UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Caracterización del Tipo Hille-Yosida”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br.Carlos Sánchez

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Ecuaciones Diferenciales.
Tutor: Dr. Alexánder Carrasco.

Barquisimeto, Venezuela. Marzo de 2013

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"CARACTERIZACIÓN DEL TIPO HILLE-YOSIDA"

presentado por el ciudadano BR.CARLOS SÁNCHEZ titular de la Cédula de Identidad No. 20387632, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios Todopoderoso y a todos aquellos
que hicieron posible el logro de mi trabajo,
en especial a mis padres Cristóbal e Iris.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es el fruto de años de estudio y dedicación, en el que muchas personas aportaron su granito de arena para ser posible su culminación.
En primer lugar quiero agradecer a mi **PADRE CELESTIAL**, a quien debo mi vida, y también por haberme permitido conocer su palabra correspondiente para este tiempo y quien me ayudó y me sigue ayudando en todo momento de mi vida.
También agradezco a mis padres **Cristóbal Sánchez** e **Iris Aular**, a quienes amo infinitamente, pues ellos me trajeron a este mundo y con gran sacrificio y esfuerzo me dieron la crianza y educación para ser una persona de bien.
A mis hermanos **Cristóbal, María, Victor y Yoselin**, con quienes vivi y sigo viviendo experiencias lindas y difíciles pero siempre luchando por salir adelante, los amo.
A mis hermanos de la iglesia **La Voz de la Piedra Angular**, por su apoyo dado a lo largo de toda mi vida, con sus oraciones y enseñanzas.
A mi tío **Giovani Pelayo**, su esposa **Doris de Pelayo** y mis primos: **Melvin, Lindy y Mirna**, quienes desde el principio de mi carrera me recibieron incondicionalmente con los brazos abiertos; siempre los llevaré en mi corazón.
A mis amigos **Alfredo Moráles** y **Mayarín López**, quienes compartieron conmigo momentos de alegría, de triunfos y caídas, pero siempre dándome ánimos para superar los obstáculos que se me presentaron.
A mis amigos y compañeros del grupo **UNUMA**: **Yogeidis (la chiquita), Jessica, Silmaris, Karling, Héctor, Aldemar, Andreina, Mariela, Génesis**, con quienes he compartido durante estos 5 años y me han dado ánimo para lograr esta meta a la que estoy llegando.
A toda mi familia, que estuvieron pendientes de mis desempeño en todos estos años de estudio.
A los **profesores** de la **UCLA**, en especial a mi tutor **Alexánder Carrasco**, por todo su esfuerzo, dedicación y paciencia, para inculcar en mi los conocimientos que hasta ahora he adquirido.
A todas las demás personas que directa o indirectamente me ayudaron, mil gracias.

Resumen

En el presente trabajo se presenta la demostración de una caracterización del tipo Hille-Yosida para semigrupos generalizados o C-semigrupos exponencialmente acotados, donde el operador C es un operador lineal inyectivo con rango no necesariamente denso. Esta teoría tiene gran interés teórico, pero además, nos brinda la valiosa oportunidad de múltiples aplicaciones en el mundo de las ecuaciones diferenciales, sistemas de dimensión infinita y teoría de control.

El mismo consta de tres capítulos:

Capítulo I: En el se presentan algunos conceptos y resultados auxiliares que permiten establecer las condiciones mínimas necesarias para una buena comprensión del trabajo.

Capítulo II: Se presentan los C-semigrupos donde el rango de C es no necesariamente denso, sus propiedades generales y el generador de estos.

Capítulo III: Finaliza con la prueba de la caracterización del teorema del tipo Hille-Yosida para C-semigrupos.

ÍNDICE

Introducción

La teoría de semigrupo de operadores sobre un espacio de Banach comenzó en la primera mitad del siglo XIX, adquirió su esencia en 1948 cuando surge el teorema de Hille-Yosida, y alcanzó su cúspide con la primera edición de "Semigroups and Functional Analysis" en 1957 de E. Hille y R.S. Philips. En los años 70 y 80 gracias a los esfuerzos de diferentes escuelas, la teoría alcanza un cierto grado de perfección. La teoría se caracteriza por múltiples aplicaciones fascinantes en el mundo de las ecuaciones diferenciales y en general en sistemas dinámicos de dimensión infinita.

En 1987, Davies y Pang, desarrollan una generalización de la teoría de semigrupos fuertemente continuos, llamados semigrupos generalizados o C-semigrupos, donde C es un operador lineal inyectivo con rango denso, ver [5].

Posteriormente en ese mismo año, R. Delaubenfels extiende la teoría para operadores C con rango no necesariamente denso. Cabe mencionar que cuando el operador C es el operador identidad, esta generalización coincide con la teoría de semigrupos fuertemente continuos.

En este trabajo se desarrolla en detalle resultados que establecen la relación que existe entre los C-semigrupos y las soluciones del problema de Cauchy, el cual viene dado por:

$$\begin{cases} u^{'}(t) = Au(t), \ t \geq 0 \\ u(0) = Cx, \ x \in D(A) \end{cases}$$

Estas soluciones pueden no ser exponencialmente acotadas y el rango de C puede no ser denso, además estableceremos condiciones necesarias y suficientes para los cuales el problema de Cauchy posee solución única, para todo en $C((DA))$.

Asimismo, se prueba una caracterizacion del tipo Hille-Yosida para C-semigrupos exponencialmente acotadas, cuyo dominio puede no ser denso.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES.

En este capítulo se estudian las propiedades básicas de operadores lineales definidos sobre espacios de Banach, en particular de una clase especial de operadores denominados Semigrupos Fuertemente Continuos, teoría desarrollada en la década de los 40, y hasta el día de hoy, ha sido fundamental para establecer las condiciones necesarias y suficientes para los cuales el problema de Cauchy, dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \ t \geq 0 \\ \quad x(0) = x_0 \ \in \ D(A), \end{cases}$$

tiene solución única.

1.1. Teoría Básica de Operadores.

Definición 1.1.1. Sean X e Y dos espacios de Banach. Una función $A : X \longrightarrow Y$, se dice que es un operador lineal si satisface las siguientes condiciones:
(i) $\forall \ x, y \ \in X, \ A(x + y) = Ax + Ay$.
(ii) $\forall \ \alpha \in \mathbb{K}, \forall \ x \in X, \ A(\alpha x) = \alpha Ax$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Al conjunto de operadores lineales de X en Y, lo denotaremos por $L(X, Y)$.
Diremos que un operador $A \in L(X, Y)$ es acotado si $\sup\limits_{x \in X} \|Ax\| < \infty$, en cuyo caso escribiremos:

$$\|A\| := \sup_{x \in X} \|Ax\|.$$

Al conjunto de operadores acotados de X en Y lo denotaremos por $B(X,Y)$.
Observaciones:

- $L(X,Y)$ es un espacio vectorial y $B(X,Y)$ es un subespacio de $L(X,Y)$.
- $\|.\|$ es una norma en $B(X,Y)$.
- $\forall\, x \in X,\ \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
- Si $A \in B(Y,Z)$ y $W \in B(X,Y)$, entonces $AW \in B(X,Z)$ y $\|AW\| \leq \|A\|\|W\|$.
- $B(X,Y)$ es un espacio de Banach.

En caso de que A sea un operador de X en X, diremos que $A \in L(X)$.

Definición 1.1.2. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores lineales acotados en $L(X,Y)$ tal que:

$$\|T_n - T\|_{L(X,Y)} \longrightarrow 0,\ \textit{cuando}\ n \longrightarrow \infty,$$

entonces diremos que T_n converge uniformemente a T.

Definición 1.1.3. Sea T_n una sucesión de operadores lineales acotados en $L(X,Y)$ tal que:

$$\|T_n x - Tx\|_Y \longrightarrow 0,\ \textit{cuando}\ n \longrightarrow \infty,\ \forall\, x \in X.$$

Entonces diremos que T_n converge fuertemente a T, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Observación:
Si un operador lineal acotado depende de un parámetro t en algún intervalo de $\mathbb{R}$, la continuidad uniforme y la continuidad fuerte con respecto a t se definen de manera análoga.

Definición 1.1.4. Sea $T(t) \in L(X,Y)$, para cada $t \in [a,b]$, entonces $T(t)$ es uniformemente continuo en t_0 si se cumple la siguiente condición: $\|T(t) - T(t_0)\|_{L(X,Y)} \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow t_0$.

Definición 1.1.5. Sea $T(t) \in L(X,Y)$, para cada $t \in [a,b]$, entonces $T(t)$ es fuertemente continuo en t_0, si $\|T(t)x - T(t_0)x\|_{L(X,Y)} \longrightarrow 0$, $\forall x \in X$, cuando $t \longrightarrow t_0$.

Teorema 1.1.1. *Principio de extensión.*
Si D es denso en X y $A \in B(D,Y)$, entonces A se puede extender a todo X; es decir, existe $\overline{A} \in B(X,Y)$ con $\overline{A}x = Ax$, $\forall\, x \in D$ y $\|\overline{A}\|_{B(X,Y)} = \|A\|_{B(D,Y)}$.

Proposición 1.1.1. *Si $A \in L(X,Y)$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(i) *A es acotado.*
(ii) *A es continuo en todo X.*
(iii) *A es continuo en algún punto $x_0 \in X$.*

Teorema 1.1.2. *Principio de acotación uniforme.*
Sean $A \in B(X,Y)$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$ tal que $A_n x \longrightarrow Ax$, para todo $x \in X$. Entonces existe $M > 0$ tal que $\|A_n\| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.3. *Banach-Steinhaus.*
Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado, I un conjunto de índices y para cada $i \in I$, sea $T_i \in B(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son mutuamente excluyentes:
(i) $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.
(ii) *Existe un subconjunto X_0 denso en X, tal que para todo $x \in X_0$, se tiene:*
$\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| = \infty$.

Proposición 1.1.2. *Sea X un espacio de Banach, (Y,d) un espacio métrico y para cada $y \in Y$, sea $T(y) \in B(X)$. Suponga que existe $y_0 \in Y$ tal que para todo $x \in X$ existe $\lim\limits_{y\to y_0} T(y)x$. Entonces existen $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que para todo $y \in Y$, $d(y,y_0) \leq \delta$, implica que: $\|T(y)\| \leq M$.*

La prueba de los teoremas 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 y las proposiciones 1.1.1 y 1.1.2, se pueden verificar en [2] y [3].

Definición 1.1.6. Sea $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal, diremos que A es cerrado si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(A)$, cumpliendo que $x_n \longrightarrow x$ y $Ax_n \longrightarrow y$, se tiene que: $x \in D(A)$ y $Ax = y$.

Teorema 1.1.4. *Teorema del Gráfico Cerrado.*
Un operador lineal cerrado definido sobre un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y es acotado.

