UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Subdiferencial de funciones convexas”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Naudy González

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis.
Tutor: Dr. Fernando Villafañe.

Barquisimeto, Venezuela. Abril de 2013

A Naibelys mi hija amada

Agradecimientos

Primeramente a Dios. A mis padres que me han apoyado en mi formación; a ellos que siempre sin dudar supieron creer en mí y me enseñarón que las metas se consiguen con constancia, dedicación y trabajo.

A mi tutor, profesor Fernando Villafañe por haber tenido tanta paciencia, por aclarar tantas dudas, por todas sus sugerencias y por su dedicación en que el presente trabajo sea hoy realidad.

A mi Esposa Ebelt Marchan por toda su paciencia y por mantener siempre la esperanza viva en mí, a tí compañera mia, te amo.

A mi amigo y compañero Carlos Sánchez, quien supo brindarme su ayuda incondicional. A mis amigos Dionny Mendez, Irael Querales, Jesica Castillo, Mayarín López, Asdrubal Goyo, Emily Vasquez, Kelvid Mediomundo y María Eugenia Ramírez.

A los profesores que de contribuyerón en mi formación: Sergio Muñoz, Rómulo Castillo, Eibar Hernandez, Mario Rodríguez, Nicolas Arías y todos aquellos con los que recibí clases.

Resumen

La continuidad de una función convexa vectorial sobre el interior relativo de puntos de su dominio es estudiada. Como un corolario de esto podemos ver que una función convexa vectorial es Lipschitz en puntos cercanos al interior relativo de su dominio. Un nuevo concepto de subdiferencial de una función convexa es introducido y algunas propiedades similares al caso escalar son probadas, así como tambien la relación de inclusión entre el jacobiano generalizado y el subdiferencial .

Índice

Introduccion

El estudio de la diferenciabilidad de las funciones definidas sobre espacios de dimensión infinita ha estado presente desde el principio de la construcción de la teoría de operadores a comienzos del siglo XX. Uno de los primeros esfuerzos importantes para elaborar una teoría abstracta de espacios de funciones y de funcionales fue realizado por Fréchet en su tesis doctoral de 1906 [6]. En lo que Fréchet llamó cálculo funcional, intentó unificar en términos abstractos las ideas contenidas en los trabajos de Cantor, Volterra, Arzelá, Hadamard y otros matemáticos del siglo XIX. En [6], Fréchet introdujo los espacios métricos y proporcionó las nociones de continuidad y diferenciabilidad que extienden las correspondientes a funciones reales en el marco de estos espacios generales.

En los años 20, en [5], Banach introdujo los espacios normados completos con el propósito de generalizar la teoría de las ecuaciones integrales. A partir de este momento se comienzan a estudiar las propiedades de la diferenciabilidad de las funciones convexas y más concretamente de la norma en el marco de estos espacios.

El cálculo diferencial es una herramienta muy flexible en análisis, que necesita de la noción de derivada. Cuando la diferenciabilidad en el sentido clásico falla, es natural preguntarse si es posible extender la noción de derivada de modo de recuperar algunas de sus propiedades. El subdiferencial de una función convexa f definida sobre un subconjunto convexo $D \subset R^n$ a R en un punto x_0, es el conjunto $\partial f(x_0) = \{x^* \in L(R^n, R) : f(x) - f(x_0) \geq x^*(x - x_0), \forall x \in D\}$, donde $L(R^n, R)$ denota el espacio de los funcionales lineales continuos de R^n a R. El vector x^* es llamado el subgradiente de f en x_0, por lo que el conjunto $\partial f(x_0)$ representa un conjunto de subgradientes.

El objetivo principal del presente trabajo se refiere al estudio del conjunto subdiferencial y sus propiedades. Un primer resultado importante es que las derivadas direccionales para el caso en el que se considera una función convexa $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siempre existen, y su relación con los subgradientes. Otro resultado de importacia es que en el caso el cual la función f es diferenciable, coinciden el subdiferencial con el jacobiano. También son introducidas definiones de funciones convexas clásicas tales como: la función indicadora, soporte y la conjugada de Fenchel, y se establece una caracterización que relaciona estas funciones con el subdiferencial.

En el capítulo 3, se consideran funciones convexas a valores vectoriales, es decir una función convexa definida sobre un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ y se define un nuevo concepto de subdiferencial de una función convexa f en un punto x_0, denotada por $\partial f(x_0)$, como sigue: $\partial f(x_0) = \{A \in L(R^n, R^m) : f(x) - f(x_0) \succ A(x - x_0), \forall x \in D\}$, donde $L(R^n, R^m)$ denota el espacio de los operadores lineales continuos de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ y $\succ$ es un orden parcial definido sobre un cono convexo $C \subset \mathbb{R}^m$, y algunas propiedades similares al caso escalar son probadas en la que resaltan la continuidad de la funciones convexas en puntos del interior relativo de su dominio, se introduce el concepto del Jacobiano generalizado en el sentido de Clarke de f en x $Jf(x)$ y se prueba la inclusión de éste en el conjunto subdiferencial de f en x, con x perteneciente al interior del dominio de la función f; también se prueba que si la función convexa es diferenciable en un punto perteneciente al interior de su dominio, entonces $Df(x) \in \partial f(x)$, donde $Df(x)$ denota la derivada de f en x; se estudian las propiedades referente a los conos convexos y es introducido el concepto de cono polar positivo, el cual es un conjunto de funcionales lineales con la particularidad que al ser evaluados en un elemento del cono convexo original, siempre es mayor o igual a cero, este conjunto es denotado por C'. El concepto de cono polar positivo, nos será de utilidad para probar que las proyecciones del $\partial f(x)$ y $Jf(x)$ sobre cualquier dirección $\xi \in C'$ coinciden. Este concepto de la subdiferencial de una función convexa a valores vectoriales ha sido considerado en [8], por V. L. Levin en 1972 ; antes, en el año 1966, Brøndsted-Rockafellar [7], estudiaron la subdiferencial para funciones convexas, más recientemente se ha retomado el interés en la subdiferencial en el área de la optimización.

Capítulo 1

Preliminares

En esta primera parte daremos todas las definiciones básicas del análisis convexo, enunciamos y probamos los resultados necesarios para el estudio del subdiferencial de funciones convexas y sus propiedades, definido sobre un espacio vectorial normado a valores reales extendidos, cuyas propiedades serán estudiadas más a fondo en el próximo capítulo.

Recordemos del análisis la definición de derivada direccional y su relacion con el gradiente.

Definición 1.1. Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ a $[-\infty, \infty]$ y sea x un punto donde f es finita. **La derivada direccional** de f en x con respecto al vector y se define como el limite siguiente:

$$f'(x; y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

Si existe ($+\infty$ y $-\infty$ considerados como límite)

Si f es diferenciable en x, las derivadas direccionales $f'(x; y)$ son todas finitas y se tiene:

$$f'(x; y) = \langle \nabla f(x), y \rangle, \qquad \forall y$$

donde, $\nabla f(x)$ es el gradiente de f en x.

Las siguientes definiciones son básicas del análisis convexo y necesarias para comprender el concepto de subdiferencial de una función convexa.

Definición 1.2. Una función f sobre $\mathbb{R}^n$ es llamada **homogénea positiva** si para cada x se tiene

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \qquad\qquad 0 < \lambda < \infty$$

Definición 1.3. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es llamado **convexo** si $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ siempre que $x \in C$, $y \in C$ y $0 < \lambda < 1$.

Definición 1.4. Sea f una función cuyos valores son reales o $\pm\infty$ y cuyo dominio es un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$. El conjunto

$$\{(x, \mu) \mid x \in S,\ \mu \in \mathbb{R},\ \mu \geq f(x)\}$$

es llamado el **epígrafo de** f y es denotado por $epif$. Decimos que f es una **función convexa** sobre S si y solo si el conjunto $epif$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

El siguiente teorema caracteriza las funciones convexas.

Teorema 1.1. *Sea f una función de C a $(-\infty, +\infty]$, donde C es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces f es* **convexa** *sobre C si y solo si*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \qquad\qquad 0 < \lambda < 1,$$

para cada x y y en C.

Demostración.

