene la SVEP en 0.

Otra importante información es la siguiente: Si T ó T^* tienen la SVEP en 0, entonces

T es Weyl $\Leftrightarrow T$ es Browder.

En efecto, nuevamente, con el hecho de que si T es un operador de Fredholm, entonces es esencialmente semi-regular, implicando que es tipo kato, y usando nuevamente la nota 2, tenemos que: si T ó T^* tienen la SVEP en 0.

T es Weyl $\Leftrightarrow T \in \phi(X), ind\, T = 0 \Leftrightarrow \alpha(T) = \beta(T) < \infty, p(T) = q(T) < \infty \Leftrightarrow T$ es Browder.

Definición 2.9. *Un operador acotado* $T \in L(X)$ *decimos que es upper semi-weyl si* $T \in \phi_+(X)$ *y* $ind(T) \leq 0$.
$T \in L(X)$ *decimos que es lower semi-weyl si* $T \in \phi_-(X)$ *y* $ind(T) \geq 0$.

El conjunto de todos los operadores upper-weyl lo denotaremos por $W_+(X)$, mientras que el conjunto de todos los operadores lower semi-weyl lo denotaremos por $W_-(X)$.

2.7. Teorema de Browder

Antes de mostrar las condiciones que debe tener un operador para satisfacer el teorema de Browder, definiremos unos espectros muy importantes, utilizados en esta sección, ellos son:

- El espectro de weyl, definido por $\sigma_w(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W(X)\}$
- El espectro de upper semi-weyl, definido por $\sigma_{uw}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_+(X)\}$, y
- El espectro lower semi-weyl, definido por $\sigma_{\ell w}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_-(X)\}$.

Presentaremos también los operadores de Browder:

- El espectro de Browder, definido por $\sigma_b(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B(X)\}$

- El espectro upper semi Browder, definido por $\sigma_{ub}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_+(X)\}$, y

- El espectro lower Semi-Browder, definido por $\sigma_{\ell b}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_-(X)\}$.

Otras clases importantes de espectros en esta teoría son:

$acc\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda$ no es punto de acumulación de $\sigma_a(T)\}$

$acc\sigma_s(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda$ no es punto de acumulación de $\sigma_s(T)\}$

$acc\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda$ no es punto de acumulación de $\sigma(T)\}$

$iso\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda$. No es punto aislado de $\sigma(T)\}$.

Definiremos ahora, para un operador acotado $T \in L(X)$ el conjunto

$$p_{oo}(T) := \sigma(T) \backslash \sigma_b(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \in B(X)\},$$

el conjunto de todos los puntos Riesz en $\sigma(T)$, y sea

$$\pi_{oo}(T) := \{\lambda \in iso\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\},$$

y consideremos el siguiente conjunto:

$$\Delta(T) := \sigma(T) \backslash \sigma_w(T).$$

Si $\lambda \in \Delta(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $\lambda I - T \in W(T)$, de aquí se sigue que $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) > 0$, así que podemos escribir:

$$\Delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in W(X), 0 < \alpha(\lambda I - T)\}.$$

Lema 2.2. *Para cada $T \in L(X)$, tenemos que*

$$p_{oo}(T) \subseteq \pi_{oo}(T) \cap \Delta(T).$$

Prueba

Si $\lambda \in p_{oo}$, entonces $\lambda I - T \in B(X)$ y $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, así λ es punto aislado del $\sigma(T)$. Como $\lambda I - T \in B(X)$, entonces $\lambda I - T \in W(X)$, así tenemos que $\alpha(\lambda I - T) > 0$, ya que en caso contrario, por teorema 1.10 $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) = 0$, en consecuencia $\lambda I - T$ es sobreyectivo, teniéndose que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) = 0$, luego $\lambda \notin \sigma(T)$ el cual es una contradicción.

Definición 2.10. *Un operador acotado T, satisface el teorema de Browder, si*

$$\sigma_w(T) = \sigma_b(T),$$

o equivalentemente, si

$$acc\sigma(T) \subseteq \sigma_w(T).$$

Teorema 2.27. *Supongamos que T ò T^* tienen la SVEP. Entonces el teorema de Browder es válido para $f(T)$ para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Prueba Ver teorema 4.22 de [2].

Otro importante resultado muestra que el teorema de Browder es equivalente a la SVEP localizada en los puntos del complemento de $\sigma_w(T)$.

Teorema 2.28. *Para un operador acotado $T \in L(X)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $p_{oo}(T) = \Delta(T)$;

ii) T *satisface el teorema de Browder;*

iii) T^* *satisface el teorema de Browder;*

iv) T *tiene la SVEP en cada* $\lambda \notin \sigma_w(T)$, *v)* T^* *tiene la SVEP en cada* $\lambda \notin \sigma_w(T)$.

Prueba [teorema 4.23] de [2].

2.8. Teoremas de a-Browder

Caracterizamos los operadores que satisfacen el teorema de a-Browder.

Definición 2.11. *Un operador acotado* $T \in (X)$*, decimos que satisface el teorema de a-Browder, si*

$$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T).$$

Definimos los conjuntos

$$p^a_{oo}(T) := \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ub}(T) = \{\lambda \in \sigma_a(T) : \lambda I - T \in B_+(X)\}.$$

$$\Delta_a(T) := \sigma_a(T) \backslash \sigma_{uw}(T).$$

Si $\lambda \in \Delta_a(T)$, entonces $\lambda I - T \in W_+(X)$ implicando que $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado, con $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$, así podemos escribir

$$\Delta_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in W_+(X), 0 < \alpha(\lambda I - T)\}.$$

Lema 2.3. *Para cada* $T \in L(X)$ *tenemos:*

i) $p^a_{oo}(T) \subseteq \pi^a_{oo}(T)$*. En particular, cada* $\lambda \in p^a_{oo}(T)$ *es un punto aislado de* $\sigma_a(T)$.

ii) $p^a_{oo}(T) \subseteq \Delta_a(T) \subseteq \sigma_a(T)$

Prueba

ver[2, Teorema 4.31].

Veremos algunos resultados referentes al teorema de a-Browder, y las demostraciones de los mismos pueden ser encontrados en el capítulo 4, sección 4 de [2].

Teorema 2.29. *Para un operador acotado $T \in L(X)$, el teorema de a-Browder es válido para T si y solo si $p_{oo}^{a}(T) = \Delta_a(T)$. En particular, el teorema de a-Browder no se cumple si $\Delta_a(T) = \phi$.*

Teorema 2.30. *Supóngase que T ò T^* tiene la SVEP. Entonces el teorema de a-Browder es válido para $f(T)$ y $f(T)^*$ para todo $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$.*

Teorema 2.31. *Si $T \in L(X)$ las siguientes condiciones son válidas:*

i) *T satisface el teorema de a-Browder si y solo si T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{uw}(T)$.*

ii) *T^* satisface el teorema de a-Browder si y solo si T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{\ell w}(T)$.*

iii) *Si T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{\ell w}(T)$, entonces el teorema de a-Browder es válido para T^**

iv) *Si T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{uw}(T)$, entonces T satisface el teorema de a-Browder.*

Dado que $\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_w(T)$, entonces, por teoremas 2.28 y 2.31, tenemos que: El teorema de a-Browder para $T \Rightarrow$, el teorema de Browder para T.
En efecto;

El Teorema de a-Browder para T

$\Rightarrow$ *T tiene la SVEP para todo $\lambda \notin \sigma_{uw}$*

$\Rightarrow$ *tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_w(T)$*

$\Rightarrow$ *El teorema de Browder para T.*

2.9. Teorema de Weyl y Teorema de a-Weyl

Para un operador acotado $T \in L(X)$ se define

$$\pi_{oo}(T) := \{\lambda \in iso\,\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\},$$

y

$$\pi^a_{oo}(T) := \{\lambda \in iso\,\sigma_a(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}.$$

Las demostraciones de los resultados que veremos a continuación pueden ser encontrados en el capítulo 4, sección 5 de [2].

