UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

UNA COTA PARA LA CONSTANTE DE DAVENPORT K-BARICÉNTRICA PARA EL GRUPO $\mathbb{Z}_p$

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. JONATHAN DAVID ROJAS CARUCI

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
ÁREA DE CONOCIMIENTO: COMBINATORIA.
TUTOR: DRA. ISABEL MÁRQUEZ DE MASTROMARTINO

Barquisimeto, Venezuela. Abril de 2013

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

UNA COTA PARA LA CONSTANTE DE DAVENPORT K-BARICÉNTRICA PARA EL GRUPO $\mathbb{Z}_p$

presentado por la ciudadana BR. JONATHAN DAVID ROJAS CARUCI titular de la Cédula de Identidad No. 19.432.301, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

*Dedicado a **DIOS**, a mi Abuela **María**. (1938-2007). A mi MADRE, **Maritza**, a mis Hermanos: **Enrique, Iraida, Josué y Angelo** y a toda mi FAMILIA.*
"La fuerza de una familia es como la fuerza de un ejército se funda en su mutua lealtad." (Mario Puzo)

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradezco a **DIOS**, (JEHOVA de los Ejércitos) por haberme llenado de sabiduría y fortaleza y por llevarme por el camino correcto. Gracias **DIOS!**.

A mi Madre, **MARITZA** por darme todo su apoyo y amor, como solo una madre sabe hacerlo. A mi Abuela **María Caruci** por haberme dado todo su amor y haberme llevado por el camino correcto, gracias a ti es que soy quien soy!, te extraño! siempre te llevare en mi memoria. A mis hermanos **Enrique, Iraida, Josué y Angelo** por todo su apoyo. A mis 12 sobrinos, en especial a **Eliegmar, Angelis y Eithan** por llenarme de Felicidad y alegría como solo los niños saben hacerlo. Gracias!

A mi Tío **Rubén**, a mis tías **Marina y Beatriz** y a toda mi Familia.

A mi Alma Mater, la **UCLA** por abrirme las puertas hacia el conocimiento universal y por haberme llenado de muchas satisfacciones.

A mi Tutora, la Dra. **ISABEL MÁRQUEZ**, por haber compartido su conocimiento y por orientarme, corregirme y guiarme hacia la Excelencia. Sin usted no hubiera terminado esta tesis. MIL GRACIAS!. DIOS la Bendiga!.

A todos mis amigos y compañeros de estudio, por haberme brindado su amistad y ayudarme cuando lo necesitaba, entre con los que más compartí destacan: Emily, Jacobo, Mariana, Anaís, Emely, Jessica, Mayarin, Eleiny, Pilar, Carlos, Rosmery, Yogeidis, Mariela, María josé, Katherine, Erika, Alexis, Ernesto, Orlando, Andrei, María, Yenny, Migdalia, Betzabeth y Yilvric. Gracias también a Andrés y Aldemar por sus valiosas sugerencias y ayudas con el programa latex y la transcripción de la tesis.

A todos los profesores del departemento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la UCLA, entre los que más destacan están: los profesores Mario Rodriguez, Ismael Huerta, Júrancy Ereú, Adriana Araujo y Javier Hernandez.

Por último agradezco a todas esa personas que han formado parte de mi vida, amigos, conocidos y familiares, a los que están y a los que ya no están. Muchas Gracias!.

Resumen

Sea G un grupo abeliano finito y $k \geqslant 2$ un entero positivo. Una secuencia $S = a_1, a_2, ..., a_k$ de longitud k, en G es llamada secuencia k-baricéntrica si existe $j \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $\sum_{i=1}^{k} a_i = ka_j$. La **constante de Davenport k-baricéntrica** denotada por $BD(k, G)$, es el menor entero positivo s, tal que toda secuencia en G de longitud s, contiene una subsecuencia k-baricéntrica.

En este trabajo se desarrolla la demostración del siguiente resultado: Sea $p \geqslant 5$, un número primo y sea k un entero, $3 \leqslant k \leqslant p - 1$. Entonces,

$$BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - \left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor - 2.$$

dado por Tran Dinh Luong en [16].

Palabras y frases claves: Secuencia, secuencias de suma cero, constante de Davenport, secuencias baricéntricas, secuencias k-baricéntricas, constante de Davenport k-baricéntrica.

Índice

NOTACIONES

G	grupo abeliano
$\|G\|$	orden de G
$\circ(a)$	orden de un elemento a de G
S	secuencia de G
$\|S\|$	longitud de la secuencia S
p	número primo
$\|B\|$	cardinalidad del conjunto B
$A \backslash B$	$\{x : x \in A \;\; y \;\; x \notin B\}$
A^c	complemento de A
$v_g(S)$	multiplicidad del elemento g de G en S
$h(S)$	$\max\{v_g(S) : g \in G\}$
$supp(S)$	$\{g \in G : v_g(S) > 0\}$
$d(S)$	$\|supp(S)\|$

Introducción

Sea G un grupo abeliano finito y sea k, un entero positivo. A la colección $S = a_1, a_2, \ldots, a_k$, de elementos de G, donde la repetición de sus elementos es permitida y la posición en que están colocados estos elementos, no es considerada, la llamaremos **secuencia de** G. Llamaremos al número k, **longitud de** S y a S k-**secuencia**. Denotaremos por $|G|$ al orden de G y por $|S|$ la **longitud de** S.

Si $k \geqslant 2$ y en S existe j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant k$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = ka_{j_0}.,$$

diremos que S es una **secuencia** k-**baricéntrica** [5], al elemento a_{j_0} lo llamaremos **baricentro de** S. Si la secuencia baricéntrica S no tiene elementos repetidos, la llamaremos **conjunto baricéntrico**.

Para $k = 1$ es obvio que S es una secuencia k-baricéntrica. Por lo tanto, para evitar esa trivialidad, agregamos la condición $k \geqslant 2$.

En el grupo Z_9, tenemos que $S_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ es un conjunto 6-baricéntrico, dado que,

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 = 6 \times 1$$

(el baricentro es 1).

En cambio, en el mismo grupo Z_9, la 6-secuencia $S_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 7$ no es un conjunto 6-baricéntrico, dado que,

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 7 = 8$$

y

$$\begin{aligned} 8 \neq 6 \times 0 &\quad = 0 \\ 8 \neq 6 \times 1 &\quad = 6 \\ 8 \neq 6 \times 2 &\quad = 3 \\ 8 \neq 6 \times 3 &\quad = 0 \\ 8 \neq 6 \times 4 &\quad = 6 \\ 8 \neq 6 \times 5 &\quad = 3 \end{aligned}$$

En el caso en que,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 0,$$

diremos que S es una **k-secuencia de suma cero**.

Nótese que las secuencias k-baricéntricas, cuando k es un múltiplo del orden del grupo donde están definidas, son de suma cero.

En 1961, es cuando surge por primera vez, la definición de secuencia de suma cero, la cual se atribuye a Erdös−Ginzburg−Ziv [7], y además estos autores, dan el siguiente resultado: toda $(2n - 1)$-secuencia de un grupo abeliano G de orden n, contiene una n-subsecuencia de suma cero.

En 1966, Davenport [3] da origen a su célebre **constante de Davenport** $D(G)$, definida como: el menor entero positivo r tal que toda r-secuencia de G contiene una subsecuencia de suma cero.

El primer resultado sobre problemas de suma cero, es el denominado por Erdös [8], en el año 1980, lema prehistórico: Sea G un grupo abeliano de orden n. Entonces toda n-secuencia de G contiene una subsecuencia de suma cero.

Este resultado constituye la base fundamental en el desarrollo del área de investigación denominadas problemas de suma cero, la cual está inmersa, al igual que los problemas baricéntricos, en el campo de la teoría combinatoria.

La existencia de la constante de Davenport, se debe al lema prehistórico, dado que,

$$D(G) \leqslant |G|.$$

Una lista de referencias de problemas de suma cero se encuentran en el survey [1].

La teoría de suma cero ha recibido mucha atención últimamente, debido a que las respuestas a los preguntas allí planteadas se han conseguido en áreas clásicas tales como la combinatoria, la teoría de números, la geometría y el álgebra.

El origen de las secuencias baricéntricas, se debe a las secuencias T de suma cero con peso de G, esto es, $T = w_1a_1, \ldots, w_qa_q$ donde los a_i son elementos de G, los coeficientes o pesos w_i son enteros positivos y además, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{q} w_ia_i = 0.$$

Si $S = a_1, a_2, \ldots, a_k$, con $k \geqslant 2$ es una secuencia k-baricéntrica de G, tenemos que existe un j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant k$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = ka_{j_0}.$$

Por lo tanto, se tiene:

$$1a_1 + 1a_2 + \ldots + (k-1)(-a_{j0}) + \ldots + 1a_k = 0.$$

En consecuencia, S da origen a una secuencia $\acute{S} = a_1, a_2, \ldots, -a_{j0}, \ldots, a_k$ de G de suma cero con pesos.

En 1996, aparecen por primera vez las secuencias de suma cero con peso en la conjetura de Caro [1]: sea G un grupo abeliano de orden n y sean k entero positivo, $S = a_1a_2 \ldots a_{n+k-1}$ una secuencia de G y $w_1, \ldots, w_k$ enteros positivos, tales que

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 0(mod \ \ n).$$

Entonces, existe $\widehat{S} = a_{j1}a_{j2} \ldots a_{jk}$ subsecuencia de S tal que

$$\sum_{i=1}^{k} w_i a_{ji} = 0.$$

Hamidoune [15], demostró la conjetura de Caro, anteriormente citada, con la condición adicional $(w_i, 1) = 1$, para todo i, $1 \leqslant i \leqslant k$. También Hamidoune investiga estas secuencias en [14] y Gao en [10].

En el 2006 David Grynkiewiez en [13], demuestra la conjetura de Caro dada en [1].

En el 2004, la noción de secuencia baricéntrica, fue introducida por Delorme, Márquez, Ordaz y Ortuño [5], así como también la **constante de Davenport baricéntrica**, $BD(G)$, definida como: el menor entero positivo s tal que toda secuencia de G de $|S| = s$, contiene una subsecuencia baricéntrica.

La existencia de la constante de Davenport baricéntrica, se debe a la relación que existe con la constante de Davenport.

$$BD(G) \leqslant D(G) + 1.$$

En el mismo año 2004, Delorme, González, Ordaz y Varela [4], introducen la constante de Davenport k-baricéntrica $BD(k, G)$, definida como: el menor entero positivo t tal que toda secuencia S de G de $|S| = t$, contiene una subsecuencia k-baricéntrica.

La relación que existe entre la constante de Davenport baricéntrica y la constante de Davenport k-baricéntrica, es la siguiente:

$$BD(G) \leqslant BD(k, G).$$

El estudio de las constantes baricéntricas y k-baricéntricas dan origen a los problemas baricéntricos. Investigaciones acerca de estas constantes se encuentran en [11, 12] y un survey de este tópico se encuentra en [18].

En [4] se estiman los siguientes resultados para el caso del grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_p$ de orden primo:

(i) $BD(3, \mathbb{Z}_p) \leqslant 2\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1$, para $p \geqslant 5$.

(ii) $BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - 2$ para $4 \leqslant k \leqslant p - 1$.

(iii) $BD(p-1, \mathbb{Z}_p) = 2p - 3$, para $p \geqslant 5$.

Las técnicas utilizadas en [4], se basan en la teoría aditiva, especifícamente en el teorema de Cauchy-Davenport generalizado (Teorema 1.3), en una conjetura de Erdös-Heilbronn, (Teorema 1.6, Días da Silva-Hamidoune la demostraron y también la generalizaron) y en un teorema de Vosper (Teorema 1.4).

Basado en estas mismas técnicas el autor Luong [16], demuestra el teorema siguiente:

Sea $p \geqslant 5$, un número primo y sea k un entero, $3 \leqslant k \leqslant p - 1$. Entonces,

$$BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - \left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor - 2.$$

El objetivo de este trabajo consiste en desarrollar la demostración dada por Luong en [16]. El trabajo esta dividido en tres capitulos, además del resumen, introducción y conclusiones.

- En el capitulo 1 presentaremos conceptos básicos de teoría aditiva, las cuales, serán utiles para la demostración del teorema principal.

- En el capitulo 2 se mostrarán las definiciones de secuencias, secuencias de suma cero, secuencias baricéntricas y secuencias k-baricéntricas, así, como también definiremos la constante de Davenport y la constante de Davenport baricéntrica.

- En el capitulo 3 se define la constante de Davenport k-baricéntrica, demostraremos algunos resultados de [4] y desarrollaremos el teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares

La teoría aditiva de números es el estudio de las sumas de conjuntos de números enteros, extendida a grupos abelianos. Esta rama de la combinatoria se divide en dos tipos de problemas: problemas directos e inversos. Los problemas directos son aquellos en los cuales se determina la estructura y propiedades de una suma de conjuntos de un grupo, conociendo a los sumandos. Los problemas inversos son aquellos en los que se determinan las propiedades de los sumandos a partir de conocer la propiedades del conjunto suma.

1.1. Suma de conjuntos en grupos abelianos

Definición 1.1. *(***Suma de conjuntos***) Sean G un grupo abeliano finito y A,B subconjuntos no vacíos de G. Definimos la suma de A y B, denotada por $A+B$, como el conjunto $A+B$=$\{a+b : a \in A$ y $b \in B\}$.*

Observación 1.1. *Sean G grupo abeliano finito y sean $A, B \subset G$.*

(i) *Si B=$\{b\}$ es un conjunto unitario, entonces escribiremos $A+b$ en lugar de $A+\{b\}$.*

(ii) *Para $-b \in G$, inverso aditivo de $b \in G$, definimos $A-b$=$\{a+(-b) : a \in A\}$. En consecuencia $A-B$, esta dado por: $A-B$=$\{a+(-b) : a \in A$ y $b \in B$ $\}$.*

(iii) *$A+B = B+A$.*

(iv) *Sea $b \in G$. Entonces la función $f : A \longrightarrow A+b$ dada por $f(a) = a+b$, para todo $a \in A$, es una biyección entre A y $A+b$. Por lo tanto, se tiene que $|A| = |A+b|$.*

Ejemplo 1.1. *Sean* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$ *subconjuntos de* $\mathbb{Z}_7$*, entonces:*

- $A + 6 = \{1 + 6, \quad 2 + 6, \quad 3 + 6\} = \{0, 1, 2\}$. *Notese que* $|A| = |A + 6|$.
- $A - 5 = A + 2 = \{1 + 2, \quad 2 + 2, \quad 3 + 2\} = \{3, 4, 5\}$. *(ya que* $-5 = 2$*)*
- $A + B = \{1 + 1, \quad 1 + 5, \quad 2 + 1, \quad 2 + 5, \quad 3 + 1, \quad 3 + 5\} = \{2, 6, 3, 0, 4, 1\}$.
- $A - B = \{1 - 1, \quad 1 - 5, \quad 2 - 1, \quad 2 - 5, \quad 3 - 1, \quad 3 - 5\} = \{1 + 6, \quad 1 + 2, \quad 2 + 6, \quad 2 + 2, \quad 3 + 6, \quad 3 + 2\} = \{0, 3, 1, 4, 2, 5\}$.

La definición de suma de conjuntos se puede generalizar, de manera natural, a un número finito de subconjuntos de un grupo G, como sigue:

Definición 1.2. *(***Suma generalizada de conjuntos***)* *Sean G un grupo abeliano finito y $A_1, ..., A_k$ subconjuntos no vacíos de G. La suma de $A_1, ..., A_k$, denotada por $A_1 + ... + A_k$, se define como el conjunto*

$$A_1 + ... + A_k = \{a_1 + ... + a_k : a_i \in A_i, \forall \quad i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

Ejemplo 1.2. *Sean* $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 5\}$ *y* $C = \{2\}$ *subconjuntos de* $\mathbb{Z}_7$ *entonces:*
$A + B + C = \{1 + 1 + 2, \quad 1 + 5 + 2, \quad 3 + 1 + 2, \quad 3 + 5 + 2\} = \{4, 1, 6, 3\}$.

1.2. Algunos problemas clásicos de teoría aditiva

Definición 1.3. *Sea $g \in G$, denotamos por $\gamma_{A,B}(g)$ el número de formas de expresar a g como la suma de un elemento de A y un elemento de B, esto es,*

$$\gamma_{A,B}(g) = |\{(a, b) : g = a + b, \quad a \in A, \quad b \in B\}|.$$

Lema 1.1. *Sea G un grupo abeliano finito y sean t un entero positivo y A, B subconjuntos no vacíos de G tal que $|A| + |B| \geqslant |G| + t$ entonces $\gamma_{A,B}(g) \geqslant t, \quad \forall \quad g \in G$.*

Demostración: Sean $A, B \subset G$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $g \in G$ y consideremos el conjunto $g - B = \{g - b : b \in B\}$.

Como $A \subset G$ y $g - B \subset G$, entonces $A \bigcup (g - B) \subset G$.

Así, $|A \bigcup (g - B)| \leqslant |G|$
$\Longrightarrow |G| \geqslant |A \bigcup (g - B)| = |A| + |g - B| - |A \bigcap (g - B)| = |A| + |B| - |A \bigcap (g - B)|$

(Por Observación 1.1 **(iv)** $|g - B| = |B|$).
Así, $|G| \geqslant |A| + |B| - |A \bigcap (g - B)|$, luego, $|A \bigcap (g - B)| \geqslant |A| + |B| - |G|$.

Como por hipótesis, $|A|+|B| \geqslant |G|+t$, entonces $|A \bigcap (g-B)| \geqslant |G|+t-|G| = t$.

En consecuencia, $|A \bigcap (g - B)| \geqslant t$, entonces existen al menos t elementos distintos, digamos $a_1, a_2, ..., a_t \in A \bigcap (g - B)$.