Demostración. Ver [3]. ■

Corolarío 1.1.4.1. *Si T es cerrado e invertible, entonces T^{-1} es cerrado.*

Definición 1.1.7. Sea A un operador lineal no necesariamente acotado en X, el conjunto resolvente $\rho(A)$, se define como:

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \textit{ es invertible con } (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)\}.$$

La familia $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ de operadores acotados es llamada la resolvente de A.

Teorema 1.1.5. *La resolvente $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ es una función analítica de λ y satisface:*
(i) $R_\lambda - R_w = -(\lambda - w)R_\lambda R_w$, $\forall\ \lambda, w\ \in \rho(A)$.
(ii) $R_\lambda R_w = R_\lambda R_w$.
(iii) $(R_\lambda)^{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}R_\lambda$, $\forall\ n = 0, 1, 2, ...$

Para verificar estos resultados, ver [7] y [9].

Teorema 1.1.6. *Si $\rho(A) \neq \phi$, entonces A es un operador lineal cerrado.*

Demostración. Supongamos que $\rho(A) \neq \phi$, esto es, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que el operador $B = (z - A)^{-1}$ es acotado.
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $Ax_n \longrightarrow y$.
Hagamos $h_n = (z - A)x_n$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} (z - A)x_n = zx - y.$$

Así, dado que B es lineal y acotado, tenemos:

$$B(zx - y) = \lim_{n\to\infty} (Bh_n) = \lim_{n\to\infty} B(z - A)x_n = x.$$

Esto implica que $x \in D(A)$ y $(z - A)x = zx - y$, de donde $Ax = y$.
En consecuencia, A es cerrado. ■

Lema 1.1.1. *Sea A un operador lineal cerrado en $L(X)$ que conmuta con $B \in L(X)$, es decir, $Bx \in D(A)$ y $BAx = ABx$, $\forall x \in D(A)$. Entonces la resolvente R_λ de A conmuta con B, es decir, $BR_\lambda x = R_\lambda Bx$, $\forall x \in X$, $\lambda \in \rho(A)$.*

Lema 1.1.2. *Sean $A : D(A) \longrightarrow X$, $B : D(B) \longrightarrow X$, dos operadores. Entonces: Si A es sobreyectivo y B es inyectivo, con $D(A) \subset D(B)$, se tiene que: $A = B$.*

Para la demostración de estos lemas, ver [10].

La teoría de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach y semigrupos uniparamétricos han sido estimulados en gran parte por la teoría de la transformada de Laplace. En 1934 Widder probó la siguiente caracterización de la transformada de Laplace de funciones acotadas a valores reales.
Sea $r \in C^{\infty}(0,\infty)$, entonces existe $f \in L^{\infty}(0,\infty)$ tal que:

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt, \quad (\lambda > 0),$$

si y sólo si,

$$\sup\left\{|\lambda^{n+1}\frac{r^{(n)}(\lambda)}{n!}| : \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Teorema 1.1.7. *Sea X un espacio de Banach y $f : [0,\infty) \longrightarrow X$ una función medible. Si $\|f(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$, para algún $w \in \mathbb{R}$ y $M \geq 0$, entonces la transformada de Laplace de f viene dada por:*

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt \quad (\lambda > w).$$

En espacios de Banach arbitrarios, la siguiente versión del teorema de Widder también se cumple.

Teorema 1.1.8. *Sea $r : (0,\infty) \longrightarrow X$ una función. Sea $M \geq 0$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) r es infinitamente diferenciable y

$$\sup\left\{\{\|\lambda^{n+1}\frac{r^{(n)}(\lambda)}{n!}\| : \lambda > 0,\ n = 0,1,2,...\right\} \leq M.$$

(b) Existe una función $F : [0,\infty) \longrightarrow X$ satisfaciendo:

$$F(0) = 0 \ \ y \ \ \|F(t+h) - F(t)\| \leq Mh. \quad (t \geq 0,\ h \geq 0)$$

tal que:

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} F(t)dt. \quad (\lambda > 0)$$

Corolarío 1.1.8.1. *Sea $a \geq 0$ y $r : (a, \infty) \longrightarrow X$ una función infinitamente diferenciable. Para $M \geq 0,\ w \in (-\infty, a]$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $\left\| (\lambda - w)^{n+1} \dfrac{r(\lambda)^{(n)}}{n!} \right\| \leq M,\ \lambda > a,\ n = 0, 1, 2, ...$

(b) *Existe una función $F : [0, \infty) \longrightarrow X$ satisfaciendo:*
(i) $F(0) = 0$.
(ii) $\overline{\lim_{h \to 0}} \dfrac{1}{h} \|F(t+h) - F(t)\| \leq M e^{wt}. \quad (t \geq 0)$
y además:

$$r(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t) dt. \quad (\lambda > a)$$

La demostración de estos resultados del teorema de Widder, se puede ver en [1].

Teorema 1.1.9. *Convergencia Dominada de Lebesgue.*
Sea g una función integrable sobre un conjunto E y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que:
(i) $|f_n| \leq g$ *sobre* E.
(ii) $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, *casi siempre, para* $x \in E$.
Entonces:

$$\int_E f = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n.$$

Demostración. Ver [3]. ■

1.2. Semigrupo Fuertemente Continuo.

Los semigrupos de operadores continuos se introducen como soluciones de ecuaciones funcionales del tipo $f(t+s) = f(t)f(s),\ t, s \geq 0$, estudiadas en espacios de transformaciones lineales continuas.
Las funciones exponenciales $T_a(t) = e^{ta}$ pueden caracterizarse por las únicas funciones continuas que satisfacen las siguientes condiciones:
(i) $T_a(t_1 + t_2) = T_a(t_1)T_a(t_2)$, y (ii) $T_a(0) = 1$.
Pero la continuidad unida a la primera de estas condiciones indica que basta exigir la continuidad en 0 por la derecha para obtener una exponencial; es decir:

$$\lim_{t\to 0^+} T_a(t) = 1.$$

Dichas funciones están relacionadas con las ecuaciones diferenciales del tipo: $y^{'} = ay$, en el sentido que las soluciones de estas ecuaciones son de la forma:

$$y(t) = e^{at}y(0).$$

Una extensión de lo antes expuesto lo constituye el problema:

$$\begin{cases} y^{'} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

donde A es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. También, en este caso se puede definir una exponencial, denotada por T_A, expresada de la siguiente manera:

$$T_A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = e^{tA}.$$

Esta función tiene todas las propiedades de la exponencial T_a antes señalada y las soluciones de la ecuación diferencial son del tipo $y(t) = e^{tA}y_0$.
Si se generaliza, se puede considerar problemas de Cauchy para ecuaciones diferenciales abstractas del tipo (1.1), donde A sea un operador de un espacio de Banach de dimensión infinita en si mismo.

Definición 1.2.1. Un semigrupo fuertemente continuo es una aplicación $T : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(X)$, que satisface:
i.- $T(t+s) = T(t)T(s)$ para $t, s \geq 0$.
ii.- $T(0) = I$. (I es el operador identidad en X).
iii.- $\| T(t)x - x \| \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow 0^+$, para todo $x \in X$.

Ejemplo 1.2.1. Sean $A \in L(X)$ y $e^{At} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(At)^n}{n!} \right)$. La familia $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo.

Los siguientes teoremas reflejan las propiedades que posee un semigrupo fuertemente continuo y su prueba se puede ver en [11].

Teorema 1.2.1. *Un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$ en un espacio de Banach X tienen las siguientes propiedades:*

a.- $\| T(t) \|$ es acotado en todo subintervalo acotado de $[0, \infty)$.

b.-$T(t)$ es fuertemente continuo para todo $t \in [0, \infty)$.

c.- Para todo $x \in X$, tenemos que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)xds \longrightarrow x \quad$,cuando $\quad t \longrightarrow 0^+$.

d.- Si $w_0 = \inf\limits_{t>0}\left(\dfrac{1}{t}\log \| T(t) \|\right)$ entonces $w_0 = \lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{1}{t}\log \| T(t) \|\right) < \infty$.

e.- Para todo $w > w_0$ existe una constante M_w tal que $\| T(t) \| \leq M_w e^{wt}, t \geq 0$.

Definición 1.2.2. El generador infinitesimal A de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$ en un espacio de Banach X se define como:

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{1}{t}\left(T(t) - I\right)x,$$

siempre que el límite exista. El dominio de A, $D(A)$, es el conjunto de elementos en X para el cual el límite existe.

Teorema 1.2.2. *Sea $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X y A su generador infinitesimal con dominio $D(A)$. Entonces:*

a.- Si $x \in D(A)$ entonces $T(t)x \in D(A), \forall t \geq 0$.

b.- $\dfrac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax$, para $x \in D(A), t \geq 0$.

c.- $\dfrac{d^n}{dt^n}(T(t)x) = A^nT(t)x = T(t)A^nx$, para $x \in D(A^n), t \geq 0$.

d.- $T(t)x - x = \displaystyle\int_0^t T(s)Axds, x \in D(A)$.

e.- A es un operador lineal cerrado y $D(A)$ es denso en X.

f.- $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ es denso en X.

Una vez estudiadas las propiedades de un semigrupo fuertemente continuo T(t), y su generador, es normal preguntarse: ¿cuando el operador A es el generador de T(t)?, ¿es A único?.

La respuesta a esta interrogante la establece el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. *Teorema de Hille-Yosida*

Sea A un operador lineal cerrado con dominio denso en un espacio de Banach X, *entonces A es generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo, si y sólo si, el conjunto: $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > w\}$ está contenido en $\rho(A)$ y además,*

$$\|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq M(\lambda - w)^{-m},\ \forall\ \lambda > w,\ \forall\ m \geq 1.$$

Para su prueba, ver [11].

Los teoremas enunciados anteriormente, son la base para establecer el nexo que existe entre los semigrupos fuertemente continuos y el problema de Cauchy.

Teorema 1.2.4. *Sea A el generador de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$. Entonces el problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t),\ t \geq 0 \\ x(0) = x_0\ \in\ D(A), \end{cases}$$

tiene única solución dada por: $x(t) = T(t)x_0,\ t > 0$.

Por solución se entiende una función $t \longrightarrow x(t),\ t \geq 0$, continua derivable para $t > 0$ tal que $x(t) \in D(A),\ \forall\ t > 0$ y tal que $\dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t),\ \forall t > 0,\ x(0) = x_0$.

Teorema 1.2.5. *Sea A el generador de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)$. Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow X$ continua con derivada fuertemente continua. Entonces el problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) - Ax(t) = f(t),\ t > 0 \\ x(0) = x_0\ \in\ D(A), \end{cases}$$

tiene solución única, dada por: $x(t) = T(t)x_0 + \displaystyle\int_0^t T(t-s)f(s)ds$.