Lema 2.4. *Para cada $T \in L(X)$ tenemos*

$$p_{oo}(T) \subseteq p^a_{oo}(T) \text{ y } \pi_{oo}(T) \subseteq \pi^a_{oo}(T)$$

Definición 2.12. *Un operador acotado $T \in L(X)$ decimos que satisface el teorema de Weyl, si*

$$\Delta(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_w(T) = \pi_{oo}(T).$$

Teorema 2.32. *Si un operador acotado $T \in L(X)$ satisface el teorema de Weyl, entonces*

$$p_{oo}(T) = \pi_{oo}(T) = \Delta(T).$$

El siguiente resultado relaciona el teorema de Browder y el teorema de Weyl. Definimos

$$\Delta_{oo}(T) := \Delta(T) \cap \pi_{oo}(T).$$

Teorema 2.33. *Sea $T \in L(X)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *T satisface el teorema de Weyl;*

ii) *T satisface el teorema de Browder y $p_{oo}(T) = \pi_{oo}(T)$;*

iii) *$H_o(\lambda I - T)$ es finito-dimensional para todo $\lambda \in \Delta_{oo}(T)$;*

iv) *$K(\lambda I - T)$ es finito-codimensional para todo $\lambda \in \Delta_{oo}(T)$.*

Definición 2.13. *Un operador acotado $T \in L(X)$ decimos que satisface el teorema de a-weyl si*

$$\Delta^a(T) := \sigma_a(T) \backslash \sigma_{uw}(T) = \pi^a_{oo}(T).$$

Teorema 2.34. *Si un operador acotado $T \in L(X)$ satisface el teorema de a-weyl, entonces*

$$p^a_{oo}(T) = \pi^a_{oo}(T) = \Delta^a(T).$$

Teorema 2.35. *Sea $T \in L(X)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *T satisface el teorema de a-weyl:*

ii) *T satisface el teorema de a-Browder y $p^a_{oo}(T) = \pi^a_{oo}(T)$;*

iii) *El teorema de a-Browder se cumple para T y $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado para todo $\lambda \in \pi^a_{oo}(T)$.*

Teorema 2.36. *Si $T \in L(X)$ satisface el teorema de a-weyl, entonces T satisface el teorema de weyl.*

Capítulo 3

Teorema Generalizado de a-Browder

Ya es conocido que en la teoría de operadores se presentan bajo ciertas características el teorema de a-Browder, entre otros.

Ahora, en este capítulo generalizamos, según Berkaní, los operadores del tipo Fredholm, así trataremos con operadores de tipo Berkaní-Fredholm, con los que surgen una nueva variedad de espectros, los llamados espectros de B-Fredholm, como por ejemplo el espectro upper semi B-Fredholm ($\sigma_{USBF^-}(T)$) y decimos que un operador T satisface el teorema generalizado de a-Browder si el espectro upper semi B-Fredholm coincide con el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$, para el cual $p(\lambda I - T) = \infty$ o $(\lambda I - T)^{p+1}(X)$ no es cerrado, que más adelante veremos que es el espectro left Drazin de T y veremos como precisamente el teorema generalizado de a-Browder para un operador T implica el teorema de a-Browder y el teorema de Browder para T.

Un principal enfoque que tiene este capítulo, además de caracterizar los operadores lineales acotados T que satisfacen el teorema generalizado de a-Browder, es ver como la SVEP induce a un operador a satisfacer el teorema generalizado de a-Browder.

Comencemos entonces a definir algunos resultados básicos que nos ayudarán a desarrollar el objetivo principal del capítulo.

Antes recordemos que: Para cada $T \in L(X)$ y n un entero no negativo, denotamos por $T_{[n]}$ a la restricción de T a $T^n(X)$ (donde $T_{[0]} = T$)

Definición 3.1. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach. Decimos que T es un operador upper semi B-Fredholm si para algún $n \geq 0$ el rango $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es un operador upper semi Fredholm.*

La clase de los operadores upper semi B-Fredholm la denotaremos por $USBF(X)$.

Decimos que T es un operador lower semi B-Fredholm si para algún $n \geq 0$ el rango $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es un operador lower semi-Fredholm.Análogamente, decimos que un operador $T \in L(X)$ es semi B-Fredholm (respectivamente B-Fredholm) si para algún $n \geq 0$, el rango $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es un operador semi-Fredholm (respectivamente Fredholm).

Definición 3.2. *Un operador acotado $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, decimos que es un operador B-weyl si para algún entero $n \geq 0$ el rango $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es un operador de weyl, es decir, $T_{[n]}$ es un operador de Fredholm con índice 0.*

Un operador $T \in L(X)$ es Drazin invertible (con índice finito) precisamente cuando $p(T) = q(T) < \infty$, por [8, corolario 2.2.] , [9, Prop. A], esto es equivalente a decir que $T = T_0 \oplus T_1$, donde T_0 es invertible y T_1 es nilpotente.

Definiremos el espectro de Drazin como

$$\sigma_d(T) := \{\lambda \in C : \lambda I - T \text{ no es Drazin invertible}\}.$$

Extenderemos el concepto de Drazin invertibilidad para operadores lineales acotados.

Definición 3.3. *Un operador $T \in L(X)$ decimos que es left Drazin invertible si $p := p(T) < \infty$ y $T^{p+1}(X)$ es cerrado.*

El espectro de left Drazin es definido por,

$$\sigma_{\ell d} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es left Drazin invertible}\}.$$

Recordemos que el espectro aproximado puntual $\sigma_a(T)$ es definido por

$$\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es bounded below}\}.$$

Definición 3.4. *Un punto $\lambda \in \sigma_a(T)$ decimos que es un polo izquierdo si $\lambda I - T$ es left Drazin invertible.*

Definición 3.5. *Sea $T \in L(X)$ y $d \in \mathbb{N}$. Decimos que T tiene descent uniforme para $n \geq d$ si $T(X) + \ker T^n = T(X) + \ker T^d$ para todo $n \geq d$. Además, si $T(X) + \ker T^d$ es cerrado, entonces decimos que T tiene descent topológicamente uniforme para $n \geq d$.*

Observemos que cualquiera de las cantidades, $p(T), q(T)$ es finita, entonces T tiene descent uniforme.

En efecto;

i) Se Sea $p := p(T) < \infty$ y tomemos $d = p$, entonces es claro que

$$T(X) + \ker T^n = T(X) + \ker T^d \text{ para todo } n \geq p.$$

ii) Sea $q := q(T) \leq m < \infty$ por teorema 1.2 tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ y un subespacio $Y_n \subseteq \ker T^m$ tal que

$$X = Y_n \oplus T^n(X),$$

lo que implica que para el $\ker T^m, X$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} X &= \ker T^m \oplus T^n(X) \\ &= \ker T^m + T(X) \quad (\text{ya que } T^n(X) \subseteq T(X)). \\ &= \ker T^d + T(X) \quad (\text{con } m \geq q = d), \end{aligned}$$

luego, para cada $m \geq d$, tenemos que

$$T(X) + \ker T^m = T(X) + \ker T^d.$$

Definimos por

$$\Delta(T) := \{n \in \mathbb{N} : m \geq n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow T^n(X) \cap \ker T \subseteq T^m(X) \cap \ker T\},$$

y definimos el grado estable de iteración como

$$dis(T) : \text{ínf}\, \Delta(T) \quad \text{si} \quad \Delta(T) \neq \emptyset,$$

mientras que

$$dis(T) = \infty \quad si \quad \Delta(T) = \infty.$$

Definición 3.6. *$T \in L(X)$ se dice quasi-Fredholm de grado d, si existe $d \in \mathbb{N}$ tal que*

a) $dis(T) = d$

b) $T^n(X)$ es un subespacio cerrado de X para cada $n \geq d$

c) $T(X) + \ker T^d$ es un subespacio cerrado de X.

Denotamos por $QF(d)$ el conjunto de los operadores quasi-Fredholm de grado d.

Nota 3:

Si $T \in QF(d)$ entonces T tiene descent topológicamente uniforme para $n \geq d$, ver [10, teorema 3.2].

Proposición 3.1. *Sea $T \in L(X)$ un operador en un espacio de Banach X, y supóngase que T tiene ascent, $p = p(T) = m < \infty$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $T^{m+1}(X)$ es cerrado;

b) $T^n(X)$ *es cerrado para algún entero* $n > m$*;*

c) $T^n(X)$ *es cerrado para todo entero* $n \geq m$*;*

d) $T^{m+1}(X) + \ker T^m$ *es cerrado;*

e) $T^n(X) + \ker T^m$ *es cerrado para algún entero* $n \geq \text{máx}\{1, m\}$*;*

f) $T^n(X) + \ker T^m$ *es cerrado para todo entero* $n \geq 0$.