Luego, $a_i \in A$ y $a_i \in g - B$, $\forall \ \ i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant t$

Luego, existe $b \in B$ tal que, $a_i = g - b \Longrightarrow g = a_i + b$, para algún $b \in B$.

Así, dado que los a_i, con $i = 1, ..., t$ son distintos tenemos que:

$\gamma_{A,B}(g) \geqslant t$, para todo $g \in G$.

Cuando $|A|$ y $|B|$ son suficientementes grandes, se tiene el siguiente resultado establecido por Henry Mann.

Lema 1.2. ***(Mann)***

Sean G un grupo abeliano finito y A, B subconjuntos no vacíos de G.
Si $|A|+|B| > |G|$ entonces $G = A + B$.

Demostración:

Queremos probar que $G = A + B$.

Dado que $A \subset G$ y $B \subset G$ y G es grupo, entonces $A + B \subset G$. (I)
Solo falta probar que $G \subset A + B$.

Por hipótesis, $|A| + |B| > |G|$ entonces $|A| + |B| \geqslant |G| + 1$, luego por Lema 1.1, tenemos que, $\gamma_{A,B}(g) \geqslant 1$. Así, para cualesquiera $g \in G$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tal que $g = a + b \in A + B$. En consecuencia, $G \subset A + B$. (II)

Luego, por (I) y (II) se tiene que $G = A + B$.

Ejemplo 1.3. *Sean $G = \mathbb{Z}_7$, $A = \{1, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{Z}_7$ y $B = \{0, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{Z}_7$.*

Por un lado, $|A| + |B| = 4 + 4 = 8 > 7$. Además, $A + B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \mathbb{Z}_7$. Así, $A + B = \mathbb{Z}_7$.

Teorema 1.1. *[17](**Kneser**) Sea G un grupo abeliano tal que $G \neq \{0\}$ y sean A y B subconjuntos no vacíos de G. Si $|A| + |B| \leqslant |G|$, entonces existe un subgrupo propio H de G tal que*

$$|A + B| \geqslant |A| + |B| - |H|.$$

El teorema dado a continuación fue demostrado en 1813 por Augustin Louis Cauchy [2]. Este teorema también fue demostrado independientemente por Harold Davenport, en 1935 [3]. Davenport descubre en 1947 que Cauchy ya lo habia demostrado previamente, y de allí se deriva su nombre.

El lema de Mann y el teorema de Kneser nos permitirán dar una demostración del Teorema de Cauchy-Davenport, distinta a la dada en [2].

Teorema 1.2. ***(Cauchy-Davenport)****. Sean p un número primo y A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$. Entonces $|A+B| \geqslant min\{p, |A|+|B|-1\}$.*

Demostración:

Dado que $\mathbb{Z}_p$ es un grupo abeliano finito y p es primo, entonces $\mathbb{Z}_p \neq \{0\}$. Además por hipótesis A y B son subconjuntos no vacios de $\mathbb{Z}_p$. Luego, estamos en las hipótesis del Lema 1.2 y del Teorema 1.1.

Respecto a la suma de las cardinalidades de A y B se presentan dos casos:

- Si $|A|+|B| > |\mathbb{Z}_p|$.

  Por Lema 1.2, $A+B = \mathbb{Z}_p$.

  En consecuencia, $|A+B| = p$.

  Así, $|A+B| = p \geqslant min\{p, |A|+|B|-1\}$.

  Luego,
  $$|A+B| \geqslant min\{p, |A|+|B|-1\}.$$

- Si $|A|+|B| \leqslant |\mathbb{Z}_p|$.

  Por Teorema 1.1, existe un subgrupo propio H de $\mathbb{Z}_p$ tal que:
  $$|A+B| \geqslant |A|+|B|-|H|.$$

  Como p es primo, entonces el único subgrupo propio es $\{0\}$. Luego, $H = \{0\}$.

  Así,
  $$\begin{aligned} |A+B| &\geqslant |A|+|B|-|\{0\}| \\ &= |A|+|B|-1. \end{aligned}$$

  Luego,

$$|A+B| \geqslant |A|+|B|-1.$$

Como $|A|+|B|-1 \geqslant min\{p,|A|+|B|-1\}$. Entonces,

$$|A+B| \geqslant min\{p,|A|+|B|-1\}.$$

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos, se cumple el teorema.

El teorema de Cauchy-Davenport, admite generalización tal como mostraremos a continuación:

Teorema 1.3. *(**Cauchy-Davenport generalizado**) Sean $h \geqslant 2$ y p un entero primo, y sean $A_1, A_2, ..., A_h$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$. Entonces*
$|A_1+A_2+...+A_h| \geqslant min\left\{p, \sum_{i=1}^{h}|A_i|-h+1\right\}$.

Demostración:

Haremos la demostración por inducción sobre h.

Para $h=2$ por Teorema 1.2, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_1+A_2| &\geqslant \min\left\{p, |A_1|+|A_2|-1\right\} \\ &= \min\left\{p, \sum_{i=1}^{2}|A_i|-2+1\right\}. \end{aligned}$$

Así, $|A_1+A_2| \geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{2}|A_i|-2+1\right\}$. Por lo tanto el teorema se cumple para $h=2$. Ahora, supongamos que el teorema se cumple para $h=k-1$ y probemos el teorema para $h=k$.

Sean $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k$ subconjuntos no vacios de $\mathbb{Z}_p$ y hacemos
$B = A_1+A_2+...+A_{k-1}$.

Luego, por hipótesis inductiva tenemos que:

$$\begin{aligned} |B| = |A_1+A_2+...+A_{k-1}| &\geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-(k-1)+1\right\} \\ &= \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-k+2\right\}. \end{aligned}$$

Así, $|B| \geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1} |A_i| - k + 2\right\}$. (I)

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |A_1 + A_2 + ... + A_k| &= |(A_1 + A_2 + ... + A_{k-1}) + A_k| \\ &= |B + A_k| \\ &\geqslant \min\left\{p, |B| + |A_k| - 1\right\}. \quad (\textbf{Cauchy-Davenport}) \end{aligned}$$

Así, $|A_1 + A_2 + ... + A_k| \geqslant \min\left\{p, |B| + |A_k| - 1\right\}$. (II)

Luego, se tienen dos casos:

Caso 1 $\min\left\{p, |B| + |A_k| - 1\right\} = p$.

Así,

$$\begin{aligned} |A_1 + A_2 + ... + A_k| &\geqslant \min\left\{p, |B| + |A_k| - 1\right\} \\ &= p \\ &\geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k} |A_i| - k + 1\right\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $|A_1 + A_2 + ... + A_k| \geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k} |A_i| - k + 1\right\}$.

Caso 2 $\min\left\{p, |B| + |A_k| - 1\right\} = |B| + |A_k| - 1$.

Luego,

$$\begin{aligned} |A_1 + A_2 + ... + A_k| &\geqslant \min\left\{p, |B| + |A_k| - 1\right\} \\ &= |B| + |A_k| - 1 \\ &\geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1} |A_i| - k + 2\right\} + |A_k| - 1. \quad \text{Por (I)} \end{aligned}$$

Así, $|A_1+A_2+...+A_k| \geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-k+2\right\}+|A_k|-1.$

Luego, se tienen dos casos:

Caso 2.1 $\min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-k+2\right\}=p.$

Luego,

$$\begin{aligned}
|A_1+A_2+...+A_k| &\geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-k+2\right\}+|A_k|-1\\
&= p+|A_k|-1\\
&\geqslant p+1-1 \quad \text{ya que } |A_k|\geqslant 1\\
&= p\\
&\geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k}|A_i|-k+1\right\}.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que, $|A_1+A_2+...+A_k| \geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k}|A_i|-k+1\right\}.$

Caso 2.2 $\min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-k+2\right\}=\sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-k+2.$

Luego,

$$\begin{aligned}
|A_1+A_2+...+A_k| &\geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-k+2\right\}+|A_k|-1\\
&= \sum_{i=1}^{k-1}|A_i|-k+2+|A_k|-1\\
&= \sum_{i=1}^{k}|A_i|-k+1\\
&\geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k}|A_i|-k+1\right\}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$|A_1+A_2+...+A_h| \geqslant \min\left\{p, \sum_{i=1}^{k}|A_i|-k+1\right\}.$

Por lo tanto, en cualquiera de los casos se cumple el teorema.

Ejemplo 1.4. *Sean* $A = \{1, 3\}$, $B = \{0, 1\}$ *y* $C = \{1, 4\}$ *subconjuntos de* $\mathbb{Z}_7$ *entonces*

$A+B+C = \{1+0+1, 1+0+4, 1+1+1, 1+1+4, 3+0+1, 3+0+4, 3+1+1, 3+1+4\}$ $= \{2, 5, 3, 6, 4, 0, 5, 1\} = \mathbb{Z}_7$.

Notese que, $|A + B + C| = 7 \geqslant min\{7, |A| + |B| + |C| - 3 + 1\}$ $= min\{7, 2 + 2 + 2 - 2\} = 4$.

1.3. Progresiones aritméticas en grupos abelianos

Definición 1.4. *Sea* G *un grupo abeliano. Sean* $d \in G$ $(d \neq 0)$ *y* k *un entero positivo. Sea* $a_0 \in A \subset G$, *diremos que* A *es una progresión aritmética de longitud* k *y diferencia común* d, *si* A *se puede expresar de la forma:*

$$A = \{a_0 + id : i \in \{0, 1, 2, ..., k - 1\}\},$$

donde, el orden de d *es al menos* k, *esto es,* $\circ(d) \geqslant k$.

Observación 1.2. *Dado* $A \subset G$, *para determinar si un conjunto* $A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}$ *es una progresión aritmética, basta ver si existe una permutación* σ *de los elementos de* A *y existe un* $d \in G$ $(d \neq 0)$ *tal que* $\{\sigma(a_0), \sigma(a_1), ..., \sigma(a_{k-1})\}$ *cumplan que:* $\sigma(a_i) - \sigma(a_{i-1}) = d$.

Ejemplo 1.5. *Sea* $\{0, 1, 2, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}_7$.

Haciendo $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 0$, *tenemos que:*

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 5 - 2 = 5 + 5 = 10 = 3 \\ a_2 - a_1 &= 1 - 5 = 1 + 2 = 3 \\ a_3 - a_2 &= 4 - 1 = 4 + 6 = 10 = 3 \\ a_4 - a_3 &= 0 - 4 = 0 + 3 = 3. \end{aligned}$$

Así, $d = 3$.

Por lo tanto, el conjunto $\{2 + i3 : 0 \leqslant i \leqslant 4\}$ *es una progresión aritmética con diferencia común* $d = 3$.

El siguiente teorema debido a **A.G. Vosper**, fue publicado en 1956 en [19].

Teorema 1.4. *[19] Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$ tal que $min\{|A|,|B|\} \geqslant 2$. Si A y B no son progresiones aritméticas con la misma diferencia común, entonces*

$$|A+B| \geqslant min\{p-1, |A|+|B|\}.$$

Lema 1.3. *[16] Sea B un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$, con $p \geqslant 5$ y $2 \leqslant |B| \leqslant p-2$. Si existen dos maneras de ordenar los elementos de B en progresiones aritméticas con diferencia común d_1 y d_2, donde $1 \leqslant d_1 \leqslant p-1$ y $1 \leqslant d_2 \leqslant p-1$, entonces ó $d_1 = d_2$ ó $d_1 + d_2 = p$.*

Lema 1.4. *[4] Sea A un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$, con $p \geqslant 5$ y $3 \leqslant |A| \leqslant p-1$.*
Entonces existen $x, y \in A$ tal que $A \backslash x$ y $A \backslash y$ no son progresiones aritméticas con la misma diferencia común.

El siguiente es un resultado elemental, pero importante principio de Combinatoria, que puede ser usado para resolver una variedad de interesantes problemas. Este principio es conocido con varios nombres, los más comunes son: el principio del palomar, el principio de las casillas o el principio de los cajones de Dirichlet.

Teorema 1.5. *(**Principio de las casillas**) Si se tiene un conjunto de n objetos, repartidos en m casilleros y $n > m$ (hay más objetos que casilleros) entonces hay al menos un casillero donde hay 2 o más objetos.*

Definición 1.5. *Sean G un grupo abeliano de orden $n \geqslant 2$ y H un subconjunto no vacío de G, con $|H| = h$. Para cualquier entero positivo k, con $2 \leqslant k \leqslant h$, definimos;*

$$\bigwedge^k H = \left\{ \sum_{x \in S} x : S \subset H \text{ y } |S| = k \right\}.$$

Teorema 1.6. ***(Erdös y Heilbronn)*** *Sea A un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$ con $|A| \geqslant 2$. Entonces*

$$| \wedge^2 A| \geqslant min\{p, 2|A| - 3\}.$$

El Teorema 1.6 es una conjetura que presentaron Paul Erdös y Hans Heilbronn, la cual se formuló en la decada de los años 60. Erdös y Heilbronn no la incluyeron en su artículo sobre sumas de conjuntos de clase de congruencias. Sin embargo, en el año 1963, en una conferencia sobre teoría de números en la Universidad de Colorado, Erdös establece la conjetura, la cual mencionaría, frecuentemente, en sus artículos y conferencias posteriores. Se dieron resultados parciales a esta conjetura por Rickert en 1976, Mansfield en 1981, Rödseth en 1993, Pyber en una publicación personal y Freiman, Low y Pitman en 1993.

Llevó más de 30 años antes de que J.A. Días Da Silva y Yahya Ould Hamidoune publicaran la demostración en el año 1994. No sólo la demostraron sino también la generalizaron, tal como la mostraremos a continuación:

Teorema 1.7. *[14]* ***(Días da Silva-Hamidoune)*** *Sean p un número primo y H un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_p$ con $|H| = h$ y d un entero positivo tal que $2 \leqslant d \leqslant h$. Entonces $| \bigwedge^d H| \geqslant min\{p, d(h - d) + 1\}$.*

Demostración del Teorema 1.6

Por hipótesis $A \subset \mathbb{Z}_p$ y $|A| \geqslant 2$, luego se tiene que $2 = d \leqslant |A|$, entonces por el Teorema 1.7 se tiene que $| \bigwedge^2 A| \geqslant min\{p, 2(|A| - 2) + 1\}$=$min\{p, 2|A| - 3\}$.

Capítulo 2

Secuencias, secuencias baricéntricas y secuencias de suma cero

2.1. Secuencias

Definición 2.1. *(**Secuencia**) Sea G un grupo abeliano finito y sea k, un entero positivo. A la colección $S = a_1, a_2, \ldots, a_k$, de elementos de G, donde la repetición de sus elementos es permitida y la posición en que están colocados estos elementos, no es considerada, la llamaremos **secuencia de** G.*
*Llamaremos al número k, la **longitud de** S y la denotaremos por $|S|$, además diremos que S es una k-**secuencia**. Denotaremos por $|G|$ al orden de G.*

*En otras palabras, Las secuencias S de un grupo abeliano finito G son los elementos del **monoide libre** $\mathfrak{F}(G)$ **con base** G. Escribiremos a $S \in \mathfrak{F}(G)$ de la forma siguiente:*

$$S = \prod_{g \in G} [g]^{v_g(S)}$$

*donde $v_g(S)$ es el número de veces que aparece g en S, es decir, $v_g(S)$ es la **multiplicidad de** g **en** S y diremos que S contiene a g si $v_g(S) > 0$.*

La operación binaria sobre $\mathfrak{F}(G)$ es la concatenación de los elementos de $\mathfrak{F}(G)$, es decir, dadas

$$S_1 = \prod_{g \in G} [g]^{v_g(S_1)}, \quad S_2 = \prod_{g \in G} [g]^{v_g(S_2)} \in \mathfrak{F}(G),$$

El producto de S_1 con S_2 viene dado por:

$$S_1S_2 = \prod_{g\in G}[g]^{(v_g(S_1)+v_g(S_2))}$$

*El elemento neutro de $\mathfrak{F}(G)$ es la **secuencia vacía**, es decir, la secuencia*

$$\prod_{g\in G}[g]^{v_g(S)}.$$

donde $v_g(S) = 0$ para todo $g \in G$.

Si una secuencia $S \in \mathfrak{F}(G)$ está escrita de la forma $S = g_1...g_k$ asumiremos que $k \in \mathbb{N}$ y $g_1...g_k \in G$.

La máxima de las multiplicidades de los elementos de S la denotaremos por $h(S)$, es decir,

$$h(S) = max\{v_g(S) : g \in G\}.$$

Luego,

$$1 \leqslant h(S) \leqslant |S|.$$

Entenderemos por soporte de S, denotado por supp(S) el conjunto formado por los elementos diferentes de S, esto es:

$$supp(S) = \{g \in G : v_g(S) > 0\}.$$

Denotaremos por $d(S)$ la cardinalidad del soporte de S, esto es,
$|supp(S)| = d(S)$.
Para una secuencia

$$S = g_1...g_k = \prod_{g\in G}[g]^{v_g(S)},$$

La longitud de la secuencia S viene dada por:

$$|S| = k = \sum_{g\in G} v_g(S).$$

Otra manera de escribir a S es como sigue:

$$S = \prod_{g\in supp(S)}[g]^{v_g(S)}.$$

Ejemplo 2.1. *Una secuencia en* $\mathbb{Z}_4$ *es* $S = 020122$, *ó* $S = [0]^2[1]^1[2]^3[3]^0$ *ó simplemente,* $S = [0]^2[1]^1[2]^3$.

Luego,

$$\begin{aligned} |S| &= v_0(S) + v_1(S) + v_2(S) \\ &= 2 + 1 + 3 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Además, $h(S) = v_2(S) = 3$ *y* $supp(S) = \{0, 1, 2\}$. *Así,* $3 = d(S) = |supp(S)|$.

2.1.1. Subsecuencias

Definición 2.2. *Una secuencia* S_1 *es llamada una subsecuencia de* S *si* S_1/S *en* $\mathfrak{F}(G)$, *es decir,* $v_g(S_1) \leqslant v_g(S)$ *para todo* $g \in G$ *y es llamada subsecuencia propia de* S, *si es distinta a la secuencia vacía y además* $S_1 \neq S$.