La demostración de estos últimos teoremas se pueden ver con detalles en [2].

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE C-SEMIGRUPO CON RANGO NO NECESARIAMENTE DENSO.

En este capítulo se desarrolla en detalle una generalización de la teoría de semigrupos fuertemente continuos, llamados semigrupos generalizados o C-semigrupos, ver [5] y [6].

2.1. Teoría de C-semigrupos.

En esta sección, se define el generador infinitesimal A, de un C-semigrupo que puede no ser exponencialmente acotado, con rango del operador C no necesariamante denso, cuyo dominio de A, $D(A)$ puede no ser denso. Además se detalla algunas propiedades del generador.

Definición 2.1.1. Sea C un operador inyectivo en $B(X)$. La familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en $L(X)$ se dice que es un C- semigrupo si satisface las siguientes condiciones:

(i) $S(t+s)C = S(t)S(s)$; para todo $t, s \geq 0$.

(ii) $S(0) = C$.

(iii) $S(t)$ es fuertemente continuo, esto es, la aplicación $S(\cdot)x : [0, \infty) \longrightarrow X$ es continua, para todo $x \in X$.

Si además, la familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisface la condición:

(iv) Existe $M \geq 0$ y $w \in \mathbb{R}$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$.
Entonces diremos que el C-semigrupo es exponencialmente acotado (o de orden exponencial), en cuyo caso escribiremos $O(e^{wt})$.

En lo sucesivo, escribiremos $S(t)$ en lugar de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Definición 2.1.2. El operador, A, es el generador infinitesimal de un C-semigrupo $S(t)$ si:

$$D(A) = \left\{ x : \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - Cx}{t} \text{ existe y está en } Rang(C) \right\},$$
$$\text{donde, } Ax = C^{-1}\left[\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - Cx}{t}\right].$$

Observación 2.1.1. Si $T(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo generado por A, entonces, para cualquier C que conmuta con $T(t)$, se tiene que, $S(t) = T(t)C$ es un C-semigrupo generado por A.
En este caso, la definición 2.1.2, generaliza la definición de generador de un semigrupo fuertemente continuo. En efecto,

Probemos primero que $S(t)$ es un C-semigrupo.
(1) $S(0) = T(0)C = IC = C$, ya que $T(0) = I$.

(2) $S(t)S(s) = (T(t)C)(T(s)C) = CT(t)T(s)C = CS(t+s)$.

(3) $S(t)$ es continuo, por ser composición de los operadores continuos $T(t)$ y C.
Así, de (1), (2) y (3), $S(t)$ es un C-semigrupo.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - Cx}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)Cx - Cx}{t} \\
&= C \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \\
&= CAx.
\end{aligned}$$

Luego, como el límite existe y está en el rango del operador C, por definición del dominio de A, se tiene que $x \in D(A)$ y $Ax = C^{-1}(CAx) = Ax$.
Por lo tanto, $S(t)$ es un C-semigrupo generado por A.

Lema 2.1.1. *Si $x \in D(A)$, entonces $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geqslant 0$ y $S(t)Ax = AS(t)x$. Mas aún, $CS(t)x$ es una función diferenciable, y $\dfrac{d}{dt}(CS(t)x) = CS(t)Ax$.*

Demostración. Sea $h > 0$, entonces para todo $t \geqslant 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(S(h)S(t)x - CS(t)x\right) &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(S(t)S(h)x - S(t)Cx\right)\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}S(t)\left(S(h)x - Cx\right)\\
&= S(t)\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(S(h)x - Cx\right)\\
&= S(t)CAx, \text{ pues } x \in D(A)\\
&= CS(t)Ax.
\end{aligned}$$

Asi, el límite existe y está en el $Rang(C)$, por lo que, $S(t)x \in D(A)$ y

$$\begin{aligned}
AS(t)x &= C^{-1}\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(S(h)S(t)x - CS(t)x\right)\\
&= C^{-1}(S(t)CAx)\\
&= C^{-1}(CS(t)Ax)\\
&= S(t)Ax.
\end{aligned}$$

Probemos ahora que la aplicación $t \longmapsto CS(t)x$ es diferenciable. Para ello, demostremos que la derivada por la derecha y por la izquierda existe y que además son iguales. Sean $t, h > 0$, y $x \in D(A)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(CS(t+h)x - CS(t)x\right) &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(S(t)S(h))x - CS(t)x\right)\\
&= S(t)\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\left(S(h)x - Cx\right)\\
&= S(t)CAx.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\dfrac{d^+}{dt}(CS(t)) = S(t)CAx$.

Por otro lado, sean $t, h > 0$ tal que $t - h > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{CS(t-h)x - CS(t)x}{-h} - S(t)CAx\right\|\\
&= \left\|\frac{CS(t-h)x - CS(t-h+h)x}{-h} - S(t)CAx\right\|\\
&= \left\|\frac{CS(t-h+h)x - CS(t-h)x}{h} - S(t)CAx\right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\frac{S(t-h)S(h)x - CS(t-h)x}{h} - S(t)CAx\| \\
&= \|S(t-h)\frac{S(h)x - Cx}{h} - S(t)CAx\| \\
&= \|S(t-h)\frac{S(h)x - Cx}{h} - S(t-h)CAx + S(t-h)CAx - S(t)CAx\| \\
&= \|S(t-h)(\frac{S(h)x - Cx}{h} - CAx) + S(t-h)CAx - S(t)CAx\| \\
&\leq \|S(t-h)\|\|\frac{S(h)x - Cx}{h} - CAx\ \| + \|S(t-h)CAx - S(t)CAx\|
\end{aligned}
$$

Luego, tomando límite cuando $h \longrightarrow 0^+$, y usando el hecho de que $S(t)$ es continuo, $\frac{d^-}{dt}(CS(t)x)$ existe y es igual a $S(t)CAx$.

Así, la aplicación $t \longmapsto CS(t)x$ es diferenciable, con $\frac{d}{dt}(CS(t)x) = S(t)CAx$. ■

Lema 2.1.2. *$\forall x \in X$, $\forall s \geq 0$, $\int_0^s S(t)xdt \in D(A)$, con $A\left(\int_0^s S(t)xdt\right) = S(s)x - Cx$.*

Demostración. Sea $h > 0$, entonces por la continuidad de $S(t)$:

$$
\begin{aligned}
S(h)\left(\int_0^s S(t)xdt\right) - C\int_0^s S(t)xdt &= \int_0^s S(h)S(t)xdt - C\int_0^s S(t)xdt \\
&= \int_0^s CS(t+h)xdt - C\int_0^s S(t)xdt.
\end{aligned}
$$

Haciendo $u = t + h$ en la primera integral; se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\int_0^s CS(t+h)xdt - C\int_0^s S(t)xdt &= \int_h^{s+h} CS(u)xdu - C\int_0^s CS(u)xdu \\
&= C\int_s^{s+h} S(u)du + C\int_h^s S(u)xdu \\
&\quad -C\int_0^h S(u)xdu - C\int_h^s S(u)xdu \\
&= C\int_s^{s+h} S(u)xdu - C\int_0^h S(u)xdu.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
S(h)\left(\int_0^s S(t)xdt\right) - C\int_0^s S(t)xdt = C\int_s^{s+h} S(u)xdu - C\int_0^h S(u)xdu. \tag{2.1}
$$

Afirmación 2.1.1. $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} S(s)xds = S(t)x.$

En efecto, de la continuidad de S(t), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$|t-s| \leq \delta \Longrightarrow \| S(t)x - S(s)x \| \leq \varepsilon.$$

Luego, para $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned}
\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - S(t)x \| &= \| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t)xds \| \\
&= \| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (S(s)x - S(t)x)ds \| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \| (S(s)x - S(t)x) \| \, ds \\
&\leq \frac{1}{h}\varepsilon h \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{h\to 0^+} \displaystyle\int_t^{t+h} S(s)xds = S(t)x.$

Luego, dividiendo por h y tomando límite en ambos lados de la igualdad (2.1), obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(S(h)\int_0^s S(t)xdt - C\int_0^s S(t)xdt \right) \\
=\ & C\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_s^{s+h} S(u)xdu - \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h S(u)xdu \right) \\
=\ & C(S(s)x - S(0)x) \\
=\ & C(S(s)x - Cx).
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\displaystyle\int_0^s S(t)xdt \in D(A).$
Por lo tanto, por la definición de generador:

$$A\left(\int_o^s S(t)xdt \right) = C^{-1}(C(S(s)x - Cx) = S(s)x - Cx.$$

■

Teorema 2.1.1. *Supongamos que A es el generador infinitesimal de un C-semigrupo $S(t)$. Entonces:*
(a) A es cerrado y $\overline{D(A)} = Rang(C)$.
(b) Si $x \in D(A)$, entonces para todo $t \geqslant 0$, $S(t)x \in D(A)$, $S(t)x$ es una función diferenciable de t y $\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax$.
(c) Si $S(t)$ es de $O(e^{wt})$, para algún $w \geqslant 0$, entonces $(r - A)$ es inyectivo, siempre que $Re(r) > w$.

Demostración. Parte (a)
Del lema 2.1.1, se tiene que para todo $x \in X$, $\int_o^s S(t)xdt \in D(A)$ y de la afirmación 2.1.1, se obtiene que:

$$\lim_{s \to 0^+} \int_0^s S(t)xdt = Cx.$$

Por otro lado, se puede definir una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:
Dado $x \in X$, consideremos:

$$x_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} S(t)xdt. \quad (i)$$

Ahora bien, dado $y \in Rang(C)$, existe $x \in D(A)$ tal que $y = Cx$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n \in D(A)$, dada por (i), tal que $x_n \longrightarrow y = Cx$, cuando $n \longrightarrow \infty$.
Por lo tanto, $\overline{D(A)} = Rang(C)$.
Probemos ahora que A es un operador lineal cerrado.
Sea (x_n) una sucesión en $D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $Ax_n \longrightarrow y$.

Afirmación 2.1.2. *La sucesión $(CS(t)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $CS(t)x$, sobre $[0, s]$.*

En efecto, como $S(t)$ es acotado, se tiene por el teorema de Banach Steinhaus que $S(t)$ es uniformemente acotado sobre todo intervalo $[0, s]$.
Luego:

$$\begin{aligned} \|CS(t)x_n - CS(t)x\| &= \|CS(t)(x_n - x)\| \\ &\leq \|C\|\|S(t)\|\|x_n - x\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|CS(t)x_n - CS(t)x\| \longrightarrow 0, \quad si \;\; n \longrightarrow \infty.$$

Afirmación 2.1.3. *La sucesión* $(\frac{d}{dt}CS(t)x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (CS(t)Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *converge uniformemente a* $CS(t)y$.