De la definición 1.4 f es convexa sobre C si y solo si el conjunto $epif$ es convexo sobre C. Sean x, y pertenecientes a $epif$, fijemos $\mu \in \mathbb{R}$. Así

$$f(x) \leq \mu \tag{1.1}$$

$$f(y) \leq \mu \tag{1.2}$$

Por otro lado del hecho de ser $epif$ convexo sobre C,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \mu \tag{1.3}$$

con $0 < \lambda < 1$
Notemos que $\mu = (1-\lambda)\mu + \lambda\mu \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$, de esta manera de 1.3 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

Definición 1.5. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto convexo no vacío y sea $f : S \to \mathbb{R}$. f es una **función concava sobre** S si y solo si

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \qquad 0 < \lambda < 1,$$

para cada x y y en S.

Definición 1.6. Una **funcion afín sobre** S es una función la cual es finita, concava y convexa.

Definición 1.7. El **dominio efectivo** de una función convexa sobre S, el cual denotaremos por $domf$ es la proyección sobre $\mathbb{R}^n$ de el epigrafo de f:

$$domf = \{x \mid \exists \mu \in \mathbb{R} \mid (x,\mu) \in epif\} = \{x \mid f(x) < +\infty\}$$

Una de las propiedades de las funciones convexas es poseer derivada direccional , en el próximo capítulo se introducirá el concepto de subgradiente y veremos la relación de la derivada direccional y el subgradiente. El siguiente teorema prueba la existencia universal de la derivada direccional cuando se considera una función convexa.

Teorema 1.2. *sea f una función convexa, y x un punto donde f es finita. Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el cociente de diferencias en la definición de derivada direccional es una función no decreciente de $\lambda > 0$ esto es $\grave{f}(x;y)$ existe y*

$$f'(x;y) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

más aún $f'(x;y)$ es una función convexa homogénea positiva para y.

Demostración.

Tomemos $y \in \mathbb{R}^n$ fijo y sea $h(\lambda) = \frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$, consideremos $0 < \lambda \leq \beta$ y veamos que $h(\lambda) \leq h(\beta)$.

Notemos que $x + \lambda y = \frac{\lambda}{\beta}(x+\beta y) + (1 - \frac{\lambda}{\beta})x$

De modo que por convexidad

$f(x+\lambda y) \leq \frac{\lambda}{\beta} f(x+\beta y) + (1-\frac{\lambda}{\beta}) f(x)$

$f(x+\lambda y) \leq \frac{\lambda}{\beta} f(x+\beta y) + \frac{(\beta-\lambda) f(x)}{\beta}$

$f(x+\lambda y) \leq \frac{\lambda}{\beta} f(x+\beta y) + \frac{(\beta-\lambda) f(x)\lambda}{\lambda\beta}$

$\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda} \leq \frac{f(x+\beta y)}{\beta} + \frac{(\beta-\lambda) f(x)}{\lambda\beta} - \frac{f(x)}{\lambda} = \frac{f(x+\beta y)}{\beta} + \frac{f(x)}{\lambda} - \frac{f(x)}{\beta} - \frac{f(x)}{\lambda}$

$\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda} \leq \frac{f(x+\beta y)-f(x)}{\beta}$

por lo tanto, $h(\lambda) \leq h(\beta)$ y así el cociente de diferencias en la definición de derivada direccional es una función no decresiente de $\lambda > 0$. Luego existe

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda} = f'(x;y) = \inf_{\lambda>0} \frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$$

Veamos ahora, que $f'(x,y)$ es una función homogénea positiva de y. Sea $\lambda > 0$

$f'(x,\lambda y) = \inf_{t>0} \frac{f(x+t(\lambda y))-f(x)}{t}$

$= \inf_{t>0} \lambda \frac{f(x+\beta y))-f(x)}{\beta} \qquad (\beta = \lambda t)$

$= \lambda \inf_{\beta>0} \frac{f(x+\beta y))-f(x)}{\beta} \qquad (\lambda > 0)$

$= \lambda f'(x;y)$

luego por la definición 2 $f'(x;y)$ es homogénea positiva.

1.1. Interior relativo

En el caso de los conjuntos convexos, el concepto de interior puede ser absorbido en un concepto mas conveniente de interior relativo. Este concepto es motivado por el hecho de que un segmento de recta o un triángulo incrustrado en $\mathbb{R}^3$ no poseen un interior del tipo natural, que no es verdaderamente un interior. El concepto de interior relativo nos será de utilidad para comprender algunos resultados del analisis convexo tratados en los próximos capítulos. Para comprender este resultado es necesario introducir las siguientes definiciones

Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es llamado **conjunto afín** si $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$ para todo $x \in M,\ y \in M$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Puede verse fácilmente que un subespacio vectorial es un conjunto afín cuya particularidad es que el cero pertenece al conjunto. Recíprocamente si A es un conjunto afín y $0 \in A$ entonces A es un subespacio vectorial.
Diremos que dos conjuntos afínes M y A son paralelos si existe a $\in A$ tal que $A+a = M$: Se verifíca que si a y b pertenecen a A entonces$A+a$ y $A+b$ son paralelos. De esta forma puede definirse la clase de equivalencia de todos los conjuntos afínes paralelos a uno dado. Observese que si A es un conjunto afín entonces

$$L = A - A = \{x - y : x \in A; y \in A\}$$

es un subespacio vectorial paralelo a A.

Definición 1.8. La dimensión de un conjunto afín es la dimensión del único subespacio paralelo al conjunto. Un conjunto afín de R^n de dimensión $n-1$ es llamado un hiperplano.

Todo hiperplano define dos semiespacios H_1 y H_2 que serán llamados cerrados o abiertos según contengan o no al hiperplano que los define.
Obsérvese que un hiperplano H en $\mathbb{R}^n$ queda determinado por un vector $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ y un real β siendo

$$H_{p,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p \rangle = \beta\}$$

De esta manera quedarán determinados los semiespacios cerrados $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p \rangle \geq \beta\}$ y $H_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p \rangle \leq \beta\}$, los que serán llamados abiertos si las desigualdades se reemplazan por desigualdades estrictas. El hiperplano H es paralelo al subespacio vectorial

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p \rangle = 0\},$$

es inmediato verificar que $H = x^* + S$ siendo $x^* = \frac{\beta}{\langle p,p \rangle} p$

Definición 1.9. Sean C_1 y C_2 conjuntos no vacíos en $\mathbb{R}^n$. Un hiperplano H se dice que separa C_1 y C_2 si C_1 está contenido en uno de los semiespacios cerrados determinados por H y C_2 vive en el semiespacio cerrado opuesto. Se dice que C_1 y C_2 están **separados propiamente** si ambos no se encuentran contenidos en H.

Teorema 1.3. *Sean C_1 y C_2 conjuntos no vacíos en $\mathbb{R}^n$. Si existe un hiperplano separando a C_1 y C_2 propiamente, entonces existe un vector b tal que:*

$$\text{ínf}\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} \geq \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}$$

Demostración.
Como existe un hiperplano H separando propiamente C_1 y C_2, entonces existe $b \in \mathbb{R}^n$ no nulo y $\beta \in R$ tal que el hiperplano H toma la forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle = \beta\}$ con

$$\langle x, b\rangle \geq \beta \ \ \forall x \in C_1 \text{ y } \langle x, b\rangle \leq \beta \ \ \forall x \in C_2$$

Luego, β es cota inferior del conjunto $\{\langle x, b\rangle \ : x \in C_1\}$ y a la vez cota superior del conjunto $\{\langle x, b\rangle \ : x \in C_2\}$. Así

$$\beta \leq \text{ínf}\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} \text{ y } \beta \geq \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}$$

esto es,

$$\text{ínf}\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} \geq \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\} \tag{1.4}$$

de esta manera existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que satistace 1.4

Los conos son conjuntos de gran importancia en la teoría del análisis convexo, en particular en separación de conjuntos convexos. En lo que sigue definiremos estos conjuntos y daremos una caracterización de separación de conjuntos convexos en los cuales uno de los conjuntos representa un cono.

Definición 1.10. Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es llamado un **cono** si es cerrado sobre la multiplicación por un escalar positivo, esto es, $\lambda x \in K, \ \forall x \in K$ y $\lambda > 0$.

Un **cono convexo** es un cono que es un conjunto convexo.

El siguiente teorema es vital para la demostración del teorema 3.1 el cual es también conocido como teorema de la bipolaridad, y es de gran importancia para el estudio del conjunto subdiferencial y sus propiedades en el capítulo 3.

Teorema 1.4. *Sean C_1 y C_2 subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, uno de los cuales es un cono. Si existe un hiperplano que separa C_1 y C_2 propiamente, entonces existe un hiperplano que separa a C_1 y C_2 propiamente y pasa a través del orígen.*

Demostración.