Ejemplo 2.2. *En* $\mathbb{Z}_5$, $S_1 = [0]^2[1]^0[2]^0[3]^1[4]^2$ *es una subsecuencia de* $S = [0]^2[1]^0[2]^1[3]^2[4]^3$. *Dado que:*

$$\begin{aligned} v_0(S_1) &= 2 = 2 = v_0(S) \\ v_1(S_1) &= 0 = 0 = v_1(S) \\ v_2(S_1) &= 0 < 1 = v_1(S) \\ v_3(S_1) &= 1 < 2 = v_3(S) \\ v_4(S_1) &= 2 < 3 = v_4(S). \end{aligned}$$

2.1.2. Secuencias de suma cero

Definición 2.3. *(**Secuencia de suma cero**) Sea* G *un grupo abeliano finito. Una* k*-secuencia* $S = a_1a_2 \ldots a_k$ *en* G *es de suma cero si* $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$.

Ejemplo 2.3. *En* $\mathbb{Z}_4$, *la* 7*-secuencia* $S_1 = [0]^2[1]^2[2]^3$ *es de suma cero, dado que*

$$0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8 = 0.$$

En cambio, la 4*-secuencia* $S_2 = [1][0][2]^2$ *no es de suma cero, dado que*

$$1 + 0 + 2 + 2 = 5 = 1 \neq 0.$$

2.1.3. Secuencias baricéntricas

En el año 2004, la noción de **secuencia baricéntrica**, fue introducida por Delorme, Márquez, Ordaz, y Ortuño [5].

Definición 2.4. *(**Secuencia baricéntrica**) Sea G un grupo abeliano finito y sea $k \geqslant 2$ un entero positivo. Una k-secuencia $S = a_1 a_2 \ldots a_k$ en G es llamada k-secuencia baricéntrica si existe $j \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $\sum_{i=1}^{k} a_i = k a_j$.*

Ejemplo 2.4. *En $\mathbb{Z}_6$, la 6-secuencia $S_1 = [0]^2[1]^2[2]^2$ es baricéntrica dado que* $0+0+1+1+2+2 = 6 \times 1$.
En cambio, la 6-secuencia $S_2 = [0]^3[1]^3$ no es baricéntrica, dado que

$$0+0+0+1+1+1 = 3 \neq \begin{cases} 6 \times 1 = 0 \\ 6 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Notese que las k-secuencias baricéntricas, cuando k es un múltiplo del orden del grupo donde están definidas, son de suma cero, tal como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. *En $\mathbb{Z}_6$, la secuencia $S_1 = [0]^2[1]^2[2]^2$ 6-baricéntrica es de suma cero. En efecto,*

$$0+0+1+1+2+2 = 6 = 0.$$

Notemos que $|S_1| = 6$, es decir, un múltiplo del orden del grupo $\mathbb{Z}_6$.

Observación 2.1. -

(i) *[4] Una 3-secuencia en $\mathbb{Z}_n$ es baricéntrica sii sus elementos son iguales ó están en progresión aritmética.*

(ii) *[4] Toda secuencia en $\mathbb{Z}_{13}$ con 5 elementos diferentes contiene una subsecuencia 3-baricéntrica.*

(iii) *Sea $S = [u_1]^{n_1}[u_2]^{n_2} \ldots [u_r]^{n_r}$, donde $r = d(S) = |supp(S)|$.*

Si $h(S) \geqslant k$ entonces S posee una subsecuencia k-baricéntrica.

En efecto, sin pérdida de generalidad supongamos que

$$h(S) = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_r \geqslant 1.$$

Luego, existe una subsecuencia $\acute{S} = \underbrace{u_1 u_1 \dots u_1}_{k-veces}$ *de* S*, tal que,*

$$\underbrace{u_1 + u_1 + \ldots + u_1}_{k-veces} = ku_1.$$

Luego, $\acute{S}$ *es* k*-baricéntrica.*

Observación 2.2. *Sean* p *y* q *enteros positivos, con* $q \neq 0$ *y* $p \geqslant q$*. Entonces se cumple que:*

$$\left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil = \frac{p}{q} + 1 - m \quad y \quad \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{p}{q} - m.$$

donde m *es la parte decimal de* $\frac{p}{q}$*.*

En efecto, dado que p *y* q *son enteros positivos, con* $q \neq 0$ *y* $p \geqslant q$*, entonces, por el algoritmo de la división, existen únicos enteros positivos* t *y* r *tal que* $p = q.t + r$*, donde* $0 \leqslant r < q$*.*

- *Si* $r = 0$*, entonces* $\frac{p}{q} = t$*.*

  Luego, $\left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil = t. \quad y \quad \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = t.$

- *Si* $r \neq 0$ *entonces,* $\frac{p}{q} = t + \frac{r}{q}$*, donde* $0 \leqslant \frac{r}{q} < 1$*.*

  Luego, $\left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil = \left\lceil t + \frac{r}{q} \right\rceil = t + 1 = (\frac{p}{q} - \frac{r}{q}) + 1.$

  $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor t + \frac{r}{q} \right\rfloor = t = \frac{p}{q} - \frac{r}{q}.$

  Ahora, llamemos $m = \frac{r}{q}$*, a la parte decimal de* $\frac{p}{q}$*.*

  Por lo tanto, $\left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil = \frac{p}{q} - m + 1. \quad y \quad \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{p}{q} - m.$

  En consecuencia, $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor \leqslant \frac{p}{q} \leqslant \left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil.$

Definición 2.5. *Sea* S *una secuencia formada por elementos de un conjunto finito* X*. Una* k*-partición de* S *es una factorización de* S *por* k *subsecuencias* $A_1, A_2, ..., A_k$ *donde* $h(A_i) = 1,\ \forall \quad i = 1, ..., k$*. Esto es,* $S = A_1 A_2 ... A_k$*, con* $h(A_i) = 1,\ \forall \quad i = 1, ..., k$*.*

Lema 2.1. *Sea S una secuencia de elementos de un conjunto finito X. Si k es un entero positivo tal que $h(S) \leqslant k \leqslant |S|$, entonces existe una k-partición de S por conjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$ tal que*

$$|A_i| = \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil \quad ó \quad |A_i| = \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor \quad \forall \;\; i = 1, ..., k.$$

Más aún,

$$||A_i| - |A_j|| \leqslant 1 \;\; \forall \;\; i, j \;\;\; 1 \leqslant i \leqslant k \;\;\; y \;\;\; 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Demostración:

Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto finito no vacío.
Sea S una secuencia formada por elementos de X, con longitud $|S|$.

Sea $S = [x_1]^{n_1}[x_2]^{n_2} \dots [x_r]^{n_r}$, donde $r = d(S) = |supp(S)|$, $v_{x_i}(S) = n_i \quad \forall \;\; i \;\; 1 \leqslant i \leqslant r$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $h(S) = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_r \geqslant 1$.

Esto es, ordenamos los elementos de la seuencia, empezando por el elemento que más se repite, luego de los elementos restantes tomamos el elemento que más se repite y así sucesivamente.

Por otro lado, tenemos por hipótesis que, $k \leqslant |S|$ entonces por el algoritmo de la división existen q, t enteros positivos tal que $|S| = kq + t$, $0 \leqslant t < k$.

Luego, construimos una subsecuencia $\acute{S}$ de S, descartando los últimos t tèrminos de S y construimos una subsecuencia $\bar{S}$ de S con los t elementos restantes.

Por lo tanto, podemos construir un arreglo matricial M de dimensión $q \times k$ (los t-elementos restantes de la secuencia S, llamemoslo $b_1, b_2, ..., b_t$ no se consideran para la construcción de la matriz M), como sigue:

1. Dado que $|\acute{S}| = kq$, entonces dividimos la secuencia $\acute{S}$ en q-secuencias, $S_1, S_2, ..., S_q$ cada una de longitud k, luego, $S_i = a_{i1}...a_{ik} \; \forall \;\; i = 1, ..., q$. esto es, $|S_i| = k$, $\forall \;\; i = 1, ..., q$.

2. La fila i-ésima de M queda definida por la secuencia S_i, $\forall \;\; i = 1, ..., q$:

$$M = \begin{pmatrix} S_1 \\ . \\ . \\ . \\ S_i \\ . \\ . \\ . \\ S_q \end{pmatrix}_{q\times 1}$$

Así, M queda definida como sigue:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1h(S)} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2h(S)} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & . & & & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . & & & . & . \\ a_{q1} & a_{q2} & . & . & . & a_{qh(S)} & . & . & . & a_{qk} \end{pmatrix}_{q\times k}$$

Luego, por definición de M y dado que por hipótesis $h(S) \leqslant k$, entonces $a_{ij} \neq a_{lj}$, $\forall i, l \in \{1, ..., q\}$, $i \neq l$, $\forall \;\; j \in \{1, ..., k\}$.

Supongamos lo contrario, esto es, existen i, l, j con $i, l \in \{1, ..., q\}$, $i \neq l$, $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $a_{ij} = a_{lj}$. Entonces,
existe $x \in S$ tal que $\vartheta_x(S) > h(S)$, lo cual es una contradicción, puesto que $h(S)$=max$\{v_{x_i}(S) : 1 \leqslant i \leqslant r\}$.

Así, con cada columna de M, podemos construir a B_i subconjuntos de X, esto es,

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{a_{11}, a_{21}, ..., a_{q1}\}\\
B_2 &= \{a_{12}, a_{22}, ..., a_{q2}\}\\
&.\\
&.\\
&.\\
B_j &= \{a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{ij}, ..., a_{qj}\}\\
&.\\
&.\\
&.\\
B_k &= \{a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{qk}\}
\end{aligned}$$

Con $|B_i| = q, \forall \ \ i = 1, ..., k.$

Por otra parte,

Si $t = 0$, todos los elementos de S estan en M, luego se cumple el teorema puesto que S, queda particionada en k-conjuntos B_i, $\forall \ \ i = 1, ..., k$, luego por Observación 2.2 se tiene que:

$$|B_i| = q = \frac{|S|}{k} = \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil = \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor.$$

Si $t \neq 0$, hacemos la siguiente construcción de conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & B_1 \cup \{b_1\} \\ A_2 & = & B_2 \cup \{b_2\} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ A_t & = & B_t \cup \{b_t\} \\ A_{t+1} & = & B_{t+1} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ A_k & = & B_k \end{array}$$

Esto es, a los t-primeros B_i conjuntos añadimos un elemento de la secuencia $\bar{S}$, en ese estricto orden.

Luego, como $B_i \cap \{b_i\}{=}\emptyset$, $\forall \;\; i = 1, ..., t$, por la manera como ordenamos los elementos de S, así, si $1 \leqslant i \leqslant t$, entonces por Observación 2.2 se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} |A_i| & = & |B_i \cup \{b_i\}| \\ & = & |B_i| + |\{b_i\}| \\ & = & q + 1 \\ & = & \dfrac{|S|}{k} - \dfrac{t}{k} + 1 \\ & = & \left\lceil \dfrac{|S|}{k} \right\rceil . \end{array}$$

Si $t + 1 \leqslant i \leqslant k$, entonces por Observación 2.2 se tiene que:

$$|A_i| = |B_i| = q = \frac{|S|}{k} - \frac{t}{k} = \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor .$$

En consecuencia, si $t \neq 0$, S queda particionada en k-conjuntos, $A_1, A_2, ..., A_k$, tales que

$$|A_i| = \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil \;\; \text{ó} \;\; |A_i| = \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor \;\; \forall \;\; i = 1, ..., k.$$

Luego, por Observación 2.2 tenemos que:

$$\left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil = \frac{|S|}{k} - m + 1, \quad \text{y} \quad \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor = \frac{|S|}{k} - m,$$

donde m es la parte decimal de $\dfrac{|\acute{S}|}{k-2}$.

Luego, existen dos casos:

- $|A_i| = |A_j|$.

  En este caso, $|A_i| - |A_j| = 0, \forall \;\; i = 1, ..., k$.

- $|A_i| \neq |A_j|$.

  Supongamos que $|A_i| = \left\lceil \dfrac{|S|}{k} \right\rceil \quad \text{y} \quad |A_j| = \left\lfloor \dfrac{|S|}{k} \right\rfloor$.

  Así,

$$\begin{aligned} |A_i| - |A_j| &= \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil - \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor \\ &= \frac{|S|}{k} - m + 1 - (\frac{|S|}{k} - m) \\ &= 1. \end{aligned}$$

  Luego, $|A_i| - |A_j| = 1$.

  Ahora, supongamos que $|A_i| = \left\lfloor \dfrac{|S|}{k} \right\rfloor \quad \text{y} \quad |A_j| = \left\lceil \dfrac{|\acute{S}|}{k} \right\rceil$.

  Luego,

$$\begin{aligned} |A_i| - |A_j| &= \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor - \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil \\ &= \frac{|S|}{k} - m - (\frac{|S|}{k} - m + 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

  Así, $|A_i| - |A_j| = -1$.

  Por lo tanto, $|A_i| - |A_j| = -1 \quad$ ó $\quad |A_i| - |A_j| = 0 \quad$ ó $\quad |A_i| - |A_j| = 1$ $\forall \;\; i, \;\; 1 \leqslant i \leqslant k \quad \text{y} \quad \forall \;\; j, \;\; 1 \leqslant j \leqslant k$,

  Como $|A_i|$ y $|A_j|$ son enteros positivos, entonces, $-1 \leqslant |A_i| - |A_j| \leqslant 1$.

  Por tanto, $||A_i| - |A_j|| \leqslant 1 \quad \forall \;\; i, j \;\; 1 \leqslant i \leqslant k \quad \text{y} \quad 1 \leqslant j \leqslant k$.

Por lo que se cumple el teorema.

Ejemplo 2.6. *Sea* $S = [1][2]^4[3]^2[4]^2$ *una secuencia en* $\mathbb{Z}_5$.
Tenemos que $v_1(S) = 1$, $v_2(S) = 4$, $v_3(S) = 2$ *y* $v_4(S) = 2$.

Así, $h(S) = max\{v_i(S) : i = 1, ..., 4\} = v_2(S) = 4 \Longrightarrow h(S) = 4$.

Ahora, tomemos $k = 5$ *tal que:* $h(S) = 4 \leqslant 5 \leqslant 9 = |S|$, *entonces por Lema 2.1 existe una* 5*-partición de conjuntos* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *de* S *tal que*

$$|A_i| = \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{9}{5} \right\rceil = 2 \quad ó \quad |A_i| = \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor = 1 \quad \forall \quad i = 1, ..., 5.$$

Ahora reordenamos los elementos de la seuencia, empezando por el elemento que más se repite, luego de los elementos restantes tomamos el elemento que más se repite y así sucesivamente, esto es, $S = 222233441$. *Luego, construimos una matriz* M *con dimensión* 1×5 *(ya que* $|S| = 9 = 1 \times 5 + 4$ *) y una subsecuencia* $\acute{S}$ *con los* 4 *elementos restantes, esto es,*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 5} \quad y \quad \acute{S} = 3441.$$

Luego, hacemos la siguiente construcción de conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 = \{2\} \cup \{3\} &= \{2, 3\} \\ A_2 = \{2\} \cup \{4\} &= \{2, 4\} \\ A_3 = \{2\} \cup \{4\} &= \{2, 4\} \\ A_4 = \{2\} \cup \{1\} &= \{2, 1\} \\ A_5 &= \{3\}. \end{aligned}$$

Así,

$$|A_i| = \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{9}{5} \right\rceil = 2 \quad \forall \quad i = 1, ..., 5, \quad y \quad |A_5| = \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor = 1.$$

El siguiente teorema formulado en el año 1961 por Paul Erdös, Abraham Ginzburg y Abraham Ziv motivó el estudio de los problemas de suma cero sobre un grupo abeliano G.

Teorema 2.1. *[7](**Erdös-Ginzburg-Ziv**) Toda $(2n-1)$-secuencia de un grupo abeliano G de orden n, contiene una n-subsecuencia de suma cero.*

Un caso particular, lo presentamos a continuación:

Corolario 2.1. *Toda secuencia de longitud $2p-1$ en $\mathbb{Z}_p$ tiene una p-subsecuencia de suma cero.*

Demostración:

Sea $S = [u_1]^{n_1}[u_2]^{n_2}\ldots[u_r]^{n_r}$ una secuencia en $\mathbb{Z}_p$, donde $r = d(S) = |supp(S)| = |\{u_1, u_2, \ldots u_r\}|$ y $|S| = \sum_{i=1}^{r} n_i = 2p-1$.

- Si $h(S) \geqslant p$.

  Por Observación 2.1 (**iii**), S posee una p-subsecuencia de suma cero.

- Si $h(S) \leqslant p-1$.

  Hacemos $k = p-1$, así, $h(S) \leqslant p-1 = k < 2p-1 = |S|$, luego por Lema 2.1, existe una $(p-1)$-partición de S por conjuntos $A_1, A_2, ..., A_{p-1}$ tal que

$$|A_i| = \left\lceil \frac{|S|}{p-1} \right\rceil \ \text{ó} \ |A_i| = \left\lfloor \frac{|S|}{p-1} \right\rfloor \ \forall \ i = 1, ..., p-1.$$

  Luego,

$$|A_i| = \left\lceil \frac{2p-1}{p-1} \right\rceil = \left\lceil 2+\frac{1}{p-1} \right\rceil = 3 \ \text{ó} \ |A_i| = \left\lfloor \frac{2p-1}{p-1} \right\rfloor = \left\lfloor 2+\frac{1}{p-1} \right\rfloor = 2 \ \forall \ i = 1, ..., p-1.$$

  Luego, sin pérdida de generalidad, supongamos que $|A_1| \geqslant |A_2| \geqslant \ldots \geqslant |A_{p-1}| \geqslant 1$.

