

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“UN NUEVO MÉTODO DE REPRESENTACIÓN ESCALAR
PARA LA CONSTRUCCIÓN DE FRENTES DE PARETO
DÉBIL EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN
MULTIOBJETIVO”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. SILMARIS PARRA

COMO REQUISITO FINAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO

EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

TUTOR: PROF. CLAVEL QUINTANA

Barquisimeto, Venezuela. Abril de 2013



Universidad Centroccidental
 “Lisandro Alvarado”
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“UN NUEVO MÉTODO DE REPRESENTACIÓN ESCALAR PARA LA CONSTRUCCIÓN DE FRENTES DE PARETO DÉBIL EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO”

presentado por el ciudadano BR. SILMARIS PARRA titular de la Cédula de Identidad No. 17993785, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

Primeramente a Dios Todopoderoso.

Con todo mi amor a mis padres Silvio y Marina, quienes con sus esfuerzos, apoyo y preocupaciones, me han proveído de todo lo necesario para lograr mis metas.

A mis hermanas Yngrid y Lucy, a quienes amo y respeto con el alma.

Y muy especialmente a mi sobrina Stefanía Colmenarez quien es mi motor para seguir adelante. Te Amo Hija.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a mi **Dios Todopoderoso** por darme la vida y ser mi sostén en los momentos difíciles. Gracias por estar conmigo en todo momento.

A mis padres **Silvio Parra** y **Marina Anzola** por darme la vida, por todo su amor, comprensión y apoyo. Por ser las piezas fundamentales en mi existir. Por formarme como soy, una persona de bien. Sin ustedes, mis logros no serían posibles.

A mis hermanas **Yngrid Parra** y **Lucy Anzola**, quienes me brindaron su apoyo incondicional durante este proyecto de vida, por tener esa palabra de aliento cada vez que me caía y tener lista mil porras cuando me levantaba, gracias por permitirme ser su hermana y andar junto a ustedes el gran caminar de la vida juntas... Las amo infinitamente y con el alma.

A mi sobrina **Stefanía Colmenarez**, por ser de una manera u otra ese motor que me impulsa a ser cada día mejor, por esas palabras de orgullo que dices para mí sin saberlo que me hacen seguir queriendo saber más cosas para de esa manera responder a todas tus inquietudes. Te amo con toda mi alma hija.

A mis amigos y compañeros que me he ganado en estos años de estudios: **Jessica, Carlos, Yogeidy, María, Lilibeth, Betty, Mariela, Aldemar, Gaetano...** chicos GRACIAS!!! por siempre tener una palabra de aliento para conmigo y saber soportarme en mis momentos de crisis. Forman una parte especial en mi vida, los adoro.

A mi tutora **Clavel Quintana**, modelo de profesional y por sobre todo, excelente persona. Sin su constante apoyo y orientación este proyecto no hubiese llegado a buen puerto. Su excepcional capacidad de superación frente a los problemas e inigualable visión positiva han inyectado vida y dinamismo al desarrollo de mi tesis. Mis respetos y admiración.

Finalmente una mención especial a todos los profesores que han dejado una huella en

mí: **Ismael Huerta, Mario Rodríguez, Zita Pereira, Eibar Hernández, Freddy Jiménez**; ustedes han sido lo mejor que me ha pasado en la carrera y puedo decir que tengo las mejores herramientas académicas, las cuales ustedes han inculcado junto con la humildad.

Mi deseo es que el conocimiento y la experiencia que hemos adquirido a través de nuestro paso por este decanato; el **DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA** nos sirvan para forjarnos una vida digna, honesta y plena, al servicio de nuestras familias y de nuestro país.

RESUMEN

El presente trabajo se centra en el estudio de una nueva técnica numérica desarrollada por J. Dutta y Y. Kaya [2] basada en la técnica escalar Tchebychev [6],[3] la cual permitió dar respuesta a problemas de optimización multiobjetivo con frente de Pareto no convexo, además de una aplicación computacional para verificar la teoría expuesta. Se presentarán dos algoritmos; el primero basado en la técnica de Tchebychev y el otro incorporando rayos asociados a los pesos del método escalar [2], el cual ha demostrado ser eficiente en la búsqueda de soluciones Pareto débil.

Palabras clave: Optimización multiobjetivo, solución Pareto débil, solución eficiente, solución débilmente eficiente, método de Tchebychev y optimización no convexa.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
Resumen	iii
Introducción	1
1. Teoría de Optimización Multiobjetivo	5
1.1. Categorías de Funciones	8
1.2. Método de la Suma Ponderada	17
1.2.1. Ventajas	17
1.2.2. Desventajas	17
1.3. Método de ϵ -Restricción	19
1.3.1. Ventajas	19
1.3.2. Desventajas	19
1.4. Método de Benson	20
1.4.1. Ventajas	20
1.4.2. Desventajas	21
1.5. Método Función Valor	21
1.5.1. Ventajas	21
1.5.2. Desventajas	21
1.6. Método de Programación de Metas	22
1.7. Los Métodos Interactivos	22
1.8. Método del Ordenamiento Lexicográfico	23
1.9. Método de Tchebychev	23
2. Método de la Métrica Tchebychev	25
2.1. Problema ponderado Tchebychev sin rayos	26
2.2. Nueva Escalarización Tchebychev a lo largo de Rayos	29

3. Experimentación Numérica	33
3.1. Algoritmos	33
3.2. Ilustración Numérica	35
3.2.1. Problemas Sin Restricciones	36
3.2.2. Problemas Con Restricciones	42
Conclusiones	45
Referencias Bibliográficas	47

Índice de figuras

1.1. Representación del Espacio de Decisión y Espacio Objetivo	6
1.2. Función Sin Conflicto	9
1.3. Función Parcialmente en Conflicto	10
1.4. Función Totalmente en Conflicto	11
1.5. Representación de un Conjunto Convexo y No Convexo	12
1.6. Función Convexa	12
1.7. Función Cóncava	13
1.8. Representación de un Conjunto Conexo y No Conexo	14
1.9. Representación del Frente Pareto Conexo	15
1.10. Representación del Frente de Pareto No Conexo	15
1.11. Solución por medio de Suma Ponderada	18
1.12. Suma Ponderada no distribuida para Frentes No Convexos	18
1.13. Método de la ϵ -Restricción	20
3.1. Frente de Pareto de Schaffer Calculado	36
3.2. Frentes de Pareto de Shaffer calculados con el Algoritmo 1 y 2	37
3.3. Frente de Pareto de Kursawe Calculado	38
3.4. Frentes de Pareto de Kursawe calculados con el Algoritmo 1 y 2	39
3.5. Frente de Pareto de Poloni Calculado	40
3.6. Frentes de Pareto de Kursawe calculados con el Algoritmo 1 y 2	41
3.7. Frente de Pareto de Tanaka Calculado	42
3.8. Frentes de Pareto de Tanaka usando el Algoritmo 1 para N=30 y N=60	43

INTRODUCCIÓN

Gran parte de los problemas del mundo real implican la optimización simultánea de varios objetivos que generalmente presentan conflictos entre ellos; es decir, la mejora en uno conduce a un deterioro en el otro. La presencia de tales tipos de problemas es tan significativa, que consume gran parte de nuestro tiempo cotidiano de decisión. Se trata, por ejemplo, de escoger el medio ideal para llegar al trabajo, establecer el orden de nuestras tareas, elegir el restaurante para el almuerzo, hacer las compras en el supermercado, preparar la cena y la distribución de actividades en el tiempo de ocio restante. También es el mismo tipo de problemas que enfrentan los ingenieros y técnicos a la hora de diseñar e implementar sistemas de todo tipo: existen múltiples objetivos a cumplir y se espera lograrlos todos en la medida de lo posible.

Aunque la mayoría de los problemas de decisión involucran este tipo de situaciones, las propuestas computacionales de automatización que se han presentado para resolverlos habitualmente se limitan a convertir el problema de objetivos múltiples en uno en que existe un solo objetivo.

Esta reducción es debida a los modelos matemáticos empleados y puede realizarse de varias maneras, por ejemplo se prioriza uno de los objetivos y los demás se colocan como restricciones, o también se genera un objetivo compuesto otorgando pesos a los objetivos en juego y armando una suma ponderada de los mismos. De todos modos, ninguna de estas reducciones refleja fielmente al problema y, por tanto, tampoco otorga soluciones completamente satisfactorias.

Sin embargo, el estado actual de la ciencia podría generar mejores resultados ya que existen modelos matemáticos que se ajustan mejor a la naturaleza de éstos problemas. Tales modelos provienen de un área de la Investigación de Operaciones conocida como optimización con objetivos múltiples o multiobjetivo.

En los problemas de optimización de un solo objetivo el resultado óptimo deseado está claramente definido. Partiendo del ejemplo anterior el objetivo sería minimizar

precio del automóvil, y el resultado sería el automóvil con menor precio. Sin embargo, esta condición no se cumple para los problemas de optimización multiobjetivo donde, en vez de un único óptimo, contamos con todo un conjunto de soluciones de compromiso.

Se dice que las soluciones de un problema con objetivos múltiples son óptimas porque ninguna otra solución, en todo el espacio de búsqueda, es superior a ellas cuando se tienen en cuenta todos los objetivos al mismo tiempo; es decir, ningún objetivo puede mejorarse sin degradar a los demás.

Al conjunto de estas soluciones óptimas se conoce como soluciones Pareto óptimas. Muchas nociones de optimalidad en optimización multiobjetivo fueron generalizadas por Vilfredo Pareto, un controvertido sociólogo y economista italiano, que conformó estas nociones dentro de un conjunto de teorías socio-económicas conocidas como sistema *Paretiano de equilibrio general*. En éstas, Pareto afirmaba que la sociedad llegaba al límite de su bienestar cuando no podían lograrse mejoras en algún punto sin empeorarse simultáneamente otros [9]. De aquí surge el nombre óptimo de Pareto por el cual es conocida la noción de “óptimo” cuya definición formal veremos más adelante en el capítulo 1.

Introducido el concepto de optimalidad Pareto, a continuación, en la sección de preliminares se presenta formalmente las definiciones básicas de la optimización multiobjetivo, las técnicas tradicionales para resolución de problemas multiobjetivo, discutiéndolas brevemente e indicando sus ventajas y desventajas potenciales. Posteriormente, en el capítulo II se propone una nueva técnica basada en la métrica Tchebychev como una herramienta que posee cualidades deseables para la resolución de problemas multiobjetivo, la técnica propuesta puede resolver también problemas multiobjetivos no lineales que involucran regiones factibles no-convexas, las cuales plantean dificultades adicionales. En el capítulo III es la experimentación numérica donde se mostrará la eficacia del método propuesto, la cual se demostrará resolviendo una serie de problemas de prueba mediante la aplicación de dos algoritmos. Por último, se expondrán las conclusiones obtenidas con dichos algoritmos.

Objetivo General

- Estudiar y aplicar una nueva técnica escalar basada en el método de Tchebychev que permite construir frentes de Pareto débil en problemas de optimización multiobjetivo.