Supongamos sin pérdida de generalidad que C_2 es un cono, ahora bien, como C_1 y C_2 están separados propiamente por un hiperplano, digamos H, entonces existe un vector b satisfaciendo las condiciones del teorema 1.3. Sea

$$\beta = \sup\{\langle x, b\rangle \ : x \in C_2\}$$

Entonces, como mostramos en la prueba del teorema 1.3, el conjunto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle = \beta\}$$

es un hiperplano que separa propiamente a C_1 Y C_2. Como C_2 es un cono, entonces $\forall x \in C_2$ y $\forall \lambda > 0$

$$\lambda \langle x, b\rangle = \langle \lambda x, b\rangle \leq \beta < \infty \tag{1.5}$$

Esto implica que $\beta \geq 0$ y $\langle x, b\rangle \leq 0$, $\forall x \in C_2$, así $\beta = 0$ y $0 \in H$.

Definición 1.11. Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, el menor subconjunto afín de R^n que contiene a S, se define como **la cápsula afín de** S y es denotada por $aff(S)$, es decir es la intersección de la colección de conjuntos afín M tales que $S \subset M$.

Observación 1.1. Denotaremos por B la **bola unitaria euclideana** en $\mathbb{R}^n$:

$$B = \{x \mid d(x, 0) \leq 1\}$$

Para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$, **la bola centrada en a y radio** $\epsilon > 0$ denotada como $a +_\epsilon B$ es dada por:

$$\{x \mid d(x,a) \leq \epsilon\} = a +_\epsilon B$$

Para cualquier conjunto C en $\mathbb{R}^n$, el conjunto de puntos x cuya distancia de C no exede ϵ es

$$\{x \mid \exists y \in C,\ d(x,y) \leq \epsilon\}$$

$$= \bigcup_{x \in C} \{y +_\epsilon B \mid y \in C\} = C + \epsilon B$$

Definición 1.12. Se define como **interior relativo** de un conjunto convexo C de $\mathbb{R}^n$, que será denotado como riC, al interior que se produce cuando C es considerado como un subconjunto de la cápsula afín $aff(C)$. Es decir:

$$riC = \{x \in aff(C) : \exists \epsilon > 0;\ B(x,\epsilon) \bigcap aff(C) \subset C\}.$$

Es claro que

$$riC\ \subset C\ \subset\ \overline{C}$$

Naturalmente, C es llamado relativamente abierto si $riC = C$.

Para conjuntos convexos n-dimencionales, $aff(C) = \mathbb{R}^n$ por definicion,
así $riC = intC$.

Observación 1.2. Para un subconjunto convexo C de $'\mathbb{R}^n$,la clausura $\overline{C}$ y el interior $intC$ de C pueden ser expresadas por las siguientes formulas:

$$\overline{C} = \bigcap_{\epsilon > 0} \{C +_\epsilon B \mid \epsilon > 0\}$$

$$intC = \{x \mid \exists \epsilon > 0, x +_\epsilon B \subset C\}$$

Los próximos 4 teoremas referentes a propiedades del interior relativo, son necesarios para el análisis de una de las propiedades del conjunto subdiferencial como es subdiferenciabilidad de la adición de funciones propias y convexas establecida en el teorema 2.3

Teorema 1.5. *Sea C un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$. Sea $x \in riC$ y $y \in \overline{C}$. Entonces $(1-\lambda)x + \lambda y$ pertenece a riC, para $0 \leq \lambda < 1$.*

Demostración.

Prestemos la atención al caso donde C es n-dimensional, así $intC = riC$. Sea $\lambda \in [0,1)$. Probemos que $(1-\lambda)x + \lambda y +_\epsilon B \subset C$, Para algún $\epsilon > 0$.

Como $y \in \overline{C}$, entonces $\forall \epsilon > 0,\ y \in C +_\epsilon B$. Luego para cada $\epsilon > 0$ se tiene:

$$(1-\lambda)x + \lambda y +_\epsilon B \subset (1-\lambda)x + \lambda(C +_\epsilon B) +_\epsilon B.$$

$$= (1-\lambda)x + \lambda C + \lambda_\epsilon B +_\epsilon B$$

$$= (1-\lambda)x + (1+\lambda)_\epsilon B + \lambda C$$

$$= (1-\lambda)\left[x +_\epsilon (1+\lambda)(1-\lambda)^{-1} B\right] + \lambda C$$

$$\subset (1-\lambda)C + \lambda C = C$$

Esta última igualdad resulta del hecho de que $x \in riC$ con ϵ suficientemente pequeño. Por lo tanto, $(1-\lambda)x + \lambda y +_\epsilon B \subset C$.

Lo cual prueba que $(1-\lambda)x + \lambda y \in riC$

Teorema 1.6. *Para cualquier conjunto convexo $C \neq \varnothing \in \mathbb{R}^n$, $\overline{ri}(C) = \overline{C}$ y $ri(\overline{C}) = riC$.*

Demostración.

Es claro que $\overline{ri}(C) \subset \overline{C}$, pués por definición $ri(C) \subset C$.

Por otro lado, dado $y \in \overline{C}$ y $x \in riC$, por teorema el segmento entre x y y vive enteramente en $ri(C)$ exepto quizás para y, así $y \in \overline{ri}C$. Luego $\overline{ri}(C) = \overline{C}$.

probemos ahora que $ri(\overline{C}) = riC$.

Notemos que $ri(\overline{C}) \subset riC$. En efecto como $C \subset \overline{C}$ y del hecho de que $aff(C) = aff(\overline{C})$, entonces por definición :

$$riC = \{x \in aff(C) \mid \exists \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \bigcap aff(C) \subset C\}$$

$$\subset \{x \in aff(\overline{C}) \mid \exists \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \bigcap aff(\overline{C}) \subset \overline{C}\} = ri(\overline{C}),$$

lo cual prueba que $ri(\overline{C}) \subset riC$. por otra parte, sea $z \in ri(\overline{C})$ probemos que $z \in riC$. Sea $x \in ri(C)$. consideremos la linea a travez de x y z. Para $\mu > 1$, con $\mu - 1 > 0$ suficientemente pequeño, el punto $y = (1-\mu)x + \mu z = z - (\mu - 1)(x - z)$ (i) sigue perteneciendo a $ri(\overline{C})$, y así por definición de interior relativo, $y \in \overline{C}$.
Ahora bien, para tal y, podemos expresar z como sigue:

$z = (1-\lambda)x + \lambda y$ con $\lambda \in (0,1)$. $\lambda = \mu^{-1}$

Esta última igualdad resulta de multiplicar por μ^{-1} en (i). Ahora como $x \in ri(C)$ y $y \in \overline{C}$, entonces por teorema anterior $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in ri(C)$
por lo tanto, $ri(\overline{C}) = ri(C)$.

Corolario 1.1. *Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, entonces $\overline{C}_1 = \overline{C}_2$ si y sólo si $ri(C_1) = ri(C_2)$.*

Demostración.

Supongamos que $\overline{C}_1 = \overline{C}_2$. Probemos que $ri(C_1) = ri(C_2)$.

Por teorema 1.6, $ri(C_1) = ri(\overline{C}_1)$. Además por hipótesis,
$ri(C_1) = ri(\overline{C}_2)$
Luego por teorema 1.6,
$ri(C_1) = ri(C_2)$

Recíprocamente, supongamos que $ri(C_1) = ri(C_2)$. Probemos que $\overline{C}_1 = \overline{C}_2$.
Por teorema 1.6 resulta $\overline{C}_1 = \overline{ri}(C_1)$
Ahora por hipótesis, $\overline{C}_1 = \overline{ri}(C_2)$
Finalmente por teorema 1.6, $\overline{C}_1 = \overline{C}_2$, con lo cual se completa la demostración.

Teorema 1.7. *Sea C un conjunto convexo no vacío en R^n. Entonces $z \in ri(C)$ si y sólo si, para cada $x \in C$ existe un $\mu > 1$ tal que $(1-\mu)x + \mu z$ pertenece a C.*
Demostración.

La condición significa que todo segmento de recta en C, teniendo a z como punto final puede ser prolongada más allá de z sin salir de C. Lo cual es cierto si $z \in ri(C)$. Veamos:
Sea $z \in ri(C)$ y sea $x \in C$, para $\mu - 1 > 0$ suficientemente pequeño el punto $y = (1-\mu)x + \mu z = z - (\mu - 1)(x - z) \in ri(C) \subset C$, esto es, existe $\mu > 1$ tal que $(1-\mu)x + \mu z$ pertenece a C.