  Luego, $|A_1| = 3$ para todo $i = 2, 3, ..., t$ y $|A_i| = 2$, para todo $i = t+1, , ..., p-1$.

Luego,

$$\begin{aligned} 2p-1=\sum_{i=1}^{p-1}|A_i| &= \sum_{i=1}^{t}|A_i|+\sum_{i=t+1}^{p-1}|A_i| \\ &= 3t+2((p-1)-(t+1)+1) \\ &= 3t+2(p-t-1) \\ &= 3t+2p-2t-2 \\ &= 2p+t-2. \end{aligned}$$

Así, $2p-1=2p+t-2$, luego, $t=1$.

Por lo tanto, $|A_1|=3$ y $|A_i|=2$, para todo $i=2,,...,p-1$.

Como, $A_i\subset\mathbb{Z}_p\ \forall\ \ i=1,...,p-1$ entonces por el Teorema 1.3 tenemos que:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{p-1}A_i\right| &\geqslant \min\{p,\sum_{i=1}^{p-1}|A_i|-(p-1)+1\} \\ &= \min\{p,\sum_{i=2}^{p-1}|A_i|+|A_1|-p+2\} \\ &= \min\{p,2(p-2)+3-p+2\} \\ &= \min\{p,p+1\} \\ &= p. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\left|\sum_{i=1}^{p-1}A_i\right|\geqslant p$, por consiguiente, $\sum_{i=1}^{p-1}A_i{=}\mathbb{Z}_p$.

Así, $\forall g\in\mathbb{Z}_p$, $\exists\ x_g^i\in A_i$ tal que $g{=}\sum_{i=1}^{p-1}x_g^i$.

En particular, sea $-a\in\mathbb{Z}_p$ tal que $a\in supp(S)$, entonces existen $x_{-a}^1,x_{-a}^2,...,x_{-a}^{p-1}\in A_1,A_2,...,A_{p-1}$ respectivamente, tal que $-a=\sum_{i=1}^{p-1}x_{-a}^i$.

En consecuencia, $\sum_{i=1}^{p-1}x_{-a}^i+a=0$.

Como $a\in supp(S)$, y $x_{-a}^i\in A_i\subset supp(S)$, $\forall\ \ i=1,...,p-1$, entonces, $\acute{S}=a\ x_{-a}^1\ x_{-a}^2...\ x_{-a}^{p-1}$ es una p-subsecuencia de S de suma cero.

Por lo tanto, en cualquiera de los casos, dada una secuencia de longitud $2p-1$ hemos encontrado en dicha secuencia una p-subsecuencia de suma cero.

2.2. Constante de Davenport

En 1966, Harold Davenport da origen a su célebre **constante de Davenport** $D(G)$, la cual se define a continuación:

Definición 2.6. *(***Constante de Davenport***) Sea G un grupo abeliano finito. La constante de Davenport, denotada por $D(G)$ es el menor entero positivo t tal que toda secuencia en G de longitud t contiene una subsecuencia de suma cero.*

El siguiente lema, denominado por Paul Erdös, en el año 1980, lema prehistórico, muestra que $D(G) \leqslant |G|$ y de esta manera se muestra la existencia de $D(G)$.

Lema 2.2. *Sea G un grupo de orden n y sea $S = a_1a_2...a_n$ una n-secuencia de G, entonces existe una subsecuencia no vacia de S de suma cero.*

Demostración:

Sea $S = a_1a_2...a_n$ una n-secuencia de G. Consideremos la secuencia $\overline{S} = b_1b_2...b_n$ definida por:

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 \\
b_2 &= a_1 + a_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
b_i &= a_1 + a_2 + ... + a_i \\
&. \\
&. \\
&. \\
b_n &= a_1 + a_2 + ... + a_n.
\end{aligned}$$

- Supongamos que $b_i \neq b_j$ para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ entonces existe un $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $b_k = 0$, luego, $a_1 + a_2 + ... + a_k = 0$, por lo que, $\acute{S} = a_1a_2...a_k$ es una k-subsecuencia de S de suma cero.

- Supongamos ahora que existen $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ con $i < j$ tal que $b_i = b_j$ entonces $a_1 + a_2 + ... + a_i = a_1 + a_2 + ... + a_i + a_{i+1} + ... + a_j$.

En consecuencia, $a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j = 0$, Así, $T = a_{i+1}a_{i+2}...a_j$ es una subsecuencia de S de suma cero.

Lema 2.3. *$D(\mathbb{Z}_n) = n$, para todo n.*

Demostración:

Tenemos que $|\mathbb{Z}_n| = n$ y sea S una n-secuencia, por Lema 2.2, S contiene una subsecuencia $\acute{S}$ de suma cero, luego, por la minimalidad de la constante de Davenport, tenemos que $D(\mathbb{Z}_n) \leqslant n$, y como la secuencia $\underbrace{1,\ldots,1}_{(n-1)-veces}$ no contiene subsecuencias de suma cero, entonces $D(\mathbb{Z}_n) \geqslant n$.

Luego, $n \leqslant D(\mathbb{Z}_n) \leqslant n$, por consiguiente, $D(\mathbb{Z}_n) = n$.

2.3. Constante de Davenport baricéntrica

En el año 2004, Delorme, Márquez, Ordaz, y Ortuño [5] introducen la **constante de Davenport baricéntrica**, denotada por $BD(G)$ y definida como:

Definición 2.7. *(***Constante de Davenport baricéntrica***) Sea G un grupo abeliano finito. La constante de Davenport baricéntrica, denotada como $BD(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda t-secuencia en G, contiene una subsecuencia baricéntrica.*

El siguiente teorema nos garantiza la **existencia** de $BD(G)$.

Teorema 2.2. *Sea G un grupo abeliano finito. Entonces $BD(G) \leqslant D(G) + 1$.*

Demostración:

Sea $S = a_1a_2...a_{D(G)+1}$ una $(D(G)+1)$-secuencia de G. Consideremos la secuencia,

$$\beta = b_1b_2...b_{i-1}b_{i+1}...b_{D(G)+1} \text{ dada por:}$$

$$\begin{array}{rcl}
b_1 &=& a_1 - a_i \\
b_2 &=& a_2 - a_i \\
&.& \\
&.& \\
&.& \\
b_{i-1} &=& a_{i-1} - a_i \\
b_{i+1} &=& a_{i+1} - a_i \\
&.& \\
&.& \\
&.& \\
b_{D(G)+1} &=& a_{D(G)+1} - a_i.
\end{array}$$

donde $a_i \in S$ para algún i fijo, $1 \leqslant i \leqslant D(G) + 1$ (notemos que $a_i \notin \beta$).

Como β es una secuencia de longitud $D(G) = t$, entonces, por definición de $D(G)$, existe una subsecuencia $\alpha{=}b_{i_1}b_{i_2}...b_{i_k}$ de β de suma cero.

Ahora, consideremos la subsecuencia de S, siguiente:

$\gamma = b_{i_1}b_{i_2}...b_{i_k}, a_i$. Como α es una secuencia de suma cero, entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} b_{i_j} = 0$, luego: $a_i{+}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} b_{i_j} = a_i$

$\Longrightarrow a_i{+}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} (a_{i_j} - a_i){=}a_i \Longrightarrow a_i{+}\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} - \sum_{j=1}^{k} a_i{=}a_i$

$\Longrightarrow a_i{+}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} - ka_i{=}a_i \Longrightarrow a_i{+}\sum_{j=1}^{k} a_{i_j}{=}a_i + ka_i$

$\Longrightarrow a_i{+}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{i_j}{=}(k+1)a_i.$

Asi, $\varphi = a_ia_{i_1}a_{i_2}...a_{i_k}$ es una $(k+1)$-subsecuencia baricéntrica de S, luego, por la minimalidad de $BD(G)$ se tiene que, $BD(G) \leqslant D(G) + 1$.

Capítulo 3

Constante de Davenport k-baricéntrica

3.1. Constante de Davenport k-baricéntrica

En el año 2004, Delorme, González, Ordaz y Varela [4], introducen la **constante de Davenport k-baricéntrica**, denotada por $BD(k, G)$, definida como:

Definición 3.1. *(***Constante de Davenport k-baricéntrica***) Sea G un grupo abeliano finito y sea $k \geqslant 2$ un entero positivo. La* **constante de Davenport k-baricéntrica** *denotada por $BD(k, G)$, es el menor entero positivo s, tal que toda secuencia de G de longitud s, contiene una k-subsecuencia baricéntrica.*

Observación 3.1. *Para demostrar que $BD(k, G) \leqslant q$, basta probar que toda secuencia con longitud q, contiene una subsecuencia k-baricéntrica y en consecuencia por la minimalidad de la constante de Davenport k-baricéntrica, $BD(k, G) \leqslant q$.*

La **existencia** de la constante de Davenport k-baricéntrica, viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *[15] (***Condición de Hamidoune***) Sea G un grupo abeliano de orden $n \geqslant 2$. Sea S una secuencia con $|S| \geqslant n + k - 1$. Entonces existe una subsecuencia k-baricéntrica de S. Además en el caso $k \geqslant n$, la condición $|S| \geqslant D(G) + k - 1$, es suficiente para la existencia en S de una subsecuencia k-baricéntrica.*

Lema 3.1. *Sea G un grupo abeliano de orden n. Entonces*

$$BD(k, G) \leqslant n + k - 1. \quad (I)$$

En el caso $k \geqslant n$, se cumple que:

$$BD(k, G) \leqslant D(G) + k - 1. \quad (II)$$

Demostración:

Sea S una secuencia en G de longitud $|S| = n + k - 1$, luego, por Teorema 3.1 existe una subsecuencia k-baricéntrica de S, luego, por Observación 3.1, $BD(k, G) \leqslant n + k - 1$.

En el caso $k \geqslant n$, tomemos una secuencia S en G de longitud $|S| = D(G) + k - 1$, luego, por Teorema 3.1 existe una subsecuencia k-baricéntrica de S, luego, por Observación 3.1, $BD(k, G) \leqslant D(G) + k - 1$.

Observación 3.2. *La relación que existe entre la constante de Davenport baricéntrica y la constante de Davenport k-baricéntrica, es la siguiente:*

$$BD(G) \leqslant BD(k, G).$$

Dos resultados inmediatos del Lema 3.1 son los siguientes:

Teorema 3.2. $BD(n, \mathbb{Z}_n) = 2n - 1$.

Demostración: $|\mathbb{Z}_n| = n$. Luego, por Lema 3.1, parte (II) tenemos que

$$\begin{aligned} BD(n, \mathbb{Z}_n) &\leqslant D(\mathbb{Z}_n) + n - 1 \\ &= n + n - 1 \\ &= 2n - 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, $BD(n, \mathbb{Z}_n) \leqslant 2n - 1$.

Por otro lado, la secuencia $S = [1]^{n-1}[0]^{n-1}$, no contiene subsecuencias baricéntricas de longitud n. Así, $BD(n, \mathbb{Z}_n) > 2n - 2$, en consecuencia, $BD(n, \mathbb{Z}_n) \geqslant 2n - 2 + 1 = 2n - 1$.

Por lo tanto, $2n - 1 \leqslant BD(n, \mathbb{Z}_n) \leqslant 2n - 1$.

Luego, $BD(n, \mathbb{Z}_n) = 2n - 1$.

Teorema 3.3. *Sea G grupo abeliano finito. Entonces $BD(2, G) = |G| + 1$.*

Demostración:

Por Lema 3.1, parte (I)

$$BD(2, G) \leqslant |G| + 2 - 1.$$

Por lo tanto, $BD(2, G) \leqslant |G| + 1$.

Por otro lado, la secuencia $T = g_1 g_2 \ldots g_n$ tal que $g_i \neq g_j$, $\forall\ i \neq j$, no contiene subsecuencias 2-baricéntricas, en consecuencia, $BD(2, G) > |G|$.

Así, $BD(2, G) \geqslant |G| + 1$.

Por lo tanto, $|G| + 1 \leqslant BD(2, G) \leqslant |G| + 1$.

Luego, $BD(2, G) = |G| + 1$.

Los resultados que daremos a continuación se encuentran en [4]. Las técnicas usadas para demostrar los resultados de Delorme, González, Ordaz y Varela [4], fueron también utilizadas por Luong [16] para demostrar su resultado.

Teorema 3.4. *[4] $BD(3, \mathbb{Z}_p) \leqslant 2\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1$, para $p \geqslant 5$.*

Demostración:

Sea $S = \displaystyle\prod_{g \in supp(S)} [g]^{v_g(S)}$ una secuencia en $\mathbb{Z}_p$ de longitud $|S| = 2\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1$.
Luego por Observación 3.1, basta probar que S contiene una subsecuencia 3-baricéntrica.

Como $|S| = 2\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1 \geqslant 2\left\lceil \dfrac{5}{3} \right\rceil + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$. Así, $|S| \geqslant 5$.

Luego, existen dos casos:

Caso 1 $h(S) \geqslant 3$.

Por Observación 2.1 (**iii**), S contiene una subsecuencia 3-baricéntrica.

Caso 2 $h(S) \leqslant 2$.

Sea $d(S) = |supp(S)|$ y llamemos a $supp(S) = A$.

En este caso, $d(S) \geqslant \left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil$.

Supongamos lo contrario, esto es, $d(S) < \left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil$.

Dado que $p \geqslant 5$ y primo, existe q entero positivo tal que $p = 2q+1$. Así, $\dfrac{p}{2} = q + \dfrac{1}{2}$, por lo tanto,

$\left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil = \left\lceil q + \dfrac{1}{2} \right\rceil = q+1 = \dfrac{p-1}{2} + 1 = \dfrac{p+1}{2}.$

Luego, $\left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil = \dfrac{p+1}{2}.$ $\quad (*)$

De $(*)$, $\quad d(S) < \left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil = \dfrac{p+1}{2}$

$\Longrightarrow d(S) + 1 \leqslant \dfrac{p+1}{2}$

$\Longrightarrow d(S) \leqslant \dfrac{p+1}{2} - 1 = \dfrac{p-1}{2}$

Luego, $2d(S) \leqslant p-1.$ $\quad$ (I)

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1 = |S| &= \sum_{g \in Supp(S)} v_g(S) \\ &\leqslant \sum_{g \in Supp(S)} h(S) \\ &\leqslant \sum_{g \in Supp(S)} 2 \\ &= 2d(S). \end{aligned}$$

Luego, $2\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1 \leqslant 2d(S).$ $\quad$ (II)

De (I) y (II), tenemos:

$$2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1 \leqslant 2d(S) \leqslant p-1$$

$\Longrightarrow 2\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1 \leqslant p-1$

$\Longrightarrow p-1 \geqslant 2\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1 > 2\dfrac{p}{3} + 1$, ya que $\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil > \dfrac{p}{3}$, puesto que $p \geqslant 5$ y es primo.

Así, $p - 1 > \dfrac{2p+3}{3}$, luego, $p > \dfrac{2p+3}{3} + 1.$

Entonces, $p > \dfrac{2p+6}{3}$.

Así, $p \geqslant \dfrac{2p+6}{3} + 1$, luego, $p \geqslant \dfrac{2p+9}{3}$.

En consecuencia, $3p \geqslant 2p+9$, por tanto, $p \geqslant 9$. Contradicción, ya que $p \geqslant 5$.

Así, $d(S) \geqslant \left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil$. (III)

Como $\dfrac{p}{2} > \dfrac{p}{3} \Longrightarrow \left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil > \left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil$.

Así, $\left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil \geqslant \left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1$. (IV)

Como

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil &\geqslant \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil \quad \text{(puesto que } \ p \geqslant 5) \\ &= 3 \\ &> 2. \end{aligned}$$

Luego, $d(S) \geqslant \left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil > 2$.

En consecuencia, $|A| = d(S) > 2$, así, $|A| > 2$.

Luego, por Teorema 1.6, se tiene que:

$$\begin{aligned} |\wedge^2 A| &\geqslant \min\{p, 2|A| - 3\} \\ &= \min\{p, 2d(S) - 3\} \\ &\geqslant \min\{p, 2\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 3\} \quad \text{por (III)} \\ &= 2\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 3. \end{aligned}$$

Dado que $2\left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil - 3 = 2(\dfrac{p+1}{2}) - 3 = p + 1 - 3 = p - 2 < p$. por $(*)$

Luego, $2\left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil - 3 < p$.

Así, $|\bigwedge^2 A| \geqslant 2\left\lceil \dfrac{p}{2} \right\rceil - 3 \geqslant 2\left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil - 1$. Por (IV)

Sea $D = \{2x : x \in A\}$, entonces, $|D| = |A| = d(S)$. Así,

$$\begin{aligned}
|\wedge^2 A| + |D| &\geqslant 2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil - 1 + d(S) \\
&\geqslant 2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \quad \text{por (III)} \\
&\geqslant 2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1 \quad \text{por (IV)} \\
&= 3\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil \\
&> 3\frac{p}{3} \quad \text{puesto que, } \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil > \frac{p}{3} \\
&= p.
\end{aligned}$$

Luego, $|\bigwedge^2 A| + |D| > p$

En consecuencia, $|\bigwedge^2 A| + |D| \geqslant p + 1$.

Como $A = supp(S)$, entonces $A \subset \mathbb{Z}_p$, luego,

$\bigwedge^2 A = \{y + z : \{y, z\} \subset A\} \subset \mathbb{Z}_p \quad (1)$

Además, $D \subset \mathbb{Z}_p \quad (2)$

Luego, por (1) y (2) se tiene que:

$$\wedge^2 A \cup D \subset \mathbb{Z}_p$$

Luego, $|\wedge^2 A \cup D| \leqslant p$, así,

$$\begin{aligned}
p \geqslant |\wedge^2 A \cup D| &= |\wedge^2 A| + |D| - |\wedge^2 A \cap D| \\
&\geqslant p + 1 - |\wedge^2 A \cap D|.
\end{aligned}$$

Luego, $p \geqslant p + 1 - |\bigwedge^2 A \bigcap D|$.