Objetivos Específicos

- Estudiar el concepto de solución eficiente y solución Pareto débil.
- Estudiar los métodos clásicos multiobjetivos.
- Aplicar el algoritmo 1 y 2 basado en Tchebychev y asociación de rayos respectivamente a problema clásicos multiobjetivos.
- Establecer comparaciones entre los algoritmos y presentar resultados numéricos.

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

La mayor parte de los problemas de optimización del mundo real son naturalmente multiobjetivo. Esto es, suelen tener dos o más funciones objetivo que deben satisfacerse simultáneamente y que posiblemente están en conflicto entre sí.

A continuación se presenta la definición de un problema de optimización multiobjetivo (P):

Definición 1.1. (Ver [2])

$$(P) \quad \min_{x \in X} f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)), \quad (1.1)$$

donde $X \subset \mathbb{R}^n$, y la función objetivo $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$ son continuas; f_i puede ser en general no diferenciable y no convexa.

Si una solución x satisface todas las restricciones se dice que es factible y en caso contrario se dice que no es factible.

El conjunto de todas las soluciones factibles es llamado *Región Factible X* (Espacio de Decisión).

En optimización multiobjetivo las funciones constituyen un espacio multidimensional en adición al espacio de decisión. Éste espacio adicional es llamado *Espacio objetivo Y*.

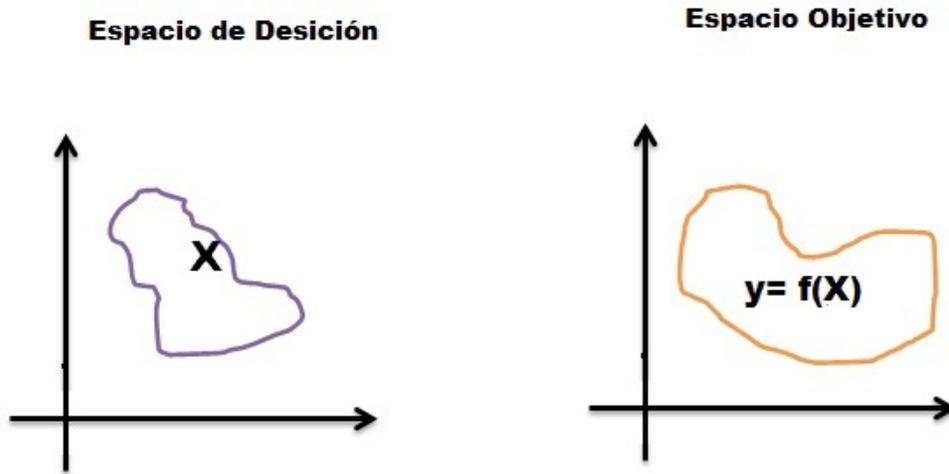


Figura 1.1: Representación del Espacio de Decisión y Espacio Objetivo

Como podemos observar en la Figura 1.1 en la optimización multiobjetivo se tienen dos espacios; los cuales son el espacio de decisión el cual representa los valores de las funciones para diferentes valores de la variable independiente x . El otro espacio es el espacio objetivo que representa los valores de una función contra la otra función, para el mismo valor de la variable independiente.

Definición 1.2. (Ver [10])

Sea M un conjunto cualquiera. Una *métrica* sobre M es una función

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.2)$$

que asocia a cada par de elementos (a, b) , con a y b en M , un número real $d(a, b)$, llamado la distancia desde a hasta b , el cual satisface las siguientes propiedades:

- $d(x, y) \geq 0$, para x e y en M .
- $d(x, y) = 0$, sí y sólo si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$, para todo par de elementos x e y en M .
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para x, y, z elementos en M .

Podemos hacer unas breves observaciones sobre la definición de distancia. En primer lugar, el lector debe observar que la distancia es siempre un número real mayor a o igual a cero. Cuando los puntos x e y en M son distintos, entonces la distancia será un número estrictamente positivo. Si los puntos son iguales, la distancia entre los mismos es cero, lo cual es muy evidente de acuerdo a nuestra intuición. La tercera propiedad, también muy intuitiva, nos dice que la distancia no depende del sentido con que se mida, es decir la distancia desde x hasta y es igual a la distancia desde y hasta x . La última propiedad, conocida como la desigualdad triangular, establece que si los tres puntos x, y, z , forman los vértices de un triángulo, entonces la suma de dos lados es siempre mayor o igual que el tercer lado.

Definición 1.3. : (Ver [3])

Una solución $\hat{x} \in X$ es llamado *Eficiente o Pareto optimal*, si $\forall x \in X, f(x) \leq f(\hat{x})$ (es decir, no hay otro que lo mejore). Si \hat{x} es eficiente, $f(\hat{x})$ es llamado *Punto No Dominado*. Si $x^1, x^2 \in X$ y $f(x^1) \leq f(x^2)$ decimos que x^1 domina a x^2 y $f(x^1)$ domina a $f(x^2)$.

Observación 1.1. :

- El conjunto de todas las soluciones eficientes $\hat{x} \in X$ es denotado por X_E y es llamado *Conjunto Eficiente*.
- El conjunto de todos los puntos no dominados $\hat{y} = f(\hat{x}) \in Y$, donde $\hat{x} \in X_E$, se denota Y_N ó P^* y es llamado *Conjunto No Dominado*.

Al concepto de solución eficiente se le conoce como no dominado, no inferior, Pareto optimal.

Ahora introduciremos la definición de solución débilmente y estrictamente eficiente.

Definición 1.4. (Ver [1], [3])

Una solución $\hat{x} \in X$ es llamada *Débilmente Eficiente* (Débilmente Pareto optimal), si $\forall x \in X, f(x) < f(\hat{x})$, es decir, $f_k(x) < f_k(\hat{x}), \forall k = 1, \dots, p$. El punto $\hat{y} = f(\hat{x})$ es llamado *Débilmente No Dominado*.

Una solución factible $\hat{x} \in X$ es llamado *Estrictamente Eficiente* (Estrictamente Pareto optimal) si no hay $x \in X, x \neq \hat{x}$ tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$. Los conjuntos débilmente (estrictamente) eficiente y no dominados son denotados por $X_{wE}(X_{sE})$ y Y_{wE} .

Definición 1.5. (Ver [4])

x^0 es llamado *Solución Propiamente Eficiente* de (P) si es eficiente y si existe un escalar $M > 0$ tal que, para cada i tenemos,

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^0)}{f_j(x^0) - f_j(x)} \leq M \quad (1.3)$$

Para algún j tal que $f_j(x) < f_j(x^0)$ siempre que $x \in X$ y $f_i > f_i(x^0)$.

Un punto eficiente que no es propiamente eficiente es llamado *Impropiamente Eficiente*.

1.1. Categorías de Funciones

En problemas multiobjetivo, las funciones objetivos pueden ser categorizadas como sin conflicto, parcialmente en conflicto y totalmente en conflicto.

Definición 1.6. (Ver [5])

Las funciones objetivos se dicen que están *Sin Conflicto* entre si, cuando cualquier par de funciones \vec{x}_a y \vec{x}_b en un conjunto S satisfacen:

$$F(\vec{x}_a) \triangleleft F(\vec{x}_b) \quad \vee \quad F(\vec{x}_b) \triangleleft F(\vec{x}_a) \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.1. : Deseamos encontrar un número real x que sea mínimo en el problema de optimización multiobjetivo. Ver Figura 1.2

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= (x^2, x^2 + 2) \\ &-2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

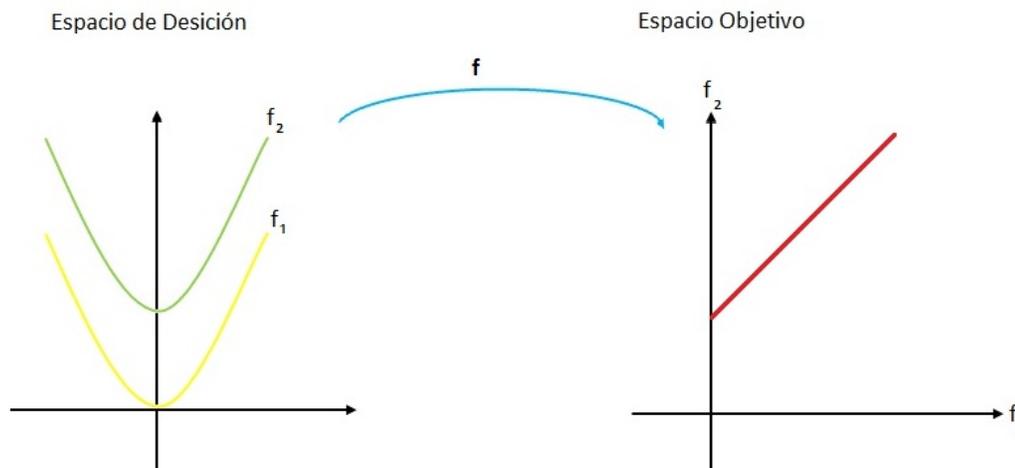


Figura 1.2: Función Sin Conflicto

En la figura 1.2 se observa que el minimizador de ambas funciones es un punto; el cual en este caso es el cero "0", de esta forma es el único punto no dominado.

Definición 1.7. (Ver [5])

Un vector de funciones objetivos $F = \{f_1, \dots, f_k\}$, se dice tener funciones *Parcialmente en Conflicto* si existen dos conjuntos de soluciones P_a y P_b , los cuales cuentan con al menos un elemento cada uno $\vec{x}_a \in P_a$, $\vec{x}_b \in P_b$ que cumplen con:

$$F(\vec{x}_a) \triangleleft F(\vec{x}_b) \triangleleft \quad \vee \quad F(\vec{x}_b) \triangleleft F(\vec{x}_a) \quad (1.5)$$

Ejemplo 1.2. : Deseamos encontrar un número real x que sea mínimo en el problema de optimización multiobjetivo planteado por Shaffer. Ver Figura 1.3

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= (x^2, (x-2)^2) \\ &-2 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

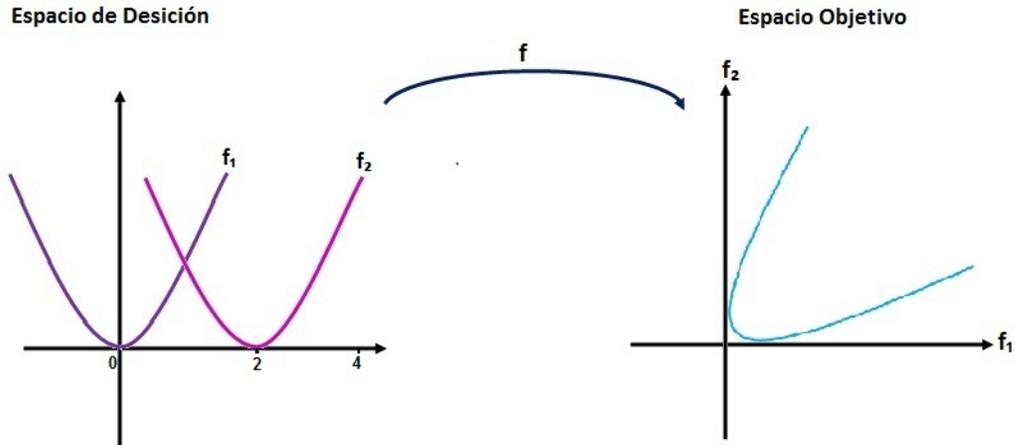


Figura 1.3: Función Parcialmente en Conflicto

El ejemplo de la Figura 1.3 es conocido como el problema de Shaffer; el cual en el espacio de decisión representa los valores de las funciones f_1 y f_2 para diferentes valores de la variable independiente x . Mientras que en el espacio objetivo representa los valores de la función f_1 graficada contra la función f_2 , para el mismo valor de la variable independiente. En otras palabras, en la Figura 1.3 se puede observar que en las regiones de $x \in [0; 2]$ las funciones están totalmente en conflicto pero en la región de $x \in [2; 4]$ no se presenta conflicto.