Recíprocamente, supongamos que z satisface las condiciones dadas, es decir supongamos que $\forall x \in C$ existe $\mu > 1$ tal que $(1-\mu)x + \mu z$ pertenece a C, ahora como $ri(C) \subset C$ y $C \neq \varnothing$, entonces $ri(C) \neq \varnothing$, esto es, existe almenos un $x \in ri(C)$. Sea $y \in C$, así y toma la forma:
$y = (1-\mu)x + \mu z, \qquad \mu > 1 \qquad$ *(I).*
Como $C \subset \overline{C}$ y $y \in C$, entonces $y \in \overline{C}$.
Ahora de (I), al multiplicar por μ^{-1} y despejando z obtenemos:
$z = (1-\lambda)x + \lambda y$, *con* $\lambda = \mu^{-1} \in (0,1)$.
Luego por teorema $z \in ri(C)$, ya que $y \in \overline{C}$ y $x \in ri(C)$.

Teorema 1.8. *Sea C_i un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$, $i \in I$. Suponga que los conjuntos $ri(C_i)$ tienen al menos un punto en común, entonces*

$$\overline{\bigcap\{C_i \mid i \in I\}} = \bigcap\{\overline{C}_i \mid i \in I\}$$

Si I es finito, entonces también

$$ri\bigcap\{C_i \mid i \in I\} = \bigcap\{riC_i \mid i \in I\}$$

Demostración.
Fijemos $x \in \bigcap_{i\in I} ri(C_i)$. Dado algún $y \in \bigcap \overline{C}_i$, entonces por teorema 1.5 el vector $(1-\lambda)x + \lambda y \ \in \bigcap_{i\in I} ri(C_i)$ con $\lambda \in (0,1)$, además y es límite de este vector cuando $\lambda \uparrow 1$, es decir $y \in \bigcap_{i\in I} ri(C_i)$. Sigue que:

$$\bigcap_{i\in I}\overline{C}_i \subset \bigcap_{i\in I} ri(Ci) \tag{1.6}$$

Ahora, de la definición de clausura,

$\bigcap_{i\in I} ri(Ci) \subset \overline{\bigcap_{i\in I} ri(Ci)}$

Por otro lado de la definición de interior relativo resulta que $riC_i \subset C_i$*, de manera que,*

$\overline{\bigcap_{i\in I} ri(Ci)} \subset \overline{\bigcap_{i\in I} Ci}$

Tambien de la definición de clausura $C_i \subset \overline{C}_i$*, así,*

$\overline{\bigcap_{i\in I} Ci} \subset \overline{\bigcap_{i\in I} \overline{C}i}$

$\subset \bigcap_{i\in I} \overline{C}i$

Luego, $\overline{\bigcap}\{C_i \mid i \in I\} = \bigcap\{\overline{C}_i \mid i \in I\}$

Esto a la vez prueba que $\bigcap_{i\in I} ri(Ci)$ *y* $\bigcap_{i\in I} Ci$ *tienen la misma clausura, luego por corolario 1.1 resulta:*

$ri(\bigcap_{i\in I} Ci) = ri(\bigcap_{i\in I} ri(Ci)) \subset \bigcap_{i\in I} ri(Ci))$

Esto es,

$$ri(\bigcap_{i\in I} Ci) \subset \bigcap_{i\in I} ri(Ci)) \tag{1.7}$$

Supongamos que I *es finito, tomemos* $z \in \bigcap_{i\in I} ri(C_i)$*, por teorema 1.7 cualquier segmento en* $\bigcap_{i\in I} C_i$ *con* z *como punto final puede ser prolongada más allá de* z *en cada* C_i*. La intersección de estos segmentos prolongados por ser finitos, es una prolongación del segmento original en* $\bigcap_{i\in I} C_i$*, así* $z \in ri(\bigcap_{i\in I} C_i)$*. Esto es* $\bigcap_{i\in I} ri(C_i) \subset ri(\bigcap_{i\in I} C_i)$*. Por lo tanto de esta ultima inclusión y de 1.7 se completa la demostración.*

1.2. Clausura de funciones convexas

En esta sección son introducidos el concepto de clausura de las funciones convexas y sus propiedades, las cuales nos serán de utilidad para el estudio del conjunto subdiferencial, cuando se considere una función convexa cuya clausura coincida con la funcion original.

Definición 1.13. Una función de valores reales extendidos f sobre un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es **semicontinua inferiormente** en un punto x de S si

$$f(x) \leq \lim_{i \to \infty} f(x_i)$$

para cada secuencia $x_1, x_2, \ldots,$ en S tal que x_i converge a x y el límite de $f(x_1), f(x_2), \ldots,$ existe en $[-\infty, +\infty]$, esta condición puede ser expresada como:

$$f(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$$

Definición 1.14. una función $f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ se dice que es **propia** si:

- $\forall x \in S,\ f(x) > -\infty$
- $dom f \neq \varnothing$ es decir, $\exists x_0 \in S$ tal que $f(x_0) < \infty$

Definición 1.15. Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ no vacío, diremos que la **cápsula convexa de** S denotada como $co(S)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S.

Definición 1.16. La **clausura** de una función convexa f se define como la cápsula semicontinua inferiormente si f no toma el valor $-\infty$, mientras la clausura de f es definida por la función constante $-\infty$ si f es una función convexa impropia tal que $f(x) = -\infty$ para algun x. La clausura de f es denotada por $\overline{f}$.

Una función se dice que es **cerrada** si $f = \overline{f}$. Para una función convexa propia, la cerradura es por tanto equivalente a ser semicontinua inferiormente.
La clausura de una función f puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\overline{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$$

En cualquier caso $\overline{f} \leq f$, y si $f_1 \leq f_2$ implica $\overline{f}_1 \leq \overline{f}_2$.
El siguiente teorema es una caracterización de semicontinuidad inferior.

Teorema 1.9. *Sea f una función arbitraria de $\mathbb{R}^n$ a $[-\infty, +\infty]$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es semicontinua inferioriormente a lo largo de $\mathbb{R}^n$.*

(b) *$\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(c) *El epígrafo de f es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración.
*Supongamos que f es semicontinua inferioriormente en x, así de la definición de semicontinuidad inferior esta puede ser reescrita como sigue: $f(x) \leq \mu$, cuando $\mu = \lim \mu_i$ y $x = \lim x_i$ para secuencias $\mu_1, \mu_2 \ldots,$ y $x_1, x_2, \ldots$ tales que $f(x_i) \leq \mu_i$ para cada i.
Esto es, dadas las secuencias (x_i, μ_i), tales que $x_i \to x$ y $\mu_i \to \mu$, entonces $(x, \mu) \in epif$, pués $f(x) \leq \mu$. Así $epif$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$, por lo tanto, $a \Rightarrow c$.
Usando el mismo procedimiento anterior y tomando $\alpha = \mu = \mu_1 = \mu_2 = \ldots$, entonces el conjunto $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, esto es $a \Rightarrow b$*

Probemos ahora $b \Rightarrow a$. Supongamos que el conjunto $A = \{y \mid f(y) \leq \alpha\}$ es cerrado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, probemos que f es semicontinua inferiormente, esto es supongamos que $x_i \to x$ y que $f(x_i) \to \mu$.Para $\alpha > \mu$, $f(x_i) < \alpha$ para i suficienteente grande, y así

$$x \in \overline{A} = A = \{y \mid f(y) \leq \alpha\}$$

Luego, $f(x) \leq \mu = \lim_{i \to \infty} f(x_i)$
lo cual prueba que f es una función semicontinua inferioriormente.

Teorema 1.10. *Sea f una función convexa propia sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces $\overline{f}$ es una función convexa propia cerrada.*

Demostración.
Por ser f una función convexa y propia, entonces por definición $epi\overline{f} = \overline{epif}$ (1). Por otro lado por ser f una función convexa, entonces $epif$ es un conjunto convexo sobre

$\mathbb{R}^{n+1}$, *y así* $\overline{epif}$ *es un conjunto convexo cerrado, luego por* (1) $epi\overline{f}$ *es un conjunto convexo cerrado, y de acá* $\overline{f}$ *es convexa y por teorema anterior* $\overline{f}$ *es semicontinua inferior.*

A continuación, se enuncia el siguiente lema,necesario en la secuencia para su demostración *ver lema 7.3 en [2]*

Lema 1.1. *Para cualquier función convexa f,* $ri(epif)$ *consiste de todos los pares* (x, μ) *tales que* $x \in ri(domf)$ *y* $f(x) < \mu < \infty$.