Así, $|\bigwedge^2 A \bigcap D| \geqslant p + 1 - p = 1 \Longrightarrow |\bigwedge^2 A \bigcap D| \geqslant 1$.

Por lo tanto, $\bigwedge^2 A \bigcap D \neq \emptyset$.

En consecuencia, existen por lo menos un $w \in (\bigwedge^2 A \bigcap D)$

$\Longrightarrow w \in \bigwedge^2 A$ y $w \in D$

Así, existen $y, z \in A$, con $y \neq z$ tal que $w = y + z$, y existe $x \in A$ tal que $w = 2x$.

Luego, $y + z = 2x$.

En consecuencia, $x + y + z = 3x$, y como $x, y, z \in A = supp(S)$ entonces, tenemos que $\acute{S} = xyz$ es una subsecuencia 3-baricéntrica de S.

Así, por Observación 3.1, $BD(3, \mathbb{Z}_p) \leqslant 2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1$.

Corolario 3.1. *[4]* -

(i) $BD(3, \mathbb{Z}_5) = 5$.

(ii) $BD(3, \mathbb{Z}_7) = 7$.

(iii) $BD(3, \mathbb{Z}_{11}) = 9$.

Demostración:

(i) Por Teorema 3.4 se tiene que:

$$\begin{aligned} BD(3, \mathbb{Z}_5) &\leqslant 2\left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil + 1 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Luego, $BD(3, \mathbb{Z}_5) \leqslant 5$. (1)

Por otra parte, $S = [1]^2[3]^2$ es una secuencia de $\mathbb{Z}_5$ de longitud 4, que no contiene subsecuencias 3-baricéntricas, en consecuencia, $BD(3, \mathbb{Z}_5) > 4$.

Luego, $BD(3, \mathbb{Z}_5) \geqslant 5$. (2)

Así, por (1) y (2) tenemos que, $5 \leqslant BD(3, \mathbb{Z}_5) \leqslant 5$.

Luego, $BD(3, \mathbb{Z}_5) = 5$.

(ii) Por Teorema 3.4 se tiene que:

$$\begin{aligned} BD(3, \mathbb{Z}_7) &\leqslant 2\left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil + 1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Así, $BD(3, \mathbb{Z}_7) \leqslant 7$.

Por otro lado, $S = [1]^2[2]^2[4]^2$ es una secuencia de $\mathbb{Z}_7$ de longitud 6, que no contiene subsecuencias 3-baricéntricas, en consecuencia, $BD(3, \mathbb{Z}_7) > 6$.

En consecuencia, $BD(3, \mathbb{Z}_7) \geqslant 7$.

Así, $7 \leqslant BD(3, \mathbb{Z}_7) \leqslant 7$.

Luego, $BD(3, \mathbb{Z}_7) = 7$.

(iii) Por Teorema 3.4 se tiene que:

$$\begin{aligned} BD(3, \mathbb{Z}_{11}) &\leqslant 2\left\lceil \frac{11}{3} \right\rceil + 1 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Así, $BD(3, \mathbb{Z}_{11}) \leqslant 9$.

Por otra parte, $S = [1]^2[2]^2[4]^2[5]^2$ es una secuencia en $\mathbb{Z}_7$ de longitud 8, que no contiene subsecuencias 3-baricéntricas, en consecuencia, $BD(3, \mathbb{Z}_{11}) > 8$.

Luego, $BD(3, \mathbb{Z}_{11}) \geqslant 9$.

Por lo tanto, $9 \leqslant BD(3, \mathbb{Z}_{11}) \leqslant 9$.

Así, $BD(3, \mathbb{Z}_{11}) = 9$.

Teorema 3.5. *[4]* $BD(3, \mathbb{Z}_{13}) = 9$.

Demostración:
Sea S una secuencia en $\mathbb{Z}_{13}$ de longitud 9.
Estudiemos los siguientes dos casos:

Caso 1 $h(S) \geqslant 3$.

Por Observación 2.1 (**iii**), S contiene una subsecuencia 3-baricéntrica.

Caso 2 $h(S) \leqslant 2$.

En este caso, al menos un elemento se repite 2 veces. Como $|S| = 9$, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $S = [a_1]^2 \ldots [a_4]^2[a_5]$.

Luego, por el **principio de las casillas**, Teorema 1.5, podemos obtener una 5-subsecuencia $\acute{S}$ de S con todos sus elementos distintos, esto es, $\acute{S} = a_1 \ldots a_5$. Luego por Observación 2.1 (**ii**), $\acute{S}$ contiene una subsecuencia 3-baricéntrica, y en consecuencia, S contiene una subsecuencia 3-baricéntrica.

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos, S contiene una subsecuencia 3-baricéntrica. Luego, por Observación 3.1, se tiene que:

$$BD(3, \mathbb{Z}_p) \leqslant 9. \quad (I)$$

Por otro lado, la secuencia $S = [0]^2[1]^2[3]^2[4]^2$ en $\mathbb{Z}_{13}$ con $|S| = 8$, no contiene subsecuencias 3-baricéntricas, en consecuencia, $BD(3, \mathbb{Z}_p) > 8$. Luego,

$$BD(3, \mathbb{Z}_p) \geqslant 9. \quad (II)$$

Por tanto, de (I) y (II), tenemos que:

$$BD(3, \mathbb{Z}_{13}) = 9.$$

Teorema 3.6. *[4] $BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - 2$ para $4 \leqslant k \leqslant p - 1$.*

Demostración:
Sea S una secuencia en $\mathbb{Z}_p$ con longitud $|S| = p + k - 2$.
Por Observación 3.1, basta probar que S contiene una subsecuencia k-baricéntrica.
Estudiemos los siguientes dos casos:

Caso 1 $h(S) \geqslant k$.

Por Observación 2.1 (**iii**), S contiene una subsecuencia k-baricéntrica.

Caso 2 $h(S) \leqslant k - 1$.

Como

$$\begin{aligned} |S| &= p + k - 2 \\ &\geqslant 5 + k - 2 \\ &= k + 3 \\ &> k - 1. \end{aligned}$$

Tenemos que, $|S| > k - 1$.

Así, $h(S) \leqslant k - 1 < |S|$, entonces por Lema 2.1, existe una $(k-1)$-partición de S por conjuntos $A_1, \ldots, A_{k-1}$ tal que:

$$|A_i| = \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil \quad \text{ó} \quad |A_i| = \left\lfloor \frac{|S|}{k} \right\rfloor \quad \forall \;\; i = 1, ..., k - 1.$$

Además, $||A_i| - |A_j|| \leqslant 1$, para $1 \leqslant i \leqslant k-1$ y $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $|A_1| \geqslant |A_2| \geqslant \ldots \geqslant |A_{k-1}| \geqslant 1$.

Afirmamos que $|A_1| \geqslant 3$.

Supongamos lo contrario, esto es, $|A_1| < 3$, luego, $|A_1| \leqslant 2$. Así,

$2 \geqslant |A_1| \geqslant \ldots |A_{k-1}| \geqslant 1$ Luego,

$$\begin{aligned} p+k-2 = |S| &= \sum_{i=1}^{k-1} |A_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} 2 \\ &= 2(k-1). \end{aligned}$$

Así, $p+k-2 \leqslant 2k-2 \Longrightarrow p \leqslant k$, contradicción, puesto que $k \leqslant p-1 < p \Longrightarrow p > k$.

Por lo tanto, $|A_1| \geqslant 3$.

Como $||A_i| - |A_j|| \leqslant 1, \forall \;\; i,j \;\; 1 \leqslant i \leqslant k-1 \;\; y \;\; 1 \leqslant j \leqslant k-1$.

En particular, $||A_2| - |A_1|| \leqslant 1$

$\Longrightarrow -1 \leqslant |A_2| - |A_1| \leqslant 1 \Longrightarrow -1 \leqslant |A_2| - |A_1|$

$\Longrightarrow -1 + |A_1| \leqslant |A_2| \Longrightarrow |A_2| \geqslant |A_1| - 1 \geqslant 3 - 1 = 2.$

Así, $|A_2| \geqslant 2$.

Como $4 \leqslant k \leqslant p-1$, entonces $3 \leqslant k-1 \leqslant p-2$, luego, $\dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{1}{k-1} \geqslant \dfrac{1}{p-2}$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{|S|}{k-1} &= \frac{p+k-2}{k-1} \\ &\leqslant \frac{p+(p-1)-2}{3} \\ &= \frac{2(p-1)-1}{3} \\ &< \frac{2(p-1)-1}{2} \\ &= (p-1) - \frac{1}{2} \\ &= p - \frac{3}{2} \\ &< p. \end{aligned}$$

Así, $\dfrac{|S|}{k-1} < p$, en consecuencia, $\dfrac{|S|}{k-1} \leqslant p-1$.

Luego, $\left\lceil \dfrac{|S|}{k-1} \right\rceil \leqslant p-1$.

Por lo tanto, $3 \leqslant |A_1| = \left\lceil \dfrac{|S|}{k-1} \right\rceil \leqslant p-1$.

Puesto que $p \geqslant 5$ y $A_1 \subset \mathbb{Z}_p$, entonces por Lema 1.4, existen $x, y \in A_1$ tal que $A_1 \backslash x$ y $A_1 \backslash y$ no son progresiones aritméticas con la misma diferencia común.

Como

$$\begin{aligned} min\{|A_1\backslash x|, |A_1\backslash y|\} &= min\{|A_1|-1, |A_1|-1\} \\ &\geqslant min\{3-1, 3-1\}\} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Así, $min\{|A_1\backslash x|, |A_1\backslash y|\} \geqslant 2$. Luego, por Teorema 1.4 se tiene que:

$$|A_1\backslash x + A_1\backslash y| \geqslant min\{p-1, |A_1\backslash x| + |A_1\backslash y|\}.$$

Sea $\acute{A_2} = \{(1-k)z : z \in A_2\}$ entonces $|\acute{A_2}| = |A_2|$.

Como $(A_1\backslash x + A_1\backslash y), \acute{A_2}, A_3, \ldots, A_{k-1}$ son $(k-1)$-subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$, entonces por Teorema 1.3 (**Cauchy-Davenport generalizado**), se tiene que

$$\begin{aligned} &|(A_1\backslash x + A_1\backslash y) + \acute{A_2} + A_3 + \ldots + A_{k-1}| \\ &\geqslant min\left\{p, |A_1\backslash x + A_1\backslash y| + |\acute{A_2}| + ... + |A_{k-1}| - ((k-1)-1)\right\} \\ &= min\left\{p, |A_1\backslash x + A_1\backslash y| + |A_2| + ... + |A_{k-1}| - (k-2)\right\} \quad (|\acute{A_2}| = |A_2|) \\ &\geqslant min\left\{p, min\{p-1, |A_1\backslash x| + |A_1\backslash y|\} + \sum_{i=2}^{k-1} |A_i| - (k-2)\right\} \end{aligned}$$

- Si $min\{p-1, |A_1\backslash x| + |A_1\backslash y|\} = p-1$, entonces,

  $|(A_1\backslash x + A_1\backslash y) + \acute{A_2} + A_3 + \ldots + A_{k-1}|$

  $\geqslant min\{p, (p-1) + |A_2| + \sum_{i=3}^{k-1} |A_i| - (k-2)\}$

  $\geqslant min\{p, (p-1) + 2 + \sum_{i=3}^{k-1} 1 - (k-2)\} \quad (|A_2| \geqslant 2 \quad \text{y} \quad |A_i| \geqslant 1)$

  $= min\{p, (p-1) + 2 + (k-3) - (k-2)\}$

  $= min\{p, (p-1) + 2 - 1\}$

  $= min\{p, p\} = p.$

- Si $min\{p-1, |A_1\backslash x| + |A_1\backslash y|\} = |A_1\backslash x| + |A_1\backslash y|$, entonces,

  $|(A_1\backslash x + A_1\backslash y) + \acute{A_2} + A_3 + \ldots + A_{k-1}|$

  $\geqslant min\{p, |A_1\backslash x| + |A_1\backslash y| + \sum_{i=2}^{k-1} |A_i| - (k-2)\}$

  $= min\{p, |A_1\backslash x| + (|A_1| - 1) + \sum_{i=2}^{k-1} |A_i| - (k-2)\} \quad (|A_1\backslash y| = |A_1| - 1\ )$

  $= min\{p, |A_1\backslash x| - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} |A_i| - (k-2)\}$

  $= min\{p, (|A_1| - 1) - 1 + |S| - (k-2)\} \quad (\sum_{i=2}^{k-1} |A_i| = |S|)$

  $\geqslant min\{p, 3 - 1 - 1 + (p+k-2) - (k-2)\} \quad (|A_1| \geqslant 3)$

  $= min\{p, p+1\} = p.$

Luego, en cualquier de los dos casos:

$|(A_1\backslash x + A_1\backslash y) + \acute{A_2} + A_3 + \ldots + A_{k-1}| \geqslant p.$

Como $(A_1\backslash x + A_1\backslash y) + \acute{A_2} + A_3 + \ldots + A_{k-1} \subset \mathbb{Z}_p$, entonces
$|(A_1\backslash x + A_1\backslash y) + \acute{A_2} + A_3 + \ldots + A_{k-1}| \leqslant p.$

Por lo tanto, $|(A_1\backslash x + A_1\backslash y) + \acute{A_2} + A_3 + \ldots + A_{k-1}| = p$, en consecuencia,

$$(A_1\backslash x + A_1\backslash y) + \acute{A_2} + A_3 + \ldots + A_{k-1} = \mathbb{Z}_p.$$

Por consiguiente, existe $w \in (A_1\backslash x + A_1\backslash y)$, esto es, $w = a + b$ con $a \in A_1\backslash x$ y $b \in A_1\backslash y$, existe $\acute{a_2} \in \acute{A_2}$, esto es, $\acute{a_2} = (1-k)z$ para algún $z \in A_2$, existen

$a_3, ..., a_{k-1}$ elementos de $A_3, ..., A_{k-2}$ respectivamente, tales que:

$$w + \acute{a}_2 + a_3 + ... + a_{k-1} = 0,$$

esto es,

$$(a + b) + (1 - k)z + a_3 + ... + a_{k-1} = 0$$

$\Longrightarrow a + b + z - kz + a_3 + ... + a_{k-1} = 0$

$\Longrightarrow a + b + z + a_3 + ... + a_{k-1} = kz.$

Dado que $A_i \subset supp(S) \quad \forall \; i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k - 1$, entonces la secuencia $T = abza_3...a_{k-1}$ es una subsecuencia de S, k-baricéntrica.

Luego, por Observación 3.1, $BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - 2$, por lo que se cumple el teorema.

Corolario 3.2. *[4]* $BD(p - 1, \mathbb{Z}_p) = 2p - 3$, *para* $p \geqslant 5$.

Demostración:

Por hipótesis, $p \geqslant 5$, entonces $k = p - 1 \geqslant 5 - 1 = 4 \Longrightarrow k \geqslant 4$.
Así, $4 \leqslant k = p - 1$, luego por Teorema 3.2

$$\begin{aligned} BD(p - 1, \mathbb{Z}_p) &\leqslant p + (p - 1) - 2 \\ &= 2p - 3. \end{aligned}$$

Luego, $BD(p - 1, \mathbb{Z}_p) \leqslant 2p - 3. \quad (1)$

Por otro lado, $S = [0]^{p-2}[1]^{p-2}$ es una secuencia de longitud $2p - 4$ de $\mathbb{Z}_p$, que no contiene subsecuencias $(p-1)$-baricéntricas y en consecuencia $BD(p-1, \mathbb{Z}_p) > 2p-4$, luego, $BD(p - 1, \mathbb{Z}_p) \geqslant 2p - 3$.

Así, $\quad 2p - 3 \leqslant BD(p - 1, \mathbb{Z}_p) \leqslant 2p - 3.$

En consecuencia, $BD(p - 1, \mathbb{Z}_p) = 2p - 3.$

Teorema 3.7. *[4]* $BD(4, \mathbb{Z}_7) = 8.$

3.2. Teorema principal

Teorema 3.8. *Sea $p \geqslant 5$, un número primo y sea k un entero, $3 \leqslant k \leqslant p-1$. Entonces,*

$$BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - \left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor - 2.$$

Demostración:

Por Observación 3.1, basta probar que toda secuencia con longitud $p + k - t$, donde $t = \left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor + 2$, contiene una subsecuencia k-baricéntrica.

Supongamos que $S = [u_1]^{n_1}[u_2]^{n_2} \ldots [u_r]^{n_r}$, donde $r = d(S) = |supp(S)|$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $h(S) = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_r \geqslant 1$.

Llamemos A al $supp(S)$, es decir, $A = supp(S)$.

Estudiemos dos casos para $h(S)$:

Caso I $h(S) \geqslant k$.

Por Observación 2.1 (**iii**), S contiene una subsecuencia k-baricéntrica.

Caso II $h(S) \leqslant k - 1$.

Afirmamos que, $|S| > (k-1)(t-1)$. En efecto;

Como $t = \left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor + 2$, entonces $t - 2 = \left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor$. Luego,

$$
\begin{aligned}
|S|-(k-1)(t-1) &= (p+k-t)-(k-1)(t-1)\\
&= (p+k-t)-k(t-1)+(t-1)\\
&= (p-1)+k-k(t-1)\\
&= (p-1)-k(-1+(t-1))\\
&= (p-1)-k(t-2)\\
&= (p-1)-k\left\lfloor\frac{p-2}{k}\right\rfloor\\
&\geqslant (p-1)-k\frac{(p-2)}{k}\\
&= (p-1)-(p-2)\\
&= 1\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Entonces $\quad |S|-(k-1)(t-1)>0.$

Por otro lado, $|S|>(k-1)(t-1)\geqslant h(S)(t-1)$. $\quad$ (ya que $k-1\geqslant h(S)$)

Luego, $|S|>h(S)(t-1)$. $\quad$ (1)

Además,

$|S|=\sum\limits_{i=1}^{r} n_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{r} h(S)=rh(S)$. $\quad$ ($n_i\leqslant h(S), \forall \ \ i=1,...,r$)

Así, $|S|\leqslant rh(S)$. $\quad$ (2)

Por tanto, de (1) y (2):

$$rh(S)\geqslant |S|>h(S)(t-1)$$

$\Longrightarrow rh(S)>h(S)(t-1)$

$\Longrightarrow rh(S)-h(S)(t-1)>0$

$\Longrightarrow h(S)(r-(t-1))>0.$

Como $h(S)>0$ entonces $r-(t-1)>0$

En consecuencia, $r>t-1$.

