

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas



“APROXIMACIÓN DE SEGUNDO ORDEN PARA LA
SOLUCIÓN DE UN MODELO MACROECONÓMICO”

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR

BR. JAVIER ANDRÉS MONTES

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
ÁREA DE CONOCIMIENTO: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.
TUTOR: PROF. (MSc) JHONNY ESCALONA



Universidad Centroccidental
 "Lisandro Alvarado"
 Decanato de Ciencias y Tecnología
 Licenciatura en Ciencias Matemáticas



ACTA
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

“APROXIMACIÓN DE SEGUNDO ORDEN PARA LA SOLUCIÓN DE UN MODELO MACROECONÓMICO”

Presentado por el ciudadano BR. JAVIER ANDRÉS MONTES titular de la Cédula de Identidad N° 18.058.230. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

¹ _____

Con una calificación de _____ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ____ días del mes de _____ de _____.

 TUTOR

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

 PRINCIPAL

 FIRMA

OBSERVACIONES:

¹ Aprobado ó Reprobado

*La vida no está hecha de deseos y sí
de los actos de cada uno.*

A mi Dios.

A mis Hermanas en especial

Lismary y Betza.

A los Mackediches.

A mi Tutor.

AGRADECIMIENTOS

Al creador de todas las cosas DIOS, el que me ha dado la fortaleza para continuar cuando a punto de caer he estado; por ello, por protegerme, por darme el conocimiento, y las herramientas necesarias para seguir adelante y vencer el desánimo que en muchas situaciones me embargaban.

A mis padres por haberme dado la vida y enseñarme que el éxito se consigue con dedicación y perseverancia. Gracias esto es para ustedes....

A mi hermanita Lismary, por ser mi inspiración, mi apoyo, mi fortaleza, por animarme cuando sentía que no valía la pena seguir luchando, por todo ese amor que me ha dado y que permanece en mi corazón, a tí te debo mucho de lo que ahora soy. Gracias hermanita, esto es para tí. Te Amo....

A mi hermana Betzabe, por su apoyo, comprensión, por ser mas que una hermana una gran amiga, por tener Fe en mi y saber esperar de que este logro tarde o temprano llegaría. Este logro también es tuyo. Te Quiero herma....

A Marylin porque siempre haz sido y serás una gran hermana para mi, por ser una amiga fiel y tener confianza en mi....

A mis tíos, por su apoyo, por su gran ayuda, en especial a mi tía LIS por cuidarme desde niño y estar siempre presente en los momentos difíciles, gracias por estar a mi lado siempre....

A Maria Jose, Hailing y a ti Hongsito por ser parte de este gran logro, porque con su cariño y afecto me daban fuerza para seguir adelante y así poder llegar a la meta. Los Adoro....

A mis Sobrinos, en especial a Lany, Sofia y Michell por ser mi motivación, este triunfo es para que vean en mi un gran ejemplo a seguir, a la hora de que decidan ser alguien en la vida, tengan presente de que si se puede alcanzar lo que nos proponemos. Este logro es por ustedes. Los Quiero....

A mis primos , por su apoyo y atención, en especial a Roswell y Diego por verme como su confidente y escuchar mis consejos....

A Joaquin Remond y a su familia, por su apoyo incondicional, por esos sabios consejos, por ser un gran amigo. Les agradezco todo lo que han hecho por mí....

La amistad duplica las alegrías y divide las tristezas, esa alegría la pude conseguir en ustedes Betzabet Tovar, Jose Quiroz, Francisco López, Kissy Álvarez, Dannymar Gonzales, Alejandro Gil, Rafael y Carmen Julia, por el apoyo en todo momento, por sus consejos, por las tantas noches sin dormir persiguiendo un sueño que hoy estoy por alcanzar, por dejarme cada uno una enseñanza, a todos muchas gracias... Los quiero... .

A mis profesores, Luz Rodríguez, Mario Rodríguez, Mireya Bracamonte, Javier Hernández, por sus consejos, por su colaboración y sus enseñanzas durante toda la carrera....

Y eternamente agradecido a quien fortaleció mis conocimientos, vio potencial en Mí para seguir en esta carrera y me dio la oportunidad de trabajar con el reforzando mis ideas con su conocimiento: A mi tutor Prof. Jhonny Escalona

“APROXIMACIÓN DE SEGUNDO ORDEN PARA LA SOLUCIÓN DE UN MODELO MACROECONÓMICO”

RESUMEN

En este trabajo se estudiarán las aproximaciones de primer y segundo orden para obtener la solución de una clase general de modelos macroeconómicos de tiempo discreto. Además, se estudiarán filtros de kalman y filtros de partículas para obtener estimaciones de variables no observables que aparecen en una representación espacio-estado del modelo macroeconómico. Se realizará un estudio comparativo de las estimaciones entre la aproximación de segundo orden y la aproximación de primer orden.

ÍNDICE

Agradecimientos	i
Resumen	ii
1. Preliminares.	3
1.1. Polinomios de Taylor	3
1.2. Fórmula de Taylor para funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}	4
2. Modelo DSGE.	7
2.1. Introducción	7
2.2. Un Modelo DSGE Estándar	7
2.3. Solución al Modelo DSGE	8
2.4. Aproximación de Primer Orden	10
2.5. Aproximación de Segundo Orden	12
3. Filtros de Kalman.	16
3.1. Introducción	16
3.2. Representaciones de Espacio-Estado	17
3.3. Filtros de Kalman	18
3.4. Observación	24
4. Filtros de Partículas.	25
4.1. Introducción	25

5. Resultados numéricos.	29
5.1. Aplicación	29
5.2. Análisis de Resultados	30
5.3. Observación	32
6. Conclusion.	33
Referencias bibliográficas.	34

Índice de figuras

5.1. Gráfica de los estados con los distintos métodos de estimación.	31
--	----

Introducción.

Los modelos de Equilibrio General Dinámico y Estocástico (DSGE) se han convertido en una herramienta estándar para el estudio de complejos fenómenos en diversos campos de la economía. Son utilizados cada vez más por tomadores de decisiones que quieren analizar los efectos de diferentes decisiones de política, o que quieren contar con proyecciones hechas con métodos rigurosos. La mayoría de los modelos DSGE no tienen una solución analítica, y su función de verosimilitud no se puede evaluar analíticamente, la mayor parte de la literatura se ha centrado en aproximaciones lineales a los modelos originales, lo que permite el uso de filtro de Kalman para construir la función de verosimilitud, y para realizar la estimación y la predicción de los estados.

En este trabajo, se estudiarán aproximaciones lineales y cuadráticas del modelo DSGE dadas en [6], se realizarán estimaciones de los estados no observables para un modelo simple de valoración de activos, utilizando filtros de Kalman para el caso lineal y filtros de partículas para el caso cuadrático.

El trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera: en el capítulo 1, son presentados los preliminares necesarios para desarrollar este trabajo; en el capítulo 2, se muestra la teoría de los modelos DSGE y los cálculos de la aproximación de primer y segundo orden; en el capítulo 3, se desarrolló el contenido relacionado con los filtros de Kalman, la representación de Espacio- Estado, algunas propiedades y el algoritmo; en el capítulo 4, se plantea una introducción a los filtros de Partículas, se explicaron sus etapas con un ejemplo y se emplea el algoritmo; en el capítulo 5, presentamos los resultados numéricos usando un ejemplo de un modelo de valoración de activos, analizamos los resultados del ejemplo haciendo unas comparaciones entre

filtros de kalman y filtros de partículas.

Capítulo 1

Preliminares.

§1.1. Polinomios de Taylor

Definición 1.1. (Polinomios de Taylor para funciones de dos variables.)

Si f es una función diferenciable entonces :

$$Z = f(\bar{x}_0) + [Df(\bar{x}_0)][\bar{x} - \bar{x}_0]$$

debe ser una buena aproximación de la función en la vecindad de \bar{x}_0 es decir:

$$f(\bar{x}) \approx f(\bar{x}_0) + [Df(\bar{x}_0)][\bar{x} - \bar{x}_0]$$

Para funciones de dos variables tenemos:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Polinomio de Taylor de primer orden:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} [x - x_0] + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} [y - y_0] + r_1$$

Para función de una variable el polinomio de Taylor de segundo orden viene dado por:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] + \frac{1}{2}f''(x_0)[x - x_0]^2$$

Haciendo analogía para funciones de varias variables, deberíamos utilizar matrices diferenciales y vectores de \mathbb{R}^n .