Prueba

Antes de probar las equivalencia, demostraremos lo siguiente:

i) Si $n \geq 0$ es cualquier entero para el cual $T^n(X)$ es cerrado, entonces también $T^{n-k}(X) + \ker T^k$ es cerrado para cada $k = 0, 1, ..., n$.

Prueba

Consideremos dos sucesiones $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en X y $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $\ker T^k$. Tomemos una sucesión de vectores $T^{n-k}(x_i) + y_i$ en X, que converge a algún $z \in X$ cuando $i \to \infty$, y veremos que $z \in T^{n-k}(X) + \ker T^k$.

Tenemos que $T^n(x_i) = T^k(T^{n-k}x_i + y_i)$ y que

$$T^n(x_i) = T^k(T^{n-k}(x_i) + y_i) \to T^k(z) \text{ cuando } i \to \infty.$$

y como $T^n(x_i)$ es una sucesión convergente en $T^n(X)$, tenemos que $T^n(z) \in T^n(X)$ ya que $T^n(X)$ es cerrado, luego existe un vector $u \in X$ tal que

$$\begin{aligned} T^n(z) = T^n(u) &\Rightarrow T^k(z) - T^n(u) = 0 \\ &\Rightarrow T^k(z - T^{n-k}(u)) = 0 \\ &\Rightarrow z - T^{n-k}(u) \in \ker T^k \end{aligned}$$

lo que implica que existe $y_o \in \ker T^k$ tal que

$$
\begin{aligned}
& z - T^{n-k}(u) = y_o \\
& \Rightarrow z = y_o + T^{n-k}(u) \Rightarrow z \in T^{n-k}(X) + \ker T^k \\
& \therefore \quad T^{n-k}(X) + \ker T^k \text{ es cerrado.}
\end{aligned}
$$

ii) Para cada entero $n > m$, para el cual $T^n(X)$ es cerrado, se sigue que $T^{n+1}(X)$ es cerrado.

En efecto para demostrar este resultado, aplicamos la afirmación anterior para el caso donde $k = n-1$, así $T(X) + \ker T^{n-1}$ es cerrado. Dado que $n > n-1 \geq m = p$.

Se tiene

$$T(X) + \ker T^{n-1} = T(X) + \ker T^n,$$

usando el lema 4.10.3 de [11] se sigue que

$$T^{n+1}(X) = T^n(T(X)) + \ker T^n) \text{ es cerrado.}$$

$\square$

iii) Supóngase ahora que $T^n(X)$ es cerrado para algún entero $n > m$, entonces tenemos que $T^r(X) + \ker T^m$ es cerrado para cada $r \geq 0$.

Prueba

Sea $r \geq 0$ y consideremos los enteros $q = m + n + r$ y $k = m + n$. Dado que $q \geq n > m$ concluimos de la parte (ii) que $T^q(X)$ es cerrado y de la parte (i) se tiene que $T^{q-k}(X) + \ker T^n$ es cerrado.

Dado que $k \geq m = p(T)$ tenemos que $\ker T^k = \ker T^m$.

Así

$$T^r(X) + \ker T^m = T^{q-k}(X) + \ker T^k \text{ es cerrado.}$$

Por lo tanto, $T^r(X) + \ker T^m$ es cerrado para cada $r \geq 0$.

iv) Veamos ahora las equivalencias:

$$(c) \Rightarrow (a) \text{ clara, ya que } m+1 > m$$

$$(a) \Rightarrow (b) \text{ haciendo } n = m+1 > m$$

$$(b) \Rightarrow (f) \text{ por la parte (iii).}$$

$$(f) \Rightarrow (c) \text{ en efecto.}$$

Sabemos que $T^n(X) \cap \ker T^n = \{0\}$ para todo $n \geq m$ (Lema 1.2), y por hipótesis $T^n(X) + \ker T^m$ es cerrado para todo $n \geq 0$.

Por lo tanto, por el Lema 4.10.2[11] tenemos que $T^n(X)$ es cerrado para todo entero $n \geq m$.

Por otro lado, supongamos que (e) es válido; esto es, $T^n(X) + \ker T^m$ es cerrado para algún entero $n \geq \text{máx}\{1, m\}$.

El Lema 1.2 (parte (i)), también tenemos que $T^n(X) \cap \ker T^m = \{0\}$.

Así, por el teorema 1.5, tenemos que $T^n(X)$ es cerrado.

Aplicando [11, Lema 4.10.3] al operador T^n y haciendo $Y := T^n(X)$ se sigue que

$$T^{2n}(X) = T^n(T^n(X) + \ker T^n) \text{ es cerrado.}$$

Dado que $n_1 = 2n > m$ tenemos la implicación $(e) \Rightarrow (b)$.

Dado que $(f) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$ son claras, tenemos las equivalencias de los seis enunciados.

Definición 3.7. *Sea X un espacio de Banach, denotamos al conjunto de los operadores T*

upper semi-Fredholm que tienen $ind\,T \leq 0$, al conjunto

$$USF^{-}(X) := \{T \in L(X) : T \in \Phi_{+}(X), ind\,T \leq 0\},$$

y denotamos por $USBF^{-}(X)$ a la clase de los operadores T upper semi B-Fredholm, tal que $ind\,T \leq 0$.

Definición 3.8. *Sea X un espacio de Banach, denotamos al conjunto de los operadores T upper semi B-Fredholm que tienen $ind\,T \leq 0$, al conjunto*

$$USBF^{-}(X) := \{T \in L(X) : T_{[n]} \in \Phi_{+}(X), n \in \mathbb{N}, ind\,T \leq 0\}.$$

Veamos ahora la relación entre el concepto de Drazin invertibilidad y la SVEP localizada:

Teorema 3

Para un operador acotado $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes;

i) $T \in USBF^{-}(X)$ y T tiene la SVEP en 0;

ii) $T \in QF(d)$ y T tiene la SVEP en 0;

iii) Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n}(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es bounded below;

iv) $T \in USBF^{-}(X)$ y $p(T) < \infty$;

v) T es left Drazin invertible.

Prueba

$(i) \Rightarrow (ii)$ Por proposición 2.5 de [6] cada operador semi B-Fredholm es quasi-Fredholm.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Por teorema 1.78 de [2] tenemos que si $T \in QF(d)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]} = T\big|T^n(X)$ es semi-regular.

Luego, asumiendo que T tiene la SVEP en 0, entonces $T_{[n]}$ tiene la SVEP en 0 y por teorema 2.49 de [1] tenemos que $T_{[n]}$ es bounded below.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Veamos que $p(T)$ es finito.

En efecto, supongamos que $x \in \ker T^{n+1}$, entonces $T(T^n x) = 0$, así $T^n x \in \ker T$. Por otro lado $T^n x \in T^n(X)$, luego se sigue que $T^n x \in \left[\ker T \cap T^n(X)\right] = \ker T_{[n]} = \{0\}$, lo que implica que $x \in \ker T^n$. Por lo tanto $\ker T^n = \ker T^{n+1}$.

De aquí se deduce que $p(T) < \infty$.

Por otro lado, por hipótesis $T[n]$ es inyectivo y tiene rango cerrado, así $T_{[n]}$ es un operador upper semi-Fredholm y como $p(T)$ es finito por teorema 1.10 $ind(T) \leq 0$, luego se sigue que $T \in USBF^{-}(X)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ es claro.

$(iii) \Rightarrow (v)$ Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es bounded below. Usando el mismo argumento de la prueba $(iii) \Rightarrow (iv)$ se tiene que $p := p(T) < n < \infty$, el rango de $T_{[n]}$ es el subespacio cerrado $T^{n+1}(X)$, con $p+1 \leq n+1$, por proposición 3.1 tenemos que $T^{p+1}(X)$ es cerrado.

En conclusión, $p := p(T) < \infty$ y $T^{p+1}(X)$ es cerrado. Por tanto T es left Drazin invertible.