Nuevamente por el teorema de Banach Steinhaus,

$$\begin{aligned}\|CS(t)Ax_n - CS(t)y\| &= \|CS(t)(Ax_n - y)\| \\ &\leq \|C\|\|S(t)\|\|Ax_n - y\|,\end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$\|CS(t)Ax_n - CS(t)y\| \longrightarrow 0, \ si\ n \longrightarrow \infty.$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned}C(S(t)x - Cx) &= CS(t)x - C^2x \\ &= \lim_{n\to\infty}(CS(t)x_n - C^2x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t CS(s)Ax_n ds.\end{aligned}$$

De la convergencia uniforme de la sucesión $(CS(t)Ax_n)$, obtenemos:
Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, si $n \geq N$, entonces:

$$\|(CS(t)Ax_n) - CS(t)y\| \leq \varepsilon.$$

Esto implica que $\|(CS(t)Ax_n)\| \leq \|CS(t)y\| + \varepsilon$.
Haciendo $g(t) = \|CS(t)y\| + \varepsilon$, se tiene que $g(t)$ es una función continua y por tanto medible.
Además, $(CS(t)Ax_n)$ es una sucesión de funciones medibles, por ser continuas.
Por el teorema 1.1.9,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^t CS(s)Ax_n ds &= \int_0^t \lim_{n\to\infty} CS(s)Ax_n ds \\ &= \int_0^t CS(s)y ds \\ &= C\int_0^t S(s)y ds.\end{aligned}$$

Así, $C(S(t)x - Cx) = C\int_0^t S(s)y ds$.

Ahora, dado que C es inyectivo, obtenemos:

$$S(t)x - Cx = \int_0^t S(s)yds.$$

Luego, dividiendo por t a ambos lados de la igualdad y tomando límite cuando $t \longrightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(S(t)x - Cx) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)yds \\ &= Cy. \end{aligned}$$

Así, $x \in D(A)$ y por definición, $Ax = C^{-1}(Cy) = y$.
Por lo tanto, A es cerrado.

Parte (b)
supongamos que $x \in D(A)$, entonces por el lema 2.1.1, $\forall t \geqslant 0$, $S(t)x \in D(A)$ y $AS(t)x = S(t)Ax$, así que solo nos queda probar que la aplicación $t \longmapsto S(t)x$ es diferenciable.
Probemos que para h suficientemente pequeño,

$$S(t+h) - S(t) = A\int_t^{t+h} S(r)xdr.$$

En efecto, para $s > 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}\left[S(s)\int_t^{t+h} S(r)xdr - C\int_t^{t+h} S(r)xdr\right] &= \frac{1}{s}C\left[\int_t^{t+h} S(s+r)xdr - \int_t^{t+h} S(r)xdr\right] \\ &= \frac{1}{s}C\left[S(s)\int_{s+t}^{s+t+h} S(u)xdu - \int_t^{t+h} S(u)xdu\right] \\ &= \frac{1}{s}C\left[S(s)\int_{t+h}^{t+h+s} S(u)xdu - \int_s^{s+t} S(u)xdu\right]. \end{aligned}$$

Luego, por afirmación 2.1.1, tomando límite cuando $s \longrightarrow 0^+$, obtenemos:

$$\frac{1}{s}\left[S(s)\int_t^{t+h} S(r)xdr - C\int_t^{t+h} S(r)xdr\right] \longrightarrow C[S(t+h)x - S(t)x].$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_t^{t+h} S(r)xdr \in D(A)$ y $S(t+h)x - S(t)x = A\displaystyle\int_t^{t+h} S(r)xdr$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[S(t+h)x - S(t)x] &= A\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(r)xdr\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} AS(r)xdr.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{[S(t+h)x - S(t)x]}{h} = AS(t)x.$$

Así, $\dfrac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x$ ■

Para la parte c es necesario demostrar el siguiente lema.

Lema 2.1.3. *Supongamos que $S(t)$ es un C-semigrupo de $O(e^{wt})$, $(w \geqslant 0)$. Para $Re(r) > w$, definimos el operador acotado por:*

$$L_r x = \int_0^\infty e^{-rt} S(t)xdt.$$

Entonces:

(a) $L_r x \in D(A)$, $\forall x \in X$, con $(r-A)L_r x = Cx$.

(b) $\forall\, x \in D(A)$, $L_r(r-A)x = Cx$.

Demostración. Parte (a).

En primer lugar, dado $s > 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}&S(s)\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt - C\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt\\ &= \int_0^\infty e^{-rt}S(s)S(t)xdt - C\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt\\ &= C\int_0^\infty e^{-rt}S(s+t)xdt - C\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt.\end{aligned}$$

Si hacemos $u = s+t$ en la primera integral, obtenemos que:

$$\begin{aligned}&C\int_0^\infty e^{-rt}S(s+t)xdt - C\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt\\ &= C\int_s^\infty e^{-r(u-s)}S(u)xdu - C\int_0^\infty e^{-ru}S(u)xdu\\ &= Ce^{rs}\int_0^\infty e^{-ru}S(u)xdu - C\int_0^s e^{-ru}S(u)xdu - C\int_0^\infty e^{-ru}S(u)xdu\\ &= C(e^{rs}-1)\int_0^\infty e^{-ru}S(u)xdu - C\int_0^s e^{-ru}S(u)xdu.\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} S(s)\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt - C\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt &= C(e^{rs}-1)\int_0^\infty e^{-ru}S(u)xdu \\ &\quad -C\int_0^s e^{-ru}S(u)xdu. \end{aligned}$$

Luego, dividiendo por s y tomando límite en ambos lados:

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0^+}\frac{1}{s}\left[S(s)\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt - C\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt\right] \\ &= C\lim_{s\to 0^+}\frac{1}{s}\left[(e^{rs}-1)\int_0^\infty e^{-ru}S(u)xdu - \int_0^s e^{-ru}S(u)xdu\right] \\ &= C\left[r\int_0^\infty e^{-ru}S(u)xdu - Cx\right]. \end{aligned}$$

En consecuencia, el límite existe y está en el rango de C, por lo que $L_r x \in D(A)$. Luego, de la definición de A:

$$A(L_r x) = r\int_0^\infty e^{-ru}S(u)xdu - Cx = rL_r x - Cx.$$

De donde, $(rI - A)L_r x = Cx$.
Para la prueba de la parte b, enunciaremos una proposición que será esencial para el desarrollo de la misma, y para su demostración se recomienda ver [8].

Proposición 2.1.1. *Sea A un operador cerrado con dominio $D(A)$ en X y $x \in \mathcal{C}([a,b),X)$, con $b \leq \infty$. Supongamos que $x(t) \in D(A)$, $Ax(t)$ es continua en $[a,b)$ y que existen las integrales impropias:*

$$\int_a^b x(t)dt \text{ y } \int_a^b Ax(t)dt.$$

Entonces:

$$\int_a^b x(t)dt \in D(A) \quad y \quad A\int_a^b x(t)dt = \int_a^b Ax(t)dt.$$

Sea $x \in D(A)$; por el lema 2.1.1 tenemos que $S(t)x \in D(A)$ y $S(t)Ax = AS(t)x$. Además, por el teorema 2.1.1(a), se tiene que A es un operador lineal cerrado, y por tanto acotado.
Hagamos $x(t) = S(t)x$, entonces $x(t) \in D(A)$, $x(t)$ es continua en $[0,\infty)$, pues $S(t)x$ lo

es, y también $Ax(t)$ es continua en $[0,\infty)$, por ser la composición de dos aplicaciones continuas y de esta manera se puede garantizar la existencia de las integrales de $x(t)$ y $Ax(t)$ sobre $[0,\infty)$. Entonces, por el teorema anterior:

$$\begin{aligned}(rI-A)L_r x &= (rI-A)\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt\\ &= \int_0^\infty (rI-A)e^{-rt}S(t)xdt\\ &= \int_0^\infty e^{-rt}(rI-A)S(t)xdt\\ &= \int_0^\infty e^{-rt}S(t)(rI-A)xdt\\ &= L_r(rI-A)x.\end{aligned}$$

En consecuencia, se obtiene (b). ■

Probemos ahora la parte (c) del teorema 2.1.1.
Supongamos que $S(t)$ es de $O(e^{wt})$, para algún $w \geq 0$.
Sean $x, y \in D(A)$ tal que $(r-A)x = (r-A)y$, entonces:

$$L_r(r-A)x = L_r(r-A)y.$$

Esto implica que $Cx = Cy$
En consecuencia, $x = y$, dado que C es inyectivo.
Por lo tanto, $(r-A)$ es inyectivo.

Teorema 2.1.2. *Supongamos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores fuertemente continuos y A un operador cuyo dominio es invariante bajo $S(t)$ tal que para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$, $S(t)Ax = AS(t)x$, $S(t)x = Cx + \int_0^t S(w)Axdw$. Entonces:*
$S(t)$ es un C-semigrupo generado por una extensión de A si se cumplen una de las siguientes condiciones:

(i) $D(A)$ *es denso en* X.

(ii) $\rho(A) \neq \phi$.

Demostración. Sea $x \in D(A)$ y $0 \leq s \leq w$. Dado que la aplicación $S(.)$ es diferenciable, se tiene que la aplicación $\psi : [0,\infty) \to B(X)$, dada por:

$$\psi(s) = S(w-s)S(s)x.$$

es diferenciable y como A conmuta con $S(t)$, ocurre que:

$$\begin{aligned}\psi^{'}(s) &= -AS(w-s)S(s)x + S(w-s)AS(s)x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, ψ es constante.
En particular, si $s = w$, obtenemos:

$$S(w-s)S(s)x = S(0)S(w)x = CS(w)x.$$

Hagamos $t = w - s$, entonces $S(t)S(s)x = CS(t+s)x$ y también $S(0) = Cx$.