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + [Df(\bar{x}_0)][x - x_0] + \frac{1}{2}[x - x_0]^T [D(Df(\bar{x}_0))][x - x_0] + r_2$$

Donde $D(Df(\bar{x}_0))$ seria la matriz diferencial de la matriz diferencial, es decir la matriz de las segundas derivadas, la cual se denomina **matriz Hessiana** se denota por $H(f)$ y se define de la siguiente manera:

$$H(f) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \cdots & f_{x_2x_n} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \cdots & f_{x_3x_n} \\ f_{x_4x_1} & f_{x_4x_2} & f_{x_4x_3} \cdots & f_{x_4x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}.$$

Si f es una matriz de dos variables, la matriz Hessiana seria:

$$H(f(x, y)) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Bien, el polinomio de Taylor de segundo orden para funciones de dos variables seria:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{bmatrix} [x - x_0 \ y - y_0] \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{bmatrix} + r_2$$

§1.2. Fórmula de Taylor para funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}

La fórmula de Taylor se puede extender a funciones reales f definidas en un subconjuntos de \mathbb{R}^n . En orden a establecer el teorema general en forma parecida al caso unidimensional, introducimos símbolos especiales

$$f''(x; t), f'''(x; t), \dots, f^m(x; t),$$

para ciertas sumas que aparecen en fórmula de Taylor, juegan el papel de las derivadas direccionales de orden superior, y se definen como sigue: Si x es un punto de \mathbb{R}^n en el que existen las derivadas parciales de segundo orden de f , y si $t = (t_1, \dots, t_n)$ es un punto arbitrario de \mathbb{R}^n , se escribe

$$f''(x; t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{i,j} f(x) t_j t_i.$$

Se define también

$$f'''(x; t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{i,j,k} f(x) t_k t_j t_i.$$

cuando existen todas las derivadas parciales de tercer orden en x . El símbolo $f^m(x; t)$ se define análogamente cuando existen todas las derivadas parciales de orden m . Estas sumas son análogas a la fórmula

$$f'(x; t) = \sum_{i=1}^n D_i f(x) t_i.$$

para la derivada direccional de una función diferenciable en x .

Teorema 1.1. (Fórmula de Taylor).

Supongamos que f y todas sus derivadas parciales de orden menor que m son diferenciables en cada punto de un subconjunto abierto S de \mathbb{R}^n . Si a y b son dos puntos de S tales que $L(a, b) \subseteq S$, entonces existe un punto Z del segmento rectilíneo $L(a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a; b - a) + \frac{1}{m!} f^{(m)}(z; b - a).$$

Demostración. Puesto que S es abierto, existe un $\delta > 0$ tal que $a + t(b - a) \in S$ para todo t real del intervalo $-\delta < t < 1 + \delta$. se define g en $(-\delta, 1 + \delta)$ por medio de la ecuación:

$$g(t) = f[a + t(b - a)].$$

Entonces,

$$f(b) - f(a) = g(1) - g(0).$$

Probaremos el teorema aplicando la fórmula de Taylor unidimensional a g , que nos permite escribir:

$$g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{m!} g^{(m)}(\theta), \text{ en donde } 0 < \theta < 1. \quad (1.1)$$

Pero g es una función compuesta dada por $g(t) = f[p(t)]$, en donde $p(t) = a + t(b - a)$. La k -ésima componente de p tiene derivada $p'_k(t) = b_k - a_k$. Aplicando la regla de la cadena, vemos que $g'(t)$ existe en el intervalo $(-\delta, 1 + \delta)$ y viene dada por la fórmula

$$g'(t) = \sum_{j=1}^n D_j f[p(t)](b_j - a_j) = f'(p(t); b - a).$$

Aplicando de nuevo la regla de la cadena, tenemos

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{i,j} f[p(t)](b_j - a_j)(b_i - a_i) = f''(p(t); b - a).$$

Análogamente, hallamos que $g^{(m)}(t) = f^{(m)}(p(t); b - a)$ utilizando estos resultados en (1.1) se obtiene el teorema, ya que el punto $z = a + \theta(b - a) \in L(a, b)$.

Capítulo 2

Modelo DSGE.

§2.1. Introducción

Los modelos de equilibrio general dinámico se han convertido en el referente fundamental de la modelización macroeconómica en la actualidad. Cualquier pregunta que queramos hacernos en relación al comportamiento de una economía o la explicación de un determinado fenómeno económico que observamos empíricamente, requiere del uso de un modelo de equilibrio general dinámico. Su uso tan extendido se debe a que estos modelos son los únicos que nos permiten analizar cómo responden los diferentes agentes económicos ante cambios en su entorno, determinándose dichas respuestas en un entorno de equilibrio general, en el cual todas las variables económicas endógenas se determinan de forma simultánea.

§2.2. Un Modelo DSGE Estándar

El término DSGE (dinámico estocástico de equilibrio general) define una clase de modelos ampliamente utilizados en macroeconomía que tienen la siguiente característica:

1. En ellos se describen y caracterizan la evolución de las variables en el tiempo.
2. Normalmente se basan en fundamentos microeconómicos y en la hipótesis de que los mercados se equilibran a través del ajuste de precios y cantidades.

3. Se basan en fluctuaciones aleatorias de tecnología , preferencias y otras fuentes exógenas como el principal impulso para el movimiento de las variables económicas en el tiempo.

Un ejemplo clásico de un modelo de equilibrio general dinámico estocástico, es el modelo de crecimiento (RBC). Por simplicidad, supongamos que el capital no se desprecia, que el trabajo es suministrado inelásticamente (y normalizado a 1), que la utilidad es logarítmica en el consumo y que los shocks de tecnología afectan la capacidad de la sociedad para producir bienes. Entonces, el problema del agente representativo se puede escribir como:

$$\text{máx } E_t \left(\sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \log C_s \right) \quad (2.1)$$

sujeto a

$$K_{t+1} - K_t = A_{t+1}^{1-\alpha} K_t^\alpha - C_t, \quad (2.2)$$

donde suponemos que la tecnología sigue un proceso Autoregresivo de primer orden (AR(1)) en logaritmo, esto es :

$$\log A_t = \rho \log A_{t-1} + \sigma \varepsilon_t, \quad (2.3)$$

y donde $|\rho| < 1$ es la autocorrelación de los shocks y suponemos que la innovación a la tecnología ε_t tiene media cero y varianza uno.

El consumo óptimo a través de los períodos sucesivos puede ser descrito por la ecuación de consumo de Euler:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left(\frac{1}{C_{t+1}} \left(\alpha \left(\frac{A_{t+1}}{k_{t+1}} \right)^{1-\alpha} + 1 \right) \right). \quad (2.4)$$

§2.3. Solución al Modelo DSGE

El conjunto de condiciones de equilibrio de una gran variedad de modelos dinámicos de equilibrio general en la macroeconomía se pueden escribir como:

$$E_t f_\theta(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t) = 0, \quad (2.5)$$

donde E_t denota el operador matemático esperanza condicional en la información disponible en el tiempo t . El vector x_t contiene variables macroeconómicas no observables y es de dimensión $n_x \times 1$, el vector y_t contiene variables macroeconómicas observables y es de dimensión $n_y \times 1$, θ es el vector de parámetros del modelo, sea $f : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $n = n_x + n_y$. El vector de estado x_t se puede dividir como:

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

El vector x_t^1 se compone de variables de estado endógenas no observables, el vector x_t^2 de variables de estado exógenas. En concreto, se supone que x_t^2 sigue el proceso estocástico exógeno dado por:

$$x_{t+1}^2 = \Lambda x_t^2 + \tilde{\eta} \sigma \varepsilon_{t+1}, \quad (2.7)$$

donde los vectores x_t^2 y ε_t son de dimensión $n \times 1$. Supondremos que ε_t tiene distribución normal con media 0 y matriz de covarianza \mathcal{I} . El escalar $\sigma \geq 0$ y la matriz $\tilde{\eta}$ de dimensión $n_\varepsilon \times n_\varepsilon$ son parámetros conocidos. Supondremos que todos los autovalores de la matriz Λ tienen módulo menor que 1. Para ver cómo las condiciones de equilibrio de un modelo familiar pueden ser expresadas en la forma dada por la ecuación (2.5), consideremos el modelo de crecimiento económico dado en la sección anterior. Las condiciones de equilibrio están dadas por:

- $C_t^{-1} = \beta E_t \left(C_{t+1}^{-1} \left(1 + \alpha \left(\frac{A_{t+1}}{K_t} \right)^{1-\alpha} \right) \right)$
- $K_{t+1} = A_t^{1-\alpha} K_{t-1}^\alpha - C_t - K_t$
- $LnA_{t+1} = \rho LnA_t + \sigma \varepsilon_{t+1}$

$\forall t \geq 0$, dado K_0 y A_0 . Sea $y_t = C_t$ y

$$x_t = \begin{bmatrix} K_t \\ LnA_t \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Entonces:

$$E_t f_\theta(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t) = \begin{bmatrix} y_{1t}^{-1} - \beta y_{1t+1}^{-1} [\alpha \exp^{x_{2t-1}} x_{1t+1}^{\alpha-1} + 1] \\ y_{1t} + x_{t+1} - \exp^{x_{2t}} x_{1t}^\alpha - x_{1t} \\ x_{2t+1} - \rho x_{2t} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde x_{it} y y_{it} denotan, respectivamente el elemento i de los vectores x_t y y_t . Retornando al caso general, la solución al modelo que figura en la ecuación (2.5) es de la forma:

$$y_t = g(x_t, \sigma), \quad (2.10)$$

$$x_{t+1} = h(x_t, \sigma) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}, \quad (2.11)$$

donde $g : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ y $h : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$. La matriz η es de orden $n_x \times n_\varepsilon$ y es dado por:

$$\eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Queremos encontrar una aproximación de primer orden de las funciones g y h alrededor del estado estacionario no estocástico $x_t = \bar{x}$ y $\sigma = 0$. Definimos el estado estacionario no estocástico como vectores (\bar{x}, \bar{y}) tal que: $f(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) = 0$. Por lo tanto $\bar{y} = g(\bar{x}, 0)$ y $\bar{x} = h(\bar{x}, 0)$. Para ver esto, observe que si $\sigma = 0$, entonces $E_t f = f$.