Definición 1.8. (Ver [5])

En un conjunto de soluciones S dado un conjunto de vectores $F = \{f_1, \dots, f_k\}$, se dice que está *Totalmente en Conflicto* si no existen dos soluciones \vec{x}_a y \vec{x}_b en un conjunto S tal que:

$$F(\vec{x}_a) \triangleleft F(\vec{x}_b) \quad \vee \quad F(\vec{x}_b) \triangleleft F(\vec{x}_a) \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.3. : Deseamos encontrar un número real x que sea mínimo en el problema de optimización multiobjetivo. Ver Figura 1.4

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= (x, -x) \\ &-2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

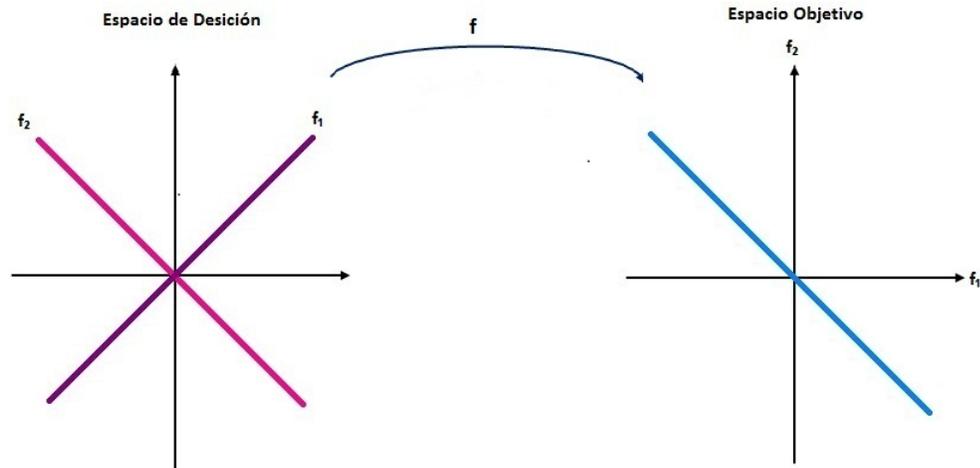


Figura 1.4: Función Totalmente en Conflicto

En la figura 1.4 se puede observar que la mejora de uno de los objetivos provoca el deterioro del otro; de igual manera se puede ver que todos los puntos son no dominados, en este caso todo el espacio de decisión es el conjunto de no dominancia

En optimización multiobjetivo también se puede usar teoría de Análisis Convexo para definir lo que es una solución eficiente. Para ello se presentará unos conceptos previos.

Definición 1.9. : (Ver [11])

Un conjunto C es *Convexo* si y sólo si se cumple que:

$$\text{Para todo } x^1, x^2 \in C, \quad \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in C, \quad \lambda \in [0, 1] \quad (1.7)$$

es decir, que dados dos puntos cualquiera del conjunto, el segmento lineal cerrado que une los dos puntos está totalmente contenido en el conjunto. Si lo anterior no se cumple decimos que el Conjunto es *No Convexo*.

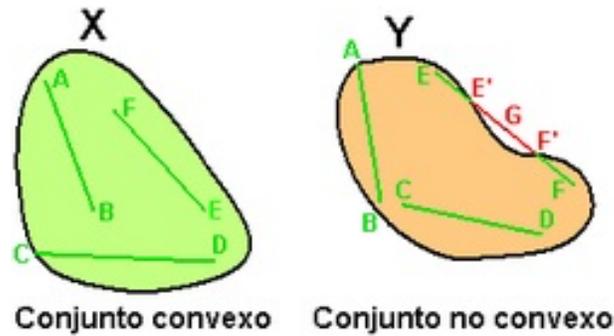


Figura 1.5: Representación de un Conjunto Convexo y No Convexo

Ahora, definamos lo que es una función convexa y cóncava.

Definición 1.10. : (Ver [11]) La función $f : C \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo C convexo y no vacío, es *Convexa* si satisface:

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2) \quad \text{Para todo } \alpha \in [0, 1] \quad (1.8)$$

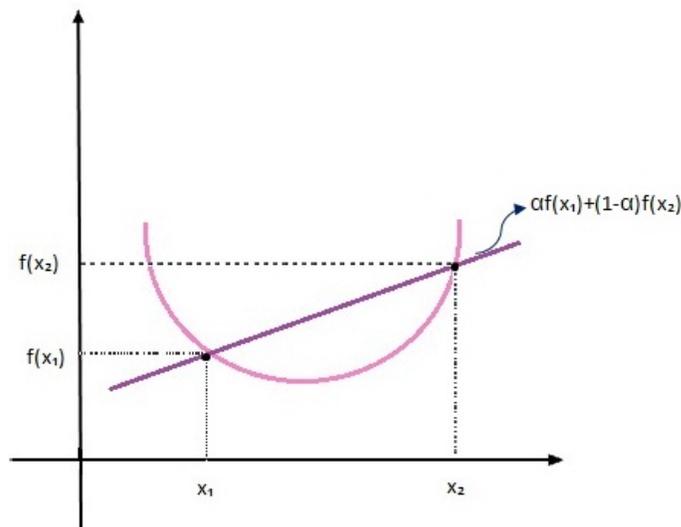


Figura 1.6: Función Convexa

De la figura 1.6 podemos observar que la función f es convexa si, y sólo si, para cualquier intervalo cerrado y acotado $[x_1, x_2] \subset I$, la gráfica de f en dicho intervalo se mantiene “por debajo” del segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Al variar x_1 y x_2 obtenemos una idea muy clara e intuitiva de la “forma” que debe tener la gráfica de una función convexa.

Definición 1.11. : (Ver [11])

La función $f : C \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo C convexo y no vacío, es *Cóncava* si satisface:

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \geq \alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2) \quad \text{Para todo} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (1.9)$$

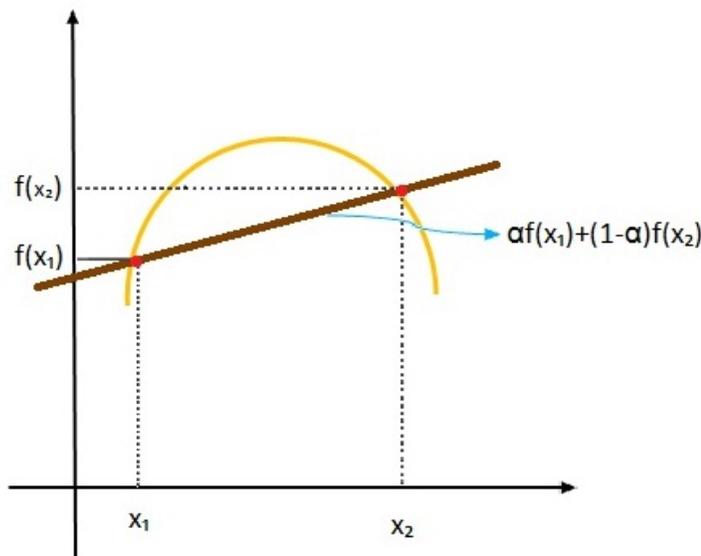


Figura 1.7: Función Cóncava

De la figura 1.7 podemos observar que la función f es cóncava si, y sólo si, para cualquier intervalo cerrado y acotado $[x_1, x_2] \subset I$, la gráfica de f en dicho intervalo se mantiene “por arriba” del segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Definición 1.12. (Ver [10])

Un conjunto *Conexo* es un subconjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ que no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos. En otras palabras, un conjunto es conexo cuando NO se puede separar en dos conjuntos abiertos tal que ninguno está vacío ni tiene puntos en común con el otro.

Cuando un conjunto no sea conexo, diremos que es inconexo, desconexo o no conexo.

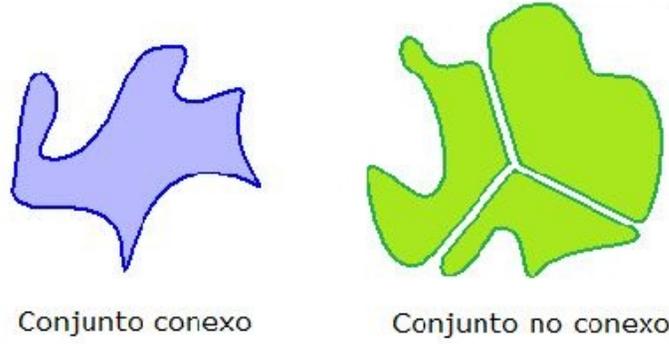


Figura 1.8: Representación de un Conjunto Conexo y No Conexo

Definición 1.13. (Ver [2])

Para un (P) dado con un vector de funciones $\vec{f}(\vec{x})$ y un conjunto de óptimos de Pareto P^* , el *Frente de Pareto*, denotado por FP^* , se define como:

$$FP^* = \{ \vec{f}(\vec{x}) = [(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))] : \vec{x} \in P^* \}$$

Definición 1.14. (Ver [2])

Un vector objetivo utópico u^* asociado con el problema (P) consiste de componentes u_i^* dados como $u_i^* = f_i^* - \epsilon_i$ donde $\epsilon_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, p$ y f_i^* es el valor óptimo del problema de optimización,

$$(P_i) \quad \min_{x \in X} f_i(x) \quad (1.10)$$

Definición 1.15. (Ver [2])

El frente de Pareto es *conexo* si y solo si el segmento de recta dado por $f_2 = u_2^* + \alpha(f_1 - u_1^*)$ en el espacio objetivo interseca el frente Pareto para todo $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, donde

$$\alpha_{min} = \arctan\left(\frac{f_2^* - u_2^*}{f_1^* - u_1^*}\right) \quad y \quad \alpha_{max} = \arctan\left(\frac{\overline{f_2} - u_2^*}{\overline{f_1} - u_1^*}\right), \quad (1.11)$$

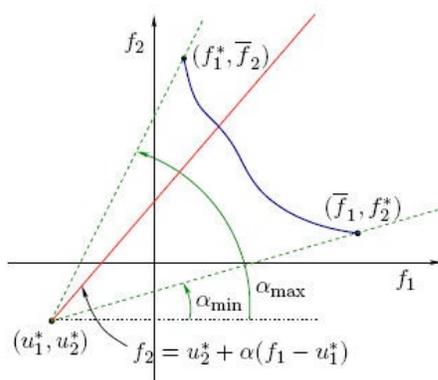


Figura 1.9: Representación del Frente Pareto Conexo

En caso contrario; el frente de Pareto es *No Conexo* si existen u_1^* , u_2^* , w_1 y w_2 tal que el segmento de recta definido por

$$w_1(f_1(x) - u_1^*) - w_2(f_2(x) - u_2^*) = 0, \text{ para todo } x \in X,$$

en el espacio objetivo no intersecta el frente de Pareto. Por lo tanto, una solución de (PR_w) con estas restricciones de igualdad no es un mínimo Pareto.