Por lo tanto, $r\geqslant t$.

Como $r = d(S)$ entonces

$$r = d(S) \geqslant t.$$

Luego, como $k-1 \geqslant h(S)$ y $d(S) \geqslant t$ entonces

$$k-1 \geqslant h(S) = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_t \geqslant \ldots \geqslant n_r \geqslant 1.$$

Como $3 \leqslant k \leqslant p-1$ entonces estudiaremos los siguientes dos casos:

Caso II.1 $k = 3$.

Como $k-1 \geqslant n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_t \geqslant \ldots \geqslant n_r \geqslant 1$.

Tenemos que, $n_i \leqslant k-1 = 3-1 = 2, \forall \ \ i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant r$.

Por lo tanto, $n_i \leqslant 2, \ \ \forall \ \ i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant r$. Así,

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{i=1}^{r} n_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{r} 2 \\ &= 2r. \end{aligned}$$

Así, $|S| \leqslant 2r$.

En consecuencia, $0 \leqslant 2r - |S|$. (1)

Por otro lado, $|S| = p + 3 - t$, luego,

$$\begin{aligned} 2r - |S| &= 2r - (p+3-t) \\ &= 2r - (p+3) + t \\ &\leqslant 2r - (p+3) + r \quad \text{(ya que, } t \leqslant r) \\ &= 3r - (p+3). \end{aligned}$$

Entonces, $2r - |S| \leqslant 3r - (p+3)$. (2)

Por tanto, de (1) y (2):

$$0 \leqslant 2r - |S| \leqslant 3r - (p+3).$$

Luego, $0 \leqslant 3r - (p+3)$

$\Longrightarrow \dfrac{p+3}{3} \leqslant r \Longrightarrow r \geqslant \dfrac{p+3}{3} = \dfrac{p}{3}+1$

$\Longrightarrow \left\lceil r \right\rceil \geqslant \left\lceil \dfrac{p}{3}+1 \right\rceil$

Pero, como r es un entero positivo, entonces,

$$r = \left\lceil r \right\rceil \geqslant \left\lceil \frac{p}{3}+1 \right\rceil > \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil.$$

Luego, $r > \left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil$.

Por consiguiente,

$$r \geqslant \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1. \quad (3)$$

Consideremos los conjuntos $\wedge^2 A = \{u_i + u_j : 1 \leqslant i \neq j \leqslant r\}$ y $B = \{2u_i : u_i \in A\}$, donde $A = supp(S) = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$.

Luego, como $|A| = r$, entonces, $|B| = r$.

Probaremos que $\wedge^2 A \cap B \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} |A| &= r \\ &\geqslant \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1 \quad (\text{Por} \quad (3)) \\ &\geqslant \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil + 1 \quad (p \geqslant 5) \\ &= 2+1 \\ &= 3 \\ &> 2. \end{aligned}$$

Así, $|A| > 2$, además, $A \subset \mathbb{Z}_p$. Luego por el Teorema 1.6 se tiene que:

$$\begin{aligned} |\wedge^2 A| &\geqslant min\{p, 2|A|-3\} \\ &= min\{p, 2r-3\}. \end{aligned}$$

Luego, $|\wedge^2 A| \geqslant min\{p, 2r-3\}$.

- Si $min\{p, 2r-3\} = 2r-3$ entonces,

$$\begin{aligned} |\wedge^2 A| + |B| &\geqslant min\{p, 2r-3\} + r \\ &= 2r - 3 + r \\ &= 3r - 3 \\ &\geqslant 3(\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1) - 3 \quad (\text{Por} \quad (3)) \\ &= 3\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil \\ &> 3\frac{p}{3}, \qquad (\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil > \frac{p}{3} \quad \text{porque} \quad p \geqslant 5) \\ &= p. \end{aligned}$$

  En consecuencia, $|\wedge^2 A| + |B| > p$.

- Si $min\{p, 2r-3\} = p$ entonces,

$$\begin{aligned} |\wedge^2 A| + |B| &\geqslant min\{p, 2r-3\} + r \\ &= p + r \\ &> p + 2 \quad (|A| = r > 2) \\ &> p. \end{aligned}$$

  Por consiguiente, $|\wedge^2 A| + |B| > p$.

Luego, en cualquiera de los dos casos, $|\wedge^2 A| + |B| > p$.

En consecuencia, $|\wedge^2 A| + |B| \geqslant p + 1$. (4)

Por otra parte,

$u_i, u_j \in \mathbb{Z}_p \Longrightarrow u_i + u_j \in \mathbb{Z}_p, \forall \;\; i, j \in \{1, ..., r\}, i \neq j$.

Luego, $\wedge^2 A \subset \mathbb{Z}_p$.

También, $u_i \in \mathbb{Z}_p \Longrightarrow 2u_i = u_i + u_i \in \mathbb{Z}_p, \forall \;\; i \in \{1, ..., r\}$.

Así, $B \subset \mathbb{Z}_p$.

Por lo tanto,

$$\wedge^2 A \cup B \subset \mathbb{Z}_p.$$

Por consiguiente, $|\wedge^2 A \cup B| \leqslant p$. (5)

Así, por (4) y (5):

$$\begin{aligned} p &\geqslant |\wedge^2 A \cup B| \\ &= |\wedge^2 A| + |B| - |\wedge^2 A \cap B| \\ &\geqslant p + 1 - |\wedge^2 A \cap B|. \end{aligned}$$

Luego, $p \geqslant p + 1 - |\wedge^2 A \cap B|$

$\Longrightarrow |\wedge^2 A \cap B| \geqslant p + 1 - p = 1$

$\Longrightarrow |\wedge^2 A \cap B| \geqslant 1.$

Por lo tanto, $\wedge^2 A \cap B \neq \emptyset$.

Entonces existe al menos un $w \in \wedge^2 A \cap B$

$\Longrightarrow w \in \wedge^2 A$ y $w \in B$

$\Longrightarrow \exists \;\; i, j \in \{1, ..., r\}, i \neq j$ tal que, $w = u_i + u_j$ y $\exists \;\; l \in \{1, ..., r\}$ tal que $w = 2u_l$.

Así, $u_i + u_j = 2u_l$, con $i, j, l \in \{1, ..., r\}, i \neq j$

$\Longrightarrow u_i + u_j + u_l = 3u_l$, con $i, j, l \in \{1, ..., r\}, i \neq j$.

Por tanto, $\acute{S} = u_i u_j u_l$ es un subsecuencia 3-baricéntrica de S, puesto que $u_i, u_j, u_l \in supp(S)$.

Caso II.2 $4 \leqslant k \leqslant p - 1$.

Como $k \geqslant 4$ entonces $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{4}$. Además $t = \left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor + 2$.

Luego,

$$t = \left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor + 2 \leqslant \frac{p-2}{k} + 2 \leqslant \frac{p-2}{4} + 2 < \frac{p+1}{2} \qquad (*)$$

A continuación, justificaremos la última desigualdad.

Tenemos que, $\dfrac{p-2}{4} < \dfrac{p-3}{2}$, en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{p-3}{2} - \frac{p-2}{4} &= \frac{2(p-3)-(p-2)}{4} \\ &= \frac{2p-6-p+2}{4} \\ &= \frac{p-4}{4} \\ &\geqslant \frac{5-4}{4} \\ &= \frac{1}{4} \\ &> 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\dfrac{p-3}{2} - \dfrac{p-2}{4} > 0$.

Luego, $\dfrac{p-3}{2} > \dfrac{p-2}{4}$

$\Longrightarrow \dfrac{p-2}{4} < \dfrac{p-3}{2}$

$\Longrightarrow \dfrac{p-2}{4} + 2 < \dfrac{p-3}{2} + 2 = \dfrac{p+1}{2}$

Así, $\dfrac{p-2}{4} + 2 < \dfrac{p+1}{2}$.

Como $d(S) \geqslant t$, estudiamos dos casos:

Caso II.2.1 $d(S) \geqslant t+1$.

- Si $d(S) = t+1$, entonces $n_{t+2} = 0$ y

  $$k-1 \geqslant n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_t \geqslant n_{t+1} = n_r \geqslant 1.$$

  Como $k-1 \geqslant 1$, entonces $k-2 \geqslant 0 = n_{t+2}$.

  Así,

  $$k-2 \geqslant n_{t+2}.$$

- Si $d(S) \geqslant t+2$, entonces se cumple que $k-2 \geqslant n_{t+2}$.

  En efecto, supongamos lo contrario, esto es, $k-2 < n_{t+2}$, es decir, $k-2+1 \leqslant n_{t+2}$.

  Luego, $n_{t+2} \geqslant k-1$.

  Así, $k-1 \geqslant n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_{t+2} \geqslant k-1$.

Luego, $k-1 \geqslant n_i \geqslant k-1, \quad \forall \;\; i, \quad 1 \leqslant i \leqslant t+2.$

Así, $n_i = k-1, \quad \forall \;\; i, \quad 1 \leqslant i \leqslant t+2.$

Además, tenemos que: $\left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor \leqslant \dfrac{p-2}{k}.$

Luego, por Observación 2.2 se tiene que:
$\left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor + q = \dfrac{p-2}{k}$, donde q es la parte decimal de $\dfrac{p-2}{k}$, es decir, $0 \leqslant q < 1$, luego, $-q > -1$.

Así, $\left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor = \dfrac{p-2}{k} - q.$

Por lo tanto, $t = \left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor + 2 = \dfrac{p-2}{k} - q + 2.$

Así, $t = \dfrac{p-2}{k} - q + 2 > \dfrac{p-2}{k} - 1 + 2 = \dfrac{p-2}{k} + 1$

$\Longrightarrow t > \dfrac{p-2}{k} + 1$

$\Longrightarrow t+1 > \dfrac{p-2}{k} + 2.$

Así, $-(t+1) < -(\dfrac{p-2}{k} + 2).$

Luego,

$$\begin{aligned}
|S| - \sum_{i=1}^{t+2} n_i &= (p+k-t) - \sum_{i=1}^{t+2}(k-1) \\
&= (p+k-t) - (t+2)(k-1) \\
&= p+k-t-kt+t-2k+2 \\
&= p+2-k-kt \\
&= p+2-k(t+1) \\
&< p+2-k(\frac{p-2}{k}+2) \\
&= 4-2k \\
&\leqslant 4-2(4) \quad (-k \leqslant -4) \\
&= -4 \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Así, $|S| = \sum_{i=1}^{t+2} n_i + \sum_{i=t+3}^{r} n_i < \sum_{i=1}^{t+2} n_i$

$\Longrightarrow \sum_{i=t+3}^{r} n_i < 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,

$$k-2 \geqslant n_{t+2}.$$

Así, $d(S) \geqslant t+1 \Longrightarrow k-2 \geqslant n_{t+2}$.

Luego, Consideremos $\acute{S} = [u_1]^{m_1}[u_2]^{m_2}\ldots[u_{t+1}]^{m_{t+1}}[u_{t+2}]^{n_{t+2}}\ldots[u_r]^{n_r}$, donde $m_i = n_i - 1 \ \forall \ \ i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant t+1$, una subsecuencia de S, esto es, $\acute{S}$ es la subsecuencia que se obtiene a partir de S eliminando un elemento u_i para cada $i = 1, 2, ..., t+1$.

Además, consideremos el conjunto $D = \{u_1, u_2, ..., u_{t+1}\}$ el cual esta formado por los $(t+1)$ elementos eliminados de S.

Como $k-1 \geqslant n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_{t+1}$

$\Longrightarrow k-1 \geqslant n_i, \forall \ \ i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant t+1$

$\Longrightarrow k-1-1 \geqslant n_i - 1, \forall \ \ i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant t+1$

$\Longrightarrow k-2 \geqslant n_i - 1 = m_i, \forall \ \ i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant t+1$.

Así, se cumple que: $m_i \leqslant k-2, \forall \ \ i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant t+1$ y $n_i \leqslant n_{t+2} \leqslant k-2$, $\forall \ \ i, \ \ t+3 \leqslant i \leqslant r$.

Por lo tanto, $k-2$ es un cota superior de $\{m_1, ..., m_{t+1}, n_{t+2}, ..., n_r\}$.

Por tanto, $k-2 \geqslant h(\acute{S}) = max\{m_1, ..., m_{t+1}, n_{t+2}, ..., n_r\}$.

En consecuencia, $h(\acute{S}) \leqslant k-2$. (1)

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\acute{S}| &= |S| - (t+1) \\ &= p + k - t - t - 1 \\ &= p + k - 2t - 1. \end{aligned}$$

Así, $|\acute{S}| = p + k - 2t - 1$.

Por $(*)$ se tiene que $t < \dfrac{p+1}{2}$

$\Longrightarrow 2t < p+1 \Longrightarrow p+1-2t > 0$.

Luego,

$$\begin{aligned} |\acute{S}| - (k-2) &= (p+k-2t-1) - (k-2) \\ &= p+1-2t \\ &> 0. \end{aligned}$$

Así, $|\acute{S}| - (k-2) > 0$ y además, $p > 2t-1$. $(**)$

Por consiguiente, $|\acute{S}| > k-2$. (2)

Así, por (1) y (2), $h(\acute{S}) \leqslant k-2 < |\acute{S}|$, luego, por Lema 2.1, existe una $(k-2)$-partición de $\acute{S}$ por conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_{k-2}$ tal que

$$|B_i| = \left\lceil \frac{|\acute{S}|}{k-2} \right\rceil \quad \text{ó} \quad |B_i| = \left\lfloor \frac{|\acute{S}|}{k-2} \right\rfloor \quad \forall \;\; i = 1, ..., k-2.$$

Consideremos el conjunto $\wedge^2 D = \{u_i + u_j : 1 \leqslant i \neq j \leqslant t+1\}$ donde $D = \{u_1, u_2, ..., u_{t+1}\}$, esto es, D es el conjunto formado por los $(t+1)$ elementos eliminados de S.

Dado que $t = \left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor + 2 > 2 \quad \left(\left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor > 0 \right)$

$\Longrightarrow t > 2$

$\Longrightarrow t+1 > 3 > 2$

$\Longrightarrow |D| = t+1 > 2$

Así, $|D| > 2$ y como $D \subset \mathbb{Z}_p$ entonces, por el Teorema 1.6 se tiene que:

$$\begin{aligned} |\wedge^2 D| &\geqslant min\{p, 2|D|-3\} \\ &= min\{p, 2(t+1)-3\} \\ &= min\{p, 2t-1\} \\ &= 2t-1 \;\; (\text{Por } \;(**)) \end{aligned}$$

Por tanto, $|\wedge^2 D| \geqslant 2t-1$. (I)

Sea $\acute{B_1} = \{(1-k)x : x \in B_1\}$, entonces $|\acute{B_1}| = |B_1|$.

Dado que $\acute{B_1}$, $B_2, B_3, \ldots, B_{k-2}$, y $\wedge^2 D$ son $(k-1)$-subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$ entonces por el Teorema 1.3 (**Cauchy-Davenport generalizado**) se tiene que:

$|\acute{B_1} + B_2 + \ldots + B_{k-2} + \wedge^2 D|$

$\geqslant min\{p, |\acute{B_1}| + |B_2| + \ldots + |B_{k-2}| + | \wedge^2 D| - ((k-1)-1)\}$

$= min\{p, |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_{k-2}| + | \wedge^2 D| - (k-2)\} \quad (|\acute{B_1}| = |B_1|)$

$= min\{p, |\acute{S}| + | \wedge^2 D| - (k-2)\} \quad (\sum_{i=1}^{k-2} |B_i| = |\acute{S}|)$

$\geqslant min\{p, (p+k-2t-1) + (2t-1) - (k-2)\} \quad$ (Por (I))

$= min\{p, p\} = p.$

En consecuencia, $|\acute{B_1} + B_2 + \ldots + B_{k-2} + \wedge^2 D| \geqslant p$.

Como $\acute{B_1}+B_2+\ldots+B_{k-2}+\wedge^2 D \subset \mathbb{Z}_p$, entonces $|\acute{B_1}+B_2+\ldots+B_{k-2}+\wedge^2 D| \leqslant p$.

Por tanto, $\acute{B_1} + B_2 + \ldots + B_{k-2} + \wedge^2 D = \mathbb{Z}_p$.

En consecuencia, existe $\acute{b_1} \in \acute{B_1}$, esto es, $\acute{b_1} = (1-k)x$ para algún $x \in B_1$, existen $b_2, ..., b_{k-2}$ elementos de $B_2, ..., B_{k-2}$ respectivamente, y existe $z \in \wedge^2 D$, esto es, $z = u_i + u_j$ con $i \neq j$; $i, j \in \{1, ..., t+1\}$, tales que:

$$\acute{b_1} + b_2 + \ldots + b_{k-2} + z = 0,$$

esto es,

$$(1-k)x + b_2 + \ldots + b_{k-2} + (u_i + u_j) = 0$$

$\Longrightarrow x - kx + b_2 + \ldots + b_{k-2} + u_i + u_j = 0$

$\Longrightarrow x + b_2 + \ldots + b_{k-2} + u_i + u_j = kx.$

Dado que $B_i \subset supp(S) \quad \forall \ i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-2$, entonces la secuencia $T = xb_2 \ldots b_{k-2}u_iu_j$ es una subsecuencia de S, k-baricéntrica.