Sustituyendo la solución propuesta dada por las ecuaciones (2.10) y (2.11) en la ecuación (2.5) podemos definir:

$$F(x, \sigma) = E_t f(g(h(x, \sigma) + \eta\sigma\varepsilon', \sigma), g(x, \sigma), h(x, \sigma) + \eta\sigma\varepsilon', x) = 0. \quad (2.13)$$

Las variables con supraíndice ($'$) indican las variables en el período $t + 1$. Debido a que $F(x, \sigma)$ debe ser igual a cero para los valores posibles de x , y , σ , entonces, las derivadas de F de cualquier orden también deben ser igual a cero. Formalmente:

$$F_{x^k \sigma^j}(x, \sigma) = 0 \quad \forall x, \sigma, j, k. \quad (2.14)$$

Donde $F_{x^k \sigma^j}(x, \sigma)$ denota las derivadas de F con respecto a x k -veces, y con respecto a σ j -veces.

§2.4. Aproximación de Primer Orden

Estamos buscando aproximaciones de primer orden a g y h alrededor del punto $(x, \sigma) = (\bar{x}, 0)$ de la forma:

$$g(x, \sigma) = g(\bar{x}, 0) + g_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) + g_\sigma(\bar{x}, 0)\sigma \quad (2.15)$$

$$h(x, \sigma) = h(\bar{x}, 0) + h_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) + h_\sigma(\bar{x}, 0)\sigma \quad (2.16)$$

Como se explicó anteriormente $g(\bar{x}, 0) = \bar{y}$ y $h(\bar{x}, 0) = \bar{x}$. El resto de los coeficientes desconocidos g_x , h_x , g_σ y h_σ de las aproximaciones de primer orden de g y h se obtienen de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$F_x(\bar{x}, 0) = 0,$$

$$F_\sigma(\bar{x}, 0) = 0.$$

Por lo tanto, utilizando la primera de estas dos expresiones g_x y h_x se puede encontrar la solución al sistema:

$$\begin{aligned} [F_x(\bar{x}, 0)]_j^i &= [f_{y'}]_\alpha^i [g_x]_\beta^\alpha [h_x]_j^\beta + [f_y]_\alpha^i [g_x]_j^\alpha + [f_{x'}]_\beta^i [h_x]_j^\beta + [f_x]_j^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\forall i = 1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, n_y \quad j, \beta = 1, \dots, n_x$$

Aquí estamos usando la notación propuesta por Colloard y Juillard (2001 a). Así, por ejemplo, $[f_{y'}]_\alpha^i$ es el elemento (i, α) de la derivada de f con respecto a y' . La derivada de f con respecto a y' es una matriz de orden $n \times n_y$. Por lo tanto $[f_{y'}]_\alpha^i$ es el elemento de esta matriz ubicado en la intersección de la fila i y columna α . Además, por ejemplo:

$$[f_{y'}]_\alpha^i [g_x]_\beta^\alpha [h_x]_j^\beta = \sum_{\alpha=1}^{n_y} \sum_{\beta=1}^{n_x} (\partial f^i / \partial y'^\alpha) (\partial g^\alpha / \partial x^\beta) (\partial h^\beta / \partial x^j) \quad (2.17)$$

Observe que las derivadas de f evaluadas en $(y', y, x', x) = (\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x})$ son conocidas. La expresión anterior representa un sistema de $n \times n_x$ ecuaciones de segundo grado con $n \times n_x$ incógnitas dado por los elementos de g_x y h_x . Similarmente, g_σ y h_σ se determinan como la solución a las n ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} [F_\sigma(\bar{x}, 0)]^i &= E_t \{ [f_{y'}]_\alpha^i [g_x]_\beta^\alpha [h_\sigma]^\beta + [f_{y'}]_\alpha^i [g_x]_\beta^\alpha [\eta]_\phi^\beta [\varepsilon']^\phi + [f_{y'}]_\alpha^i [g_\sigma]^\alpha + [f_y]_\alpha^i [g_\sigma]^\alpha + [f_{x'}]_\beta^i [h_\sigma]^\beta \\ &+ [f_{x'}]_\beta^i [\eta]_\phi^\beta [\varepsilon']^\phi \} \\ &= [f_{y'}]_\alpha^i [g_x]_\beta^\alpha [h_\sigma]^\beta + [f_{y'}]_\alpha^i [g_\sigma]^\alpha + [f_y]_\alpha^i [g_\sigma]^\alpha + [f_{x'}]_\beta^i [h_\sigma]^\beta \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, n_y; \quad \beta = 1, \dots, n_x; \quad \phi = 1, \dots, n_\varepsilon.$$

Observe que ésta última ecuación es lineal y homogénea en g y h . Así, existe una única solución: $h_\sigma = 0$ y $g_\sigma = 0$.

§2.5. Aproximación de Segundo Orden

Las aproximaciones de segundo orden a g y h alrededor del punto $(x, \sigma) = (\bar{x}, 0)$ son de la forma:

$$\begin{aligned}
 [g(x, \sigma)]^i &= [g(\bar{x}, 0)]^i + [g_x(\bar{x}, 0)]_a^i [(x - \bar{x})]_a + [g_\sigma(\bar{x}, 0)]^i [\sigma] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [g_{xx}(\bar{x}, 0)]_{ab}^i [(x - \bar{x})]_a [(x - \bar{x})]_b \\
 &\quad + \frac{1}{2} [g_{x\sigma}(\bar{x}, 0)]_a^i [(x - \bar{x})]_a [\sigma] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [g_{\sigma x}(\bar{x}, 0)]_a^i [(x - \bar{x})]_a [\sigma] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [g_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0)]^i [\sigma] [\sigma],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [h(x, \sigma)]^j &= [h(\bar{x}, 0)]^j + [h_x(\bar{x}, 0)]_a^j [(x - \bar{x})]_a + [h_\sigma(\bar{x}, 0)]^j [\sigma] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [h_{xx}(\bar{x}, 0)]_{ab}^j [(x - \bar{x})]_a [(x - \bar{x})]_b \\
 &\quad + \frac{1}{2} [h_{x\sigma}(\bar{x}, 0)]_a^j [(x - \bar{x})]_a [\sigma] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [h_{\sigma x}(\bar{x}, 0)]_a^j [(x - \bar{x})]_a [\sigma] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [h_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0)]^j [\sigma] [\sigma],
 \end{aligned}$$

donde,

$$i = 1, \dots, n_y; \quad a, b = 1, \dots, n_x \quad y \quad j = 1, \dots, n_x.$$

Las incógnitas de esta expansión son $[g_{xx}]_{ab}^i, [g_{x\sigma}]_a^i, [g_{\sigma x}]_a^i, [g_{\sigma\sigma}]^i, [h_{xx}]_{ab}^j, [h_{x\sigma}]_a^j, [h_{\sigma x}]_a^j, [h_{\sigma\sigma}]^j$, donde hemos omitido el argumento $(\bar{x}, 0)$. Estos coeficientes se pueden identificar por las dos derivadas de $F(x, \sigma)$ con respecto a x y σ y haciendo la evaluación de las mismas en $(x, \sigma) = (\bar{x}, 0)$. Por los argumentos presentados anteriormente, estas derivadas deben ser ceros. Particularmente, hemos utilizado $F_{xx}(\bar{x}, 0)$ para