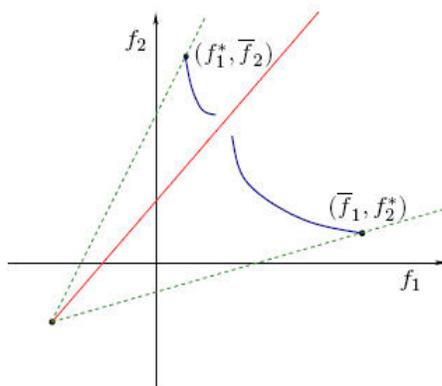


Figura 1.10: Representación del Frente de Pareto No Conexo

Ahora tenemos una proposición que nos afirma que el conjunto de los puntos no dominados se encuentran en el borde del conjunto.

Proposición 1.1. $Y_N \subset bd(Y)$. (Ver prueba en [3])

Definición 1.16. (Ver [7])

Sea $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \neq 0$. El *Rayo* generado por \tilde{x} es el conjunto $\{x : x = \lambda\tilde{x}, \lambda \geq 0\}$. Si $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto $\{x : x = \hat{x} + \theta\tilde{x}, \theta \geq 0\}$ se conoce como la *línea media* a través de \hat{x} en paralelo al rayo generado por \tilde{x} .

A continuación se describen algunos métodos clásicos utilizados para el manejo de problemas de optimización multiobjetivo. Nos referimos a estos métodos como los métodos clásicos, principalmente para distinguirlos de los métodos de evolución.

Los métodos clásicos de optimización multiobjetivo han existido por lo menos en las últimas cuatro décadas. Muchos investigadores han tratado de clasificar los algoritmos de acuerdo a diversas consideraciones. Algunos investigadores los clasifican en los siguientes tipos:

- Método de Generación.
- Métodos basados en Preferencia.

En los métodos de generación, algunas soluciones no dominadas se generan para la toma de decisiones, que a continuación elige una solución de las soluciones obtenidas no dominadas. Por otra parte, en los métodos basados en preferencias, cierta preferencia conocida para cada objetivo se utiliza en el proceso de optimización. En 1979 unos investigadores y más tarde Miettinen en 1999 (ver [6]) ajustándose a la clasificación anterior, sugirieron las cuatro clases siguientes:

- Método de No-preferencia.
- Métodos Posteriores.
- a Priori.
- Iterativos.

Los métodos de no-preferencia, no asume ninguna información acerca de la importancia de los objetivos, pero una heurística se utiliza para encontrar una solución óptima. Mientras que los métodos posteriores usan información sobre las preferencias de

cada objetivo y de forma iterativa generan un conjunto de soluciones Pareto óptima. Por otro lado, los métodos a priori usan más información acerca de la preferencia de los objetivos y suelen encontrar una solución Pareto óptima. Finalmente, los métodos iterativos utilizan la información de preferencia progresivamente durante el proceso de optimización.

1.2. Método de la Suma Ponderada

El método de la suma ponderada (Ver [1], [3], [6]), como su nombre lo indica, escalariza un conjunto de objetivos puesto en un solo objetivo por el pre-multiplicado de cada objetivo con el peso. Este método es el más sencillo y probablemente el método clásico más ampliamente utilizado.

1.2.1. Ventajas

Es la forma más simple de resolver problemas de optimización multiobjetivo. El concepto es intuitivo. Para problemas que tengan frente de Pareto óptimo convexo, este método garantiza encontrar soluciones en el contorno del conjunto Pareto óptimo.

Todo lo dicho es válido si el conjunto de soluciones es convexo, ya que cualquiera de los puntos no dominados puede ser representado por una combinación convexa de puntos del conjunto. En el caso de espacios no convexos, el conjunto de soluciones no dominadas no puede ser hallado con este método.

1.2.2. Desventajas

Sin embargo, son un número de dificultades con este enfoque. En el tratamiento de problemas mixtos de optimización, tal como son con algunos objetivos de tipo de maximización y algunos del tipo de minimización, todo objetivo ha de ser convertido solo en un tipo.

A pesar de la conversión diferente producida se puede adoptar, el principio de la dualidad es conveniente y no introduce cualquier complejidad adicional.

En un problema de optimización multiobjetivo no lineal, un conjunto de distribución uniforme de vectores de peso no se encuentra un conjunto de distribución de solución óptima de Pareto.

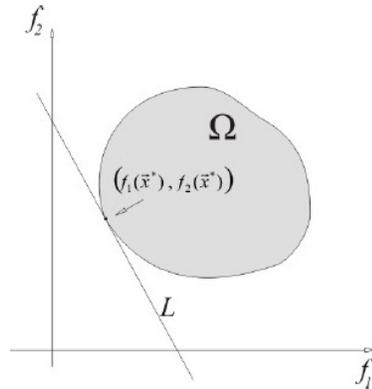


Figura 1.11: Solución por medio de Suma Ponderada

Como podemos observar en la figura 1.11; en el plano (f_1, f_2) la ecuación representa una recta L cuya pendiente está definida por w_1 y w_2 . Geométricamente, el problema puede ser planteado entonces como encontrar el vector \bar{x}^* que minimice $\overline{f(\bar{x})}$ de tal manera que la recta cuya pendiente está definida por w_1 y w_2 se acerque hasta tocar tangencialmente al conjunto Ω en el punto $(f_1(\bar{x}^*), f_2(\bar{x}^*))$. Está claro que no se obtiene con este método el Perfil de Pareto completo sino un punto óptimo. El punto será distinto para una combinación distinta de w_1 y w_2 .

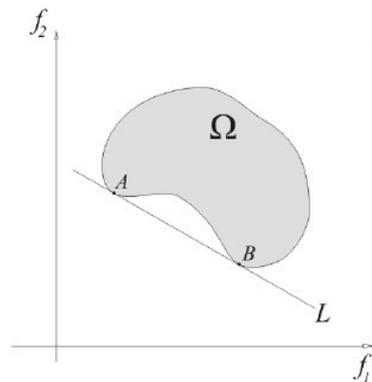


Figura 1.12: Suma Ponderada no distribuida para Frentes No Convexos

En la figura 1.12 tenemos el caso de espacios no convexos, el conjunto de soluciones no dominadas entre A y B no puede ser hallado con este método.

1.3. Método de ϵ -Restricción

Con el fin de aliviar las dificultades enfrentadas por el método de suma ponderada para resolver los problemas objetivos que tiene el espacio no convexo, el método de ϵ -restricción se utiliza (Ver [1], [3], [6]). Un científico sugirió reformular el problema de optimización multiobjetivo sólo por mantener uno de los objetivos y la restricción del resto de los objetivos dentro de los valores especificados por el usuario.

1.3.1. Ventajas

Diferentes soluciones óptimo de Pareto se pueden encontrar mediante el uso de diferentes valores ϵ_m . El mismo método también se puede utilizar para los problemas convexos o para los espacios objetivos no convexos por igual.

En cuanto a la información necesaria por parte del usuario, este algoritmo es similar al método de suma ponderada. En este último enfoque, un vector de pesos que representa la importancia relativa de cada objetivo que se necesita. En este enfoque, un vector ϵ de valores que representa, en cierto sentido, la ubicación del óptimo de Pareto es necesario. Sin embargo, la ventaja de este método es que puede ser utilizado para cualquier problema arbitrario convexo o no convexo del espacio objetivo.

1.3.2. Desventajas

La solución de un problema depende en gran medida el vector ϵ elegido. Debe ser elegido de modo que dentro de valores mínimos y máximos de la función objetivo sea individual.

Desafortunadamente, para encontrar los puntos óptimos pertenecientes al Perfil de Pareto, hay que disponer de un muy buen conocimiento previo de las funciones para establecer las restricciones ϵ_i .

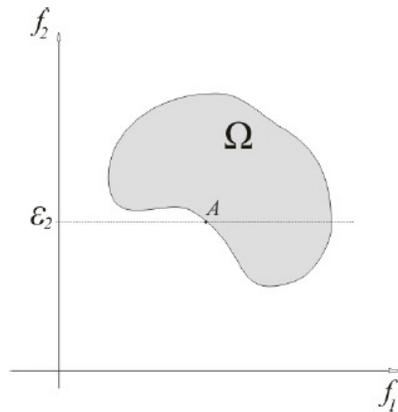


Figura 1.13: Método de la ϵ -Restricción

Como podemos observar en la figura 1.13 tenemos un caso bidimensional, de donde si se toma f_2 como una restricción que no debe bajar de ϵ_2 , luego el valor que resulta de minimizar f_1 es el que corresponde al punto A .

1.4. Método de Benson

Este procedimiento es similar al enfoque de medición ponderada, excepto que la solución de referencia se toma como una posible solución Pareto no óptima. Una solución es z^0 si es elegida al azar de la región factible. (Ver [1], [3], [6]).

1.4.1. Ventajas

Para evitar problemas de escala, las diferencias individuales pueden ser normalizados antes de la suma. Para obtener diferentes soluciones Pareto-óptimo, las diferencias pueden ser ponderados antes de la suma. A partir de entonces, al cambiar el vector de pesos, diferentes soluciones óptimas de Pareto se puede obtener. En tal escenario, el uso del punto nadir, z^{nad} , ya que el punto escogido puede ser considerado adecuado. Si z^0 se elige adecuadamente, este método puede ser utilizado para encontrar en la región soluciones óptimo de Pareto no convexo.

1.4.2. Desventajas

El problema de optimización formulado anteriormente tiene un número adicional de las restricciones necesarias para la restricción de búsqueda en la región que domina la solución elegida z^0 . Por otra parte, la función objetivo es no diferenciable, lo que causa dificultades a los métodos basados en el gradiente de resolver el problema anterior. A pesar de una fórmula modificada se sugiere en Ehrgott (2000) para las funciones objetivo diferenciables, el problema de optimización resultante tiene restricciones de igualdad que son generalmente difíciles de manejar.

1.5. Método Función Valor

En el método función valor (o función de utilidad) (Ver [1], [3], [6]), el usuario proporciona un valor de la función matemática $U : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre todos los objetivos M . La función de valor debe ser válido en todo el espacio de búsqueda posible.

1.5.1. Ventajas

Esta idea es muy simple e ideal, si la información adecuada de la función de valor está disponible. Los métodos de función de valor se utilizan principalmente en la práctica a los problemas de atributos múltiples análisis de decisiones con un conjunto discreto de soluciones factibles, aunque al principio también puede ser utilizado en espacios de búsqueda.

1.5.2. Desventajas

Como se desprende de los debates anteriores, la solución obtenida depende enteramente de la función del valor elegido. También requiere de los usuarios para llegar a una función de valor que es de aplicación global en el espacio de búsqueda completo.