Caso II.2.2 $d(S) = t$.

En este caso, $S = [u_1]^{n_1}[u_2]^{n_2} \ldots [u_t]^{n_t}$ donde $k-1 \geqslant n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_t \geqslant 1$ y $A = supp(S) = \{u_1, \ldots u_t\}$.

Probemos que $|A| \geqslant 3$. En efecto:

$$\begin{aligned} p + k - t = |S| &= \sum_{i=1}^{t} n_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{t} k-1 \\ &= t(k-1). \end{aligned}$$

Así, $p+k-t \leqslant t(k-1) \Longrightarrow t(k-1) \geqslant p+k-t$

$\Longrightarrow tk-t \geqslant p+k-t \Longrightarrow tk \geqslant p+k.$

Luego,

$$\begin{aligned} t &\geqslant \frac{p+k}{k} \\ &\geqslant \frac{(k+1)+k}{k} \quad (\text{ya que}, \;\; k \leqslant p-1 \Longrightarrow k+1 \leqslant p) \\ &= \frac{2k+1}{k} \\ &= 2+\frac{1}{k} \\ &> 2. \end{aligned}$$

Así, $t>2$, luego, $t \geqslant 3$.

Por tanto, $|A| \geqslant 3$.

Consideremos a $\acute{S}=[u_1]^{n_1-1}[u_2]^{n_2-1}\ldots[u_t]^{n_t-1}$ una subsecuencia de S, esto es, $\acute{S}$ es la subsecuencia que se obtiene a partir de S eliminando un elemento u_i para cada $i=1,2,...,t$. Además, consideremos el conjunto $D=\{u_1,u_2,...,u_t\}$ el cual esta formado por los t elementos eliminados de S.
Notemos que $D=A=supp(S)$.

Luego,

$$\begin{aligned} |\acute{S}| &= |S|-t \\ &= p+k-t-t \\ &= p+k-2t. \end{aligned}$$

Luego, $|\acute{S}|=p+k-2t$.

Como $k-1 \geqslant h(S)=n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_t$, entonces, $k-1 \geqslant n_i, \forall \;\; i, \;\; 1 \leqslant i \leqslant t$

$\Longrightarrow k-2 \geqslant n_i-1, \forall \;\; i, \;\; 1 \leqslant i \leqslant t.$

Luego, $k-2$ es una cota superior del conjunto $\{n_1-1, n_2-1\ldots n_t-1\}$.

En consecuencia, $k-2 \geqslant h(\acute{S})=max\{n_1-1,n_2-1\ldots n_t-1\}$.

Por tanto, $k-2 \geqslant h(\acute{S})$. (1)

Por otra parte, por $(*)$ se tiene que $t<\dfrac{p+1}{2}$

$\Longrightarrow t < \dfrac{p+1}{2} < \dfrac{p+4}{2} \Longrightarrow t < \dfrac{p+4}{2}$

$\Longrightarrow t+1 \leqslant \dfrac{p+4}{2} \Longrightarrow t \leqslant \dfrac{p+4}{2} - 1$

$\Longrightarrow t \leqslant \dfrac{p+2}{2} \Longrightarrow 2t \leqslant p+2.$

Así, $\quad p+2-2t \geqslant 0.$

Luego,

$$\begin{aligned} |\acute{S}| - (k-2) &= (p+k-2t)-(k-2) \\ &= p+2-2t \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Así, $|\acute{S}| - (k-2) \geqslant 0$, luego, $|\acute{S}| \geqslant k-2$.

Por consiguiente, $k-2 \leqslant |\acute{S}|$. $\quad$ (2)

Por tanto, de (1) y (2), $\quad h(\acute{S}) \leqslant k-2 \leqslant |\acute{S}|$, luego, por Lema 2.1, existe una $(k-2)$-partición de $\acute{S}$ por conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_{k-2}$ tal que

$$|B_i| = \left\lceil \frac{|\acute{S}|}{k-2} \right\rceil \quad \text{ó} \quad |B_i| = \left\lfloor \frac{|\acute{S}|}{k-2} \right\rfloor \quad \forall \ \ i = 1, ..., k-2.$$

Además, $||B_i| - |B_j|| \leqslant 1$, para todo $1 \leqslant i \leqslant k-2 \quad$ y $\quad 1 \leqslant j \leqslant k-2$.

Por otra parte, sin pérdida de generalidad, supongamos que $|B_1| \geqslant |B_2| \geqslant \ldots \geqslant |B_{k-2}| \geqslant 1$.

Afirmamos que $|B_2| \geqslant 2$.

Supongamos lo contrario, esto es, $|B_2| < 2$. Luego, $|B_2| = 1$.

Así, $1 = |B_2| \geqslant |B_3| \geqslant \ldots \geqslant |B_{k-2}| \geqslant 1$.

Luego, $|B_i| = 1, \forall \ \ i \ \ 2 \leqslant i \leqslant k-2$. $\quad$ (3)

Como $||B_i| - |B_j|| \leqslant 1.\ \forall \ \ i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-2 \quad$ y $\quad \forall \ \ j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-2$. En particular, $||B_1| - |B_2|| \leqslant 1$

$\Longrightarrow -1 \leqslant |B_1| - |B_2| \leqslant 1.$

Como $|B_2| = 1$ y $|B_1| - |B_2| \leqslant 1$, entonces $|B_1| - 1 \leqslant 1$.

Luego, $|B_1| \leqslant 2$. $\quad$ (4)

Por tanto,

$$\begin{aligned} p+k-2t=|\acute{S}| &= \sum_{i=1}^{k-2}|B_i| \\ &= |B_1|+\sum_{i=2}^{k-2}|B_i| \\ &\leqslant 2+\sum_{i=2}^{k-2}1 \quad (\text{Por, } (3) \text{ y } (4)) \\ &= 2+(k-3) \\ &= k-1. \end{aligned}$$

Entonces, $p+k-2t \leqslant k-1 \Longrightarrow p+1 \leqslant 2t$.

Luego, $\dfrac{p+1}{2} \leqslant t$, contradicción, puesto que por $(*)$ $\quad t < \dfrac{p+1}{2}$.

Por lo tanto, $|B_2| \geqslant 2$.

Como $|B_1| \geqslant |B_2|$ entonces $|B_1| \geqslant 2$.

También, $|B_1| < p-2$. En efecto,

- Si $|B_1| = \left\lceil \dfrac{|\acute{S}|}{k-2} \right\rceil$, entonces

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{p+k-2t}{k-2} \right\rceil &\leqslant \left\lceil \frac{p+(p-1)-2t}{2} \right\rceil \quad (k \leqslant p-1 \text{ y } \frac{1}{k-2} \leqslant \frac{1}{2}) \\ &\leqslant \left\lceil \frac{2p-1-2(3)}{2} \right\rceil \quad (-t \leqslant -3) \\ &= \left\lceil \frac{2p-8+1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil (p-4)+\frac{1}{2} \right\rceil \\ &= (p-4)+1 \\ &= p-3 \\ &< p-2. \end{aligned}$$

- Si $|B_1| = \left\lfloor \dfrac{|\acute{S}|}{k-2} \right\rfloor$, entonces

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{p+k-2t}{k-2} \right\rfloor &\leqslant \left\lfloor (p-4)+\frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= p-4 \\ &< p-2.\end{aligned}$$

Luego, en cualquiera de los dos casos, $|B_1| < p-2$.

Por otro lado, sea $\wedge^2 A = \{u_i + u_j : 1 \leqslant i \neq j \leqslant t\}$, y llamemoslo B, es decir, $B = \wedge^2 A$.

Como $|A| \geqslant 3 > 2$ entonces $|A| > 2$ y además $A \subset \mathbb{Z}_p$. Luego, por el Teorema 1.6, se tiene que:

$$\begin{aligned}|B| &\geqslant min\{p, 2|A|-3\} \\ &= min\{p, 2t-3\}.\end{aligned}$$

Como por $(*)$, $\quad t < \dfrac{p+1}{2}$ entonces $2t < p+1$

$\Longrightarrow 2t-3 < p-2 \Longrightarrow 2t-3 < p$.

Luego, $|B| \geqslant min\{p, 2t-3\} = 2t-3$.

Por consiguiente, $|B| \geqslant 2t-3$.

Así, $|B| \geqslant 2t-3 \geqslant 2(3)-3 = 3$. $\quad$ (ya que $t \geqslant 3$)

Luego, $|B| \geqslant 3$.

Consideremos dos casos para B_1.

Subcaso II.2.2a $\quad B_1$ y B son progresiones aritméticas con la misma diferencia común.

En este caso, $B_1 = \{a_0 + id_1 : i = 0, ..., |B_1|-1\}$
y $B = \{b_0 + id : i = 0, ..., |B|-1\}$, donde $d = d_1$.

Sea $\acute{B_1} = \{(1-k)x : x \in B_1\}$ entonces $|\acute{B_1}| = |B_1|$.

Luego, $\acute{B_1} = \{(1-k)a_0 + i[(1-k)d_1] : i = 0, ..., |B_1|-1\}$, esto es,
$\acute{B_1} = \{\acute{b_1} + i\acute{d_1} : i = 0, ..., |B_1|-1\}$, donde $\acute{b_1} = (1-k)a_0$ y $\acute{d_1} = (1-k)d_1$.

Esto es, $\acute{B_1}$ está en progresión aritmética con diferencia común $\acute{d_1} = (1-k)d_1$.

Como $4 \leqslant k \leqslant p-1 \Longrightarrow -p+1 \leqslant -k \leqslant -4$

$\Longrightarrow -p+2 \leqslant 1-k \leqslant -3$

$\Longrightarrow \dfrac{-p+2}{p} \leqslant \dfrac{1-k}{p} \leqslant \dfrac{-3}{p}$.

Así, $\dfrac{1-k}{p} \neq +1$ y $\dfrac{1-k}{p} \neq -1$.

En consecuencia, $1-k \not\equiv +1 \ (modp)$ y $1-k \not\equiv -1 \ (modp)$

Por tanto, $\acute{d_1} \neq d_1$ y $\acute{d_1} + d_1 \neq 0 = p$.

Así, B_1 y $\acute{B_1}$ son progresiones aritméticas con distinta diferencia común.

Ahora, estudiemos los siguientes dos casos para $|B|$.

Caso 1 $|B| \leqslant p-2$.

En este caso, tenemos que $\acute{B_1}$ no es otra manera de ordenar los elementos de B en progresión aritmética.

En efecto, supongamos lo contrario, esto es, $\acute{B_1}$ es otra manera de ordenar los elementos de B en progresión aritmética, y como $2 < 3 \leqslant |B| \leqslant p-2$, entonces por Lema 1.3 ó $d = \acute{d_1}$ ó $d + \acute{d_1} = p$.

Como $d = d_1$, entonces, ó $d_1 = \acute{d_1}$ ó $d_1 + \acute{d_1} = p$, contradicción, ya que $\acute{d_1} \neq d_1$ y $\acute{d_1} + d_1 \neq 0 = p$, porque $1-k \not\equiv +1 \ (modp)$ y $1-k \not\equiv -1 \ (modp)$.

Por lo tanto, B y $\acute{B_1}$ son progresiones aritméticas con distinta diferencia común.

Estudiemos los siguientes dos casos para $|\acute{B_1} + B|$.

- $|\acute{B_1} + B| \geqslant p-1$.

  Como $(\acute{B_1} + B)$, $B_2, ..., B_{k-2}$ son $(k-2)$-subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$, entonces por Teorema 1.3 (**Cauchy-Davenport generalizado**) se tiene que:

  $|(\acute{B_1} + B) + B_2 + ... + B_{k-2}|$

  $\geqslant min\{p, |\acute{B_1} + B| + |B_2| + ... + |B_{k-2}| - ((k-2)-1)\}$

  $= min\{p, |\acute{B_1} + B| + |B_2| + \displaystyle\sum_{i=3}^{k-2} |B_i| - (k-3)\}$

  $\geqslant min\{p, |\acute{B_1} + B| + |B_2| + \displaystyle\sum_{i=3}^{k-2} 1 - (k-3)\} \quad (|B_i| \geqslant 1)$

$= min\{p, |\acute{B_1} + B| + |B_2| + (k-2-3+1) - (k-3)\}$

$= min\{p, |\acute{B_1} + B| + |B_2| - 1\}$

$\geqslant min\{p, (p-1) + 2 - 1\} \quad (|\acute{B_1} + B| \geqslant p-1 \;\; y \;\; |B_2| \geqslant 2)$

$= p.$

Así,

$$|(\acute{B_1} + B) + B_2 + ... + B_{k-2}| \geqslant p.$$

Como $|\acute{B_1} + B_2 + ... + B_{k-2} + B| = |(\acute{B_1} + B) + B_2 + ... + B_{k-2}|$, entonces:

$$|\acute{B_1} + B_2 + ... + B_{k-2} + B| \geqslant p.$$

- $|\acute{B_1} + B| < p - 1.$

  Como $\acute{B_1}$ y B son subconjuntos de $\mathbb{Z}_p$, y $min\{|\acute{B_1}|, |B|\} \geqslant min\{2, 3\} = 2 \Longrightarrow min\{|\acute{B_1}|, |B|\} \geqslant 2.$

  Además, $\acute{B_1}$ y B son progresiones aritméticas con distinta diferencia común, entonces por Teorema 1.4 se tiene que:

$$|\acute{B_1} + B| \geqslant min\{p-1, |\acute{B_1}| + |B|\}.$$

  Como $|\acute{B_1} + B| < p-1$ entonces $p-1 > |\acute{B_1} + B| \geqslant min\{p-1, |\acute{B_1}| + |B|\}$. Luego, $p - 1 > min\{p-1, |\acute{B_1}| + |B|\} \Longrightarrow min\{p-1, |\acute{B_1}| + |B|\} = |\acute{B_1}| + |B|$. De lo contrario, si $min\{p-1, |\acute{B_1}| + |B|\} = p-1$, tenemos que: $p - 1 > p - 1$, lo cual es una contradicción.

  En consecuencia, $|\acute{B_1} + B| \geqslant |\acute{B_1}| + |B|$.

  Así, $|\acute{B_1} + B| \geqslant |\acute{B_1}| + |B| = |B_1| + |B|$.

  Luego, $|\acute{B_1} + B| \geqslant |B_1| + |B|$.

  Como $(\acute{B_1} + B)$, $B_2, ..., B_{k-2}$ son $(k-2)$-subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$, entonces por Teorema 1.3 (**Cauchy-Davenport generalizado**) se tiene que:

  $|(\acute{B_1} + B) + B_2 + ... + B_{k-2}|$

  $\geqslant min\{p, |\acute{B_1} + B| + |B_2| + ... + |B_{k-2}| - ((k-2) - 1)\}$

  $\geqslant min\{p, |B_1| + |B| + |B_2| + ... + |B_{k-2}| - (k-3)\} \quad (|\acute{B_1} + B| \geqslant |B_1| + |B|)$

  $= min\{p, \sum_{i=1}^{k-2} |B_i| + |B| - (k-3)\}$

$= min\{p, |\acute{S}| + |B| - (k-3)\} \quad (\sum_{i=1}^{k-2} |B_i| = |\acute{S}|)$

$\geqslant min\{p, (p+k-2t) + (2t-3) - (k-3)\} \quad (|B| \geqslant 2t-3)$

$= min\{p, p\} = p.$

Así,

$$|(\acute{B_1} + B) + B_2 + ... + B_{k-2}| \geqslant p.$$

Como $|\acute{B_1} + B_2 + ... + B_{k-2} + B| = |(\acute{B_1} + B) + B_2 + ... + B_{k-2}|$, entonces:

$$|\acute{B_1} + B_2 + ... + B_{k-2} + B| \geqslant p.$$

Por lo tanto, en cualquiera de los dos subcasos, se tiene que:

$$|\acute{B_1} + B_2 + ... + B_{k-2} + B| \geqslant p.$$

Caso 2 $|B| \geqslant p-1$.

Dado que $\acute{B_1}, B_2, \ldots, B_{k-2}$, y B son $(k-1)$-subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$ entonces por el Teorema 1.3 (**Cauchy-Davenport generalizado**) se tiene que:

$|\acute{B_1} + B_2 + \ldots + B_{k-2} + B|$

$\geqslant min\{p, |\acute{B_1}| + |B_2| + \ldots + |B_{k-2}| + |B| - ((k-1)-1)\}$

$\geqslant min\{p, 2 + \sum_{i=2}^{k-2} |B_i| + |B| - (k-2)\} \quad (|\acute{B_1}| \geqslant 2)$

$\geqslant min\{p, 2 + \sum_{i=2}^{k-2} 1 + |B| - (k-2)\} \quad (|B_i| \geqslant 1, \forall \;\; i \;\; 1 \leqslant i \leqslant k-2)$

$\geqslant min\{p, 2 + (k-3) + (p-1) - (k-2)\} \quad (|B| \geqslant p-1)$

$= min\{p, p\} = p.$

Así,

$$|\acute{B_1} + B_2 + ... + B_{k-2} + B| \geqslant p.$$

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos, se tiene que:

$$|\acute{B_1} + B_2 + ... + B_{k-2} + B| \geqslant p.$$

Como $\acute{B_1} + B_2 + \ldots + B_{k-2} + B \subset \mathbb{Z}_p$, entonces $|\acute{B_1} + B_2 + \ldots + B_{k-2} + B| \leqslant p$.