Teorema 1.11. *Sea* f *una función convexa propia, y sea* $x \in ri(domf)$ *entonces*

$$\overline{f}(y) = \text{lím}_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x + \lambda y)$$

para cada y.

Demostración.
Como f *es una función semicontinua inferiormente y* $\overline{f} \leq f$, *entonces por definición de clausura tenemos:*

$$\begin{aligned} \overline{f}(y) &= \liminf_{z \to y} \overline{f}(z) \\ &\leq \liminf_{z \to y} f(z) \qquad (\overline{f} \leq f) \end{aligned}$$

Hagamos $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, *entonces* $z \to y \Leftrightarrow \lambda \uparrow 1$, *por lo tanto* $\overline{f}(y) \leq \liminf_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x + \lambda y)$, *de esta manera solo necesitamos probar:*

$$\overline{f}(y) \geq \limsup_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x + \lambda y)$$

Veamos, asumamos que β *es cualquier número real tal que* $\beta \geq \overline{f}(y)$. *Tomando cualquier número real* $\alpha > f(x)$. *Entonces:*

$$(y, \beta) \in epi\overline{f} = \overline{epif}$$

mientras que por lema 1.1

$$(x, \alpha) \in ri(epif)$$

luego por teorema 1.5

$$(1-\lambda)(x,\alpha)+\lambda(y,\beta)\in ri(epif) \qquad 0\leq\lambda<1$$

así que

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\leq(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta \qquad 0\leq\lambda<1$$

En consecuencia

$$\limsup_{\lambda\uparrow 1} f((1-\lambda)x+\lambda y)\leq\limsup_{\lambda\uparrow 1}(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta=\beta$$

El siguiente teorema caracteriza la clausura de la adición de funciones convexas propias, nos asegura que la suma de las clausuras de funciones convexas propias es igual a la clausura de la sumas de dichas funciones, cuando existe un punto en común en el interior relativo del dominio de cada función.

Teorema 1.12. *Sean $f_1,\ldots,f_m$ funciones convexas propias sobre $\mathbb{R}^n$. Si cada f_j es cerrada y $f_1+\ldots+f_m$ no es identicamente $+\infty$, entonces $f_1+\ldots+f_m$ es una función convexa propia cerrada. Si las f_j no son todas cerradas pero existe un punto en común a todo $ri(domf_j)$, entonces*

$$\overline{f_1+\ldots+f_m}=\overline{f}_1+\ldots+\overline{f}_m$$

Demostración.
Sea $f=f_1+\ldots+f_m$ y sea $x\in ri(domf)=ri(\bigcap domf_j), j=1,\ldots,m$

por teorema 1.11 para cada y, tenemos:

$\overline{f}(y)=\lim_{\lambda\uparrow 1} f((1-\lambda)x+\lambda y)$

Como la funcion f tiene la forma $f_1+\ldots+f_m$, entonces,

$\lim_{\lambda\uparrow 1} f((1-\lambda)x+\lambda y)=\lim_{\lambda\uparrow 1}\sum_{j=1}^{m} f_j((1-\lambda)x+\lambda y)$

Por propiedad de límite,

$\lim_{\lambda\uparrow 1}\sum_{j=1}^{m} f_j((1-\lambda)x+\lambda y)=\sum_{j=1}^{m}\lim_{\lambda\uparrow 1} f_j((1-\lambda)x+\lambda y)$

Luego por teorema 1.11 y por ser cada f_j cerrada,

$$\sum_{j=1}^{m} \lim_{\lambda\uparrow 1} f_j((1-\lambda)x+\lambda y) = \sum_{j=1}^{m} \overline{f}_j(y) = \sum_{j=1}^{m} f_j(y)$$

$$= f(y)$$

Esto es $\overline{f}(y) = f(y)$, luego $f_1 + \ldots, f_m$ es una función convexa cerrada.

Por otro lado, si los conjuntos $ri(domf_j)$ tienen un punto en común, entonces por teorema 1.8:

$$\bigcap_{j=1}^{m} ri(domf_j) = ri(\bigcap_{j=1}^{m} domf_j) = ri(domf)$$

Así, para $x \in ri(domf)$, entonces $x \in ri(domf_j)$ $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$

Ahora como $x \in ri(domf)$, entonces por teorema 1.11, para cada y:

$$\overline{f}(y) = \sum_{j=1}^{m} f_j((1-\lambda)x+\lambda y)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \overline{f}_j(y) \qquad x \in ri(domf_j)$$

por lo tanto,

$$\overline{(f_1 + \ldots + f_n)} = \overline{f}_1 + \ldots + \overline{f}_m$$

1.3. Conjugada de Fenchel

En la presente sección serán introducidas las definiciones de funciones convexas clásicas del análisis convexo que juegan un papel importante en el estudio de la subdiferenciabilidad que será introducido en el próximo capitulo, entre las que podemos mencionar: la función soporte, función indicadora y la función conjugada de Fenchel.

Definición 1.17. Sea C un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, se define la **función soporte de** C, denotada por $\delta^*(\ \cdot|\ C)$ como:

$$\delta^*(\ x|\ C) = \sup\{\langle x, y\rangle : y \in C\}$$

Definición 1.18. Sea C un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, se define la **función indicadora de** C, denotada por $\delta(\ \cdot|\ C)$ como:

$$\delta(\ x|\ C) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ x \in C \\ \infty \ \ si \ \ x \notin C \end{cases}$$

Definición 1.19. Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to R \cup \{+\infty\}$. **La conjugada de Fenchel** de la función f es la función $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por: $f^*(x^*) = \sup_y \langle y, x^* \rangle - f(y)$

A continuación enunciamos el siguiente teorema , para su demostración ver corolario 13.2.1 en [2]

Teorema 1.13. *Sea f cualquier función convexa homogenea positiva que no es identicamente ∞. Entonces $\overline{f}$ es la función soporte del siguiente conjunto convexo cerrado:*

$$C = \{x^* \mid \forall x,\ \langle x, x^* \rangle \leq f(x)\}$$

Teorema 1.14. *Sea f una función convexa. La función conjugada f^* es una función convexa cerrada, propia si y solo si f es propia. Más aun $\overline{f^*} = f^*$ y $f^{**} = \overline{f}$*

El siguiente teorema es clásico de el análisis convexo y es llamado teorema de Fenchel-Moreau, para su demostración ver teorema 1.10 en [4]

Teorema 1.15. *Considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. f es una función convexa semicontinua inferiormente y propia si y sólo si $f^{**}(x) = f(x)$.*

1.4. Convolucion infimal

El concepto y las propiedades de la aplicación convolución infimal introducidas en la presente sección serán de provecho a la hora del cálculo de la subdiferenciabilidad de funciones convexas propias de la forma $f(x) = f_1(x) + \ldots f_m$ estudiadas en el siguiente capítulo.

Definición 1.20. Sean $f_1, \ldots f_m$ funciones convexas propias sobre $\mathbb{R}^n$, la operación $\diamond$ es llamada **convolución infimal** y es dada por:

$$(f_1 \diamond \ldots \diamond f_m)(x) = \text{ínf}\{f_1(x_1) + \ldots + f_m(x_m)\ : x = \textstyle\sum_{i=1}^m x_i\}$$

Teorema 1.16. *Sean $f_1, \ldots, f_m$ funciones convexas propias sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

$$(f_1 \diamond \ldots, \diamond f_m)^* = f_1^* + \ldots + f_m^*$$

$$(\overline{f}_1 + \ldots + \overline{f}_m)^* = \overline{(f_1^* \diamond \ldots \diamond f_m^*)}$$

Si los conjuntos $ri(dom f_j)$ $j = 1 \ldots, m$ tienen un punto en común, la operación clausura puede ser omitida de la segunda fórmula, y

$$(f_1 + \ldots + f_m)^*(x^*) = \text{ínf}\{f_1^*(x_1^*) + \ldots + f_m^*(x_m^*) \,|x^* = \textstyle\sum_{j=1}^m x_j^*\}$$

donde para cada x^* el infimo es alcanzado.

Demostración.