Ahora bien, si $D(A)$ es denso en X,entonces para todo $x \in X$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$, de donde se tiene que:

$$\begin{aligned}S(t)S(s)x &= \lim_{n\to\infty} S(t)S(s)x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} CS(t+s)x_n \\ &= CS(s+t)x.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S(t)$ es un C-semigrupo.
Por otro lado, supongamos que $\rho(A) \neq \phi$, esto es, existe $r \in \mathbb{C}$ tal que:
$(r - A)$ es invertible y $(r - A)^{-1} \in B(X)$. Así, para todo $x \in X$, dado que $(r - A)^{-1}x \in D(A)$, tenemos :

$$S(t)S(s)(r-A)^{-1}x = CS(t+s)(r-A)^{-1}x.$$

Además, como D(A) es invariante bajo $S(t)$, entonces $S(t)$ conmuta con $(r - A)^{-1}$.
Así,

$$(r-A)^{-1}S(t)S(s)x = (r-A)^{-1}CS(t+s)x$$

Por otro lado, como $(r - A)^{-1}$ es inyectivo, entonces:

$$S(t)S(s)x = CS(t+s)x \;\; y \;\; S(0)x = Cx$$

Por último, probemos que $S(t)$ es generado por una extensión $\widetilde{A}$ de A.
Dado que $S(t)$ es un C-semigrupo, por definición de generador infinitesimal se tiene que:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - Cx}{t} = C\widetilde{A}x,$$

para todo $x \in D(\widetilde{A})$, donde $\widetilde{A}$ denota al generador infinitesimal.
Pero, por hipótesis:

$$S(t)x = Cx + \int_0^t S(w)Axdw. \tag{2.2}$$

y también:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - Cx}{t} = \frac{d}{dt}(S(t)x)|_{t=0}. \tag{2.3}$$

Así, se tiene que:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - Cx}{t} = S(0)Ax = CAx.$$

En consecuencia, si $x \in D(A)$, entonces:

$$C\widetilde{A}x = CAx.$$

Por lo tanto, $\widetilde{A}$ es una extensión de A. ■

2.2. Definiciones Equivalentes.

Definición 2.2.1. Supongamos que $w \geq 0$ y $S(t)$ es un C-semigrupo de $O(e^{wt})$ tal que C tiene rango denso. Sea L_r definido como en el lema 2.1.3. El generador Z de $S(t)$ se define como:

$$Zx = (r - L_r^{-1}C)x,$$

donde $D(Z) = \{x : Cx \in rang(L_r),\, r > w\}$.

Observación:

- La definición del operador L_r no depende de $r > w$.
- Para todo $\lambda, \mu > w,\ (\lambda - \mu)L_\lambda L_\mu = L_\mu C - L_\lambda C$.
- L_r es inyectivo.
- $L_\lambda L_\mu = L_\mu L_\lambda,\ \forall\, \lambda, \mu > w$.

Proposición 2.2.1. *Supongamos que $S(t)$ es un C-semigrupo de $O(e^{wt})$. Sea A un operador definido por:*

$$Ax = C^{-1} \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - Cx}{t},$$

con $D(A) = \left\{ x : \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{S(t)x - Cx}{t} \text{ existe y está en } Rang(C) \right\}$.
Si Z *es dado como en la definición anterior, entonces* $A = Z$.

Demostración. En primer lugar, enunciaremos un lema que es necesario para la prueba de la proposición y su demostración se encuentra en [11].

Lema 2.2.1. *Si* $x \in D(Z)$, *entonces* $S(t)x - Cx = \int_0^t S(t)Zxdt \ (t \geq 0)$.

Por hipótesis, $S(t)$ es de $O(e^{wt})$. Si $x \in D(A)$ y $r > w$, entonces por el lema 2.1.3 tenemos que:

$$Cx \in rang(L_r) \text{ y } (r - A)x = L_r^{-1}Cx,$$

de donde, $Ax = (r - L_r^{-1}C)x$.
Esto implica que $x \in D(Z)$ y $Ax = Zx$.
Así, Z es una extensión de A.
Por otro lado, si $x \in D(Z)$, se tiene que:

$$S(t)x - Cx = \int_0^t S(s)Zxds, \ t \geq 0.$$

Luego, dividiendo por t a ambos lados de la ecuación anterior y tomando límite cuando $t \longrightarrow 0^+$ obtenemos:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - Cx}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)Zxds = CZx.$$

Así, $x \in D(A)$ y por definición de A:

$$Ax = C^{-1}(CZx) = Zx, \ \ y \ \ Ax = Zx.$$

Por lo tanto, A es una extensión de Z.
En consecuencia, $A = Z$. ∎

Teorema 2.2.1. *Supongamos que* $\rho(A) \neq \phi, w \geq 0$ *y* $S(t)$ *es una familia de operadores fuertemente continuos de* $O(e^{wt})$. *Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $S(t)$ es un C-semigrupo generado por A.

(b) $(w,\infty)\subset\rho(A)$ y para todo $r>w$, $x\in X$, se tiene:

$$C(r-A)^{-1}x=(r-A)^{-1}Cx=\int_o^\infty e^{-rt}S(t)xdt.$$

Demostración. $(b)\Rightarrow(a)$

Afirmación 2.2.1. *$S(t)S(s)=S(s)S(t),\forall s,t\geq 0$ y $S(t)C=CS(t)$.*

En efecto, sea $x\in X$. Para $r,\ \lambda>w$, se tiene que:

$$(r-A)^{-1}(\lambda-A)^{-1}x=(\lambda-A)^{-1}(r-A)^{-1}x.$$

Así, aplicando la composición C^2 en ambos lados, obtenemos:

$$C^2(r-A)^{-1}(\lambda-A)^{-1}x=C^2(\lambda-A)^{-1}(r-A)^{-1}x.$$

Pero, por hipótesis, C conmuta con la resolvente de A, por lo que:

$$C(r-A)^{-1}C(\lambda-A)^{-1}x=C(\lambda-A)^{-1}C(r-A)^{-1}x.$$

Esto implica que:

$$L_rL_\lambda x=L_\lambda L_r x.$$

Probemos ahora que $S(t)C=CS(t)$.

Nuevamente por hipótesis,

$$C(r-A)^{-1}x=(r-A)^{-1}Cx.$$

Aplicando C en ambos lados:

$$C(r-A)^{-1}Cx=(r-A)^{-1}C(Cx).$$

Pero,

$$(r-A)^{-1}C(Cx)=L_rCx=\int_0^\infty e^{-rt}S(t)Cxdt.$$

Por lo que obtenemos:

$$C\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt=\int_0^\infty e^{-rt}S(t)Cxdt.$$

Esto implica que:

$$\int_0^\infty e^{-rt} S(t)Cxdt = \int_0^\infty e^{-rt} CS(t)xdt. \tag{2.4}$$

Dado que las integrales en esta última igualdad no son más que las Transformadas de Laplace de $S(t)Cx$ y $CS(t)x$, entonces por la unicidad de las transformadas obtenemos:

$$CS(t)x = S(t)Cx.$$

Ahora bien, para $x \in X$, $r, \lambda > w$

$$L_r L_\lambda x = L_\lambda L_r x$$

Así, por definición de L_r, tenemos:

$$\int_0^\infty e^{-rt} S(t) L_\lambda x = \int_0^\infty e^{-ws} S(s) L_r x.$$

En consecuencia:

$$\int_0^\infty (e^{-rt} S(t) \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)xds)dt = \int_0^\infty (e^{-\lambda s} S(s) \int_0^\infty e^{-rt} S(t)xdt)ds.$$

Luego,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-rt} e^{-\lambda s} S(t)S(s)xdsdt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s} e^{-rt} S(s)S(t)xdtds.$$

Como la integral anterior siempre existe entonces podemos intercambiar el orden de integración, obteniendo así:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-rt} e^{-ws} S(t)S(s)xdsdt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ws} e^{-rt} S(s)S(t)xdsdt.$$

De acá, usando de manera recursiva la unicidad de la transformada Laplace se obtiene:

$$S(s)S(t) = S(t)S(s).$$

Afirmación 2.2.2. *$S(t)$ conmuta con todos los resolventes de A.*

Como C conmuta con $S(t)$, se tiene que:

$$S(t)L_r = L_r S(t).$$

Lo cual es equivalente a:

$$S(t)C(r-A)^{-1} = C(r-A)^{-1}S(t).$$

Así,

$$CS(t)(r-A)^{-1} = C(r-A)^{-1}S(t).$$

Y por la inyectividad del operador C,

$$S(t)(r-A)^{-1} = (r-A)^{-1}S(t).$$

Por lo tanto, $S(t)$ conmuta con todos los resolventes de A.

Afirmación 2.2.3. *Si $x \in D(A)$, entonces $S(t)x \in D(A)$ y $S(t)Ax = AS(t)x$.*

En efecto, por la afirmación anterior se tiene que :

$$S(t)(r-A)^{-1} = (r-A)^{-1}S(t).$$

Luego, aplicando $(r-A)$ por la derecha y por la izquierda en ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$(r-A)S(t) = S(t)(r-A).$$

En consecuencia,

$$AS(t) = AS(t).$$

Luego, si $x \in D(A)$, entonces $S(t)x \in D(A)$ y $AS(t) = AS(t)$.

Afirmación 2.2.4. $\forall x \in D(A),\ S(t)x = Cx + \int_0^t S(y)Axdy.$

Sea $r > w$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-rt}\int_0^t S(y)Axdydt &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-rt}S(y)Axdydt \\
&= \int_0^\infty \int_y^\infty e^{-rt}S(y)Axdtdy \\
&= \int_0^\infty S(y)Ax(\int_0^t e^{-rt}dt)dy \\
&= \int_0^\infty S(y)Ax(\lim_{b\to\infty} \frac{-1}{r}e^{-rt}|_y^b)dy \\
&= \frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-yt}S(y)Axdy \\
&= \frac{1}{r}C(r-A)^{-1}Ax \\
&= C(r-A)^{-1}x - \frac{1}{r}Cx \\
&= \int_0^\infty e^{-rt}(S(t)x - Cx)dt.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_0^\infty e^{-rt}\int_0^t S(y)Axdydt = \int_0^\infty e^{-rt}(S(t)x - Cx)dt.$$

Por lo que:

$$\int_0^t S(y)Axdy = S(t)x - Cx.$$

Así, $S(t)x = Cx + \displaystyle\int_0^t S(y)Axdy$.

Por último, por el teorema 2.1.2 y las afirmaciones 2.2.3 y 2.2.4, $S(t)$ es un C-semigrupo generado por una extensión de A, digamos $\widetilde{A}$. Pero por el teorema 2.1.1, $(r - \widetilde{A})$ es inyectivo, para $r > w$ y como $(r - A)$ es sobreyectivo, entonces por el lema 1.1.2, $A = \widetilde{A}$.

Probemos $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que $r > w$. Entonces para $x \in D(A)$ y $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}[S(t)Cx - C(C(x)] &= C\frac{1}{t}[S(t)x - Cx] \\ &= C\frac{1}{t}\int_0^t S(s)Axds. \end{aligned}$$

Luego, tomando límite a ambos lados cuando $t \longrightarrow 0^+$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{[S(t)Cx - C(C(x)]}{t} &= \lim_{t\to 0^+} C\frac{1}{t}\int_0^t S(s)Axds \\ &= C^2Ax. \end{aligned}$$

Así, $ACx = C^{-1}(C^2Ax) = CAx$, esto es, A conmuta con C.

En consecuencia, $C(r - A)x = (r - A)Cx$, de donde:

$$C(r - A)^{-1}x = (r - A)^{-1}Cx.$$

Por último, del lema 2.1.2, $(r - A)L_rx = Cx$, y obtenemos así:

$$L_rx = (r - A)^{-1}Cx.$$

Por lo tanto,

$$(r - A)^{-1}Cx = \int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt.$$

■

CAPÍTULO 3

CARACTERIZACIÓN DEL TIPO HILLE-YOSIDA.