$(v) \Rightarrow (iii)$ Supongamos que T es left Drazin invertible; esto es, $p := p(T) < \infty$ y $T^{p+1}(X)$ es cerrado, luego, por la proposición 3.1 se sigue que $T^p(X)$ es cerrado.

Por otro lado, dado que $p(T) < \infty$, por el lema 1.2 $\ker T_{[p]} = \ker T \cap T^p(X) = \{0\}$, resultando que $T_{[p]}$ es inyectivo, y como el rango de $T_{[p]}$ es $T^{p+1}(X)$ el cual es cerrado, tenemos que $T_{[p]}$ es bounded below.

3.1. Teorema Generalizado de a-Browder

En lo que sigue denotemos por $acc(K)$ e $iso(K)$, al conjunto de puntos de acumulación y al conjunto de los puntos aislados de $K \subseteq \mathbb{C}$, respectivamente.

Definimos

$$\sigma_{USBF^-}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin USBF^-(X)\}.$$

Teorema 3.1. *Supóngase que $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, entonces*

$$\sigma_{USBF^-}(T) \subseteq \sigma_{\ell d}(T) \subseteq \sigma_a(T).$$

Además

$$\sigma_{\ell d}(T) = \sigma_{USBF^-}(T) \cup acc\sigma_a(T).$$

Prueba

Veamos que $\sigma_{\ell d}(T) \subseteq \sigma_a(T)$.

Probaremos que el complemento de $\sigma_a(T)$ está contenido en el complemento de $\sigma_{\ell d}(T)$.

En efecto; Sea $\lambda \notin \sigma_a(T)$, luego $\lambda I - T$ es bounded below, esto es $p(\lambda I - T) = 0$ y $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado.

Como $p(\lambda I - T) = 0$.

$(\lambda I - T)^{p+1}(X) = (\lambda I - T)(X)$ el cual es cerrado. Así $(\lambda I - T)$ es left Drazin invertible y por lo tanto $\lambda \notin \sigma_{\ell d}$

Veamos ahora que $\sigma_{USBF^-}(T) \subseteq \sigma_{\ell d}(T)$.

En efecto, al principio el operador $\lambda I - T$ es acotado ya que T es acotado, ahora, sea $\lambda \notin \sigma_{\ell d}(T)$ así $\lambda I - T$ es left Drazin invertible.

Por teorema 3 tenemos que $(\lambda I - T) \in USBF^{-}(X)$ y por lo tanto $\lambda \notin \sigma_{USBF^{-}}(T)$.

Así se sigue que $[\sigma_{\ell d}(T)]^c \subseteq [\sigma_{USBF^{-}}(T)]^c$ y por lo tanto $\sigma_{USBF^{-}}(T) \subseteq \sigma_{\ell d}(T)$.

En conclusión tenemos que

$$\sigma_{USBF^{-}}(T) \subseteq \sigma_{\ell d}(T) \subseteq \sigma_a(T).$$

Demostraremos ahora la igualdad, veamos que

$$\sigma_{USBF^{-}}(T) \cup acc\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{\ell d}(T).$$

Por las inclusiones demostradas anteriormente, solo debemos mostrar que $acc\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{\ell d}(T)$.

En efecto,

Sea $\lambda_0 \notin \sigma_{\ell d}(T)$, por teorema 3 tenemos que $\lambda_0 I - T$ es un operador quasi Fredholm y en consecuencia tiene descent topológicamente uniforme, como $\lambda_0 I - T$ es left Drazin invertible, entonces $p(\lambda_0 I - T) < \infty$ así, por corolario 4.8 de [10] tenemos que $\lambda I - T$ es bounded below en un disco centrado en λ_0, menos λ_0, así $\lambda_0 \notin acc\sigma_a(T)$.

Por lo tanto

$$acc\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{\ell d}(T).$$

Veamos ahora que, $\sigma_{\ell d}(T) \subseteq \sigma_{USBF^{-}}(T) \cup acc\sigma_a(T)$.

Probemos por complemento

Sea $\lambda \notin \left[\sigma_{USBF^{-}} \cup acc\sigma_a(T)\right]$. Dado que $\lambda \notin acc\sigma_a(T)$ esto implica que T tiene la SVEP en λ, además, como $\lambda \notin \sigma_{USBF^{-}}(T)$ se tiene que $\lambda I - T \in USBF^{-}(X)$, así, por teorema 3.1 $\lambda I - T$ es left Drazin invertible, en consecuencia $\lambda \notin \sigma_{\ell d}(T)$, luego $\sigma_{\ell d}(T) \subseteq \sigma_{USBF^{-}}(T) \cup acc\sigma_a(T)$, por lo tanto $\sigma_{\ell d}(T) = \sigma_{USBF^{-}} \cup acc\sigma_a(T)$. $\square$

Denotemos por $\pi^a(T)$ el conjunto de polos izquierdos. Es decir,

$$\pi^a(T) = \sigma_a(T) \backslash \sigma_{\ell d}(T).$$

Notemos que $\pi^a(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$ para todo $T \in L(X)$, en efecto, sea $T \in L(X)$ y sea $\lambda_0 \in \pi^a(T)$ entonces $\lambda_0 I - T$ es left Drazin invertible. Por teorema 3, $\lambda_0 I - T \in QF(d)$ y $\lambda_0 I - T$ tiene la SVEP en λ_0, y así $\lambda_0 I - T$ tiene descent topológicamente uniforme, y dado que $\lambda_0 I - T$ es left Drazin invertible, entonces $p(\lambda_0 I - T) < \infty$. Luego, por corolario 4.8 de [10] se sigue que $\lambda I - T$ es bounded below en un disco centrado en λ_0 menos λ_0.

Por lo tanto, $\lambda_0 \in iso\sigma_a(T)$, en consecuencia

$$\pi^a(T) \subseteq iso\sigma_a(T).$$

Definición 3.9. *Definamos por* $\Delta_a(T) := \sigma_a(T) \backslash \sigma_{USBF^-}(T)$ *al conjunto de los* $\lambda \in \sigma_a(T)$ *tal que* $\lambda I - T \in USBF^-(X)$.

Lema 3.1. *Si* $T \in L(X)$*, entonces*

$$\Delta^a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in USBF^-(X), 0 < \alpha(\lambda I - T)\} = \Delta_a(T).$$

Además

$$\pi^a(T) \subseteq \Delta^a(T).$$

Prueba

Veamos la inclusión $\Delta^a(T) \subseteq \Delta_a(T)$.

Si $\lambda \in \Delta^a(T)$, entonces $\lambda I - T \in USBF^-(X)$ con $0 < \alpha(\lambda I - T) = dim\,\ker(\lambda I - T)$ así, $\lambda I - T$ no es inyectivo, por lo que $\lambda I - T$ no es bounded below y por lo tanto $\lambda \in \sigma_a(T)$.

Veamos la inclusión opuesta. Supongamos que $\lambda \in \Delta_a(T)$ no perdemos generalidad si se asume que $\lambda = 0$, así $T \in USBF^-(X)$ y $0 \in \sigma_a(T)$. Si $T \in USBF^-(X)$, entonces $T_{[n]}$ es upper semi-Fredholm, teniéndose que $\alpha(T_{[n]}) < \infty$.

Por otro lado, si $0 \in \sigma_a(T)$, esto implica que o T no tiene rango cerrado, o T no es inyectivo, pero $T \in USBF^-(X)$, así $T^n(X)$ es cerrado, y como $\alpha(T) < \infty$ entonces T^n upper semi-fredholm, asi T tambien lo es, por lo que T tiene rango cerrado, luego por lo supuesto T no es inyectivo de donde $\alpha(T) > 0$.

Por lo tanto, $\lambda \in \Delta^a(T)$, teniéndose que $\Delta_a(T) \subseteq \Delta^a(T)$, concluyendo que $\Delta_a(T) = \Delta^a(T)$.

Mostremos ahora la inclusión $\pi^a(T) \subseteq \Delta^a(T)$.

Sea $\lambda \in \pi^a(T) = \sigma_a(T) \backslash \sigma_{\ell d}(T)$, así $\lambda \in \sigma_a(T)$ y $\lambda I - T$ es left Drazin invertible y por teorema 3 $\lambda I - T \in USBF^-(X)$. Por lo tanto $\pi^a(T) \subseteq \Delta^a(T)$.