Por lo tanto, existe el peligro de utilizar una función de valor sobre-simplificado.

1.6. Método de Programación de Metas

La idea principal en la programación de meta (Ver [1], [3], [6]) es encontrar soluciones que alcancen un objetivo predefinido para una o más funciones objetivo. Si no existe una solución que logre los objetivos pre-especificados en todas las funciones objetivo (el usuario está siendo optimista), la tarea es encontrar soluciones que reduzcan al mínimo las desviaciones de los objetivos.

Por otro lado, si una solución con el objetivo deseado existe, la tarea de programación por metas es identificar la solución particular. En cierto sentido, esta tarea es similar a la de satisfacer la toma de decisiones y la solución obtenida es satisfacer la solución, que puede ser diferente de una solución óptima.

1.7. Los Métodos Interactivos

Existen una serie de métodos interactivos (Ver [1], [3], [6]), donde el conocimiento mínimo necesario entre otras cosas es a priori. Por ejemplo, no hay necesidad de conocer una función de valor en relación con los objetivos incluso antes de empezar a resolver el problema. Como y cuando algunas de las soluciones Pareto óptimas se encuentran, su ubicación y se analizan las interacciones. El principal aspecto en este fabricante es responsable de proporcionar alguna información sobre la dirección de la búsqueda, los factores de vector de pesos, puntos de referencia, y otros. Desde la toma de decisiones está involucrado en el proceso de optimización, estos métodos pierden su sencillez. Algunos de los métodos más populares incluyen los siguientes:

1. Método Interactivo sustituto digno trade-off (ISWT).
2. Método de Paso.
3. Método de Punto Referencia.
4. Método Guess.
5. Diferenciable de sitios multi-objetivo basado en paquete de optimización del sistema (NIMBUS).

6. Haz de luz de búsqueda.

1.8. Método del Ordenamiento Lexicográfico

En este método (Ver [1], [3], [6]), se jerarquiza los u objetivos a optimizar, estableciendo un orden de importancia. La solución óptima \vec{x} se obtiene minimizando (o maximizando) las funciones objetivo por separado, empezando con la más importante y procediendo de acuerdo con el orden de importancia asignado a cada uno de los objetivos.

Si los subíndices de los objetivos indican no sólo el número de funciones objetivo al que corresponden, sino también la prioridad de cada objetivo, las funciones $f_1(\vec{x})$ y $f_u(\vec{x})$ denotan las funciones objetivo de mayor y menor importancia respectivamente.

El problema correspondiente al primer objetivo se formula de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f_1(\vec{x}) \\ \text{sujeto a :} & g_j(\vec{x}) \leq 0; \quad j = 1, 2, \dots, u \end{array}$$

Obteniendo de esta forma la solución \vec{x} y $f_1^* = f_1(\vec{x})$

La solución final obtenida en la optimización del último objetivo, \vec{x}_m , se considera como la solución deseada al problema. Este método es una variación de la programación por metas comentada anteriormente.

1.9. Método de Tchebychev

El método de Tchebychev (Ver [1], [3], [6]), es otro método muy importante de generación de soluciones. Puesto que es de este tipo de métodos, en cada iteración se le muestra al decisor un conjunto de alternativas para que este elija una de ellas pero además tiene la particularidad de que estas van siendo cada vez mas próximas a la solución deseada. Así se intenta llegar a la solución final en un numero no excesivo de iteraciones.

Las suposiciones básicas del método, aunque en principio se desarrolló para problemas lineales, no son nada restrictivas. De hecho, este método es aplicable a problemas multiobjetivo no lineales no convexos, con la única exigencia de que el conjunto de objetivos, $\varphi(X)$, debe ser acotado de \mathbb{R}^p .

Si bien es un método de generación de soluciones, como veremos, comparte con los métodos interactivos de niveles de referencia el hecho de que, en cada iteración, se debe minimizar una distancia entre el espacio criterio y el vector ideal del problema. El nombre del método viene dado por el hecho de que la métrica utilizada para el cálculo de esta distancia es la de Tchebychev con pesos aumentados que aseguran que el punto obtenido tras la minimización de esa distancia es un punto eficiente.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE LA MÉTRICA TCHEBYCHEV

Los algoritmos clásicos requieren de cierto conocimiento previo del problema para poder establecer los parámetros que el algoritmo requiere. La mayoría de los algoritmos clásicos sugieren una forma de transformar problemas multiobjetivo a mono-objetivo.

Dentro de los métodos clásicos se encuentra el Método de la Métrica Tchebychev, el cual se caracteriza por ser un método poco restrictivo; ya que es aplicable a problemas multiobjetivo no lineales no convexos, con la única exigencia de que el conjunto de objetivos debe ser acotado; consiste en minimizar una distancia entre el espacio criterio y el vector ideal del problema

Consideremos la siguiente definición del problema ponderado Tchebychev.

Definición 2.1. (Ver [2])

$$(P_w) \quad \min_{x \in X} \max\{w_1(f_1(x) - u_1^*), \dots, w_p(f_p(x) - u_p^*)\}, \quad (2.1)$$

donde $w_i, i = 1, \dots, p$, hacen referencia a los pesos y $u_i^*, i = 1, \dots, p$, son los respectivos valores objetivos utópicos.

El problema (P_w) usualmente se llama el problema ponderado Tchebychev (o escalización Tchebychev) a causa de la norma ponderada Tchebychev $\max_i |w_i(f_i(x) - u_i^*)| = \max_i w_i(f_i(x) - u_i^*)$ apareciendo en el costo.

El problema (P_w) calcula una solución del problema de optimización multiobjetivo no convexo (P) .

2.1. Problema ponderado Tchebychev sin rayos

En esta sección hablaremos sobre como encontrar una solución al problema (P_w) .

Teorema 2.1. (Ver [6], Teoremas 3.4.2 y 3.4.5) *El punto x^* es un mínimo débil Pareto de (P) si y solo si, x^* es una solución de (P_w) para algunos $w_1, \dots, w_p > 0$.*

Prueba:

(\Rightarrow)

Sea $x^* \in X$ un mínimo débil Pareto.

Asumamos que no existe un vector de peso $w > 0$ tal que x^* es una solución del problema ponderado de Tchebychev.

Sabemos que $f_i(x) > u_i^*$ para todo $i = 1, \dots, k$ y para todo $x \in X$

Sea

$$w_i = \frac{\beta}{f_i(x) - u_i^*} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k \quad \text{y } \beta > 0 \quad (2.2)$$

Supongamos por reducción al absurdo que x^* no es solución de (P_w) , así; existe otro punto $x^0 \in X$ que es solución de (P_w) , tal que:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq k} [w_i(f_i(x^0) - u_i^*)] &< \max_{1 \leq i \leq k} [w_i(f_i(x^*) - u_i^*)] \\ &= \max_{1 \leq i \leq k} \left[\frac{\beta}{(f_i(x^*) - u_i^*)} ((f_i(x^*) - u_i^*)) \right] \quad \text{sustituyendo } w_i \\ &= \beta \end{aligned}$$

Así;

$$w_i(f_i(x^0) - u_i^*) < \beta \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k \quad (2.3)$$

Sustituyendo (2.2) en (2.3) tenemos

$$\frac{\beta}{f_i(x^*) - u_i^*} (f_i(x^0) - u_i^*) < \beta$$

Despejando nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta}(f_i(x^0) - u_i^*) &< f_i(x^*) - u_i^* \\ f_i(x^0) - u_i^* &< f_i(x^*) - u_i^* \\ f_i(x^0) &< f_i(x^*) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Así, obtenemos que x^0 es mejor solución que x^* , $\forall i$, lo cual contradice lo supuesto.

Por lo tanto, x^* es solución de (P_w)

(\Leftarrow)

Sea $x^* \in X$ una solución de (P_w)

Supongamos por absurdo que x^* no es un mínimo débil Pareto; esto es: existe $x \in X$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*)$ para todo $i = 1, \dots, k$

De acá, tenemos que

$$f_i(x) - u_i^* < f_i(x^*) - u_i^* \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p$$

Así, x^* no puede ser solución de (P_w) , lo que contradice el hecho de que x^* es una solución de (P_w) .

Por lo tanto, x^* es un mínimo débil Pareto.

El teorema 2.1 establece las bases para una aproximación de la construcción del Frente de Pareto; es decir, permite resolver el problema (P_w) con un rango de valores para los pesos w_1, \dots, w_p , y esperanzas para generar puntos que dan una buena aproximación del Frente de Pareto.

Una de las preocupaciones principales en este trabajo es conseguir una distribución mas o menos uniforme en el espacio de valor de los puntos encontrados por solución del problema de un solo objetivo (o escalarización).

El siguiente resultado nos conduce a una interpretación geométrica interesante.

Teorema 2.2. (Ver [8], Teorema 1) *Suponga que el punto x^* es un mínimo Pareto del problema (P) tal que*

$$w_1(f_1(x^*) - u_1^*) = \dots = w_p(f_p(x^*) - u_p^*) \quad (2.4)$$

para algunos $w_1, \dots, w_p > 0$. Definamos el vector de valor óptimo

$(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p) := (f_1(x^*), \dots, f_p(x^*))$. Entonces, $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p) := (f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x}))$, donde \bar{x} es una solución del problema (P_w) para algunos w_1, \dots, w_p , es el único vector de valor óptimo.

Observemos que

$$w_1(f_1 - u_1^*) = \dots = w_p(f_p - u_p^*) \quad (2.5)$$

donde f_1, \dots, f_p son las coordenadas del espacio objetivo, representado por un rayo; es decir, un segmento de recta con dirección $(1/w_1, \dots, 1/w_p)$ y anclado en el punto de utopía (u_1^*, \dots, u_p^*) . Sea $f = (f_1, \dots, f_p)$ y $v = (1/w_1, \dots, 1/w_p)$. Entonces, una ecuación paramétrica para el rayo puede ser escrita como

$$f = tv + u^*, t \geq 0 \quad (2.6)$$

El teorema 2.2, combinado con el teorema 2.1, nos dice que si el rayo dado por (2.4) intersecta el Frente de Pareto para algunos pesos dados w_1, \dots, w_p , y si el punto en la intersección es un mínimo Pareto (pero no solo un mínimo débil Pareto), entonces una solución del problema (P_w) produce un punto Pareto.

Este resultado es útil en la generación de una buena aproximación del Frente de Pareto bajo un caso especial: En el caso cuando el mínimo débil Pareto en el frente es también un mínimo Pareto. Esta idea forma una base de los problemas ponderados Tchebychev sin rayos.

2.2. Nueva Escalarización Tchebychev a lo largo de Rayos

El enfoque dado por Dutta y Kaya [2] se diferencia de lo anterior, puesto que proponen una nueva escalarización (PR_w) con lo que es posible construir una aproximación de los frentes de débil Pareto.