De la definición 1.20,

$$(f_1 \diamond \ldots, \diamond f_m)^*(x^*) = \sup_x\{\langle x^*, x\rangle - \text{ínf}_x\{f_1(x_1) + \ldots + f_m(x_m) \,|x = \textstyle\sum_{j=1}^m x_j\}\}$$

$$= \sup_x\{\langle x^*, x\rangle + \sup_x\{-f_1(x_1) - \ldots - f_m(x_m) \,|x = \textstyle\sum_{j=1}^m x_j\}\}$$

$$= \langle x^*, x\rangle + \sup_x \sup_x\{-f_1(x_1) - \ldots - f_m(x_m) \,|x = \textstyle\sum_{j=1}^m x_j\}\}$$

$$= \sup_x \sup_x\{\langle x^*, x\rangle - f_1(x_1) - \ldots - f_m(x_m) \,|x = \textstyle\sum_{j=1}^m x_j\}\}$$

$$= \sup_{x_1,\ldots,x_m}\{\langle x^*, x_1\rangle + \ldots + \langle x^*, x_1\rangle - f_1(x_1) - \ldots - f_m(x_m)\}$$

$$= f_1^*(x^*) + \ldots + f_m^*(x^*)$$

Esto es, $(f_1 \diamond \ldots, \diamond f_m)^*(x^*) = f_1^*(x^*) + \ldots + f_m^*(x^*)$
Por otra parte como cada f_j $j \in \{1, \ldots, m\}$ es propia y convexa, entonces por teorema 1.10 cada f_j^* $j \in \{1, \ldots, m\}$ es propia y cerrada, de esta manera podemos aplicar la igualdad anterior a $f_1^*, \ldots, f_m^*$, es decir

$$(f_1^* \diamond \ldots \diamond f_m^*)^* = f_1^{**} + \ldots + f_m^{**}$$

$$= \overline{f}_1 + \ldots + \overline{f}_m \qquad (I)$$

Así, aplicando la operación conjugada en esta última igualdad y por teorema 1.14 se tiene:

$$(\overline{f}_1 + \ldots + \overline{f}_m)^* = (f_1^* \diamond \ldots \diamond f_m^*)^{**}$$

$$= \overline{(f_1^* \diamond \ldots \diamond f_m^*)}$$

Esto es,

$$(\overline{f}_1 + \ldots + \overline{f}_m)^* = \overline{(f_1^* \diamond \ldots \diamond f_m^*)}$$

Finalmente, supongamos que los conjuntos $ri(dom f_j)$ $j \in \{1, \ldots, m\}$ *tienen un punto en común, entonces por (I),*

$$(f_1^* \diamond \ldots \diamond f_m^*)^* = \overline{f}_1 + \ldots + \overline{f}_m$$

$$= \overline{(f_1 + \ldots + f_m)} \qquad \textit{(por teorema 1.12)}$$

$$= (f_1 + \ldots + f_m)^{**} \qquad \textit{(por teorema 1.14)}$$

Aplicando nuevamente conjugada en esta última igualdad, nos queda:

$$(f_1^* \diamond \ldots \diamond f_m^*)^{**} = ((f_1 + \ldots + f_m)^*)^{**}$$

Luego por teorema 1.15,

$$(f_1^* \diamond \ldots \diamond f_m^*) = (f_1 + \ldots + f_m)^*$$

Esto es,

$$(f_1 + \ldots + f_m)^*(x^*) = \text{ínf}\{f_1^*(x_1)^* + \ldots + f_m^*(x_m^*) \mid x^* = \textstyle\sum_{j=1}^m x_j\}$$

Capítulo 2

Subgradiente y subdiferencial

En el presente capítulo se estudiarán las propiedades del conjunto subdiferencial de funciones convexas a valores escalares, para ello es necesario introducir algunos conceptos que nos serán de utilidad para comprender este conjunto y sus propiedades.

Definición 2.1. Un vector x^* es llamado **subgradiente** de una función convexa $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty]$ en un punto x si

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle \,, \quad \forall z \in D$$

Definición 2.2. El conjunto de todos los subgradientes de f en x es llamado el **subdiferencial de f en x** y es denotado por $\partial f(x)$. La función multivaluada $\partial f : x \to \partial f(x)$ es llamada **la subdiferencial de f**. En general, $\partial f(x)$ puede ser vacío, o consistir en un solo vector. Si $\partial f(x)$ es no vacío, f se dice subdiferenciable en x.

Observación 2.1. $\partial f(x)$ es un conjunto convexo cerrado. En efecto:

Sean $x_1{}^*, x_2{}^* \in \partial f(x)$ y sea $\lambda \in (0,1)$, probemos que $(1-\lambda)x_1{}^* + \lambda x_2{}^* \in \partial f(x)$.

Como $x_1{}^*, x_2{}^* \in \partial f(x)$, entonces por definición de subdiferencial

$$f(z) \geq f(x) + \langle x_1{}^*, z \rangle \,, \quad \forall z \in D \qquad \text{(I)}$$

$$f(z) \geq f(x) + \langle x_2{}^*, z \rangle \,, \quad \forall z \in D \qquad \text{(II)}$$

multiplicando en (I) por $1-\lambda > 0$ y en (II) por $\lambda > 0$, obtenemos:

$$(1-\lambda)f(z) \geq (1-\lambda)f(x) + \langle (1-\lambda){x_1}^*, z \rangle\,, \quad \forall z \in D$$

$$\lambda f(z) \geq \lambda f(x) + \langle \lambda {x_2}^*, z \rangle\,, \quad \forall z \in D$$

Finalmente al sumar estas dos últimas desigualdades tenemos:

$$f(z) \geq f(x) + \langle (1-\lambda){x_1}^* + \lambda {x_2}^*, z \rangle\,, \quad \forall z$$

Por lo tanto, $(1-\lambda){x_1}^* + \lambda {x_2}^* \in \partial f(x)$ y así $\partial f(x)$ es un conjunto convexo.

Definición 2.3. Un vector x^* se dice que es **normal** a un conjunto convexo C en un punto a, donde $a \in C$. Si x no forma un ángulo agudo con cualquier segmento de línea en C con a como punto final, esto es si $\langle x-a, x^* \rangle \leq 0$ para todo $x \in C$.

En general, el conjunto de todos los vectores x^* normal a C en a es llamado el **cono normal** a C en a.

Observación 2.2. Un importante caso especial en la teoría de subgradiente es el caso cuando f es la función indicadora de un conjunto convexo no vacío C. Por definición, $x^* \in \partial\delta(x|C)$ si y sólo si

$$\delta(z \mid C) \geq \delta(x \mid C) + \langle x^*, z-x \rangle,\ \forall z$$

Esta condición significa que $x \in C$ y $0 \geq \langle x^*, z-x \rangle$ para cada $z \in C$, esto es que x^* es normal a C en x. Así $\partial\delta(\,x|\,C)$ es el cono normal a C en x.

Teorema 2.1. *Sea f una función convexa, y sea x un punto donde f es finita. Entonces x^* es un subgradiente de f en x si y sólo si*

$$f'(x;y) \geq \langle x^*, y \rangle\,, \qquad \forall y$$

De hecho, la clausura de $f'(x,y)$ como una función convexa de y, es la función soporte del conjunto convexo cerrado $\partial f(x)$.

Demostración.

$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \qquad \forall z$

Hagamos $z = x + \lambda y$, con $\lambda > 0$ luego,

$f(x + \lambda y) \geq f(x) + \langle x^*, \lambda y \rangle$

Esto es,

$f(x + \lambda y) - f(x) \geq \lambda \langle x^*, y \rangle, \qquad \forall y$

Por propiedad de producto interno,

$\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda} \geq \langle x^*, y \rangle,$

Tomando ínfimo en la desigualdad anterior, y por teorema 1.2, resulta:

$f'(x; y) = \text{ínf}_{\lambda > 0} \{ \frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda} \} \geq \langle x^*, y \rangle$

Esto es,

$f'(x; y) \geq \langle x^*, y \rangle, \qquad \forall y$

Ahora bien, como $f'(x; y)$ es una función convexa y homogenea positiva para y, entonces por teorema 1.13. La clausura de $f'(x; y)$ es la función soporte del conjunto convexo cerrado siguiente:

$$C = \{ x^* | \forall x, \langle x, x^* \rangle \leq f'(x; y), \forall y \}$$

$$= \partial f(x)$$

Teorema 2.2. *Para cualquier función convexa f y cualquier vector x, las siguientes cuatro condiciones sobre un vector x^* son equivalentes:*

(a) $x^* \in \partial f(x)$.

(b) $\langle z, x^* \rangle - f(z)$ *alcanza su supremo en* $z = x$.

(c) $f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle$.

(d) $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$.

Si $\overline{f(x)} = f(x)$, *3 condiciones pueden ser añadidas a la lista:*

(e) $x \in \partial f^*(x^*)$.