Definicion del teorema generalizado de Browder.

Definición 3.10. *Un operador acotado $T \in L(X)$ decimos que satisface el teorema generalizado de a-Browder si $\Delta^a(T) = \pi^a(T)$, o equivalente $\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{\ell d}(T)$.*

Esta equivalencia se debe a las siguientes igualdades:

$$\Delta^a(T) = \Delta_a(T) = \sigma_a(T) \backslash \sigma_{USBF^-}(T)$$

$$\pi^a(T) = \sigma_a(T) \backslash \sigma_{\ell d}(T).$$

Debido a que:

$$\sigma_{\ell d}(T) = \sigma_{USBF^-}(T) \cup acc\sigma_a(T).$$

Para que $\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{\ell d}(T)$ por teorema (3.1) sólo resta probar que $acc\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{USBF^-}(T)$.

Luego, T satisface el Teorema Generalizado de a-Browder si y solo si $acc\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{USBF^-}(T)$.

En lo que sigue damos la caracterización local espectral de los operadores que satisfacen el teorema generalizado de a-Browder.

Teorema 3.2. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, satisface el teorema generalizado de a-Browder, si y solo si T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$.*

Demostración

Si T satisface el teorema generalziado de a-Browder, entonces $\sigma_{\ell d}(T) = \sigma_{USBF^-}(T)$, sea $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$ luego $\lambda I - T \in USBF^-(X)$ y por la igualdad anterior $\lambda I - T$ es left Drazin invertible, así $p(\lambda I - T) < \infty$ y por lo tanto T tiene la SVEP en λ para cada $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$.

Recíprocamente, supongamos que T tiene la SVEP en cada punto λ que no pertenece a $\sigma_{USBF^-}(T)$.

Si $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}$ entonces $\lambda I - T \in USBF^-(X)$ y T tiene la SVEP en λ, por teorema 3, $\lambda I - T$ es left Drazin invertible, así $\lambda \notin \sigma_{\ell d}(T)$. De allí, $\sigma_{\ell d}(T) \subseteq \sigma_{USBF^-}(T)$ y dado que la inclusión $\sigma_{USBF^-}(T) \subseteq \sigma_{\ell d}(T)$ es válido para todo operador (teorema 3.2) tenemos que $\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{\ell d}(T)$.

Luego T satisface el tereoma generalizado de a-Browder.

Corolario 3.1. *Si $T \in L(X)$ tiene la SVEP, entonces T satisface el teorema generalizado de a-Browder.*

Veamos ahora la relación que se presenta entre los teoremas de Browder, pero antes haremos un breve resumen de los operadores acotados que satisfacen el teorema generalizado de Browder.

Denotemos por

$$\sigma_{bw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} := \lambda I - T \text{ no es B-weyl.}\}$$

Definición 3.11. *Un operador acotado $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, decimos que satisface el teorema generalizado de Browder, si $\sigma(T) \setminus \sigma_{bw}(T)$ coincide con el conjunto de polos de T o equivalentemente.*

T satisface el teorema generalizado de Browder $\Leftrightarrow \sigma_{bw}(T) = \sigma_d(T)$.

Teorema 3.3. *Supóngase que $\lambda I - T \in L(X)$ es B-weyl. Entonces, las siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *T tiene la SVEP en λ;*

ii) *$\lambda I - T$ es Drazin invertible;*

iii) *T^* tiene la SVEP en λ*

Prueba

Ver teorema 24 de [12].

Teorema 3.4. *Sea $T \in L(X)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *T satisface el teorema generalizado de Browder;*

ii) *T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$;*

iii) *T^* tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$;*

iv) *T^* satisface el teorema generalizado de Browder.*

Prueba

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Si T satisface el teorema generalizado de Browder, entonces $\sigma_{bw}(T) = \sigma_d(T)$.

Sea $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$ luego $\lambda \notin \sigma_d(T)$, implicando que $\lambda I - T$ es Drazin invertible, en consecuencia $p(\lambda I - T) < \infty$, teniéndose que T tiene la SVEP en $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$.

Recíprocamente, supongamos que T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$ entonces, por teorema 3.4 $\lambda \notin \sigma_d(T)$, esto muestra que $\sigma_d(T) \subseteq \sigma_{bw}(T)$, por otro lado $\sigma_{bw}(T) \subseteq \sigma_d(T)$ para todo operador $T \in L(X)$, así $\sigma_{bw}(T) = \sigma_d(T)$, y por lo tanto T satisface el teorema generalizado de Browder.
$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Si T satisface el teorema generalizado de Browder, entonces $\sigma_{bw}(T) = \sigma_d(T)$, sea $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$, así $\lambda I - T$ es Drazin invertible, en consecuencia $q(\lambda I - T) < \infty$, implicando que T^* tiene la SVEP en $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$.

Recíprocamente, si $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$ entonces $\lambda I - T$ es B-weyl y por hipóteis T^* tiene la SVEP en λ, luego por teorema 3.4 $\lambda \notin \sigma_d(T)$, en consecuencia $\sigma_{bw}(T) = \sigma_d(T)$ implicando que T satisface el teorema generalizado de Browder. $(i) \Leftrightarrow (iv)$ Se prueba que, T es un operador B-Fredholm si y solo si T^* es un operador B-Fredholm y en este caso $ind(T) = ind(T^*)$. Por lo tanto, $\sigma_{bw}(T) = \sigma_{bw}(T^*)$.

De la equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$, tenemos que T^* satisface el teorema generalizado de Browder si y solo si T^* la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{bw}(T) = \sigma_{bw}(T^*)$.

Teorema 3.5. *Para cada operador $T \in L(X)$, tenemos las siguientes inclusiones:*

i) $\sigma_{USBF^-}(T) \subseteq \sigma_{bw}(T)$*;*

ii) $\sigma_{USBF^-}(T) \subseteq \sigma_{uw}(T)$

Prueba

i) Sea $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$ entonces, para algún $n \in \mathbb{N}$ $(\lambda I - T)^n(X)$es cerrado y $(\lambda I - T)_{[n]}$ es un operador de weyl; esto es, $(\lambda I - T)_{[n]}$ es un operador de Fredholm con índice 0, dando como consecuencia que

$\alpha(\lambda I - T)_{[n]} < \infty, \quad$ y

$\beta(\lambda I - T)_{[n]} < \infty \Rightarrow$ el rango de $(\lambda I - T)_{[n]}$ es cerrado.

Así, $(\lambda I - T) \in USBF^{-}(X)$, implicando que $\lambda \notin \sigma_{USBF^{-}}(T)$,

por lo tanto

$$\sigma_{USBF^{-}}(T) \subseteq \sigma_{bw}(T).$$

ii) Sea $\lambda \notin \sigma_{uw}(T)$, no perdemos generalidad si suponemos que $\lambda = 0$, así $T \in UW(X)$, en consecuencia $\alpha(T) < \infty, T(X)$ es cerrado y $ind(T) \leq 0$, pero

$$\ker(T)_{[n]} = \ker(T) \cap T^{n}(X) \subseteq \ker(T),$$

implicando que $\alpha(T)_{[n]} < \infty$.

Por otro lado, dado que $T(X)$ es cerrado, por proposición 3.1 se tiene que el rango de $(T)_{[n]}$ es cerrado, por lo que tenemos que $\lambda \notin \sigma_{USBF^{-}}(T)$ y así

$$\sigma_{USBF^{-}}(T) \subseteq \sigma_{uw}(T).$$

Presentaremos ahora, la relación entre los teoremas de Browder

Teorema 3.6. *Si $T \in L(X)$ satisface el teorema generalizado de a-Browder, entonces el teorema generalizado de Browder y el teorema de a-Browder se satisfacen para T.*

Prueba

Veamos primero que el teorema generalizado de a-Browder implica el teorema generalizado de Browder.

En efecto, por definicion 3.11.

T satisface el teorema generalizado de a-Browder si y solo si T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{USBF}(T)$, pero por teorema 3.6, esto implica que T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$ y por teorema 3.5 se sigue que T satisface el teorema generalizado de Browder. Demostremos el otro enunciado, nuevamente, por teorema 3.2 el teorema generalizado de a-Browder para T es equivalente a la SVEP de T en cada $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$, implicando, por el teorema 3.6 que T tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{uw}(T)$ y por teorema 2.31 se sigue que T satisface el teorema de a-Browder.