En el caso cuando el conjunto de puntos de débil Pareto no es el mismo que los puntos Pareto en el frente, es decir, cuando hay mínimo débil Pareto en el frente que no son mínimo Pareto, no hay ninguna garantía más que el mínimo débil Pareto encontrado por la solución del problema (P_w) , que está en la intersección del rayo asociado con los pesos escogidos. Esto es perjudicial para encontrar una buena distribución de puntos en el Frente de Pareto. Por lo tanto, es necesario añadir la expresión para el rayo como una restricción a la escalarización.

En el trabajo de Dutta y Kaya [2] se propone un nuevo tipo de escalarización Tchebychev, que es la escalarización (P_w) sujeto al rayo asociado con la opción de los pesos de la escalarización y un punto utópico como el punto de referencia. A saber, se propone

$$(PR_w) \begin{cases} \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq p} w_i (f_i(x) - u_i^*), \\ \text{sujeto a } w_i (f_i(x) - u_i^*) - w_{i+1} (f_{i+1}(x) - u_{i+1}^*) = 0 \quad i = 1, \dots, p-1, \end{cases}$$

Notemos que las $(p-1)$ restricciones de igualdad representan un rayo como en (2.4). Llamaremos a esta nueva escalarización, Escalarización Tchebychev a lo largo de rayos.

A continuación, se demostraran los resultados de los dos teoremas 2.3 y 2.4 relativos a la nueva escalarización Tchebychev a lo largo de los rayos. En particular, el teorema 2.4 establece las bases para el algoritmo 2, que más adelante sera desarrollado.

El siguiente teorema es análogo a la primera parte del teorema 2.1.

Teorema 2.3. (Ver [2]) Si x^* es un mínimo débil Pareto en (P) , entonces x^* es una solución de (PR_w) para algún $w = (w_1, \dots, w_p) > 0$.

Prueba:

Sea $x^* \in X$ un mínimo débil Pareto.

Sea

$$w_i = \frac{\beta}{f_i(x^*) - u_i^*} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p \quad \text{y } \beta > 0 \quad (2.7)$$

Este w_i satisface las restricciones de igualdad en (PR_w) ; esto es:

$$w_i(f_i(x) - u_i^*) - w_{i+1}(f_{i+1}(x) - u_{i+1}^*) = 0 \quad (2.8)$$

En efecto:

Sustituyendo w_i en (2.12)

$$\frac{\beta}{f_i(x^*) - u_i^*}(f_i(x^*) - u_i^*) - \frac{\beta}{f_{i+1}(x^*) - u_{i+1}^*}(f_{i+1}(x^*) - u_{i+1}^*) = 0$$

Así; w_i satisface las restricciones de igualdad en (PR_w) .

Luego;

Supongamos por reducción al absurdo que $x^* \in X$ no es solución de (PR_w) ; esto es, existe $\hat{x} \in X$ que satisface las restricciones de igualdad tal que:

$$\max_{1 \leq i \leq p} w_i(f_i(\hat{x}) - u_i^*) < \max_{1 \leq i \leq p} w_i(f_i(x^*) - u_i^*) = \beta$$

Es decir,

$$w_i(f_i(\hat{x}) - u_i^*) < \beta, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p$$

Sustituyendo los pesos, nos queda que:

$$\frac{\beta}{f_i(x^*) - u_i^*}(f_i(\hat{x}) - u_i^*) < \beta$$

$$\begin{aligned}
\beta(f_i(\hat{x}) - u_i^*) &< \beta(f_i(x^*) - u_i^*) \\
\frac{\beta}{\beta}(f_i(\hat{x}) - u_i^*) &< (f_i(x^*) - u_i^*), \beta \text{ es positivo} \\
f_i(\hat{x}) - u_i^* &< f_i(x^*) - u_i^* \\
f_i(\hat{x}) &< f_i(x^*) \text{ para todo } i = 1, \dots, p.
\end{aligned}$$

Así; tenemos que \hat{x} es una mejor solución que x^* , lo cual contradice el hecho de que x^* es un mínimo débil Pareto.

Por lo tanto, lo supuesto no es cierto.

Por tanto, $x^* \in X$ es solución de (PR_w) para algunos $w_1, \dots, w_p > 0$.

Observación 2.1. El recíproco del teorema 2.3 no es cierto, a no ser que el Frente de Pareto sea conexo.

Podemos demostrar el recíproco del teorema 2.3, si requerimos que el frente de Pareto sea conexo.

Teorema 2.4. (Ver [2]) *Suponga que el frente de Pareto asociado al problema (P) es conexo. Si x^* es una solución de PR_w para algunos $w_1, \dots, w_p > 0$ entonces x^* es un mínimo débil Pareto de (P).*

Prueba:

Como x^* es una solución de PR_w existen $w_1, \dots, w_p > 0$ tal que:

$$w_i(f_i(x^*) - u_i^*) - w_{i+1}(f_{i+1}(x^*) - u_{i+1}^*) = 0$$

Esto es; $f = u^* - tv \quad t \geq 0$

Así, $f(x^*) = (f_1(x^*), \dots, f_p(x^*))$ pertenece al rayo asociado, para algún $t > 0$

Afirmación: x^* resuelve (P) (esto es; x^* es un mínimo débil Pareto).

Prueba de la Afirmación:

Supongamos por reducción al absurdo que x^* no es un mínimo débil Pareto.

Dado que el frente de Pareto es conexo (por definición), existe $\hat{x} \in X$ tal que $f(\hat{x})$ es un punto de intersección del rayo con el frente Pareto y

$$f_i(\hat{x}) - u_i^* < f_i(x^*) - u_i^* \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p$$

Dado que $w_1, \dots, w_p > 0$ tenemos que:

$$w_i(f_i(\hat{x}) - u_i^*) < w_i(f_i(x^*) - u_i^*) \quad \text{para } i = 1, \dots, p$$

Por lo tanto;

$$\max_{1 \leq i \leq p} w_i(f_i(\hat{x}) - u_i^*) < \max_{1 \leq i \leq p} w_i(f_i(x^*) - u_i^*)$$

Así; x^* no puede ser solución de (PR_w) , lo que contradice el hecho de que x^* es solución de (PR_w) .

Por lo tanto; x^* es un mínimo débil Pareto de (P)

CAPÍTULO 3

EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

Para los propósitos de estudiar los problemas de optimización multiobjetivo, se presentan dos algoritmos; el Algoritmo 1 implementa los resultados en los teoremas 2.1 y 2.2 usando la escalarización (P_w) , el Algoritmo 2 implementa el resultado en el teorema 2.4 usando la escalarización (PR_w) . Aplicaremos ambos algoritmos para problemas diferenciales y no diferenciales con frentes de Pareto conexos y no conexos.

El objetivo es estudiar el frente de Pareto cuando aplicamos el método de la escalarización Tchebychev sin rayos y a lo largo de rayos. Debido a la cantidad de cálculos necesarios, se optó por realizar la búsqueda de las soluciones utilizando MATLAB (Matrix Laboratory).

3.1. Algoritmos

En esta sección proporcionamos dos algoritmos para construir una aproximación del frente de Pareto de problemas biobjetivo. Los procedimientos que describimos aquí pueden ser generalizados a tres o más objetivos.

El algoritmo 1 emplea los resultados dados en los teoremas 2.1 y 2.2, en estos una solución del problema (P_w) da un punto único en el frente de Pareto en el espacio objetivo. Aunque el Algoritmo 1 no utiliza rayos, si la solución de problema (P_w) es Pareto (o Pareto débil que es también Pareto), entonces el punto encontrado está a lo largo del rayo asociado con los pesos escogidos, en el espacio objetivo. Si la solución del problema (P_w) es solamente Pareto débil, pero no Pareto, el teorema 2.1 todavía garantiza que el punto de solución estará en el frente de Pareto, aunque el teorema 2.2 ya no asegure que el punto de solución estará en el rayo asociado por los pesos escogidos. La última

situación puede causar una extensión no uniforme de los puntos encontrados.

Para dirigir las dificultades del Algoritmo 1 mencionados arriba, proponemos el Algoritmo 2, que usa el resultado dado en el Teorema 2.4: Si un rayo asociado con los pesos escogidos intersecta el frente de Pareto, el problema (PR_w) obtiene un punto en el frente de Pareto en el espacio objetivo, incluso si el punto de solución es sólo un mínimo débil Pareto.

El algoritmo 2 usa rayos formados por una gama de valores de los pesos, justo como se hace en el Algoritmo 1. De hecho, los Pasos 0.0-k.1 de ambos algoritmos, para variar los valores de los pesos correspondiente a una gama de rayos, son idénticos. En principio, no hay ningún modo de saber por adelantado si un rayo intersecta el frente de Pareto, sobre todo en el caso cuando el frente de Pareto es desconexo. Así, una solución del problema (PR_w) (si este existe) no puede ser un mínimo Pareto. Eliminamos tales soluciones realizando una eliminación del procedimiento en el paso final de Algoritmo 2.

Algoritmo 1 (Tchebychev)

Paso 0.0 (Inicialización) Escoge los parámetros de utopía, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$. Ponga el número de puntos discretos, $(N + 1)$, en el frente de Pareto. Conjunto $k := 1$.

Paso 0.1 (Limite del frente)

- (a) Encontrar \bar{x} que resuelve el Problema (P_1) . Sea $f_1^* := f_1(\bar{x})$ y $\bar{f}_2 := f_2(\bar{x})$.
 Marque un punto limite en el frente de Pareto: $\bar{f}^0 := (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$.
- (b) Encontrar \bar{x} que resuelve el Problema (P_2) . Sea $\bar{f}_1 := f_1(\bar{x})$ y $f_2^* := f_2(\bar{x})$.
 Marque un punto limite en el frente de Pareto: $\bar{f}^N := (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$.

Paso 0.2 (Punto de Utopía) Sea $u^* := (u_1^*, u_2^*)$ con $u_i^* := f_i^* - \epsilon_i$, $i = 1, 2$.

Paso 0.3 (Rango de ángulos para los rayos) Calcular α_{min} y α_{max} usando (1.11). El conjunto de incremento $\Delta_\alpha := (\alpha_{max} - \alpha_{min})/N$.

Paso k.1 (Ángulo y pesos para los rayos) Sea $\alpha := \alpha_{min} + k\Delta_\alpha$. Sea $w_1 := \sin \alpha$ y $w_2 := \cos \alpha$.

Paso k.2 (Mínimo Pareto) Encontrar \bar{x} que resuelve el Problema (P_w) .
Asigne un punto en el frente de Pareto: $\bar{f}^k := (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$

Paso k.3 (Criterio de parada) Si $k = N$ entonces PARAMOS. De otra manera, el conjunto $k := k + 1$, y va para el paso k.1.

Algoritmo 2 (Tchebychev A lo largo de Rayos)

Paso 0.0-Paso k.1 Se hacen los mismos pasos 0.0-k.1 del Algoritmo 1.

Paso k.2 (Candidato para un mínimo Pareto) Encontrar \bar{x} que resuelve el problema (PR_w) .

Asigne un punto candidato para el frente de Pareto: $\bar{f}^k := (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$

Paso k.3 (Terminación del Ciclo) Si $k = N$ entonces ir al paso $(N + 1)$. De otra manera, el conjunto $k := k + 1$, e ir al paso k.1.