identificar $g_{xx}(\bar{x}, 0)$ y $h_{xx}(\bar{x}, 0)$. Es decir,

$$\begin{aligned}
 [F_{xx}(\bar{x}, 0)]_{jk}^i &= ([f_{y'ly'}]_{\alpha\gamma}^i [g_x]_{\delta}^{\gamma} [h_x]_k^{\delta} + [f_{y'ly'}]_{\alpha\gamma}^i [g_x]_k^{\gamma} \\
 &\quad + [f_{y'lx}]_{\alpha\delta}^i [h_x]_k^{\delta} + [f_{y'lx}]_{\alpha k}^i) [g_x]_{\beta}^{\alpha} [h_x]_j^{\beta} \\
 &\quad + [f_{y'}]_{\alpha}^i [g_{xx}]_{\beta\delta}^{\alpha} [h_x]_k^{\delta} [h_x]_j^{\beta} \\
 &\quad + [f_{y'}]_{\alpha}^i [g_x]_{\beta}^{\alpha} [h_{xx}]_{jk}^{\beta} \\
 &\quad + ([f_{yy'}]_{\alpha\gamma}^i [g_x]_{\delta}^{\gamma} [h_x]_k^{\delta} + [f_{yy'}]_{\alpha\gamma}^i [g_x]_k^{\gamma} + [f_{y'lx}]_{\alpha\delta}^i [h_x]_k^{\delta} + [f_{y'lx}]_{\alpha k}^i) [g_x]_j^{\alpha} \\
 &\quad + [f_{y'}]_{\alpha}^i [g_{xx}]_{jk}^{\alpha} \\
 &\quad + ([f_{x'ly'}]_{\beta\gamma}^i [g_x]_{\delta}^{\gamma} [h_x]_k^{\delta} + [f_{x'ly'}]_{\beta\gamma}^i [g_x]_k^{\gamma} + [f_{x'lx}]_{\beta\delta}^i [h_x]_k^{\delta} + [f_{x'lx}]_{\beta k}^i) [h_x]_j^{\beta} \\
 &\quad + [f_{x'}]_{\beta}^i [h_{xx}]_{jk}^{\beta} \\
 &\quad + [f_{xy'}]_{j\gamma}^i [g_x]_{\delta}^{\gamma} [h_x]_k^{\delta} + [f_{xy'}]_{j\gamma}^i [g_x]_k^{\gamma} + [f_{x'lx}]_{j\delta}^i [h_x]_k^{\delta} + [f_{x'lx}]_{jk}^i \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j, k, \beta, \delta = 1, \dots, n_x; \quad \alpha, \gamma = 1, \dots, n_y.$$

Ya que sabemos que las derivadas de f , además como las primeras derivadas con respecto a g y h evaluada en $(y', y, x', x) = (y', y', x', x')$, Se deduce que la expresión anterior representa un sistema de ecuaciones lineales de orden $n \times n_x \times n_x$ con $n \times n_x \times n_x$ Incógnitas dadas por los elementos de g_{xx} y h_{xx} . De manera similar, $g_{\sigma\sigma}$ y $h_{\sigma\sigma}$ pueden obtenerse resolviendo el sistema lineal $F_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0) = 0$. Más explícitamente,

$$\begin{aligned}
 [F_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0)]^i &= [f_{y'}]_{\alpha}^i [g_x]_{\beta}^{\alpha} [h_{\sigma\sigma}]^{\beta} \\
 &\quad + [f_{y'ly'}]_{\alpha\gamma}^i [g_x]_{\delta}^{\gamma} [\eta]_{\xi}^{\delta} [g_x]_{\beta}^{\alpha} [\eta]_{\phi}^{\beta} [I]_{\xi}^{\phi} \\
 &\quad + [f_{y'lx}]_{\alpha\delta}^i [\eta]_{\xi}^{\delta} [g_x]_{\beta}^{\alpha} [\eta]_{\phi}^{\beta} [I]_{\xi}^{\phi} \\
 &\quad + [f_{y'}]_{\alpha}^i [g_{xx}]_{\beta\delta}^{\alpha} [\eta]_{\xi}^{\delta} [\eta]_{\phi}^{\beta} [I]_{\xi}^{\phi} \\
 &\quad + [f_{y'}]_{\alpha}^i [g_{\sigma\sigma}]_{\alpha} \\
 &\quad + [f_y]_{\alpha}^i [g_{\sigma\sigma}]_{\alpha} \\
 &\quad + [f_{x'}]_{\beta}^i [h_{\sigma\sigma}]_{\beta} \\
 &\quad + [f_{x'ly'}]_{\beta\gamma}^i [g_x]_{\delta}^{\gamma} [\eta]_{\xi}^{\delta} [\eta]_{\phi}^{\beta} [I]_{\xi}^{\phi} \\
 &\quad + [f_{x'lx}]_{\beta\delta}^i [\eta]_{\xi}^{\delta} [\eta]_{\phi}^{\beta} [I]_{\xi}^{\phi} \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n; \quad \alpha, \gamma = 1, \dots, n_y; \quad \beta, \delta = 1, \dots, n_x; \quad \phi, \xi = 1, \dots, n_{\epsilon}.$$

Este es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas dados por los elementos de $g_{\sigma\sigma}$ y $h_{\sigma\sigma}$. Finalmente, se muestra que las derivadas cruzadas $g_{x\sigma}$ y $h_{x\sigma}$ es igual cero cuando se evalúa en $(\bar{x}, 0)$. Se escribe el sistema $F_{\sigma x}(\bar{x}, 0) = 0$, teniendo en cuenta que todos los términos que contengan cualquiera de g_{σ} o h_{σ} son cero en $(\bar{x}, 0)$. Entonces tenemos,

$$\begin{aligned} [F_{\sigma x}(\bar{x}, 0)]_j^i &= [f_{y'}]_{\alpha}^i [g_x]_{\beta}^{\alpha} [h_{\sigma x}]_j^{\beta} + [f_{y'}]_{\alpha}^i [g_{\sigma x}]_j^{\alpha} + [f_{x'}]_{\beta}^i [h_{\sigma x}]_j^{\beta} \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, n_y; \quad \beta, \gamma, j = 1, \dots, n_x; \quad .$$

Este es un sistema de ecuaciones de orden $n \times n_x$ con $n \times n_x$ incógnitas dadas por los elementos de $g_{\sigma x}$ y $h_{\sigma x}$. Pero claramente el sistema es homogéneo. Por lo tanto, si existe una única solución, y esta dada por:

$$\begin{aligned} g_{\sigma x} &= 0 \text{ y} \\ h_{\sigma x} &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones representan el segundo resultado teórico el cual es uno de los principales. Muestran en general, hasta el segundo orden, los coeficientes de la función política, en los términos que son lineales el vector estado no dependa del tamaño de la varianza ya que no son factores fundamentales.

Teorema 2.1. Considerar el modelo dado por (2.5) y su solución dada por las funciones de política (2.10) y (2.11). Entonces;

$$\begin{aligned} g_{\sigma}(\bar{x}, 0) &= 0 \\ h_{\sigma}(\bar{x}, 0) &= 0 \\ g_{x\sigma}(\bar{x}, 0) &= 0 \\ h_{x\sigma}(\bar{x}, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Una vez obtenida la aproximación de primer y segundo orden, se obtienen dos representaciones espacio-estado, una lineal dada por

$$y_t = \bar{y} + g_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}), \tag{2.18}$$

$$x_{t+1} = \bar{x} + h_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}, \tag{2.19}$$

y otra cuadrática dada por,

$$y_t = \bar{y} + g_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}g_{xx}(\bar{x}, 0)(x - \bar{x})(x - \bar{x})' + \frac{1}{2}g_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0)\sigma^2, \quad (2.20)$$

$$x_{t+1} = \bar{x} + h_x(\bar{x}, 0)(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}h_{xx}(\bar{x}, 0)(x - \bar{x})(x - \bar{x})' + \frac{1}{2}h_{\sigma\sigma}(\bar{x}, 0)\sigma^2 + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}, \quad (2.21)$$

En estas representaciones la variable de estado x es no observable, por lo tanto se tiene que estimar. En los siguientes capítulos abordaremos métodos de estimación para los estados no observables.

Filtros de Kalman.

§3.1. Introducción

En los últimos años las representaciones de espacio estado, y los filtros de Kalman asociados han tenido un impacto profundo en el análisis de series temporales y muchas otras áreas relacionadas. Las técnicas fueron desarrolladas originalmente en relación con el control de sistemas lineales. En econometría los modelos estructurales de series de tiempo desarrollado por Harvey (1990) se formulan (como el modelo de descomposición clásica) directamente en términos de componentes de interés, como tendencia, componente estacional, y el ruido. Sin embargo, la rigidez del modelo de descomposición clásica se evita al permitir que la tendencia y los componentes estacionales de evolucionar al azar y no determinista. Éstas recurrencias permiten un enfoque unificado a la predicción y la estimación para todo proceso que se puede dar una representación en espacio de estado. Tras el desarrollo de Kalman discutimos la estimación con modelos estructurales y la formulación de modelos de espacio de estado para hacer frente a los valores perdidos. A lo largo del capítulo vamos a utilizar la notación:

$$W_t \sim N(0, R_t)$$

para indicar que los vectores aleatorios W_t tienen medida cero y que:

$$E(W_s W_t') = \begin{cases} R_t, & \text{si } s = t \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

§3.2. Representaciones de Espacio-Estado

Un modelo de Espacio-Estado para una serie de tiempo (posiblemente multi-variada) $\{Y_t; t = 1, 2, \dots\}$ consiste en dos ecuaciones: La primera conocida como la ecuación de observación, expresa la observación Y_t de dimensión w , como una función lineal de una variable de estado X de dimensión v más un ruido W_t de dimensión w . Por tanto:

$$Y_t = G_t X_t + W_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

donde $W_t \sim N(0, R)$ y G_t es una secuencia de matrices de dimensión $w \times v$. La segunda ecuación, llamada ecuación de Estado, determina el Estado X_{t+1} en el tiempo $t+1$, en términos del estado anterior X_t más un ruido. La ecuación de Estado es:

$$X_{t+1} = F_t X_t + V_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

donde F_t es una secuencia de matrices de dimensión $v \times v$, $V_t \sim N(0, Q)$ y V_t no se correlaciona con W_t , (es decir $E(W_t V_{s'}) = 0$, para todo s y t). Supondremos que el estado inicial X_1 no se correlaciona con todos los términos de ruido V_t y W_t .