(f) $\langle x, z^* \rangle - f^*(z^*)$,*alcanza su supremo en* $z^* = x^*$.

(g) $x^* \in \partial \overline{f(x)}$

Demostración:

$a \Rightarrow b$

Supongamos que $x^* \in \partial f(x)$, *entonces por definición de subdiferencial:*

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \qquad \forall z$$

Ahora usando propiedad de producto interno,

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z \rangle - \langle x^*, x \rangle, \qquad \forall z$$

Esto es,

$$\langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \langle x^*, z \rangle - f(z), \qquad \forall z$$

Así,

$$\langle x^*, z \rangle - f(z) \leq \langle x^*, x \rangle - f(x), \qquad \forall z$$

Por lo tanto,

$\langle x^*, z \rangle - f(z)$ *alcanza su supremo en* $z = x$

$b \Rightarrow c$

Supongamos que $\langle x^*, z \rangle - f(z)$ *alcanza su supremo en* $z = x$, *es decir:*

$$\langle x^*, z \rangle - f(z) \leq \langle x^*, x \rangle - f(x), \qquad \forall z$$

Aplicando supremo en la desigualdad anterior,

$$\sup_z \langle x^*, z \rangle - f(z) \leq \sup_z \langle x^*, x \rangle - f(x)$$

Ahora de la definición 1.19, se tiene

$f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle - f(x)$

Esto es,

$f^*(x^*) + f(x) \leq \langle x, x^* \rangle$

$c \Rightarrow d$

Supongamos que $f^*(x^*) + f(x) \leq \langle x, x^* \rangle$. *Para probar* $f^*(x^*) + f(x) = \langle x, x^* \rangle$, *basta probar* $f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x, x^* \rangle$.*Lo cual es directo de la definición de conjugaada de Fenchel, en efecto:*

$f^*(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$

De la definición de supremo,

$f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle - f(x)$

Esto es,

$f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x, x^* \rangle$

Además de la hipótesis, resulta la igualdad siguiente,

$f^*(x^*) + f(x) = \langle x, x^* \rangle$

$d \Rightarrow a$

Supongamos que $f^*(x^*) + f(x) = \langle x, x^* \rangle$

Luego,

$f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - f(x)$

De la definición 1.19

$f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - f(x) = \sup_z \{\langle x^*, z \rangle - f(z)\}$

Nuevamente, de la definición de supremo,

$\langle x, x^* \rangle - f(x) \geq \langle x^*, z \rangle - f(z), \qquad \forall z$

Esto es,

$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z \rangle - \langle x^*, x \rangle, \qquad \forall z$

Finalmente, usando propiedad de producto interno,

$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \qquad \forall z$

Por lo tanto de la definición de subdiferencial,

$x^* \in \partial f(x)$

Por otra parte, supongamos que $\overline{f(x)} = f(x) = f^{**}(x)$, *probemos lo siguiente:*

$d \Rightarrow e$

De la hipótesis,

$f^*(x^*) + f(x) = \langle x, x^* \rangle$

Ahora, del hecho de que $f(x) = f^{**}(x)$,

$f^*(x^*) + f^{**}(x) = \langle x, x^* \rangle$

Además, como $d \Rightarrow a$, *entonces:*

$x \in \partial f^*(x^*)$

$e \Rightarrow f$

De la definición de subdiferencial,

$x \in \partial f^*(x^*) \Rightarrow f^*(z^*) \geq f^*(x^*) + \langle x, z^* - x^* \rangle, \qquad \forall z^*$

Por propiedad de producto interno,

$$f^*(z^*) \geq f^*(x^*) + \langle x, z^* \rangle - \langle x, x^* \rangle, \qquad \forall z^*$$

Finalmente agrupando,

$$\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \geq \langle x, z^* \rangle - f^*(z^*), \qquad \forall z^*$$

Por lo tanto,

$\langle x, z^* \rangle - f^*(z^*)$, *alcanza su supremo en* $z^* = x^*$

$f \Rightarrow g$

Supongamos que $\langle x, z^* \rangle \; - f^*(z^*)$*, alcanza su supremo en* $z^* = x^*$*, esto es:*

$\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \geq \langle x, z^* \rangle \; - f^*(z^*)$

Aplicando supremo en la dsigualdad anterior,

$\sup_{z^*}\{\langle x, z^* \rangle \; - f^*(z^*)\} \leq \sup_{z^*}\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\}$

De la definición 1.19,

$f^{**}(x) \leq sup_{z^*}\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\}$

Por definición de supremo,

$f^{**}(x) \leq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)$

Ahora como $f^{**}(x) = f(x)$*, entonces,*

$f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle$

Luego como $c \Rightarrow d$*, se tiene:*

$f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$

Del hecho de que $d \Rightarrow a$*,*

$x^* \in \partial f(x)$

Finalmente como $f = \overline{f}$*, entonces,* $x^* \in \partial \overline{f(x)}$

$g \Rightarrow a$

Corolario 2.1. *Para una función* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ *convexa se cumple la siguiente propiedad:* $\partial f(x) \neq \emptyset$*, entonces* $f(x) = f^{**}(x)$

Demostración.
Supongamos que $\partial f(x) \neq \emptyset$, entonces existe al menos un $x^* \in \partial f(x)$ tal que $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$ (Por teorema 2.2)
en particular,

$$
\begin{aligned}
& f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle \\
\Longrightarrow\ & \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \leq f(x) \\
\Longrightarrow\ & \sup_{x^*}\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\} \leq \sup_{x^*}\{f(x)\} = f(x)
\end{aligned}
$$

así, $f^{**}(x) \leq f(x)$

$$(I)$$

por otro lado por definición de conjugada, tenemos:

$$
\begin{aligned}
f^{**}(x) &\geq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*), \qquad \forall x* \\
&\geq \langle x, x^* \rangle - \langle x, x^* \rangle + f(x)
\end{aligned}
$$

$$\text{pues } f^*(x^*) = \sup_x\{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$$

luego,

$$f^{**}(x) \geq f(x)$$

$$(II)$$

Por lo tanto de (I) y (II),

$$f^{**}(x) = f(x)$$

Corolario 2.2. *Si f es una función propia y convexa, ∂f^* es la inversa de ∂f en el sentido de las funciones multivaluadas, esto es: $x \in \partial f^*(x^*) \Leftrightarrow x^* \in \partial f(x)$.*

Demostración.

$x \in \partial f^*(x^*) \Leftrightarrow f^*(x^*) + f^{**}(x) = \langle x, x^* \rangle$ *(Teorema 2.2 parte d)*

$\Leftrightarrow f^*(x^*) + f(x) = \langle x, x^* \rangle$ $f^{**}(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow x^* \in \partial f(x)$ *(Teorema 2.2)*

Corolario 2.3. *Si f es una función propia convexa y x un punto donde f es subdiferenciable, entonces $\overline{f}(x) = f(x)$ y $\partial\overline{f}(x) = \partial f(x)$.*

Demostración.

En general, $f(x) \geq \overline{f}(x)$. *Probemos* $f(x) \leq \overline{f}(x)$.

Como f *es sudiferenciable en* x, *entonces por teorema 2.2, existe al menos un* x^* *tal que* $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$.*(i)* *Así*

$f(x) \leq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \Rightarrow f^{**}(x) \leq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \qquad (f(x) = f^{**}(x))$

$\Rightarrow \overline{f}(x) \leq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \qquad (\overline{f}(x) = f^{**}(x))$

$\Rightarrow \overline{f}(x) = f(x) \qquad$ *(por i)*

Corolario 2.4. *Sea* C *un subconjunto convexo cerrado, no vacío. Entonces para cada vector* x^*, $\partial\delta^*(\ x^*|\ C)$ *consiste de todos los puntos* x *donde la función lineal* $\langle \cdot\ ,\ x^* \rangle$ *alcanza su supremo sobre* C.

Demostración.

Hagamos $f = \delta(\ \cdot|\ C)$.

Afirmación 2.1. $f^* = \delta^*(\ .|\ C)$.

En efecto de la definición 1.19,

$f(x) = \delta(\ x|\ C) \Rightarrow f^*(x) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^* \rangle - \delta(\ x^*|\ C)\}$

tambien, de la definición 1.18,

$f^*(x) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^* \rangle \ : x \in C\}$

Nuevamente, de la definición 1.19,

$= \delta^*(x \mid C)$

Así , $\partial f^*(x) = \partial\delta^*(x \mid C)$. *Luego por teorema 2.2:*

$x^* \in \partial\delta^*(x \mid C) \Rightarrow \langle z, x^* \rangle - \delta^*(z \mid C)$ *alcanza su supremo en* $z = x$.