En este capítulo se desarrolla en detalle resultados que establecen la relación que existe entre los C-semigrupos y las soluciones del problema de cauchy, el cual viene dado por:

$$\begin{cases} u^{'}(t,x) = Au(t,x), \ t \geq 0 \\ u(0,x) \ = Cx, \ x \in D(A) \end{cases} \tag{3.1}$$

Dichas soluciones pueden no ser exponencialmente acotadas y el dominio de A puede no ser denso, siendo C un operador lineal inyectivo, además, estableceremos condiciones necesarias y suficientes para las cuales el problema (3.1) tiene solución única para todo x en $C(D(A))$.

Asimismo, se enuncia y se prueba en detalle una caracterización del tipo Hille-Yosida para C-semigrupos exponencialmente acotados, cuyo dominio puede no ser denso.

3.1. El problema de Cauchy.

Teorema 3.1.1. *Supongamos que una extensión de A es el generador de un C-semigrupo $S(t)$ cuyo dominio es invariante por $S(t)$. Entonces el problema 3.1 tiene solución única para todo $x \in C(D(A))$, dada por $u(t,x) = S(t)C^{-1}x$.*

Mas aún, el problema esta bien planteado en el siguiente sentido:

Si $\|C^{-1}(x_n - x)\| \longrightarrow 0$, entonces $u(t,x_n)$ converge uniformemente a $u(t,x)$ en intervalos compactos.

Demostración. Sea $\widetilde{A}$ el generador de $S(t)$, por el teorema 2.1.1, si $u(t,x) = S(t)C^{-1}x$, para todo x en $C(D(A))$, entonces:

$$\frac{d}{dt}u(t,x) = \widetilde{A}S(t)C^{-1}x = AS(t)C^{-1}x = Au(t,x) \quad y \;\; u(0,x) = x.$$

Así, $u(t,x)$ es solución del problema 3.1.
Solo falta probar que $u(t,x)$ es única.
Supongamos que existe otra solución $v(t,Cx)$ de 3.1, esto es, $v(t,Cx)$ sastisface:

$$\begin{cases} v^{'}(t,Cx) = Av(t,Cx), t \geq 0 \\ v(0,Cx) = Cx, \; x \in D(A) \end{cases}$$

Ahora, dado que $D(A)$ es invariante por $S(t)$ entonces podemos calcular: $\frac{d}{ds}S(t-s)v(s,Cx)$, y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}S(t-s)v(s,Cx) &= -\widetilde{A}S(t-s)v(s,Cx) + S(t-s)Av(s,Cx) \\ &= -S(t-s)\widetilde{A}v(s,Cx) + S(t-s)Av(s,Cx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación $\phi : [0,\infty) \longrightarrow B(X)$, dada por:

$$\phi(s) = S(t-s)v(s,Cx)$$

es constante, de donde: $\phi(t) = \phi(0)$.
Esto implica que:

$$S(0)v(t,Cx) = S(t)v(0,Cx).$$

Así, $Cv(t,Cx) = S(t)Cx = CS(t)x$. Como C es inyectivo,

$$v(t,Cx) = S(t)x = S(t)C^{-1}(v(0,Cx))$$

Por lo tanto, la solución $u(t,x) = S(t)C^{-1}x$ es única para el problema 3.1.
Ahora bien, si $\|C^{-1}(x - x_n)\| \longrightarrow 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \|u(t,x_n) - u(t,x)\| &= \|S(t)C^{-1}x_n - S(t)C^{-1}x\| \\ &= \|S(t)(C^{-1}(x_n - x))\| \\ &\leq \|S(t)\|\|C^{-1}(x_n - x)\|. \end{aligned}$$

Por el teorema 1.1.3, $S(t)$ es acotado sobre intervalos compactos y así,

$$\|S(t)\|\|C^{-1}(x_n - x)\| \longrightarrow 0.$$

Hemos probado así que el problema 3.1 está bien planteado. ■

Corolarío 3.1.1.1. *Supongamos que A es el generador de un C-semigrupo. Entonces las conclusiones del teorema anterior se cumplen.*

Demostración. Por el teorema 2.1.1, $D(A)$ es invariante por $S(t)$, por lo que el resultado es inmediato. ■

Teorema 3.1.2. *Supongamos que $r \in \rho(A), D(B) \subset D(A)$, donde B es un operador lineal invertible que conmuta con $(A-r)^{-1}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) El problema 3.1 tiene solución única, para todo x en $D(B)$.
(b) Una extensión de A genera un $(A-r)B^{-1}$-semigrupo que conmuta con $(A-r)^{-1}$. El problema 3.1 está bien planteado en el sentido:
Si $\|(A-r)^{-1}B(x_n - x)\| \longrightarrow 0$, entonces $u(t, x_n) \longrightarrow u(t, x)$ uniformemente sobre intervalos compactos.

Demostración. (b) $\Rightarrow$ (a)
Supongamos que $S(t)$ es un $(A-r)B^{-1}$-semigrupo, esto es, $S(t)$ cumple las siguientes condiciones:
i)$S(0) = (A-r)B^{-1}$.
ii)$S(t)S(s) = (A-r)B^{-1}S(t+s)$.
iii) La aplicación $t \longrightarrow S(t)x$ es continua.

Además, $S(t)(A-r)^{-1} = (A-r)^{-1}S(t)$ y $S(t)$ es generado por una extensión $\widetilde{A}$ de A. Ahora, por el teorema 2.1.1, $D(A)$ es invariante por $S(t)$, por lo que el problema 3.1 tiene solución única para todo $x \in (A-r)B^{-1}(D(A))$ y así:

$$\begin{aligned}
(A-r)B^{-1}(D(A)) &= (A-r)B^{-1}(A-r)^{-1}(X) \\
&= (A-r)(A-r)^{-1}B^{-1}(X) \\
&= B^{-1}(X) \\
&= D(B).
\end{aligned}$$

Probemos $(a) \Rightarrow (b)$

Afirmación 3.1.1. $u(t,(A-r)^{-1}x) = (A-r)^{-1}u(t,x),\ \forall\, x \in D(B)$.

De la igualdad anterior, tenemos que: $(A-r)B^{-1}(D(A)) = D(B)$, por lo que:

$$B^{-1}(D(A)) = (A-r)^{-1}(D(B))$$

Así, dado $x \in D(B)$, entonces existe $y \in D(A)$, tal que: $B^{-1}y = (A-r)^{-1}x$.
Pero $B^{-1}y \in D(B)$, de donde, $(A-r)^{-1}x \in D(B)$.
Sea $v(t) = (A-r)^{-1}u(t,x)$. (*)
Entonces $v(t)$ es diferenciable con $v^{'}(t) = (A-r)^{-1}u^{'}(t,x)$.
En efecto, como $(A-r)^{-1}$ es lineal y acotado:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - (A-r)^{-1}u^{'}(t,x) \right\| \\
&= \left\| \frac{(A-r)^{-1}u(t+h,x)-(A-r)^{-1}u(t,x)}{h} - (A-r)^{-1}u^{'}(t,x) \right\| \\
&= \left\| (A-r)^{-1}\left[\frac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h} - u^{'}(t,x) \right] \right\|
\end{aligned}$$

Pero, $\|(A-r)^{-1}[\dfrac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h} - u^{'}(t,x)]\| \longrightarrow 0$, cuando $h \longrightarrow 0$.

Así, $v(t)$ es diferenciable, y ocurre:

$$\begin{aligned}
v^{'}(t) &= (A-r)^{-1}u^{'}(t,x) \\
&= (A-r)^{-1}Au(t,x) \\
&= A(A-r)^{-1}u(t,x) \\
&= Av(t).
\end{aligned}$$

Luego $v(t)$ es solución del problema:

$$\begin{cases} v^{'}(t) = Av(t), t \geq 0 \\ v(0) = (A-r)^{-1}x \end{cases}$$

Pero, por hipótesis, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u^{'}(t) = Au(t), t \geq 0 \\ u(0,x) = v(0) = x \end{cases}$$

Admite una única solución $u(t,x)$, por lo que,
$v(t) = u(t, v(0)) = u(t, (A-r)^{-1}x)$. (**)
De (*) y (**), obtenemos:

$$u(t, (A-r)^{-1}x) = (A-r)^{-1}u(t,x).$$

Ahora, para $t \geq 0$, definamos $S(t) : X \to X$, dado por:

$$S(t)x = (A-r)u(t, B^{-1}x).$$

Afirmación 3.1.2. *$S(t)$ es lineal.*

En efecto,
Sean $x_1, x_2 \in X$, entonces:

$$S(t)(x_1+x_2) = (A-r)u(t, B^{-1}(x_1+x_2)) = u_1(t).$$

$$S(t)x_1 + S(t)x_2 = (A-r)u(t, B^{-1}x_1) + (A-r)u(t, B^{-1}x_2) = u_2(t).$$

Ahora bien,
u_1 resuelve el problema:

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t),\ t \geq 0 \\ v(0) = (A-r)B^{-1}(x_1+x_2) \end{cases}$$

De igual manera, u_2 es solución del problema:

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t), t \geq 0 \\ v(0) = (A-r)B^{-1}x_1 + (A-r)B^{-1}x_2 \end{cases}$$

Así, como B^{-1} y $(A-r)$ son lineales, entonces se tiene que :

$$(A-r)B^{-1}(x_1+x_2) = (A-r)B^{-1}x_1 + (A-r)B^{-1}x_2.$$

por lo que $u_1(0) = u_2(0)$.
Por lo tanto, por la unicidad de la solución del problema 3.1 tenemos: $u_1 = u_2$ y así:

$$\begin{aligned} S(t)(x_1+x_2) &= (A-r)u(t, B^{-1}(x_1+x_2)) \\ &= (A-r)u(t, B^{-1}x_1) + (A-r)u(t, B^{-1}x_2) \\ &= S(t)x_1 + S(t)x_2. \end{aligned}$$

En consecuencia, $S(t)$ es lineal.

Afirmación 3.1.3. *Si $x \in D(A)$, entonces $S(t)x \in D(A)$, $S(t)x$ es una función diferenciable de t y $\frac{d}{dt}(S(t)x) = S(t)Ax$.*

Sea $x \in D(A)$, entonces:

$$\begin{aligned} S(t)x &= (A-r)u(t, B^{-1}x) \\ &= (A-r)u(t, B^{-1}(A-r)^{-1}(A-r)x) \\ &= (A-r)u(t, (A-r)^{-1}B^{-1}(A-r)x) \\ &= u(t, B^{-1}(A-r)x). \end{aligned}$$

Esto implica que $S(t)x \in D(A)$.