Observación 3.1. Una forma general del modelo de Espacio-Estado permite la correlación entre V_t y W_t , y la adición de un término de control $H_t U_t$ en la ecuación de estado. En la teoría de control, $H_t U_t$ representa el efecto de la aplicación al control U_t al tiempo t , con el fin de influir en X_{t+1} . Sin embargo, el sistema definido por (3.1) y (3.2) con $E(W_t V_{s'}) = 0$ para todo s y t , será adecuado para nuestros propósitos.

Observación 3.2. En muchos casos especiales importantes, algunas matrices F_t , G_t , Q_t y R_t serán independientes de t , en cuyo caso los subíndices se suprimirán.

Observación 3.3. Sigue de la ecuación de Observación (3.1) y la ecuación de estado (3.2) que X_t y Y_t tienen las formas funcionales, para $t=2,3,\dots$,

$$\begin{aligned} X_t &= F_{t-1} X_{t-1} + V_{t-1} \\ &= F_{t-1} (F_{t-2} X_{t-2} + V_{t-2}) + V_{t-1} \\ &\vdots \\ &= (F_{t-1} \dots F_1) X_1 + (F_{t-1} \dots F_2) V_1 + \dots + F_{t+1} V_{t-2} + V_{t-1} \\ &= f_t(X_1, V_1, \dots, V_{t-1}) \end{aligned}$$

y

$$Y_t = g_t(X_1, V_1, \dots, V_{t-1}, W_t) \quad (3.3)$$

Observación 3.4. De la observación (3.3) y la hipótesis sobre las condiciones de ruido, es evidente que: $E(V_t X_{st}) = 0$, $E(V_t Y_{st}) = 0 \quad 1 \leq s \leq t$ y $E(W_t X_{st}) = 0$, $E(W_t Y_{st}) = 0 \quad 1 \leq s \leq t$.

Definición 3.1. Una serie de tiempo Y_t tiene una representación de Espacio-Estado, si existe un modelo de Espacio-Estado para Y_t como se especifican en las ecuaciones (3.1) y (3.2).

§3.3. Filtros de Kalman

En la práctica el principal objetivo en el análisis de un modelo lineal dinámico es producir estimadores para los vectores no observados s_t a partir de las observaciones $Y_r = (y_1, \dots, y_r)$ a tiempo r .

Cuando $r < t$: El problema es denominado Predicción.

Cuando $r = t$: El problema es denominado Filtrado.

Cuando $r > t$: El problema es denominado Suavizado.

En esta sección sólo trataremos el caso $r = t$. A lo largo de este capítulo utilizaremos las siguientes notaciones:

$$s_t^r = E(s_t | Y_r) \quad (3.4)$$

y

$$P_{t_1, t_2}^r = E\{(s_{t_1} - s_{t_1}^r)(s_{t_2} - s_{t_2}^r)^T | Y_r\} \quad (3.5)$$

Cuando $t_1 = t_2 = t$, la ecuación definida en (3.5) nos queda:

$$P_t^r = E\{(s_t - s_t^r)(s_t - s_t^r)^T | Y_r\} \quad (3.6)$$

Este resultado explica que $(s_t - s_t^r)$ y Y_r son independientes (a causa de la normalidad).

El Filtro de Kalman nos da la ecuación de filtros y predicción, el nombre filtro viene por el hecho que s_t^t es un filtro lineal de las observaciones y_1, y_2, \dots, y_t es decir:

$$s_t^t = \sum_{r=1}^t B_r y_r \quad (3.7)$$

Para matrices adecuadamente elegidas B_r de orden $p \times q$.

La ventaja del filtro de Kalman es que éste especifica como actualizar el filtro desde s_{t-1}^{t-1} a s_t^t , a partir y_t sin tener que procesar toda los datos y_1, y_2, \dots, y_t .

Proposición 3.1. (El Filtro de Kalman.)

Para el modelo lineal dinámico dado por las ecuaciones $s_t = \phi_{s_{t+1}} + w_t$ y $y_t = A_t s_t + v_t$, donde A es una matriz de dimensión $p \times q$, y_t es un vector de observación de dimensión $q \times 1$ y v_t es el vector Gaussiano con media cero y matriz de covarianza R de dimensión $q \times q$, con condiciones iniciales $s_0^0 = \mu_0$ y $P_0^0 = \Sigma_0$ para $t = 1, \dots, n$ se tiene:

$$s_{t-1}^t = \Phi s_{t-1}^{t-1} \quad (3.8)$$

$$P_{t-1}^t = \Phi P_{t-1}^{t-1} \Phi^T + Q \quad (3.9)$$

con

$$s_t^t = s_{t-1}^{t-1} + K_t(y_t - A_t s_{t-1}^{t-1}) \quad (3.10)$$

$$P_t^t = [I - K_t A_t] P_{t-1}^{t-1} \quad (3.11)$$

Donde

$$K_t = P_{t-1}^{t-1} A_t^T [A_t P_{t-1}^{t-1} A_t^T + R]^{-1} \quad (3.12)$$

Es denominada la ganancia de kalman. La predicción para $t > n$, se logra a través de las ecuaciones (3.8) y (3.9) con condiciones iniciales s_n^n y P_n^n .

Demostración:

Haciendo uso de algunas definiciones y cálculos ya vistos tenemos que

$$\begin{aligned}
 s_t^{t-1} &= E(s_t | Y_{t-1}) \\
 &= E(\Phi s_{t-1} + w_t | Y_{t-1}) \\
 &= E(\Phi s_{t-1} | Y_{t-1}) + E(w_t | Y_{t-1}) \\
 &= \Phi E(s_{t-1} | Y_{t-1}) \\
 s_t^{t-1} &= \Phi s_{t-1}^{t-1}
 \end{aligned}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned}
 P_t^{t-1} &= E\{(s_t - s_t^{t-1})(s_t - s_t^{t-1})^T\} \\
 &= E\{\Phi s_{t-1} + w_t - \Phi s_{t-1}^{t-1}(\Phi s_{t-1} + w_t - \Phi s_{t-1}^{t-1})^T\} \\
 P_t^{t-1} &= E\{\Phi(s_{t-1} - s_{t-1}^{t-1}) + w_t)(\Phi(s_{t-1} - s_{t-1}^{t-1}) + w_t)^T\}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 P_t^{t-1} &= E\{\Phi(s_{t-1} - s_{t-1}^{t-1})(s_{t-1} - s_{t-1}^{t-1})^T \Phi^T\} + E\{\Phi(s_{t-1} - s_{t-1}^{t-1})w_t^T\} \\
 &+ E\{w_t(s_{t-1} - s_{t-1}^{t-1})^T \Phi^T\} + E\{w_t w_t^T\} \\
 &= \Phi P_{t-1}^{t-1} \Phi^T + \Phi E\{(s_{t-1} - s_{t-1}^{t-1})w_t^T\} + E\{w_t(s_{t-1} - s_{t-1}^{t-1})^T\} \Phi^T \\
 &+ E\{w_t w_t^T\}
 \end{aligned}$$

como $w_t \sim N(0, Q)$ con $t = 1, \dots, n$ son independientes idénticamente distribuidas tenemos que

$$P_t^{t-1} = \Phi P_{t-1}^{t-1} \Phi^T + Q$$

Luego para obtener la ecuación (3.10) primero definimos las innovaciones como

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_t &= y_t - E(y_t | Y_{t-1}) \\
 &= y_t - E(A_t s_t + v_t | Y_{t-1}) \\
 &= y_t - E(A_t s_t | Y_{t-1}) - E(v_t | Y_{t-1}) \\
 &= y_t - A_t E(s_t | Y_{t-1})
 \end{aligned}$$

Así,

$$\varepsilon_t = y_t - A_t s_t^{t-1} \quad (3.14)$$

Para $t = 1, \dots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= E(y_t - E(y_t|Y_{t-1})) \\ &= E(y_t) - E(E(y_t|Y_{t-1})) \\ &= E(y_t) - E(y_t) \\ \Rightarrow E(\varepsilon_t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= Var(\varepsilon_t) \\ &= Var(y_t - A_t s_t^{t-1}) \\ &= Var(A_t s_t + v_t - A_t s_t^{t-1}) \\ &= Var(A_t(s_t - s_t^{t-1}) + v_t) \\ &= Cov[(A_t(s_t - s_t^{t-1}) + v_t), (A_t(s_t - s_t^{t-1}) + v_t)^T] \\ &= Cov[A_t(s_t - s_t^{t-1}), (s_t - s_t^{t-1})^T A_t^T] + Cov[A_t(s_t - s_t^{t-1}), v_t^T] \\ &\quad + Cov[v_t, (s_t - s_t^{t-1})A_t^T] + Cov[v_t, v_t^T] \end{aligned}$$

Además, puesto v_t es independiente idénticamente distribuidos con $v_t \sim N(0, R)$ y usando las definiciones y propiedades de covarianza y esperanza condicional nos queda que:

$$\Sigma_t = A_t P_t^{t-1} A_t^T + R \quad (3.15)$$

Donde, $E(\varepsilon_t, y_r^T) = 0$ para $r < t$.