Paso $(N + 1)$ (Eliminando puntos no Pareto) Para cada $i = 0, \dots, N$ si existe $j = 0, \dots, N$ tal que $f_1^j < f_1^i$ y $f_2^j < f_2^i$, entonces elimina \bar{f}^i .

3.2. Ilustración Numérica

En esta sección se muestran las implementaciones numéricas de los algoritmos 1 y 2 que se presentaron en la sección anterior sobre cuatro problemas de prueba.

A continuación se presentan algunos ejemplos clásicos de problemas de optimización multiobjetivo para el cual se conoce el frente de Pareto.

3.2.1. Problemas Sin Restricciones

Problema de Schaffer (1984)

Aunque de complejidad muy reducida, los problemas de Schaffer han sido abordados ampliamente por la comunidad de investigadores en la optimización multiobjetivo. Su importancia es más que nada histórica. Hemos incluido este simple problema de prueba, aún conociendo que no propone retos significativos para los algoritmos actuales, pero dado a que es un problema clásico podemos estudiar más fácilmente el comportamiento y eficacia de los algoritmos a implementar. El problema de Schaffer tiene frente de Pareto convexo y está determinado por $(\sqrt{f_1^*} - 2)^2$ en el rango $0 \leq f_1^* \leq 4$. Este problema tiene frente de Pareto continuo y diferenciable.

$$\text{Schaffer} \quad \begin{cases} \text{mín } f_1(x) = x^2 \\ \text{mín } f_2(x) = (x - 2)^2 \\ -2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

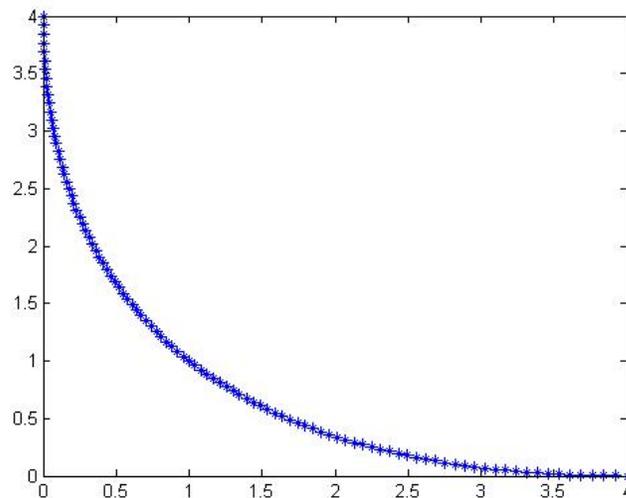


Figura 3.1: Frente de Pareto de Schaffer Calculado

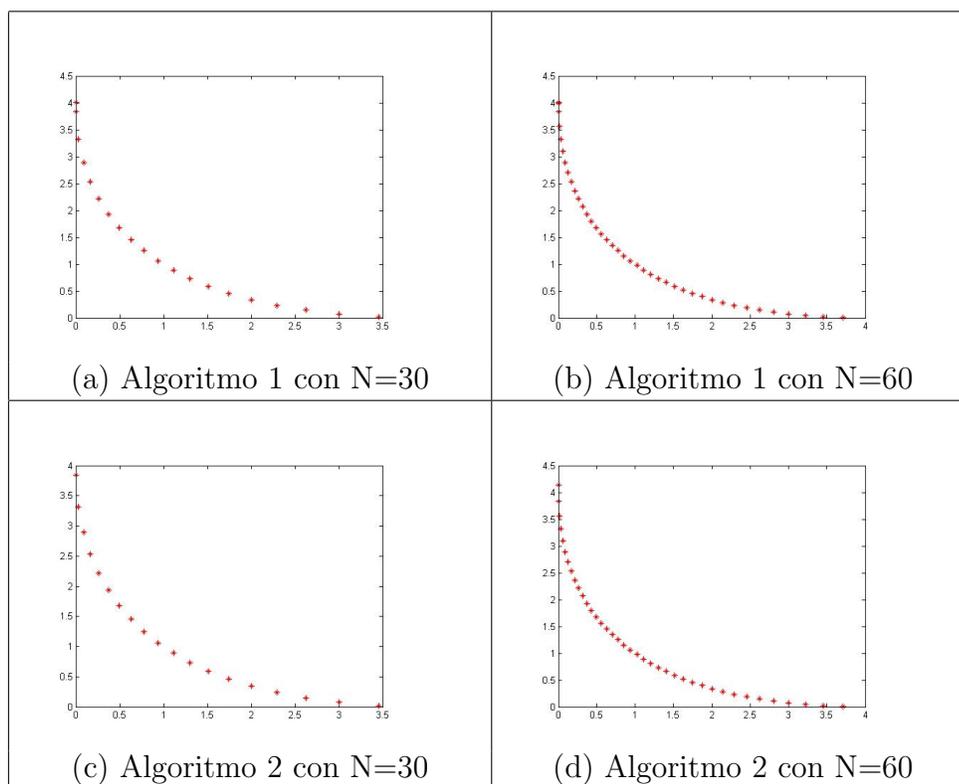


Figura 3.2: Frentes de Pareto de Shaffer calculados con el Algoritmo 1 y 2

Como era de esperarse, debido a la naturaleza del problema de Schaffer tanto el Algoritmo 1 como el Algoritmo 2 arrojaron una excelente aproximación del Frente de Pareto calculado; en la Figura 3.2 (a) observamos una buena distribución del Frente de Pareto, la cual se hace mas uniforme cuando incrementamos el valor de N , Figura 3.2 (b). En la Figura 3.2 (c) vemos como el Algoritmo 2 hace un buen trabajo, en la Figura 3.2 (d) vemos como con el Algoritmo 2 la aproximación del frente es mucho mejor y se obtiene un punto débil Pareto, dicho punto no hace desmejorar el funcionamiento de dicho Algoritmo. Observar figuras 3.1 y 3.2 para verificar este comentario.

Problema de Kursawe (1990)

Kursawe presentó un problema de dos objetivos con frente de Pareto discontinuo, formado por tres regiones no convexas, cuya formulación se ofrece a continuación:

$$Kursawe \left\{ \begin{array}{l} \min f_1(x) = \sum_{i=1}^2 [-10 \exp(-0,2 * \sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2})] \\ \min f_2(x) = \sum_{i=1}^3 [|x_i|^{0,8} + 5 \sin(x_i)^3] \\ -5 \leq x_i \leq 5, i = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

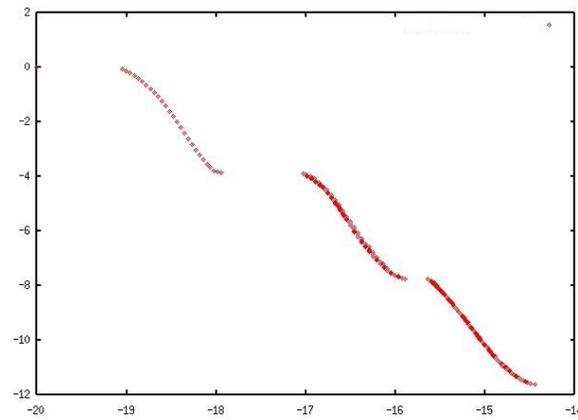


Figura 3.3: Frente de Pareto de Kursawe Calculado

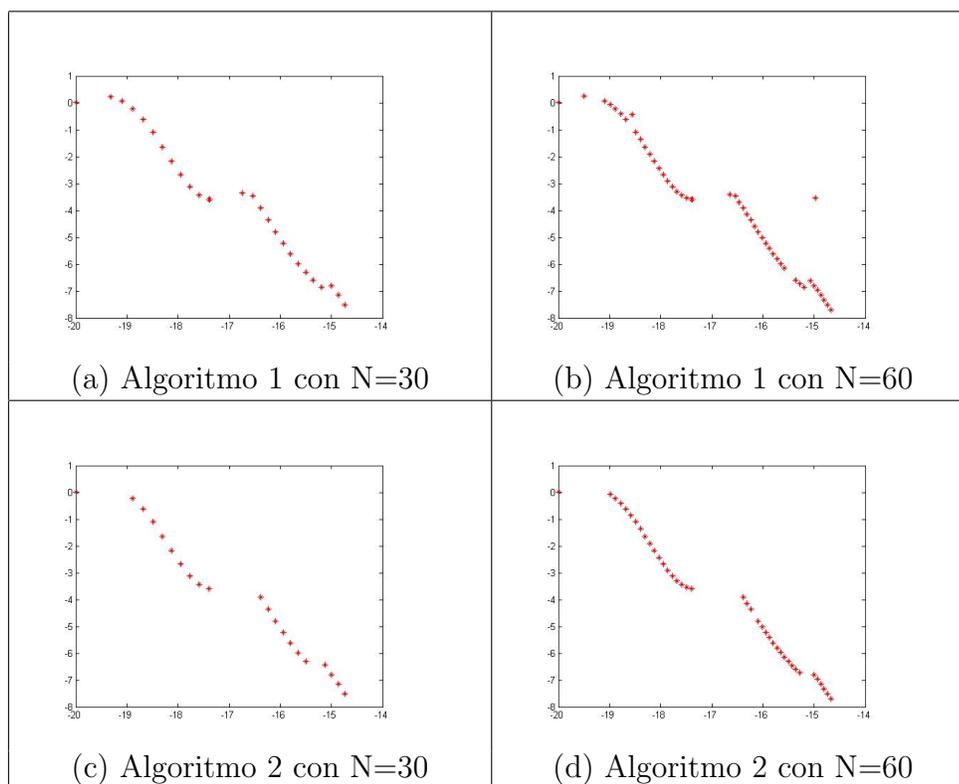


Figura 3.4: Frentes de Pareto de Kursawe calculados con el Algoritmo 1 y 2

En la Figura 3.3 se muestra el espacio objetivo y la region Pareto Optimal del problema de Kursawe calculado. La cual es mejorada en la Figura 3.4 (a) y (b) donde el Algoritmo 1 acentúa el frente de Pareto débil, además los huecos entre la porción disconexa del frente no parecen ser tan grandes, observamos como algunos de los puntos se repiten en el frente; todo esto sin desmejorar el calculo del frente. En la Figura 3.4 (c) y (d) se ve la funcionalidad del Algoritmo 2, donde la aproximación con respecto al real es buena y como era de esperarse también se encontraron puntos débiles Pareto

Problema de POL

El problema de POL posee una función no convexa y un conjunto Pareto Optimal no conexo, como es mostrado en la figura 3.5 El verdadero conjunto de soluciones Pareto Optimal es difícil de saber en este problema. El problema de POL es descrito de la siguiente manera:

$$POL \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } f_1(x) = [1 + (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2] \\ \text{mín } f_2(x) = [(x_1 + 3)^2 + (x_2 + 1)^2] \\ A_1 = 0,5\sin 1 - \cos 1 + \sin 2 - 1,5\cos 2, \\ A_2 = 1,5\sin 1 - \cos 1 + 2\sin 2 - 0,5\cos 2, \\ B_1 = 0,5\sin x_1 - 2\cos x_1 + \sin x_2 - 1,5\cos x_2, \\ B_2 = 1,5\sin x_1 - \cos x_1 + 2\sin x_2 - 0,5\cos x_2, \\ -\pi \leq (x_1, x_2) \leq \pi. \end{array} \right.$$