Como u es diferenciable y solución de 3.1, $S(t)x$ es diferenciable y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(S(t)x) &= Au(t, (A-r)B^{-1}x) \\ &= A(A-r)u(t, B^{-1}) \\ &= AS(t)x. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} S(t)(A-r)^{-1}x &= (A-r)u(t, B^{-1}(A-r)^{-1}x) \\ &= (A-r)u(t, (A-r)^{-1}B^{-1}x) \\ &= (A-r)(A-r)^{-1}u(t, B^{-1}x) \\ &= (A-r)^{-1}(A-r)u(t, B^{-1}x) \\ &= (A-r)^{-1}S(t)x. \end{aligned}$$

de donde, $AS(t)x = S(t)Ax$.

Fijemos $w > 0$ y probemos que $S(w)$ es acotado.

Sea $C^1([0,\infty), X) = \{y : [0,w] \to X : y \; es \; continuamente \; diferenciable\}$,

con $\|y\| = \sup_{0 \leq t \leq w} |y(t)| + \sup_{0 \leq t \leq w} |y^{'}(t)|$.

$C^1([0,\infty), X)$ es un espacio de Banach.

Definamos $S : X \to C^1([0,w], X)$ por:

$$(Sx)(t) = (A-r)^{-1}S(t)x = u(t, B^{-1}x).$$

Afirmación 3.1.4. *S es un operador lineal cerrado.*

Sea x_n una sucesión en X, con $x_n \longrightarrow x$ y $Sx_n \longrightarrow y$ en $C^1([0,w],X)$. Entonces para $0 \leq t \leq w$, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A(Sx_n(t)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt}(Sx_n(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\left[\lim_{n\to\infty}(Sx_n(t))\right] \\ &= \frac{d}{dt}y(t) \\ &= y^{'}(t). \end{aligned}$$

Ahora, dado que $\rho(A) \neq \phi$,entonces por el teorema 1.1.6, A es un operador lineal cerrado.
Como $y(t) = \lim_{n\to\infty}(Sx_n(t))$ y $A(Sx_n(t)) \longrightarrow y^{'}(t)$, entonces:

$$y(t) \in D(A) \;\; y \;\; A(y(t)) = y^{'}(t) \;\; ; \;\; 0 \leq t \leq w. \tag{3.2}$$

Por otro lado, el hecho de que $x_n \longrightarrow x$, implica que $\lim_{n\to\infty} B^{-1}x_n = B^{-1}x$, (por el teorema del gráfico cerrado aplicado a $B^{-1} : X \to D(B)$, puesto que B es acotado).
En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} B^{-1}x_n = \lim_{n\to\infty}(Sx_n)(0) = y(0).$$

Por lo que, $y(0) = B^{-1}x$, lo cual está en $D(B)$.
Tenemos así por la unicidad de la solución del problema 3.1 y de (3.2) que:

$$y(t) = u(t, B^{-1}x) = (Sx)(t) \; ; \; 0 \leq t \leq w. \tag{3.3}$$

Por lo tanto, S es un operador lineal cerrado y así por el teorema del gráfico cerrado, S es acotado, esto es, existe $M > 0$ tal que :

$$\|Sx(w)\| + \|\frac{d}{dw}Sx(w)\| \leq M\|x\|.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|S(w)x\| &= \|(A-r)(Sx)(w)\| \\ &= \|A(Sx)(w) - r(Sx(w))\| \\ &\leq \|A(Sx)(w)\| + r\|(Sx(w))\| \\ &= \|\frac{d}{dw}(Sx)(w))\| + r\|(Sx(w))\| \\ &\leq (1+r)M\|x\|. \end{aligned}$$

Así, para $w > 0$, $S(w)$ es acotado.
Además,

$$y^{'}(t) = Ay(t).$$

Si integramos a ambos lados, no quedaría:

$$y(t) - y(0) = \int_0^t Ay(s)ds.$$

Luego, despejando $y(t)$, obtenemos:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t Ay(s)ds.$$

Sustituyendo $y(t)$ por (3.3),

$$Sx(t) = B^{-1}x + \int_0^t ASx(s)ds.$$

Aplicando $(A - r)$ a ambos lados de la igualdad,

$$(A - r)Sx(t) = (A - r)B^{-1}x + (A - r)\int_0^t AS(s)xds.$$

Por lo tanto, por el teorema 2.1.2 y afirmación 3.1.3 se tiene que $S(t)$ es un $(A-r)B^{-1}$-semigrupo cuyo generador es una extensión de A que conmuta con $(A - r)^{-1}$. ■

Corolarío 3.1.2.1. *Supongamos que A tiene resolvente no vacío. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) El problema 3.1 tiene solución única $\forall\, x \in D(A^{n+1})$.
(b) Existe $z \in \rho(A)$ tal que una extensión de A es el generador de un $(z - A)^{-n}$-semigrupo que conmuta con $(z - A)^{-1}$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$
Sea $z \in \rho(A)$, hagamos $B = (z - A)^{n+1}$, entonces $D(B) \subset D(A)$, B es invertible, y conmuta con $(A - z)$, pues $z \in \rho(A)$.
Además,

$$B^{-1} = (z - A)^{-(n+1)} = (z - A)^{-1}(z - A)^{-n},$$

por lo que:

$$(z - A)B^{-1} = (z - A)^{-n}.$$

Así, por el teorema 3.1.2 obtenemos que una extensión de A genera un $(z-A)^{-n}$-semigrupo que conmuta con $(z-A)^{-1}$.

$(b) \Rightarrow (a)$

Nuevamente hacemos $B=(z-A)^{n+1}$, el resto de la prueba se sigue aplicando el teorema 3.1.2. ■

Teorema 3.1.3. *Supongamos que $w \geq 0$ y existe $r > w$ en $\rho(A)$. Si B es dado como en teorema anterior, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) El problema 3.1 tiene solución $\forall x \in D(B)$, tal que $u(t,x)$ y $u^{'}(t,x)$ son de $O(e^{wt})$.
(b) A genera un $(A-r)B^{-1}$-semigrupo de $O(e^{wt})$.

Demostración. Probemos $(a) \Rightarrow (b)$

Por el teorema 3.1.2 tenemos que una extensión $\widetilde{A}$ de A genera un $(A-r)B^{-1}$-semigrupo. Además, las soluciones del problema 3.1 vienen dadas por:

$$u(t,x) = (A-r)^{-1}S(t)Bx.$$

Ahora bien, por hipótesis, para cada $x \in X$

$$\begin{aligned}
\|e^{-wt}S(t)x\| &= \|e^{-wt}(A-r)u(t,B^{-1}x)\| \\
&= \|e^{-wt}[Au(t,B^{-1}x) - ru(t,B^{-1}x)]\| \\
&= \|e^{-wt}[u^{'}(t,B^{-1}x) - ru(t,B^{-1}x)]\| \\
&\leq \|e^{-wt}u^{'}(t,B^{-1}x)\| + r\|u(t,B^{-1}x)]\| \\
&\leq (1+r)M.
\end{aligned}$$

Luego, por el teorema de Banach Steinhaus, $\|e^{-wt}S(t)x\|$ es acotado, de modo que existe $K>0$ tal que: $\|S(t)x\| \leq Ke^{wt}$.

Por otro lado, por el teorema 2.1.1 $(r-\widetilde{A})$ es inyectivo y dado que $\widetilde{A}$ es una extensión de A, entonces $(r-A)=(r-\widetilde{A})$.

Por lo tanto, A genera el semigrupo $S(t)$.

$(b) \Rightarrow (a)$

Por el corolario 3.1.1.1, el problema 3.1 tiene solución única para todo x en $D(B)$, dada por:

$$u(t,x) = S(t)(A-r)^{-1}Bx.$$

$S(t)$ es de $O(e^{wt})$, por lo que:

$$\|u(t,x)\| = \|S(t)(A-r)^{-1}Bx\| \leq Me^{wt}.$$

y también:

$$\begin{aligned} \|u^{'}(t,x)\| &= \|AS(t)(A-r)^{-1}Bx\| \\ &= \|S(t)A(A-r)^{-1}Bx\| \\ &\leq Me^{wt}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(t,x)$ y $u^{'}(t,x)$ son de $O(e^{wt})$. ■

Corolarío 3.1.3.1. *Supongamos que A tiene resolvente no vacío y $w \geq 0$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) El problema 3.1, $\forall\, x \in D(A^{n+1})$, con $u(t,x)$ y $u^{'}(t,x)$ de $O(e^{wt})$.
(b) Existe $r > w$ en $\rho(A)$ tal que A es el generador de un $(r-A)^{-n}$-semigrupo que es de $O(e^{wt})$.

Demostración. La demostración es análoga al corolario 3.1.2.1. ■

3.2. Caracterización del tipo Hille-Yosida.

Teorema 3.2.1. *Supongamos que $w \geq 0$ y $\rho(A) \neq \phi$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) A genera un C-semigrupo $S(t)$ satisfaciendo:

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{1}{h}\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{wt},\ \forall\, t \geq 0.$$

(b) $(w,\infty) \subset \rho(A)$, C conmuta con todos los resolventes de A y

$$\|(r-w)^k CA(r-A)^{-k}\| \leq M,\ \forall\, r > w\ k = 1, 2, ...$$

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$.
Dado que A genera un C-semigrupo, por el teorema 2.2.1 se tiene que $(w,\infty) \subset \rho(A)$

y C conmuta con todos los resolventes de A.

Además, para todo $r > w$ y $x \in X$,

$$\int_0^\infty re^{-rt}S(t)xdt = rC(r-A)^{-1}x = CA(r-A)^{-1}x + Cx.$$

Así, $CA(r-A)^{-1}x = \int_0^\infty re^{-rt}(S(t)-C)xdt$.

Es claro que:

$$(r-w)^k CA(r-A)^{-k} = \frac{(r-w)^k}{(k-1)!}\frac{d}{dr}^{(k-1)}(CA(r-A)^{-1}).$$

Por lo tanto, por el corolario 1.1.8.1, (del teorema de Widder):

$\|(r-w)^k CA(r-A)^{-k}\| = \|\frac{(r-w)^k}{(k-1)!}\frac{d}{dr}^{(k-1)}(CA(r-A)^{-1})\| \leq M$.

$(b) \Rightarrow (a)$

Supongamos que $(w,\infty) \subset \rho(A)$, C conmuta con todos los resolventes de A y $\|(r-w)^k C(r-A)^{-k}\| \leq M$, para $r > w$, $k = 1, 2, ...$

Nuevamente por el corolario 1.1.8.1, existe una aplicación $T : [0,\infty) \to B(X)$ tal que:

(i) $T(0) = 0$.