En vista de que la sucesión de innovación es un proceso gaussiano, esto implica que las innovaciones son independientes de las observaciones (observaciones pasadas). Además la condición de covarianza entre s_t y ε_t , dado Y_{t-1} es:

$$\begin{aligned}
 Cov(s_t, \varepsilon_t | Y_{t-1}) &= Cov(s_t, y_t - A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}) \\
 &= Cov(s_t, y_t - A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}) - Cov(s_t^{t-1}, y_t - A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}) \\
 &= Cov((s_t - s_t^{t-1}), y_t - A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}) \\
 &= Cov((s_t - s_t^{t-1}), A_t(s_t - s_t^{t-1}) + v_t | Y_{t-1}) \\
 &= Cov((s_t - s_t^{t-1}), A_t(s_t - s_t^{t-1} | Y_{t-1})) + Cov((s_t - s_t^{t-1}), v_t | Y_{t-1}) \\
 &= E(s_t - s_t^{t-1})(A_t(s_t - s_t^{t-1}))^T - E(s_t - s_t^{t-1})A_t E(s_t - s_t^{t-1}) \\
 &\quad + E\{(s_t - s_t^{t-1})v_t\} + E(s_t - s_t^{t-1})E(v_t) \\
 &= E\{(s_t - s_t^{t-1})(s_t - s_t^{t-1})^T\}A^T \\
 \Rightarrow Cov(s_t, \varepsilon_t | Y_{t-1}) &= P_t^{t-1}A_t^T
 \end{aligned}$$

Del uso de estos resultados tenemos que la distribución condicional conjunta de s_t y ε_t dado Y_{t-1} es normal.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

con

$$X = \begin{pmatrix} s_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}$$

Además como

$$\begin{pmatrix} s_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} | Y_{t-1} \sim N \left[\begin{pmatrix} E(s_t) \\ E(\varepsilon_t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Var(s_t | Y_{t-1}) & Cov(s_t, \varepsilon_t) \\ Cov(\varepsilon_t, s_t) & Var(\varepsilon_t | Y_{t-1}) \end{pmatrix} \right]$$

En conclusión nos queda que:

$$\begin{pmatrix} s_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} | Y_{t-1} \sim N \left[\begin{pmatrix} s_t^{t-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_t^{t-1} & P_t^{t-1}A_t^T \\ A_t^T P_t^{t-1} & \Sigma_t \end{pmatrix} \right] \quad (3.16)$$

Por otra parte calculemos s_t^t

$$\begin{aligned}
 s_t^t &= E(s_t | y_1, \dots, y_{t-1}, y_t) \\
 &= E(s_t | Y_{t-1}, y_t)
 \end{aligned}$$

como $\varepsilon_t = y_t - A_t s_t^{t-1}$ entonces despejando tenemos que $y_t = \varepsilon_t + A_t s_t^{t-1}$
 Así nos queda que

$$s_t^t = E(s_t | y_{t-1}, \varepsilon_t + A_t s_t^{t-1})$$

Así usando la siguiente definición de $E(s|y)$ en s_t^t

$$\begin{aligned} E(s|y) &:= \mu_s + \Sigma_{sy} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \mu_y) \\ s_t^t &= E(s_t | y_{t-1}) + \Sigma_{s_t, \varepsilon_t + A_t s_t^{t-1}} \Sigma_{\varepsilon_t + A_t s_t^{t-1}}^{-1} [\varepsilon_t + A_t s_t^{t-1} - E(\varepsilon_t + A_t s_t^{t-1})] \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \Sigma_{s_t, \varepsilon_t + A_t s_t^{t-1}} &= cov(s_t, \varepsilon_t + A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}) \\ &= cov(s_t, \varepsilon_t | Y_{t-1}) + cov(s_t, A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}) \\ &= P_t^{t-1} A_t^T + E[(s_t - E(s_t | Y_{t-1})) (A_t s_t^{t-1} - E(A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}))] \\ &= P_t^{t-1} A_t^T + E[(s_t - s_t^{t-1}) (A_t s_t^{t-1} - A_t E(s_t^{t-1} | Y_{t-1}))] \\ &= P_t^{t-1} A_t^T + E[(s_t - s_t^{t-1}) (A_t s_t^{t-1} - A_t s_t^{t-1})] \\ &= P_t^{t-1} A_t^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\varepsilon_t + A_t s_t^{t-1}} &= cov(\varepsilon_t + A_t s_t^{t-1}, \varepsilon_t + A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}) \\ &= var(\varepsilon_t + A_t s_t^{t-1} | Y_{t-1}) \\ &= var(\varepsilon_t | Y_t) \\ &= A_t P_t^{t-1} A_t^T + R \end{aligned}$$

Así de esto y de la definición y propiedades de esperanza, esperanza condicional y puesto que $E(\varepsilon_t) = 0$ tenemos que

$$s_t^t = s_t^{t-1} + (P_t^{t-1} A_t^T) (A_t P_t^{t-1} A_t^T + R)^{-1} [\varepsilon_t + A_t s_t^{t-1} - E(\varepsilon_t) - A_t E(s_t^{t-1})]$$

$$s_t^t = s_t^{t-1} + (P_t^{t-1} A_t^T) (A_t P_t^{t-1} A_t^T + R)^{-1} \varepsilon_t$$

A partir de la ecuación (3.16) y utilizando la definición $var(X|Y) = \sum_{ss} - \sum_{sy} \sum_{yy}^{-1} \sum_{ys}$ y de cálculos posteriormente realizados en éste mismo capítulo podemos calcular a P_t^t esto es:

$$\begin{aligned} P_t^t &= Cov(s_t|y_{t-1}, y_t) \\ P_t^t &= Cov(s_t|y_{t-1}, \varepsilon_t + A_t s_t^{t-1}) \\ P_t^t &= \Sigma_{s_t, s_t|y_{t-1}} - \Sigma_{s_t, y_t|y_{t-1}} \Sigma_{y_t, y_t|y_{t-1}}^{-1} \Sigma_{y_t, s_t|y_{t-1}} \end{aligned}$$

Recordando que $y_t = \varepsilon_t + A_t s_t^{t-1}$ y por (3.16)

$$\begin{aligned} P_t^t &= Var(s_t|y_{t-1}) - (P_t^{t-1} A_t^T)(A_t P_t^{t-1} A_t^T + R)^{-1}(A_t P_t^{t-1}) \\ P_t^t &= P_t^{t-1} - (P_t^{t-1} A_t^T)(A_t P_t^{t-1} A_t^T + R)^{-1}(A_t P_t^{t-1}) \end{aligned}$$

§3.4. Observación

En este capítulo se desarrolló el filtro de Kalman, el cual nos permitió obtener estimación de los Estados de un Sistema dinámico lineal mediante el uso de mediciones de variables relacionadas linealmente con los estados donde la ecuación de observación viene dada por:

$$Y_t = G_t X_t + W_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

y la ecuación de Estado por :

$$X_{t+1} = F_t X_t + V_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

En el siguiente capítulo estudiaremos Filtros de Partículas el cual sera el caso no-lineal (caso Cuadrático) acá estudiaremos cualidades interesantes que poseen los Filtros de Partículas, además veremos que no se necesitara linealizar el modelo que se trabajara, entre otras características que lo convierten en una buena opción para su aplicación al problema que se planteara.

Filtros de Partículas.

§4.1. Introducción

Desde su introducción en 1993, los métodos de filtro de partículas se han convertido en una muy popular clase de algoritmos para resolver problemas de estimación numérica, ahora se utiliza rutinariamente en diversos campos como la computación, la econometría, la robótica y la navegación.