Recordemos que $\mathcal{H}(\sigma(T))$ denota el conjunto de todas las funciones analíticas definidas en una vecindad abierta que contiene a $\sigma(T)$.

Teorema 3.7. *Sea $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, y $f : U \to \mathbb{C}$ una función analítica sobre una vecindad abierta U de $\sigma(T)$. Si T tiene la SVEP entonces $f(T)$ tiene la SVEP. Si f no es constante en cada componente conexa de U, entonces T tiene la SVEP si y solo si $f(T)$ tiene la SVEP.*

Prueba

Ver teorema 2.40 de [1].

El teorema de la función espectral es válido para $\sigma_{\ell d}(T)$ en el caso donde f no es constante sobre cada componente de su dominio.

En esta oportunidad, veamos que el teorema de la función espectral es válida para $\sigma_{USBF^-}(T)$.

Teorema 3.8. *Supóngase que T tiene la SVEP y que $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Entonces el teorema generalizado de a-Browder es válido para $f(T)$. Además, si f no es constante sobre cada componente de su dominio, tenemos que*

$$f(\sigma_{USBF^-}(T)) = f(\sigma_{\ell d}(T)) = \sigma_{\ell d}(f(T)) = \sigma_{USBF^-}(f(T)).$$

Prueba

Si T tiene la SVEP entonces, por teorema 3.8 $f(T)$ tiene la SVEP, luego por el corolario 3.1, el teorema generalizado de a-Browder es válido para $f(T)$.

Probemos ahora la cadena de igualdades.

El teorema de la función espectral, es válido para $\sigma_{\ell d}(T)$, así que

$$\sigma_{\ell d}(f(T)) = f(\sigma_{\ell d}(T)) \qquad (a)$$

Por otro lado, como $f(T)$ satisface el teorema generalizado de a-Browder, entonces

$$\sigma_{USBF^-}(f(T)) = \sigma_{\ell d}(f(T)) \qquad (b)$$

Además T tiene la SVEP, por el corolario 3.1, T satisface el teorema generalizado de a-Browder, teniéndose que

$$\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{\ell d}(T),$$

implicando que,

$$f(\sigma_{USBF^-}(T)) = f(\sigma_{\ell d}(T)) \qquad (c).$$

Luego, de (a), (b) y (c) tenemos las igualdades.

$$f(\sigma_{USBF^-}(T)) = f(\sigma_{\ell d}(T)) = \sigma_{\ell d}(f(T)) = \sigma_{USBF^-}(f(T)).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\widehat{T}_n : X/\mathrm{ker}T^n \to X/\mathrm{ker}T^n$ la función cociente canónica, definida por $\widehat{T}_n\widehat{x} = \widehat{Tx}$ para cada $\widehat{x} \in X/\mathrm{ker}T^n$, donde $x \in \widehat{x}$.

Lema 3.2. *Supóngase que $T \in L(X)$. Si $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es upper semi-Fredholm. Entonces $\widehat{T}_n$ es upper Semi-Fredholm con ind$\widehat{T}_n$ = ind$T_{[n]}$.*

Además, si T tiene SVEP en 0, entonces $\widehat{T}_n$ tiene SVEP en 0.

Demostración

El operador $[T^n] : X/\ker T^n \to T^n(X)$ definido por $[T^n]\widehat{x} = T^n x$, donde $x \in \widehat{x}$ es una biyección, en efecto, sean $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/\ker T^n$ con $x \in x$ y $\widehat{y} \in \widehat{y}$

$$
\begin{aligned}
[T^n]\widehat{x} = [T^n]\widehat{y} &\Leftrightarrow T^n x = T^n y \\
&\Leftrightarrow T^n x - T^n y = 0 \\
&\Leftrightarrow T^n(x-y) = 0 \\
&\Leftrightarrow x - y \in \ker T^n \\
&\Leftrightarrow x \sim y \\
&\Leftrightarrow \widehat{x} = \widehat{y}.
\end{aligned}
$$

así $[T^n]$ es inyectiva.

Por otro lado, sea $y \in T^n(X)$, luego existe $x \in X$ tal que $T^n x = y$ tomando $x \in \widehat{x}$, tenemos que $[T^n]\widehat{x} = T^n x = y$. Así, $[T^n]$ es sobreyectivo.

Además

$$[T^n]\widehat{T_n}\widehat{x} = [T^n]\widehat{Tx} = T^n(Tx) = T^{n+1}x \text{ y}$$

$$T_{[n]}[T^n]\widehat{x} = T_{[n]}(T^n x) = T^{n+1}x$$

por lo que

$$[T^n]\widehat{T_n} = T_{[n]}[T^n] \qquad (I)$$

Veamos que $\widehat{T_n}$ es upper semi-Fredholm, dado que $[T^n]$ es sobreyectivo, tenemos que

$$[T^n]\widehat{T_n}\big(X/\ker T^n\big) = \widehat{T_n}\big(X/\ker T^n\big),$$

lo que nos indica que el rango de $[T^n]$ es igual al rango de $\widehat{T_n}$, nuevamente como $[T^n]$ es sobreyectivo, se tiene

$$\beta([T^n]) = \beta(\widehat{T_n}) = 0 < \infty$$

implicando que $\widehat{T}_n$ tiene rango cerrado.

Por otro lado,

$\ker([T^n]) = \ker T^n = \ker \widehat{T}_n$, pero $[T^n]$ es inyectivo, así $\{0\} = \ker([T^n]) = \ker \widehat{T}_n$.

Por lo que se tiene que $\alpha(\widehat{T}_n) < \infty$,

por lo tanto $\widehat{T}_n$ es upper semi-Fredholm.

Veamos ahora que, $ind\widehat{T}_n = indT_{[n]}$.

En efecto, $[T^n]$ es biyectivo, en consecuencia $p([T^n]) = q([T^n]) = 0$ por teorema 1.10 tenemos que $\alpha([T^n]) = \beta([T^n]) < \infty$.

Además, $\widehat{T}_n \in \Phi_+(X)$, luego por el teorema del índice y la igualdad (I) se sigue que

$$indT_{[n]} + ind[T^n] = ind[T^n]\widehat{T}_n = ind[T^n] + ind\widehat{T}_n$$

Concluyéndose que $ind\widehat{T}_n = ind\, T_{[n]}$.

Veamos ahora que si T tiene la SVEP en 0, entonces también $\widehat{T}_n$ tiene la SVEP en 0.

En efecto;

i) Dado que T tiene la SVEP en 0, y que $T^n(X)$ es cerrado, entonces $T_{[n]} := T\big|T^n(X)$ tiene la SVEP en 0.

ii) $[T^n]$ es inyectivo y $[T^n]$ tiene rango denso, ya que

$$\overline{[T^n]\big(X/\ker T^n\big)} = \overline{T^n(X)} = T^n(X).$$

iii) $[T^n]\widehat{T}_n = T_{[n]}[T^n]$.

Por (i), (ii), (iii) y el teorema 2.9 se sigue que $\widehat{T}_n$ tiene la SVEP en 0.

Teorema 3.9. *Supóngase que $T \in L(X), X$ un espacio de Banach. Si T^* tiene la SVEP, entonces el teorema generalizado de a-Browder es válido para T. Además*

$$\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{bw}(T) = \sigma_{\ell d}(T) = \sigma_d(T).$$

Prueba

Sea $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\lambda = 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es upper semi-Fredholm, por el Lema 3.2, $\widehat{T_n}$ es upper semi-Fredholm con $ind\, \widehat{T_n} \leq 0$.

Como $(\widehat{T_n})^* = T^*\big|_{(\ker T^n)^\perp}$ se sigue que $(\widehat{T_n})^*$ tiene la SVEP (dado que $(\ker T^n)^\perp$ es cerrado y T^*-invariante)como ademas $\widehat{T_n}$ es semi-Fredholm entonces $q(\widehat{T_n}) < \infty$ y este hecho conduce a que $ind(\widehat{T_n}) \geq 0$.