Por lo tanto, $|\acute{B_1} + B_2 + \ldots + B_{k-2} + B| = p$. En consecuencia,

$$\acute{B_1} + B_2 + \ldots + B_{k-2} + B = \mathbb{Z}_p.$$

Por consiguiente, existe $\acute{b_1} \in \acute{B_1}$, esto es, $\acute{b_1} = (1-k)x$ para algún $x \in B_1$, existen $b_2, ..., b_{k-2}$ elementos de $B_2, ..., B_{k-2}$ respectivamente, y existe $b \in B$, esto es, $b = u_i + u_j$ con $1 \leqslant i \neq j \leqslant t$, tales que:

$$\acute{b_1} + b_2 + \ldots + b_{k-2} + b = 0,$$

esto es,

$$(1-k)x + b_2 + \ldots + b_{k-2} + (u_i + u_j) = 0$$

$\Longrightarrow x - kx + b_2 + \ldots + b_{k-2} + u_i + u_j = 0$

$\Longrightarrow x + b_2 + \ldots + b_{k-2} + u_i + u_j = kx.$

Dado que $B_i \subset supp(S) \quad \forall \ \ i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-2$, entonces la secuencia $T = xb_2 \ldots b_{k-2}u_iu_j$ es una subsecuencia de S, k-baricéntrica.

Subcaso II.2.2b B_1 y B no son progresiones aritméticas con la misma diferencia común.

Sea $\acute{B_2} = \{(1-k)x : x \in B_2\}$ entonces $|\acute{B_2}| = |B_2|$.

Estudiemos los siguientes dos casos para $|B_1 + B|$

- $|B_1 + B| \geqslant p - 1.$

  Como $(B_1 + B)$, $\acute{B_2}$ y $B_3, ..., B_{k-2}$ son $(k-2)$-subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$, entonces por Teorema 1.3 (**Cauchy-Davenport generalizado**) se tiene que:

  $|(B_1 + B) + \acute{B_2} + B_3 + ... + B_{k-2}|$
  $\geqslant min\{p, |B_1 + B| + |\acute{B_2}| + |B_3| ... + |B_{k-2}| - ((k-2) - 1)\}$
  $= min\{p, |B_1 + B| + |\acute{B_2}| + \sum_{i=3}^{k-2} |B_i| - (k-3)\}$
  $\geqslant min\{p, |B_1 + B| + |\acute{B_2}| + \sum_{i=3}^{k-2} 1 - (k-3)\} \quad (|B_i| \geqslant 1)$
  $= min\{p, |B_1 + B| + |\acute{B_2}| + (k - 2 - 3 + 1) - (k-3)\}$
  $= min\{p, |B_1 + B| + |\acute{B_2}| - 1\}$

$\geqslant min\{p, p-1+2-1\} \quad (|B_1+B| \geqslant p-1 \;\; y \;\; |\acute{B_2}| \geqslant 2)$

$= p.$

Así,

$$|(B_1+B)+\acute{B_2}+B_3+...+B_{k-2}| \geqslant p.$$

Como $|B_1+\acute{B_2}+B_3...+B_{k-2}+B| = |(B_1+B)+\acute{B_2}+B_3...+B_{k-2}|$, entonces:

$$|B_1+\acute{B_2}+B_3...+B_{k-2}+B| \geqslant p.$$

- $|B_1+B| < p-1.$

Como B_1 y B son subconjuntos de $\mathbb{Z}_p$, y $min\{|B_1|, |B|\} \geqslant min\{2, 3\} = 2 \Longrightarrow min\{|B_1|, |B|\} \geqslant 2.$

Además, B_1 y B no son progresiones aritméticas con la misma diferencia común, entonces por Teorema 1.4 se tiene que:

$$|B_1+B| \geqslant min\{p-1, |B_1|+|B|\}.$$

Como $|B_1+B| < p-1$ entonces $p-1 > |B_1+B| \geqslant min\{p-1, |B_1|+|B|\}$. Luego, $p-1 > min\{p-1, |B_1|+|B|\} \Longrightarrow min\{p-1, |B_1|+|B|\} = |B_1|+|B|$. De lo contrario, si $min\{p-1, |B_1|+|B|\} = p-1$, tenemos que: $p-1 > p-1$, lo cual es una contradicción.

En consecuencia, $|B_1+B| \geqslant |B_1|+|B|$.

Como (B_1+B), $\acute{B_2}$, y $B_3, ..., B_{k-2}$ son $(k-2)$-subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_p$, entonces por Teorema 1.3 (**Cauchy-Davenport generalizado**) se tiene que:

$|(B_1+B)+\acute{B_2}+B_3+...+B_{k-2}|$

$\geqslant min\{p, |B_1+B|+|\acute{B_2}|+|B_3|+...+|B_{k-2}|-((k-2)-1)\}$

$\geqslant min\{p, |B_1|+|B|+|B_2|+|B_3|+...+|B_{k-2}|-(k-3)\}$

$(|B_1+B| \geqslant |B_1|+|B| \;\; y \;\; |\acute{B_2}| = |B_2|)$

$= min\{p, \sum_{i=1}^{k-2}|B_i|+|B|-(k-3)\}$

$= min\{p, |\acute{S}|+|B|-(k-3)\} \quad (\sum_{i=1}^{k-2}|B_i| = |\acute{S}|)$

$\geqslant min\{p,(p+k-2t)+(2t-3)-(k-3)\} \quad (|B| \geqslant 2t-3)$

$= min\{p,p\} = p.$

Así,

$$|(B_1+B)+\acute{B_2}+B_3+...+B_{k-2}| \geqslant p.$$

Dado que $|B_1+\acute{B_2}+B_3+...+B_{k-2}+B| = |(B_1+B)+\acute{B_2}+B_3+...+B_{k-2}|$, en consecuencia;

$$|B_1+\acute{B_2}+B_3+...+B_{k-2}+B| \geqslant p.$$

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos, se tiene que:

$$|B_1+\acute{B_2}+B_3+...+B_{k-2}+B| \geqslant p.$$

Como $B_1+\acute{B_2}+B_3+\ldots+B_{k-2}+B \subset \mathbb{Z}_p$, entonces
$|B_1+\acute{B_2}+B_3+\ldots+B_{k-2}+B| \leqslant p.$
Por lo tanto, $|B_1+\acute{B_2}+B_3+\ldots+B_{k-2}+B| = p$. En consecuencia,

$$B_1+\acute{B_2}+B_3+\ldots+B_{k-2}+B = \mathbb{Z}_p.$$

Por consiguiente, existe $b_1 \in B_1$, $\acute{b_2} \in \acute{B_2}$, esto es, $\acute{b_2} = (1-k)x$ para algún $x \in B_2$, existen $b_3,...,b_{k-2}$ elementos de $B_3,...,B_{k-2}$ respectivamente, y existe $b \in B$, esto es, $b = u_i+u_j$ con $1 \leqslant i \neq j \leqslant t$, tales que:

$$b_1+\acute{b_2}+b_3+\ldots+b_{k-2}+b = 0,$$

esto es,

$$b_1+(1-k)x+b_3+\ldots+b_{k-2}+(u_i+u_j) = 0$$

$\Longrightarrow b_1+x-kx+b_3+\ldots+b_{k-2}+u_i+u_j = 0$

$\Longrightarrow b_1+x+b_3+\ldots+b_{k-2}+u_i+u_j = kx.$

Dado que $B_i \subset supp(S) \quad \forall \;\; i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-2$, entonces la secuencia $T = b_1xb_3\ldots b_{k-2}u_iu_j$ es una subsecuencia de S, k-baricéntrica.

Por lo tanto, en cualquiera de los casos, hemos encontrado una subsecuencia de S, k-baricéntrica, luego por Observación 3.1

$$BD(k,\mathbb{Z}_p) \leqslant p+k-\left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor - 2.$$

Corolario 3.3. *Si p es un número primo y $p \geqslant 5$ entonces,*
(i) $BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - 3$, *para* $3 \leqslant k \leqslant p - 2$.
(ii) $BD(p - 2, \mathbb{Z}_p) = 2p - 5$.

Demostración:

(i) Por hipótesis $3 \leqslant k \leqslant p - 2 \Longrightarrow 3 \leqslant k \leqslant p - 2 < p - 1$ con $p \geqslant 5$ entonces por Teorema 3.8 se tiene que:

$$\begin{aligned} BD(k, \mathbb{Z}_p) &\leqslant p + k - \left\lfloor \frac{p-2}{k} \right\rfloor - 2 \\ &\leqslant p + k - \left\lfloor \frac{p-2}{p-2} \right\rfloor - 2 \quad \text{ya que } -\frac{1}{k} \leqslant -\frac{1}{p-2} \\ &= p + k - 1 - 2 \\ &= p + k - 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - 3$.

(ii) Por hipótesis $k = p - 2 \geqslant 5 - 2 = 3 \Longrightarrow 3 \leqslant p - 2$, entonces por *(i)* se tiene que:

$$\begin{aligned} BD(p - 2, \mathbb{Z}_p) &\leqslant p + (p - 2) - 3 \\ &= 2p - 5. \end{aligned}$$

Luego, $BD(p - 2, \mathbb{Z}_p) \leqslant 2p - 5$.

Por otro lado, $S = [0]^{p-3}[1]^{p-3}$ es una secuencia de longitud $2p - 6$ de $\mathbb{Z}_p$, que no contiene subsecuencias $(p-2)$-baricéntricas, en consecuencia, $BD(p-2, \mathbb{Z}_p) > 2p-6$, luego, $BD(p - 2, \mathbb{Z}_p) \geqslant 2p - 5$.

Por lo tanto, $2p - 5 \leqslant BD(p - 2, \mathbb{Z}_p) \leqslant 2p - 5$.

Por consiguiente, $BD(p - 2, \mathbb{Z}_p) = 2p - 5$.

Observación 3.3. -

(i) *Para $k = 3$ por Teorema 3.4*

$$\begin{aligned} BD(3, \mathbb{Z}_p) &\leqslant 2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1 \\ &< 2\frac{p}{2} + 1 \\ &< p + 3 - 1. \end{aligned}$$

Luego, $BD(3, \mathbb{Z}_p) < p + 3 - 1$.

Para $4 \leqslant k \leqslant p - 1$ *por Teorema 3.6*

$$\begin{aligned} BD(k, \mathbb{Z}_p) &\leqslant p + k - 2 \\ &< p + k - 1. \end{aligned}$$

Así, $BD(k, \mathbb{Z}_p) < p + k - 1$.

Para $k = p$*, por Teorema 3.2*

$$\begin{aligned} BD(p, \mathbb{Z}_p) &= 2p - 1 \\ &= p + p - 1. \end{aligned}$$

Notemos que $k = p$ *es el único valor de* k*, donde* $3 \leqslant k \leqslant p$ *para el cual la igualdad* $BD(k, \mathbb{Z}_p) = p + k - 1$ *se cumple.*

(ii) *Para* $3 \leqslant k \leqslant p - 2 \Longrightarrow 3 \leqslant p - 2 \Longrightarrow p \geqslant 5$*. Luego por Corolario 3.3 (i)*

$$\begin{aligned} BD(k, \mathbb{Z}_p) &\leqslant p + k - 3 \\ &< p + k - 2. \end{aligned}$$

Luego, $BD(k, \mathbb{Z}_p) < p + k - 2$.

Para $k = p - 1$ *por Corolario 3.2*

$$\begin{aligned} BD(p - 1, \mathbb{Z}_p) &= 2p - 3 \\ &= p + p - 3 \\ &= p + (p - 1) - 2 \\ &= p + k - 2. \end{aligned}$$

Así, $BD(p - 1, \mathbb{Z}_p) = p + k - 2$.

En consecuencia, $k = p - 1$ *es el único valor de* k *donde* $3 \leqslant k \leqslant p - 1$ *para el cual la igualdad* $BD(k, \mathbb{Z}_p) = p + k - 2$ *se cumple.*

(iii) *Por Corolario 3.3 nosotros podemos preguntarnos si* $k = p - 2$ *es el único valor de* k *donde* $3 \leqslant k \leqslant p - 2$*, para el cual la igualdad* $BD(k, \mathbb{Z}_p) = p + k - 3$ *se cumple.*

En particular, para $p = 5$ *la respuesta es afirmativa.*

En efecto, por Observación 3.1 (i) se tiene que

$$\begin{aligned} BD(3, \mathbb{Z}_5) &= 5 \\ &= 5 + 3 - 3. \end{aligned}$$

Así, $k = 3$ *es el único valor para el cual* $BD(3, \mathbb{Z}_5) = 5 + 3 - 3$.

Para $p = 7$ *la respuesta es falsa.*

En efecto,

Para $k = 3$ *por Observación 3.1 (ii)*

$$\begin{aligned} BD(3, \mathbb{Z}_7) &= 7 \\ &= 7 + 3 - 3. \end{aligned}$$

Para $k = 4$ *por Teorema 3.7*

$$\begin{aligned} BD(4, \mathbb{Z}_7) &= 8 \\ &= 7 + 4 - 3. \end{aligned}$$

Para $k = 5 = 7 - 2$ *por Corolario 3.3*

$$\begin{aligned} BD(5, \mathbb{Z}_7) &= 2(7) - 5 \\ &= 9 \\ &= 7 + 5 - 3. \end{aligned}$$

Así, para $p = 7$ *tenemos que* $BD(k, \mathbb{Z}_7) = 7 + k - 3$ *para* $3 \leqslant k \leqslant 5$.

Por lo tanto, podemos suponer que la respuesta es verdadera para p *suficientemente grande.*

CONCLUSIONES

El resultado de Luong [16], Teorema 3.8 mejora los resultados de Delorme, González, Ordaz y Varela [4]:

[4]	$BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - \left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor - 2.$ con $p \geqslant 5$, y k un entero, $3 \leqslant k \leqslant p-1$.
$BD(3, \mathbb{Z}_p) \leqslant 2 \left\lceil \dfrac{p}{3} \right\rceil + 1 \leqslant \dfrac{2p+6}{3}$	$BD(3, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + 3 - \left\lfloor \dfrac{p-2}{3} \right\rfloor - 2$ $\leqslant \dfrac{2p+5}{3}$
$BD(3, \mathbb{Z}_5) = 5.$	$BD(3, \mathbb{Z}_5) = 5. \quad *$
$BD(3, \mathbb{Z}_7) = 7.$	$BD(3, \mathbb{Z}_7) = 7. \quad *$
$BD(3, \mathbb{Z}_{11}) = 9.$	$BD(3, \mathbb{Z}_{11}) = 9. \quad *$
$BD(3, \mathbb{Z}_{13}) = 9. \quad **$	$BD(3, \mathbb{Z}_{13}) \leqslant 13 + 3 - \left\lfloor \dfrac{13-2}{3} \right\rfloor - 2 = 11.$
$BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - 2$ para $4 \leqslant k \leqslant p-1$.	$BD(k, \mathbb{Z}_p) \leqslant p + k - \left\lfloor \dfrac{p-2}{k} \right\rfloor - 2$ $\leqslant p + k - 2, \quad$ para $4 \leqslant k \leqslant p-1$.
$BD(p-1, \mathbb{Z}_p) = 2p-3$, para $p \geqslant 5$.	$BD(p-1, \mathbb{Z}_p) = 2p-3$, para $p \geqslant 5. \quad *$
$BD(4, \mathbb{Z}_7) = 8.$	$BD(4, \mathbb{Z}_7) = 8. \quad *$

$*$ La cota inferior se obtiene utilizando el mismo contraejemplo dado en [4] para hallar el valor respectivo y así obtener la igualdad deseada.

$\star$ El resultado obtenido en [4] es mejor puesto que la técnica utilizada fue otra; teoría de orbitas.

Bibliografía

[1] Y. Caro. Zero-sum problems: a survey. Discrete Math. 152(1996) 93-0113.

[2] A.L. Cauchy, Recherches sur les Nombres, J. École Polytech. 9 (1813) 99-116.

[3] H. Davenport, On the addition of residue classes, J. London Math. Soc. 10 (1935) 30-32.

[4] C. Delorme, S. González, O. Ordaz and M.T. Varela. Barycentric sequences and barycentric Ramsey numbers star. Discrete Math. 277 (2004) 45-56.

[5] C. Delorme, I. Márquez, O. Ordaz and A. Ortuño. Existence conditions for barycentric sequences. Discrete Math. 281(2004)163-172.

[6] J.A. Dias da Silva, Y.O. Hamidoune, Cyclic spaces for Grassmann derivatives and additive theory, Bull. London Math. Soc. 26 (1994) 140-146

[7] P. Erdös, A. Ginzburg and A. Ziv. Theorem in the addtive number theory. Bull. Res. Council Israel 10F (1961) 41-43.

[8] P. Erdös, R. Graham. Old and new problems results in combinatorial number theory. Monographie 28 de LÉnseignement Mathematique, Geneve. 1980.

[9] W. Gao, A. Geroldinger, Zero-sum problems in finite abelian groups: a survey, Expo. Math. 24 (4) (2006) 337-369.

[10] W.D. Gao, X. Jin. Weighted sums in finite cyclic groups. Discrete Math. 283(1-3)(2004) 243-247.

[11] L. González, S. González, O. Ordaz. Barycentric Ramsey numbers for small graphs. Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. 2(32)(1) (2009) 1-17.

[12] L. González, I. Márquez, O. Ordaz, D. Quiroz. Constrained and generalized barycentric Davenport constants. Divulg. Mat. 15(1) (2007) 11-21.

[13] D.J. Grynkiewiez. A weighted version Erdös-Ginzburg-Ziv theorem. Combinatorica. 26 (4)(2006) 445-453.

[14] Y.O. Hamidoune. On weighted sequences sums. Combin. Probad. Comput.4 (1995) 363-367.

[15] Y. O. Hamidoune. On weighted sums in abelian groups. Discrete Math. 162 (1996) 127–132.

[16] T.D. Luong. An upper bound for the k-barycentric Davenport constant of groups prime order. Discrete Mathematics.310 (21) (2010).

[17] M. Nathanson. Additive Number Theory. Springer-Verlag. New York Berlin Heidelberg. (1996)

[18] O. Ordaz and D. Quiroz. Barycentric-sum problems: a survey. Divulg. Mat. 15(2)(2007) 193-206.

[19] A.G. Vosper, The critical pairs of subsets of a group of prime order, J. London Math. Soc. 31 (1956) 200-205.