El filtro de partículas es un método empleado para estimar el estado de un sistema que cambia a lo largo del tiempo. Fue propuesto en 1993 por N. Gordon, D. Salmond y A. Smith como filtro bootstrap para implementar filtros bayesianos recursivos. Básicamente, el filtro de partículas se compone de un conjunto de muestras (las partículas) y unos valores, o pesos, asociados a cada una de esas muestras. Posee cuatro etapas principales dadas por:

1. Inicialización,
2. Actualización,
3. Estimación y
4. Predicción.

La cual se explicaran cada una, con un ejemplo que presentaremos a continuación: Para realizar el seguimiento de un objeto sobre una secuencia de imágenes, el filtro de partículas lanza al azar un conjunto de puntos sobre la imagen (etapa de inicialización, se crea un conjunto de partículas con un estado aleatorio), realizando cálculos

se le asignará un valor, o valores, a cada uno de esos puntos (etapa de actualización). A partir de estos valores, se creará un nuevo conjunto de puntos que reemplazará al anterior. Esta elección también será al azar, pero los valores que se han adjudicado a cada uno de los puntos provocarán que sea más probable de elegir aquellos puntos que hayan capturado al objeto sobre el que quiere realizar el seguimiento (etapa de estimación). Una vez que se crea el nuevo conjunto de puntos, se realiza una leve modificación al estado (posición) de cada uno de ellos, con el fin de estimar el estado del objeto en el instante siguiente (etapa de predicción). Al terminar la etapa de predicción, se obtiene un nuevo conjunto de puntos al que se le vuelve a aplicar la etapa de actualización, repitiéndose este bucle hasta que termine la secuencia o desaparezca el objeto, caso en el cual se volvería a la etapa de inicialización.

El filtro de partícula también proporciona un método simple para calcular la función de verosimilitud del estado-espacio de un modelo no-lineal. El filtro de partículas utiliza aproximaciones discretas a las densidades continuas, que se utilizan para producir una estimación del método Monte Carlo. El filtro se inicializa con un conjunto de partículas $\{s_0^i\}$ procedentes de la distribución inicial de los estados $f(s_0)$.

Para definir el problema de seguimiento, se tendrá en cuenta la evolución de la secuencia de estado $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ de un objetivo determinado por:

$$X_k = f_k(X_{k-1}, V_{k-1}) \quad (4.1)$$

donde $f_k : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ es una función no-lineal posiblemente del estado $X_{k-1}, \{V_{k-1}, k \in \mathbb{N}\}$, es decir, un proceso secuencial de un ruido, n_x, n_v son las dimensiones del estado y vectores de procesos de ruido, respectivamente, y \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales. El objetivo del seguimiento es estimar X_k recursivamente a partir de mediciones

$$Z_k = h_k(X_k, n_k) \quad (4.2)$$

donde $h_k : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_n} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ es una función posiblemente no-lineal, $\{n_k, k \in \mathbb{N}\}$, es decir, es una sucesión de mediciones de un ruido, n_n, n_v son las dimensiones de medición y la medición de vectores de ruido, respectivamente. En particular buscamos estimadores de filtros de X_k basadas en el conjunto de todas las mediciones disponibles $Z_{1:k} = \{Z_i, i = 1, \dots, k\}$ hasta el momento. Desde una perspectiva bayesiana, el problema consiste en calcular el seguimiento de forma recursiva con un cierto grado de

creencia en el estado X_k en el tiempo k , tomando valores diferentes, dado los datos $Z_{1:k}$ hasta el momento k . Por lo tanto, se requiere para construir la función de densidad $p(X_k|Z_{1:K})$. Se supone que la función de densidad inicial $p(X_0|Z_0) \equiv p(X_0)$ del vector de estado, que también se conoce como la anterior, está disponible (Z_0 siendo el conjunto sin mediciones). Entonces, en principio, la función de densidad $p(X_k|Z_{1:k})$ se puede obtener, de forma recursiva, en dos etapas : la Predicción y Actualización. Supongamos que tenemos la función de densidad $p(X_{k-1}|Z_{1:k-1})$ en el tiempo k está disponible. La etapa de Predicción consiste en utilizar el modelo del sistema (4.1) para obtener la función de densidad previo del estado en el tiempo k a través de la ecuación Chapman-Kolmogorov

$$p(X_k|Z_{1:k-1}) = \int p(X_k|X_{k-1})p(X_{k-1}|Z_{1:k-1})dX_{k-1} \quad (4.3)$$

Note que en (4.3), se ha hecho uso del hecho de que $p(X_k|X_{k-1}, Z_{1:k-1}) = p(X_k|X_{k-1})$ como en (4.1) se describe un proceso de Markov de primer orden.

El modelo probabilístico de la evolución del estado $p(X_k|X_{k-1})$ está definida por la ecuación del sistema (4.1) y las estadísticas conocidas de V_{k-1} .

En el momento de la etapa k , una medición z_k se vuelve disponible, y esto puede ser usado para actualizar la anterior (etapa de actualización) a través de la regla de Bayes

$$p(X_k|Z_{1:k}) = \frac{p(Z_k|X_k)p(X_k|Z_{1:k-1})}{p(Z_k|Z_{1:k-1})} \quad (4.4)$$

donde la constante de normalización

$$p(X_k|Z_{1:k-1}) = \int p(Z_k|X_k)p(X_k|Z_{1:k-1})dX_k \quad (4.5)$$

depende de la función de probabilidad $p(Z_k|X_k)$ definido por el modelo de medición (4.2) y las estadísticas conocidas por n_k . En la etapa de actualización (4.4), la medición Z_k se utiliza para modificar la densidad antes de obtener la densidad requerida posterior al estado actual. Las relaciones de recurrencia (4.3) y (4.4) forman la base para la solución Bayesiana óptima. Esta propagación recursiva de la densidad a posteriori es solo una solución conceptual que, en general, no se puede determinar analíticamente. Existen soluciones en un conjunto restrictivo de casos, incluyendo el Filtro de Kalman y filtros basados en red.

Algoritmo 4.1 (Filtros de Partículas.). Paso 1: Inicializar las Partículas, $\{x_0^i\}_{i=1}^N$ distribuidos de acuerdo a $p(x_0)$.

Paso 2: Tiempo de Actualización: Predecir nuevas partículas \tilde{x}_t^i tomando muestras nuevas de acuerdo con $\tilde{x}_t^i = f(x_{t-1}^i, t-1) + v_{t-1}^i$.

Paso 3: Medición Actualización: Calcule los pesos de importancia $\{q_t^i\}_{i=1}^N$,

$$q_t^i = p(y_t | \tilde{x}_t^i), i = 1, \dots, N$$

y normalizar $q_t^i = q_t^i / \sum_{j=1}^N q_t^j$.

Paso 4: Remuestreo: Tomar N Partículas, con reemplazo, para cada uno $i = 1, \dots, N$

$$Pr(x_t^i = \tilde{x}_t^j) = \tilde{q}_t^j, j = 1, \dots, N.$$

Paso 5: Ajuste $t := t + 1$ y repetir desde el paso 2.

Capítulo 5

Resultados numéricos.

§5.1. Aplicación

En éste capítulo aplicaremos las herramientas dadas en las secciones anteriores a un modelo de valoración de activos cuya condiciones de equilibrio vienen dada por las siguientes ecuaciones:

$$x_{t+1} = (1 - \rho)\bar{x} + \rho x_t + \sigma \eta \varepsilon_{t+1}, \quad (5.1)$$

y $\varepsilon_t \sim NIID(0, 1)$.

$$y_t = \beta E_t \{ e^{\theta x_{t+1}} [1 + y_{t+1}] \}. \quad (5.2)$$

Donde; e^{x_t} denota la tasa de crecimiento bruto de los dividendos. El logaritmo natural de la tasa de crecimiento bruto de los dividendos, x_t , se supone que siguen un proceso autoregresivo de orden 1, y θ , ρ , η , β y \bar{x} son valores dados.

Burnside (1998) muestra que la solución acotada de esta ecuación es de la forma

$$y_t \equiv g(x_t, \sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i e^{a_i + b_i(x_t - \bar{x})}, \quad (5.3)$$

donde

$$a_i = \theta \bar{x} i + \frac{\theta^2 \sigma^2 \eta^2}{2(1 - \rho)^2} \left[i - \frac{2\rho(1 - \rho^i)}{1 - \rho} + \frac{\rho^2(1 - \rho^{2i})}{1 - \rho^2} \right]$$

y

$$b_i = \frac{\theta \rho (1 - \rho^i)}{1 - \rho}.$$

Es inmediato ver que $g_\sigma(\bar{x}, 0) = g_{x\sigma}(\bar{x}, 0) = 0$, de acuerdo con el teorema (2.1). La aproximación de segundo orden de (9) alrededor de $x_t = \bar{x}$ y $\sigma = 0$ nos da

$$y_t \approx g(\bar{x}, 0) + g_x(x_t - \bar{x}) + \frac{1}{2}g_{xx}(x_t - \bar{x})^2 + \frac{1}{2}g_{\sigma\sigma}\sigma^2, \quad (5.4)$$

§5.2. Análisis de Resultados

En esta sección se, comparan, y evalúan, los resultados de los enfoques propuestos para estimar . Las estructuras de Filtros de Partículas y Filtros de Kalman son implementadas considerando los modelos DSGE, utilizando datos simulados.