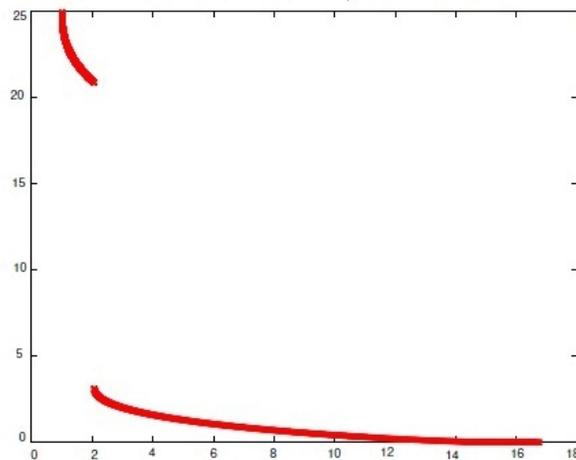


Figura 3.5: Frente de Pareto de Poloni Calculado

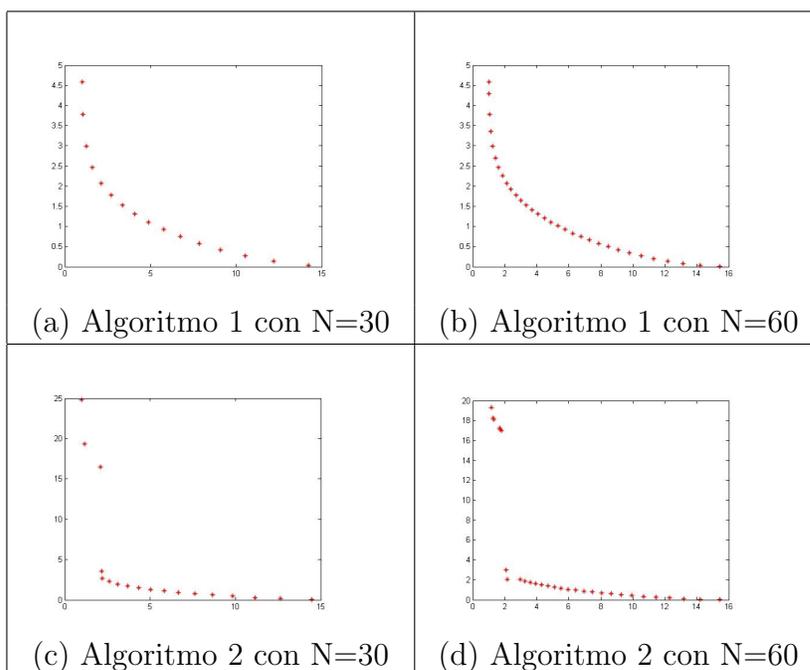


Figura 3.6: Frentes de Pareto de Kursawe calculados con el Algoritmo 1 y 2

La Figura 3.5 nos muestra el espacio objetivo y la region Pareto Optimal del problema de Poloni calculado. Como era de esperarse por la teoría estudiada el Algoritmo 1 hace su trabajo; sin embargo debido al salto grande de una porción del frente de Pareto al otro, la conjetura inicial no diferenciable se resuelve dentro del método de subgradiente desviado el cual no es bastante bueno para encontrar un mínimo global del problema (Pw) en el paso k.2. Por consiguiente, el resultado de la segunda porción (superior) del frente es omitida; para evidenciar lo explicado anteriormente observar los frentes presentados en la Figura 3.6 (a) y (b). Cabe resaltar que para la primera porción (inferior) del frente cuando $N=30$, Figura 3.6 (a), la distribución del mismo es muy buena y es mejorada cuando aumentamos el valor del N a 60, Figura 3.6 (b). En el paso k.2 del Algoritmo 2, al menos los puntos locales de Pareto son encontrados consecutivamente, conduciendo a un descubrimiento de la segunda porción (superior) del frente - ver la Figura 3.6 (c). Por consiguiente, la eliminación del procedimiento da el frente de Pareto deseado como es mostrado en la Figura 3.6 (d). Los resultados también ilustran la extensión de los puntos encontrados en el frente más o menos uniforme.

3.2.2. Problemas Con Restricciones

Problema de Tanaka

El problema de Tanaka con el que normalmente se trabaja posee una función no convexa, y un conjunto Pareto Optimal conexo; en esta oportunidad a este problema le añadiremos una tercera restricción a la función la cual es, la no diferenciabilidad. De esta manera, el problema de Tanaka modificado queda de la siguiente manera:

$$Tanaka \begin{cases} \min(x_1, x_2) \\ -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0,1\cos(16\arctan(x_1/x_2)), \\ (x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2 - 0,5 \leq 0, \\ 0,2 - \max\{|x_1 - 0,6|, |x_2 - 0,7|\} \leq 0, \\ 0 \leq (x_1, x_2) \leq \pi. \end{cases}$$

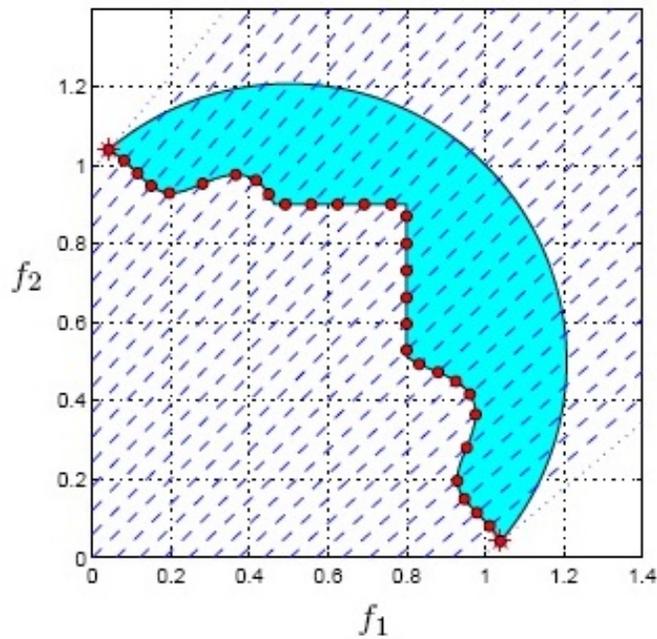


Figura 3.7: Frente de Pareto de Tanaka Calculado

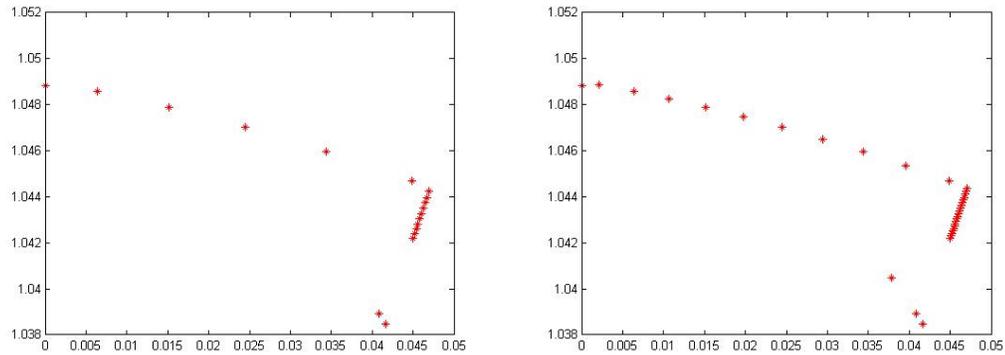


Figura 3.8: Frentes de Pareto de Tanaka usando el Algoritmo 1 para $N=30$ y $N=60$

En la Figura 3.7 se puede observar el Frente de Pareto calculado de Tanaka. Una porción del frente de Pareto donde los puntos son Pareto o Pareto débil, puede ser obtenida por el Algoritmo 1 con una extensión agradable de puntos, como se muestra en la Figura 3.8 del lado izquierdo donde el valor de N en este caso es 30. Sin embargo, la porción del frente donde puntos de Pareto débiles no son Pareto no puede ser generada bien por el Algoritmo 1, como puede ser vista en la Figura 3.8 tanto en la figura de la derecha cuando $N=60$ como la de la izquierda.

Conclusiones

Se presentó la nueva técnica de escalarización propuesta por Dutta y Kaya [2], llamada escalarización Tchebychev a lo largo de rayos, y el Algoritmo 2 asociado a dicha escalarización. También se proporcionó el Algoritmo 1, que está basado en la escalarización clásica de Tchebychev. El algoritmo 1 resuelve problemas con un frente de Pareto donde el conjunto de puntos de débil Pareto es el mismo que el conjunto de puntos de Pareto. El algoritmo 2 está basado en la nueva escalarización Tchebychev a lo largo de rayos (en el espacio objetivo) asociado con los respectivos pesos; este último Algoritmo ha demostrado ser muy eficiente en la búsqueda de soluciones Pareto ya que su aproximación al frente de Pareto real es muy buena. Aunque se presentó los Algoritmos 1 y 2 para problemas biobjetivos, ellos pueden ser generalizados a problemas con más de dos objetivos, usando las técnicas empleadas en este trabajo.

Cabe resaltar que el problema de Tanaka Modificado desarrollado en este trabajo no arrojó los mismo resultados que en el trabajo propuesto por Dutta y Kaya [2]; suponemos que este hecho se debe a que en el trabajo antes nombrado usan un paquete llamado SolvOpt el cual lo combinan con Matlab y en este trabajo solo se usaron los paquetes de Matlab. Es por ello que se puede concluir, que la eficacia de la Nueva Escalarización de Tchebychev a la hora de buscar soluciones débiles Pareto es muy buena y para obtener resultados numéricos buenos en problemas con grandes dificultades es necesario usar softwares más completos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Deb K. *Multi-objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*, Chichester. UK. Wiley (2001).

- [2] Dutta J. and Kaya Y. *A New Scalarization and Numerical Method for Constructing Weak Pareto Front of Multi-objective Optimization Problems*, Optimization, Vol. 60, Num. 8-9, pp. 1091-1104, (2011).

- [3] Ergoth M. *Multicriteria Optimization*. vol.2, Springer, New York,(2005).

- [4] Geoffrion A. *Proper Efficiency and Theory of Vector Maximization*. Journal of Mathematical Analysis and Applications vol.22,(1968).

- [5] K. C. Tan, E. F. Khor, and T. H. Lee. *Multiobjective Evolutionary algorithms and applications*. Springer Verlag, (2004).

- [6] Miettinen, K. *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer,(1999).

- [7] Murty, Katta G. *Linear and Combinatorial Programming*. John Wiley and Sons. INC. New York (1976), pp. 80.

- [8] W. Ogryczak. *Comments on properties of the minmax solutions in goal programming*, Euro. J. Oper. Res. 132 (2001), pp. 17-21.

- [9] Pareto, V. *Cours d'Economie Politique*. Droz, Genève, (1896).

- [10] Romulo Bervins. *Topología*, pp. 1-64, (2005).
- [11] Urruty H. and Baptiste J. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer-Verlag, Berlin, (1993).