Ahora, $q(\widehat{T_n}) < \infty$ y $\alpha(\widehat{T_n}) = \beta(\widehat{T_n}) < \infty$ entonces, por teorema 1.10 concluimos que $p(\widehat{T_n}) < \infty$, lo que implica, por teorema 2.26 que cero es un punto aislado de $\sigma\widehat{(T_n)}$. Queremos ver ahora que 0 es un punto aislado de $\sigma(T)$. En efecto, si $\mathbb{D}(0,\varepsilon)$ es una bola abierta centrada en 0 tal que $\mathbb{D}(0,\varepsilon)\setminus\{0\}$ está contenida en el resolvente $\rho\widehat{(T_n)}$, como $T\big|\ker T^n$ es nilpotente entonces $\sigma(T\big|_{\ker T^n}) = \{0\}$ implicando que $\rho(T\big|\ker T^n) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, en consecuencia

$$\mathbb{D}(0,\varepsilon)\setminus\{0\} \subseteq \rho(T\big|_{\ker T^n}). \qquad (I).$$

Sea $\widehat{X} := X/\ker T^n$, recordemos que $\widehat{T_n} : X/\ker T^n \to X/\ker T^n$, tomemos un $\mu \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)\setminus\{0\}$ y $x \in X$, entonces $\mu \in \rho(\widehat{T_n})$ por lo que $\mu I - \widehat{T_n}$ es sobreyectivo, luego existe $y \in X$ tal que $(\lambda I - \widehat{T_n})\widehat{y} = \widehat{x}$, resultando que $x - (\lambda I - T)y \in \ker T^n$. Así existe $z \in \ker T^n$ tal que

$$x - (\lambda I - T)y = (\lambda I - T)z. \qquad (II)$$

Pues $T^n(\lambda I - T)(z) = 0$ De (II) se sigue que $x \in (\lambda I - T)(X)$.

Por otro lado, del hecho de que $\lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)\backslash\{0\}, \mathbb{D}(0,\varepsilon)\backslash\{0\} \subset \rho(\widehat{T_n})$ se deduce que

$$\ker(\mu I - \widehat{T_n}) = \{0\} \text{ y que } \ker(\mu I - T\big|\ker T^n) = \{0\}.$$

Teniéndose que $\ker(\mu I - T) = \{0\}$.

Resumiendo, si $x \in X$ se sigue que $x \in (\mu I - T)(X)$ por lo que $\mu I - T$ es sobreyectivo y $\ker(\mu I - T) = \{0\}$.

Así, $\mu I - T$ es invertible en cada $\mu \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)\backslash\{0\}$.

Por lo tanto $\mathbb{D}(0,\varepsilon)\backslash\{0\}$ es un subconjunto del resolvente $\rho(T)$, en consecuencia, 0 es un punto aislado de $\sigma(T)$, implicando que T tiene la SVEP en 0.

Y por teorema 3.2, T satisface el teorema generalizado de a-Browder.

Veamos ahora que las igualdades son satisfechas: Como T satisface el teorema generalizado de a-Browder, entonces $\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{\ell d}(T)$. Además, por el teorema 3.7 tenemos que T satisface el teorema generalizado de Browder, teniéndose que

$$\sigma_{bw}(T) = \sigma_d(T).$$

Solo restaría probar que $\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{bw}(T)$.

En efecto, por el teorema 3.6 $\sigma_{USBF^-}(T) \subseteq \sigma_{bw}(T)$, para $T \in L(X)$.

Ahora, sea $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$, así para algún $n \in \mathbb{N}$ $T^n(X)$ es cerrado y $(\lambda I - T)_{[n]}$ es un operador upper semi-Fredholm.

Procediendo como en la primera parte de la prueba tenemos que $ind(\lambda I - \widehat{T_n}) = 0$, por lema 3.2 tenemos que $ind[(\lambda I - T)_{[n]}] = 0$, luego $\lambda \notin \sigma_{bw}(T)$.

Por lo que

$$\sigma_{bw}(T) \subseteq \sigma_{USBF^-}(T)$$

y por lo tanto

$$\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{bw}(T).$$

Corolario 3.2. *Si $T \in L(X)$ y T^* tiene la SVEP, entonces el teorema generalizado de a-Browder se satisface para $f(T)$ para cada $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$. Además, el teorema de la función espectral es válido para $\sigma_{USBF^-}(T)$.*

Prueba

En primer lugar, por [3] tenemos que $(f(T))^* = f(T^*)$ luego por teorema 3.8, $(f(T))^*$ tiene la SVEP y por teorema 3.10, $f(T)$ satisface el teorema generalizado de a-Browder.

Por otro lado, el teorema de la función espectral es válido para $\sigma_d(T)$, ver [17] ; esto es $f(\sigma_d(T)) = \sigma_d(f(T))$ y nuevamente, por teorema 3.10 se sigue que

$$f(\sigma_{USBF^-}(T)) = f(\sigma_d(T)) = \sigma_d(f(T)) = \sigma_{USBF^-}(f(T)).$$

Teorema 3.10. *Para cada operador acotado $T \in L(X)$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *T satisface el teorema generalizado de a-Browder;*

ii) *Cada $\lambda \in \Delta^a(T)$ es un punto aislado de $\sigma_a(T)$;*

iii) *$\Delta^a(T) \subseteq \partial\sigma_a(T), \partial\sigma_a(T)$ es la frontera topológica de $\sigma_a(T)$;*

iv) *$int\Delta^a(T) = \phi$;*

v) *$\sigma_a(T) = \sigma_{USBF^-}(T) \cup \partial\sigma_a(T)$;*

vi) *$\sigma_a(T) = \sigma_{USBF^-}(T) \cup iso\sigma_a(T)$.*

Prueba

$(i) \Rightarrow (ii)$ es claro, ya que si T satisface el teorema de a-Browder, entonces $\Delta^a(T) = \pi^a(T) \subseteq iso\sigma_a(T)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ es claro, ya que cada punto aislado de $\sigma_a(T)$ es punto frontero de $\sigma_a(T)$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ es claro, dado que $int\partial\sigma_a(T) = \phi$. $(iv) \Rightarrow (v)$ Supóngase que $int\Delta^a(T) = \phi$. Sea $\lambda_0 \in \Delta^a(T) = \sigma_a(T)\backslash\sigma_{USBF^-}(T)$ y supóngase que $\lambda_0 \notin \partial\sigma_a(T)$. Entonces existe un disco abierto $\mathbb{D}$ centrado en λ_0 contenido en $\sigma_a(T)$. Dado que $\lambda_0 I - T$ es upper Semi B-Fredholm (por nota de [7]) existe un disco abierto agujereado $\mathbb{D}_1$ contenido en $\mathbb{D}$ tal que $\lambda I - T$ es upper semi B-Fredholm para todo $\lambda \in \mathbb{D}_1$.

Además, $0 < \alpha(\lambda I - T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}_1$, en efecto, si $0 = \alpha(\lambda I - T)$, y como $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado tenemos entonces $(\lambda I - T)$ es bounded below, por lo que $\lambda \notin \sigma_a(T)$, el cual es una contradicción. Por el Lema 3.1 λ_0 está en $int\Delta^a(T)$ y esto también es una contradicción dado que $int\Delta^a(T) = \phi$. Asi se deduce que

$$\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{USBF^-}(T) \cup \partial\sigma_a(T).$$

Y como además, si $\lambda \notin \sigma_a(T)$ entonces $\lambda \notin \partial\sigma_a(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$ (por teorema 3.1), se tiene que

$$\sigma_{USBF^-}(T) \cup \partial\sigma_a(T) \subseteq \sigma_a(T).$$

y por lo tanto

$$\sigma_a(T) = \sigma_{USBF^-}(T) \cup \partial\sigma_a(T).$$

$(v) \Rightarrow (vi)$ Sea $\lambda_0 \in \partial\sigma_a(T)$ y $\lambda_0 \notin \sigma_{USBF^-}(T)$. Sea $\mathbb{D}$ un disco abierto centrado en λ_0. Supóngase que $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}$. Si $\mu \in \mathbb{D}$ y $\mu \notin \sigma_a(T)$ entonces T tiene la SVEP en μ, así $f \equiv 0$ en un disco abierto $U \subseteq \mathbb{D}$ centrado en μ. Luego como $\lambda_0 \in \partial\sigma_a(T)$ consideramos el teorema de la identidad para funciones analíticas se establece asi que