Nosotros simulamos el sistema :

$$x_{t+1} = (1 - \rho)\bar{x} + \rho x_t + \sigma\eta\varepsilon_{t+1}, \quad (5.5)$$

$$y_t \equiv g(x_t, \sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i e^{a_i + b_i(x_t - \bar{x})}, \quad (5.6)$$

para $t = 1, \dots, 100$

con $\beta = 0,95$, $\theta = -1,5$, $\rho = -0,139$, $\bar{x} = 0,0179$, $\sigma = 1$ y $\eta = 0,0348$.

Luego, utilizamos filtros de partículas para estimar los estados no observables de los modelos: el original (5.5-5.6) y el cuadrático (2.20-2.21) donde las derivadas de este modelo vienen dadas por:

$$g_x = \frac{\theta\rho\beta e^{\theta\bar{x}}}{(1 - \beta e^{\theta\bar{x}})(1 - \beta e^{\theta\bar{x}}\rho)},$$

$$g_{xx} = \left(\frac{\rho\theta}{1 - \rho}\right)^2 \left[\frac{\beta e^{\theta\bar{x}}}{1 - \beta e^{\theta\bar{x}}} - \frac{2\beta e^{\theta\bar{x}}\rho}{1 - \beta e^{\theta\bar{x}}\rho} + \frac{\beta e^{\theta\bar{x}}\rho^2}{1 - \beta e^{\theta\bar{x}}\rho^2} \right],$$

$$g_{\sigma\sigma} = \left(\frac{\theta\eta}{1 - \rho}\right)^2 \left[\frac{\beta e^{\theta\bar{x}}}{(1 - \beta e^{\theta\bar{x}})^2} + \left(\frac{\rho^2}{1 - \rho^2} - \frac{2\rho}{1 - \rho}\right) \times \frac{\beta e^{\theta\bar{x}}}{1 - \beta e^{\theta\bar{x}}} + \frac{2\rho}{1 - \rho} \frac{\beta e^{\theta\bar{x}}}{1 - \beta e^{\theta\bar{x}}\rho} - \frac{\rho^4}{1 - \rho^2} \frac{\beta e^{\theta\bar{x}}}{1 - \beta e^{\theta\bar{x}}\rho^2} \right].$$

Utilizamos los siguientes valores para los parámetros del modelo $\beta = 0,95$, $\theta = -1,5$, $\rho = -0,139$, $\bar{x} = 0,0179$, $\sigma = 1$ y $\eta = 0,0348$.

Entonces evaluando en las expresiones anteriores se obtiene:

$$y_t \approx 12,30 + 2,27(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}0,42(x - \bar{x})^2 + \frac{1}{2}0,35\sigma^2.$$

Esta ecuación se obtiene mediante el algoritmo de perturbación desarrollado en el artículo de Uribe [6], se verifica mediante la ejecución del programa *asetrum.m* el cual está disponible en <http://www.econ.upenn.edu/~uribe>.

En la tabla siguiente se presentan los resultados obtenidos con los datos simulados y la suma de los errores cuadrado con respecto al verdadero estado.

Método	Error Cuadrático
Filtro de Kalman	0.6331
Filtro de Partículas modelo cuadrático	0.0029
Filtro de Partículas modelo original	0.0028

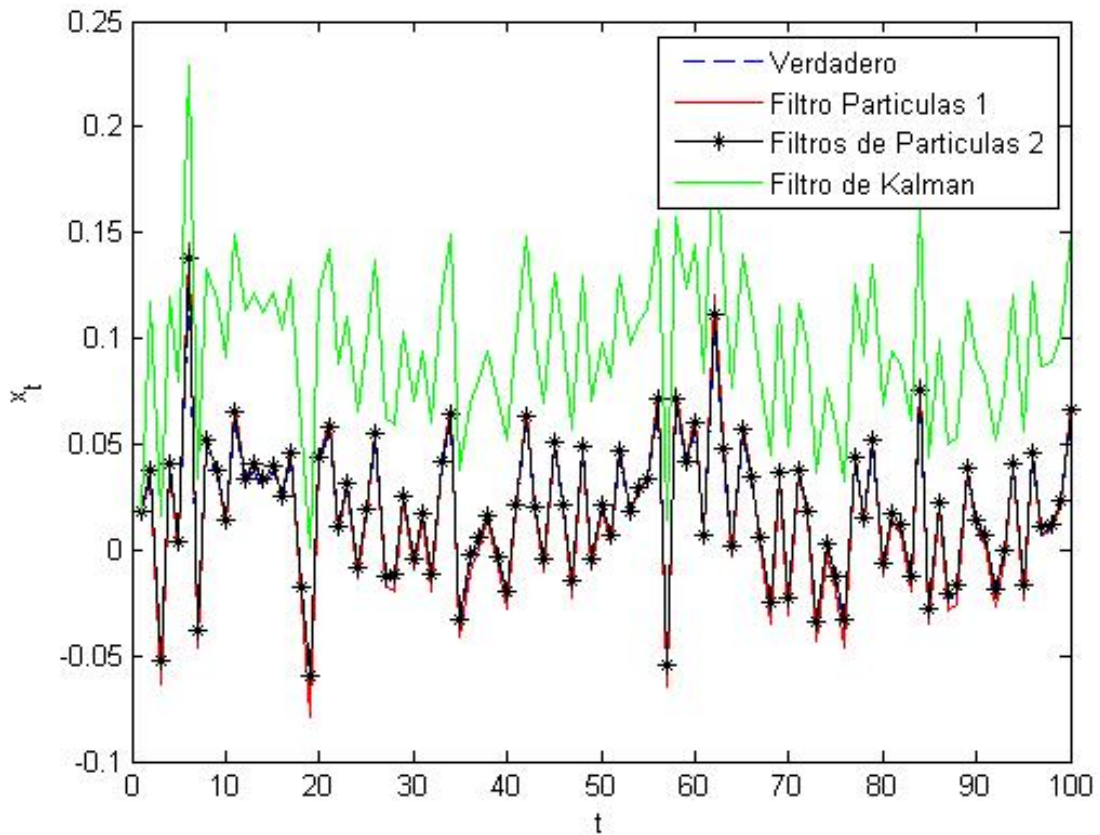


FIGURA 5.1: GRÁFICA DE LOS ESTADOS CON LOS DISTINTOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN.

§5.3. Observación

En la gráfica se puede notar que tan buena es la aproximación implementando el filtro de partículas ya que se ajusta más a los verdaderos estado del modelo a diferencia del filtro de kalman que la aproximación se aleja del modelo original. El verdadero modelo no se logra visualizar ya que las gráficas de filtro de partículas 1 y filtro de partículas 2 están por encima de él.

Capítulo 6

Conclusion.

En las estadísticas, los filtros de Kalman y los filtros de partículas tienen importantes aplicaciones en econometría. Solo que en el filtro de Kalman se predice un estado con un determinado nivel de confianza y se estiman datos, es decir, es un algoritmo recursivo, que dados unos estimadores iniciales, el filtro va prediciendo y autoajustándose con cada nueva medida para un Sistema dinámico lineal. Mientras que en el filtro de partículas se propone un enfoque que se basa en múltiples hipótesis para construir un conjunto de estados probables. El algoritmo filtro de partículas permite modelar un proceso estocástico mediante una función de densidad de probabilidad arbitraria para un sistema no-lineal.

Se ha presentado una simulación del filtro de partícula y filtro de kalman a un ejemplo donde se evidencia la eficiencia del filtro de partículas con una aproximación muy cercana al modelo, mientras que en el filtro de kalman la aproximación no es tan buena como la de el filtro de partículas, con esto, no queremos decir que el filtro de kalman es menos eficiente que el filtro de partícula solo que una aproximación lineal no es adecuada para el modelo utilizado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] S.B. Aruoba, J. Fernández-Villaverde, and J.F. Rubio-Ramírez (2003). “Comparing solution methods for dynamics equilibrium economies”. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 2003-27.
- [2] T.F. Cooley, and E.C. Prescott (1995). “Economic Growth and business cycles”. In *Frontiers of Business Cycle Research*, T.F. Cooley (ed.). Princeton University Press: Princeton, N.J.
- [3] A. Doucet, J. F. G. de Freitas, and N. J. Gordon (2001). “Sequential Monte Carlo Methods in Practice”. New York: Springer-Verlag.
- [4] J. Fernández-Villaverde, and J.F. Rubio-Ramírez (2005). “Estimating Dynamic Equilibrium Economies: Linear versus Nonlinear Likelihood”. *Journal of Applied Econometrics*, 20: 891-910.
- [5] H. Uhlig (1995). “A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily”. CentER, University of Tilburg and CEPR.
- [6] Stephanie Schmitt-Grohè, Martín Uribe (2004) *Journal of Economic Dynamics & control* 28 755-775.