(ii) $\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\|T(t+h) - T(t)\| \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0$.

(iii) $CA(r-A)^{-1} = \int_0^\infty re^{-rt}T(t)dt,\ para\ r > w.$

Sea $S(t) = T(t) + C$, entonces:

$$\begin{aligned} CA(r-A)^{-1}x &= \int_0^\infty re^{-rt}(S(t)-C)xdt \\ &= \int_0^\infty re^{-rt}S(t)xdt - \int_0^\infty re^{-rt}Cxdt \\ &= \int_0^\infty re^{-rt}S(t)xdt - Cx. \end{aligned}$$

Esto implica que:

$$CA(r-A)^{-1}x + Cx = \int_0^\infty re^{-rt}S(t)xdt.$$

Así,

$$rC(r-A)^{-1}x = r\int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt.$$

De donde se obtiene:

$$C(r-A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-rt}S(t)xdt.$$

Por lo tanto, por el teorema 2.2.1, A genera un C-semigrupo y además:

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\|S(t+h)-S(t)\| &= \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\|[S(t+h)-C]-[S(t)-C]\| \\
&= \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\|T(t+h)-T(t)\| \\
&\leq Me^{wt}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.2. *Supongamos que $w \geq 0$, $\rho(A) \neq \phi$ y $D(A)$ es denso. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) A genera un C-semigrupo $S(t)$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall\, t \geq 0$.
(b) $(w,\infty) \subset \rho(A)$, C conmuta con todos los resolventes de A y

$$\|(r-w)^k C(r-A)^{-k}\| \leq M, \forall\, r > w \;\; k = 1, 2, ...$$

Demostración. Probemos $(a) \Rightarrow (b)$.
Supongamos que A genera un C-semigrupo $S(t)$ tal que:

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0.$$

Entonces $(w,\infty) \subset \rho(A)$, C conmuta con todos los resolventes de A.
Ahora bien, como $S(t)$ es un C-semigrupo generado por A, entonces $T(t) = C^{-1}S(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo generado por A.
Luego,

$$\begin{aligned}
\| \, (r-A)^{-k}Cx \, \| &= \| \, (C^{-1}L_r)....(C^{-1}L_r)Cx \, \| \\
&= \| \, C^{-1}\int_0^\infty e^{-rt_1}S(t_1)...C^{-1}\int_0^\infty e^{-rt_n}S(t_n)Cxdt_1...dt_k \, \| \\
&= \| \, C^{-1}\int_0^\infty e^{-rt_1}CT(t_1)...C^{-1}\int_0^\infty e^{-rt_k}CT(t_n)Cxdt_1...dt_k \, \| \\
&= \| \int_0^\infty e^{-rt_1}T(t_1)...\int_0^\infty e^{-rt_n}T(t_k)Cxdt_1...dt_k \, \| \\
&= \| \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-r(t_1+...+t_k)}T(t_1+...+t_k)Cxdt_1...dt_k \, \| \\
&= \| \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-r(t_1+...+t_k)}C^{-1}S(t_1+...+t_k)Cxdt_1...dt_k \, \|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ \parallel \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-r(t_1+...+t_k)} S(t_1+...+t_k) x dt_1 ... dt_k \parallel \\
&\leq \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-r(t_1+...+t_k)} \parallel S(t_1+...+t_k) \parallel \parallel x \parallel dt_1 ... dt_k \\
&\leq \int_0^\infty ... \int_0^\infty e^{-r(t_1+...+t_k)} M e^{w(t_1+...+t_k)} \parallel x \parallel dt_1 ... dt_k \\
&= \int_0^\infty ... \int_0^\infty M e^{-(r-w)(t_1+...+t_k)} \parallel x \parallel dt_1 ... dt_k
\end{aligned}$$

Probemos que:

$$\int_0^\infty ... \int_0^\infty M e^{-(r-w)(t_1+...+t_k)} \parallel x \parallel dt_1 ... dt_k = \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)^k}.$$

Procedamos por induccion sobre k; para $k = 1$,

$$\int_0^\infty M e^{-(r-w)t_1} \parallel x \parallel dt_1 = M \parallel x \parallel \int_0^\infty e^{-(r-w)t_1} dt_1.$$

Haciendo $u = (r-w)t_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty M e^{-(r-w)t_1} \parallel x \parallel dt_1 &= \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)} \int_0^\infty e^{-u} du \\
&= \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)} (-e^{-u}|_0^\infty) \\
&= \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)}.
\end{aligned}$$

Para $k = 2$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty M e^{-(r-w)(t_1+t_2)} \parallel x \parallel dt_1 dt_2 = M \parallel x \parallel \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(r-w)t_1} e^{-(r-w)t_2} dt_1 dt_2.$$

Nuevamente Haciendo $u = (r-w)t_2$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty M e^{-(r-w)(t_1+t_2)} \parallel x \parallel dt_1 dt_2 &= M \parallel x \parallel \int_0^\infty e^{-(r-w)t_1} dt_1 \int_0^\infty e^{-u} du \\
&= M \parallel x \parallel \int_0^\infty e^{-(r-w)t_1} dt_1 (-e^{-u}|_0^\infty) \\
&= M \parallel x \parallel \int_0^\infty \frac{e^{-(r-w)t_1} dt_1}{(r-w)} \\
&= \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)^2}.
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $k-1$, esto es,

$$\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(r-w)(t_1+...+t_{k-1})} \parallel x \parallel dt_1...dt_{k-1} \quad = \quad \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)^{k-1}}. \qquad (3.4)$$

Ahora probemos que se cumple para k.
Hagamos $N(t) = \displaystyle\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(r-w)(t_1+...+t_{k-1})} \parallel x \parallel dt_1...dt_{k-1}$.
Entonces:

$$\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(r-w)(t_1+...+t_k)} \parallel x \parallel dt_1...dt_k = N(t)\int_0^\infty e^{-(r-w)t_k}dt_k.$$

Haciendo un cambio de variable $u = (r-w)t_k$ tenemos que:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(r-w)(t_1+...+t_k)} \parallel x \parallel dt_1...dt_k \\ &= \int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(r-w)(t_1+...+t_{k-1})} \parallel x \parallel dt_1...dt_{k-1}\int_0^\infty e^{-u}du.\end{aligned}$$

Haciendo uso de (3.4) tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ... \int_0^\infty Me^{-(r-w)(t_1+...+t_k)} \parallel x \parallel dt_1...dt_k &= \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)^{k-1}}\int_0^\infty e^{-u}du \\ &= \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)^{k-1}}(-e^{-u}|_0^\infty) \\ &= \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)^{k}}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\parallel (r-A)^{-k}Cx \parallel \quad \leq \quad \frac{M \parallel x \parallel}{(r-w)^k}$$

Por lo tanto, por el corolario 1.1.8.1, obtenemos:

$$\begin{aligned}\|(r-w)^kC(r-A)^{-k}\| &= \|\frac{(r-w)^k}{(k-1)!}\frac{d}{dr}^{(k-1)}(C(r-A)^{-1})\| \\ &\leq M, \ \forall r > w, k = 1, 2, ...\end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (a)$

La generalización del teorema del Hille-Yosida y una consecuencia del mismo serán indispensables para desarrollar esta prueba y para ver la demostración se recomienda ver [5] y [11].

Teorema 3.2.3. Teorema de Hille Yosida Generalizado. *Sea A un operador lineal cerrado satisfaciendo:*

- $\overline{D(A)} = X$.
- $(\lambda - A)^{-1}Cx = C(\lambda - A)^{-1}x,\ x \in Rang(r - A),\ \lambda > w$.

Entonces:

Existe un C-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ acotado exponencialmente tal que:

(i) $\| S(t) \| \leq Me^{wt},\ t \geq 0$.

(ii) $(\lambda - A)^{-1}Cx = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt,\ \ (\lambda > 2w,\ x \in X)$.

Corolarío 3.2.3.1. *Sea $\widetilde{A}$ un operador cerrado satisfaciendo:*

(i) $\overline{D(\widetilde{A})} = X$.

(ii) $\|(\lambda - \widetilde{A})^{-n}\| \leq M(\lambda - w)^{-n} \quad (n = 0, 1, 2, ..., \lambda > w)$.

(iii) $(\lambda - \widetilde{A})^{-1}Cx = C(\lambda - \widetilde{A})^{-1}x,\ x \in Rang(\lambda - \widetilde{A}),\ \lambda > w$.

(iv) $(w, \infty) \subset \rho(\widetilde{A})$.

Entonces, $\widetilde{A}$ es el generador del C-semigrupo construido como en el teorema anterior y además, $A = \widetilde{A}$.

Ahora bien, supongamos que $(w, \infty) \subset \rho(A)$, C conmuta con todos los resolventes de A y también,

$\|(r - w)^k CA(r - A)^{-k}\| \leq M,\ \forall\ r > w,\ k = 1, 2, ...$

Así, existe un C-semigrupo $\{S_t\}_{t\geq 0}$ tal que :

$$\|S_t\| \leq Me^{wt}, t \geq 0$$

y

$$(r - A)^{-1}Cx = \int_0^\infty e^{-rt}S_t xdt, (r > 2w, x \in X).$$

Por otro lado,

Como A es un operador lineal cerrado satisfaciendo las condiciones anteriores, entonces por el corolario anterior tenemos que A es el generador de un C-semigrupo $S(t)$ y además $A = \widetilde{A}$, siendo $\widetilde{A}$ el generador de S_t.

Por lo tanto, por la correspondencia biunívoca que hay entre un C-semigrupo y su generador, obtenemos que:

$S(t) = S_t$, por lo que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$. ∎

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arendt, W., *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Israel J. Math.59 (1987), 327-352.

[2] Corrales, N.,*Semigrupo de operadores*, Panamá, República de Panamá, 2005.

[3] Curtain, R.F. and H.J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] Davies, E.B., *Spectral Theory and Diferential Operators*, Cambridge University, 1995.

[5] Davies, E.B. and M.M. Pang, *The Cauchy Problem and a Generalization of the Hille-Yosida Theorem*, Proc. London Math. Soc. 55 (1987), 181-208.

[6] Delaubenfels, R., *C-Semigroups and the Cauchy Problem*, Athens , Ohio, 1987.

[7] Goldstein, J., *semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, Inc., New York, 1985.

[8] Ladas, G.E. and Lakshmikantham., *Differential Equations in Abstrac Spaces*, University of Rhode Island, 1972.

[9] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operator and Aplications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] Schwenninger, F.,*Generalisations of Semigroups of Operators*, Vienna University of Technology, Vienna, Austria, noviembre, 2009.

[11] Tesis presentada por el Br. Yesika Valera, Tutor. Alexánder Carrasco, *Una Generalización del Teorema de Hille-Yosida*, Ucla-Barquisimeto, Venezuela, 2012.