$f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}$, así T tiene la SVEP en λ_0. Como $\lambda_0 \notin \sigma_{USBF^-}(T)$, esto implica que $\lambda_0 I - T$ es upper Semi B-Fredholm y del teorema 3 se sigue que $\lambda_0 I - T$ es left Drazin invertible, en consecuencia $\lambda_0 \in \pi^a(T) \subseteq iso\,\sigma_a(T)$se deduce asi que

$$\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{USBF^-}(T) \cup iso\sigma_a(T).$$

Y como

$$\sigma_{USBF^-}(T) \cup iso\sigma_a(T) \subseteq \sigma_a(T),$$

tenemos la igualdad deseada.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Mostraremos que $\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{\ell d}(T)$. Sea $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_a(T)$, entonces, por teorema 3.1, $\lambda \notin \sigma_{\ell d}(T)$. Supóngase ahora que $\lambda \in \sigma_a(T)$. Entonces $\lambda \in \sigma_a(T) \backslash \sigma_{USBF^-}(T)$ en consecuencia $\lambda \in iso\sigma_a(T)$ (por hipótesis), esto implica que T tiene la SVEP en λ, además dado que $\lambda I - T$ es upper Semi B-Fredholm por teorema 3 $\lambda I - T$ es left Drazin invertible, así $\lambda \notin \sigma_{\ell d}(T)$.

Lo anterior prueba que $\sigma_{\ell d}(T) \subseteq \sigma_{USBF^-}(T)$ Y la inclusión opuesta es válida para todo operador, así $\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_{\ell d}(T)$, teniéndose que T satisface el teorema generalizado de a-Browder.

Corolario 3.3.

Si $T \in L(X)$ tiene la SVEP y $iso\sigma_a(T) = \phi$, entonces $\sigma_{USBF^-}(T) = \sigma_a(T)$.

Prueba

T satisface el teorema generalizado de a-Browder (por corolario 3.1) y por el teorema 3.11.

$$\sigma_a(T) = \sigma_{USBF^-}(T) \cup iso\sigma_a(T) = \sigma_{USBF^-}(T).$$

En lo que sigue denotamos por $\mathcal{H}(\Omega, Y), Y$ un espacio de Banach, al espacio de Frechet, que consiste de todas las funciones analíticas del conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a Y.

Antes del siguiente resultado, recordemos lo siguiente:

Para un operador acotado $T \in L(X)$ sobre un espacio de Banach X y un conjunto cerrado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, denotamos por $\chi_T(\Omega)$ al conjunto de todos los $x \in X$ tal que existe una función analítica $f : \mathbb{C}\backslash\Omega \to X$ tal que

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega.$$

El conjunto $\chi_T(\Omega)$ es un subespacio lineal de X llamado el subespacio glocal espectral de T asociada a Ω.

También tenemos que, si T tiene la SVEP, entonces $H_0(T) = \chi_T(\{0\})$. Para más detalles ver teorema 2.20 de [1].

Teorema 3.11. *Supóngase que $T \in L(X)$ es upper Semi B-Fredholm. Si T tiene la SVEP en 0, entonces existe $v \in \mathbb{N}$, tal que $H_0(T) = \ker(T)^v$.*

Prueba

Como T es upper Semi-Fredholm, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(X)$ es cerrado y $T_{[n]}$ es upper Semi-Fredholm, por lema 3.2, $\widehat{T_n}$ es upper semi-Fredholm y $\widehat{T_n}$ tiene la SVEP en 0 y por nota 2, $\widehat{T_n}$ tiene ascent p finito. Por teorema 2.23 se tiene también que $H_0\widehat{(T_n)} = \ker\widehat{(T_n)}^p$.

Ahora, supóngase que $x \in H_0(T)$ y mostremos que $\widehat{x} \in H_0\widehat{(T_n)}$.

En efecto, dado que $H_0(T) = X_T(\{0\})$ existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0\}, x)$ tal que

$$x = (\mu I - T)g(\mu) \quad \text{para todo} \quad \mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Si $\Phi : X \to \widehat{X} = X/\ker T^n$ denota la función cociente canónica entonces

$$\overline{g} := \Phi \circ g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \quad \text{y} \quad \widehat{x} = (\mu I - \widehat{T_n})\widehat{g(\mu)},$$

donde
$$\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$
Luego
$$\widehat{x} \in \widehat{X}_{\widehat{T_n}}(\{0\}) = H_0(\widehat{T_n}) = \ker(\widehat{T_n})^p;$$
es decir,
$$\widehat{T_n}^p \widehat{x} = \widehat{T^p x} = \widehat{0},$$

En consecuencia $T^p x \in \ker T^n$, esto es $T^n(T^p x) = 0$ o lo que es igual $T^{p+n} x = 0$, esto muestra que para $x \in H_0(T) \Rightarrow x \in \ker T^{p+n}$ por lo que $H_0(T) \subseteq \ker T^{p+n}$, como la inclusión opuesta es válida para cada operador, tenemos entonces que
$$H_0(T) = \ker T^{\nu}, \quad \text{donde} \quad \nu := p+n.$$

Teorema 3.12. *Para un operador acotado $T \in L(X)$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) T satisface el teorema generalizado de a-Browder;

ii) Para cada $\lambda \in \Delta^a(T)$ existe $\nu := \nu(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que
$$H_0(\lambda I - T) = \ker(\lambda I - T)^{\nu},$$

iii) $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado para todo $\lambda \in \Delta^a(T)$.

Prueba

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que T satisface el teorema generalizado de a-Browder, y sea $\lambda_0 \in \Delta^a(T)$. Sin perder generalidad podemos suponer que $\lambda_0 = 0$, entonces $T \in USBF^-(X)$ y por teorema 3.11, 0 es punto aislado de $\sigma_a(T)$, así T tiene la SVEP en 0.

Por teorema 3.12 se sigue que $H_0(T) = \ker T^{\nu}$ para algún $\nu \in \mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ es claro, ya que $\ker(\lambda I - T)^{\nu}$ es cerrado.

$(iii) \Rightarrow (i)$ supongamos que $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado para todo $\lambda \in \Delta^a(T)$.

Sea $\lambda \notin \sigma_{USBF^-}(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_a(T)$, entonces T tiene la SVEP en λ. Si $\lambda \in \sigma_a(T)$ entonces $\lambda \in \sigma_a(T) \backslash \sigma_{USBF^-}(T) = \Delta^a(T)$ y como $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado se sigue que T tiene la SVEP en λ. Por lo tanto, por definicion 3.11, T satisface el teorema generalizado de a-Browder.

Bibliografía

[1] AIENA P. (2004). *Fredholm and local spectral theory, with application to multipliers.* Klumer Acad. Publishers.

[2] AIENA, P. (2007). *Semi-Fredholm Operators, Perturbation theory and localized SVEP.* Ediciones IVIC.

[3] AIENA P., Y GARCÍA O. (2006). *Generalized Browder's theorem and SVEP.* Preprint.

[4] BACHMAN G., L. NARICI, (1999). *Functional Analysis.* Acedemic Press inc (London).

[5] BERKANI M. (1999). *On a class of quasi-Fredholm Operators.* Int. Equa Oper. Theory 34, (1).

[6] BERKANI M, Y SARIH M. (2001). *On Semi B-Fredholm operators.* Glasgow Math. J. 43, 457-465.

[7] BERKANI M, Y SARIH M. (2001). *An Atkinson-Type theorem for B-Fredholm operators.* Studia Math. 148, No. 3,251.257.

[8] GRABINER S. (1982). *Uniform ascent and descent of bounded operators.* J. Math Soc. Japan 34, 317-337.

[9] HEUSER, H.G. (1982). *Functional Analysis.* Marcel Dekker, New York.

[10] KOLIHA J.J. (1996). *Isolated spectral points.* Proc. Amer. Math. Soc. 124, 3417-3424.

[11] LAY D.C. (1970). *Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect.* Math. Ann. 184, 197-214.

[12] NEUMANN M.M. Y LAURSEN K. (2000). *An introduction to local spectral theory.* London Math. Soc. Monographs new series 20, 406-408.