$\Rightarrow \langle ., x^* \rangle$ *alcanza su supremo sobre* C.

Definición 2.4. Sea K un cono convexo, el cono polar de K, denotado por K° es el conjunto siguiente:

$$K^\circ = \{x^* \,|\forall x,\ \langle x, x^* \rangle \leq \delta(x \mid K)\}$$

$$K^\circ = \{x^* \,|\forall x \in K,\ \langle x, x^* \rangle \leq 0\}$$

Corolario 2.5. *Sea* K *un cono convexo cerrado no vacío. Entonces* $x^* \in \partial\delta(x \mid K)$ *si y sólo si* $x \in \partial(x^* \, x| \, K^\circ)$. *Estas condiciones son equivalentes a tener:* $x \in K, x^* \in K^\circ,\ \langle x, x^* \rangle \leq 0$.

Demostración.

Hagamos $f = \delta(.| \, K)$.

Afirmación 2.2. f *es homogenea positiva.*
En efecto: Para $\lambda > 0$,

$f(\lambda x) = 0 = \lambda 0 = \lambda f(x)$ *Si* $x \in K$

$f(\lambda x) = +\infty = \lambda(+\infty) = \lambda f(x)$ *Si* $x \notin K$

Luego, f *es homogenea positiva.*

Afirmación 2.3. $f^* = \delta(.| \, K^\circ)$

En efecto, como f *es homogenea positiva,entonces por teorema 1.13, la clausura de* f *es la función soporte del conjunto convexo cerrado siguiente:*

$$C = \{x^* \mid \forall x, \langle x, x^* \rangle \leq f(x) = \delta(x \mid K)\}$$

$$= \{x^* \,|\forall x \in K,\ \langle x, x^* \rangle \leq 0\} = K^\circ$$

Luego $C = K^\circ$, *por lo tanto* $\overline{f}(x) = \delta^*(x \mid K^\circ)$ *(I)*

Por otra parte, como $f = \delta(.| K)$ *es subdiferenciable en* x*, entonces por corolario 2.3* $\overline{f}(x) = f(x)$ *y* $\partial\overline{f}(x) = \partial f(x)$ *(II)*
Así de (I) y (II),

$$f(x) = \overline{f}(x) = \delta^*(x \mid K^\circ) \qquad \textit{(III)}$$

Afirmación 2.4. $(\delta^*(x \mid K^\circ))^* = \delta(x \mid K^\circ)$

En efecto, de la afirmacion 1 resulta:

$(\delta(x \mid K^\circ))^* = \delta^*(x \mid K^\circ)$

$\Rightarrow (\delta(x \mid K^\circ))^{**} = \delta^*(x \mid K^\circ)^*$ *(aplicando conjugada)*

$\Rightarrow \delta(x \mid K^\circ) = \delta^*(x \mid K^\circ)^*$ *(por teorema 1.15)*

Así, aplicando conjugada en (III), y por afirmación 2.4, se tiene:

$$f^*(x) = \delta(x \mid K^\circ)$$

Lo cual prueba la afirmacion 2.3.

Finalmente como $\overline{f}(x) = f(x)$ *y* $f^*(x) = \delta(x| K^\circ)$*,entonces por teorema* $(a \Leftrightarrow e)$ *resulta:*

$$x^* \in \partial\delta(x \mid K) \Leftrightarrow x \in \partial(x^* \mid K^\circ)$$

Lo cual prueba el corolario 2.5

Teorema 2.3. *Sean* $f_1, \ldots, f_m$ *funciones convexas propias sobre* $\mathbb{R}^n$*, y sea* $f = f_1 + \ldots + f_m$*. Entonces*

$$\partial f(x) \supset \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x), \qquad \forall x.$$

Si los conjuntos $ri(dom f_j)$*,* $j = 1, \ldots, m$*, tienen un punto en común, entonces*

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x), \qquad \forall x.$$

Demostración.

Si $x^* = x_1^* + \ldots + x_m^*$, donde $x_j^* \in \partial f_j(x)$, entonces para cada z,

$$f(z) = f_1(z) + \ldots + f_m(z) \geq f_1(x) + \langle z - x, x_1^* \rangle + \ldots + f_m(x) + \langle z - x, x_m^* \rangle$$

$$= f_1(x) + \ldots + f_m(x) + \langle z - x, x_1^* \rangle + \ldots + \langle z - x, x_m^* \rangle$$

$$= f(x) + \langle z - x, x^* \rangle$$

Esto es,

$f(z) \geq f(x) + \langle z - x, x^* \rangle, \ \ \forall z$

Así $x^* \in \partial f(x)$ y por tanto,

$$\partial f(x) \supset \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x), \qquad \forall x$$

Esto prueba la inclusión general. Supongamos ahora que $ri(dom f_j)$ tienen un punto en común probemos que $\partial f(x) \subset \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x), \qquad \forall x$
Sea $x^* \in \partial f(x)$, luego por teorema 2.2 parte d:

$$\langle x, x^* \rangle = f(x) + f^*(x^*)$$

$$= f_1(x) + \ldots + f_m(x) + (f_1(x^*) + \ldots + f_m(x^*))^*$$

$$= f_1(x) + \ldots + f_m(x) + \text{ínf}\{f_1^*(x_1^*) + \ldots + f_m^*(x_m^*) \ | x^* = \textstyle\sum_{j=1}^m x_j^*\}$$

Donde para cada x^* el ińfimo es alcanzado para algún $x_1^*, \ldots, x_m^*$, así $\partial f(x)$ consiste de todos los vectores de la forma $x_1^* + \ldots + x_m^*$ tales que:

$$\langle x, x_1^* + \ldots + x_m^* \rangle = f_1(x) + \ldots + f_m(x) + f_1^*(x^*) + \ldots + f_m^*(x^*)$$

De modo que,

$$\langle x, x_1^* \rangle + \ldots + \langle x, x_m^* \rangle = f_1(x) + \ldots + f_m(x) + f_1^*(x^*) + \ldots + f_m^*(x^*)$$

pero siempre se tiene la desigualdad $\left\langle x, x_j^* \right\rangle \leq f_j(x) + f_j^*(x_j^*)$, la igualdad se cumple por teorema si y sólo si $x_j \in \partial f_j(x)$, luego $x^* \in \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x)$ $\forall x$ Así,

$\partial f(x) \subset \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x), \qquad \forall x$

y por tanto de la inclusión general, nos queda

$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x), \qquad \forall x$

2.1. Diferenciabilidad de funciones convexas

Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ a $[-\infty, +\infty]$, y sea x un punto donde f es finita. De acuerdo con la definición usual, f es diferenciable en x sí y solo sí existe un único vector x^* con la propiedad:

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x) - \langle x^*, z - x \rangle}{\|z - x\|} = 0 \tag{2.1}$$

Tal x^*, si existe, es llamado el gradiente de f en x y es denotado por $\nabla f(x)$
Supongamos que f es diferenciable en x. Entonces por definición, para algún $y \neq 0$

$$0 = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x) - \langle \nabla f(x), \lambda y \rangle}{\lambda \|y\|} \tag{2.2}$$

Así de la definición 1.1,

$$0 = \frac{f'(x, y) - \langle \nabla f(x), y \rangle}{\|y\|} \tag{2.3}$$

Por lo tanto $f'(x,)$ existe y es una función lineal de y :
$f'(x, y) = \langle \nabla f(x), y \rangle, \quad \forall y$

En el caso en que la función f es convexa, uno puede preguntarse cómo el concepto de "gradiente" se relaciona con el concepto de "subgradiente" que ha sido desarrollado en este capítulo. La relación resulta ser muy simple, la cual podemos observar en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Sea f una función convexa, y x un punto donde f es finita. Si f es diferenciable en x, entonces $\nabla f(x)$ es el único subgradiente de f en x, así que en particular*

$$f(z) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), z - x \rangle, \quad \forall z$$

Demostración.

Supongamos que f es diferenciable en x, entonces $f'(x, .)$ es la función lineal $\langle \nabla f(x), . \rangle$. por teorema 2.1 los subgradientes en x son los vectores x^* tales que

$$\langle \nabla f(x), y \rangle \geq \langle x^*, y \rangle \,, \;\; \forall y$$

Esta condición es satisfecha si y solo si $x^* = \nabla f(x)$

Capítulo 3

Funciones convexas vectoriales y su subdiferencial.

En este capítulo relataremos de una manera detallada, todos los resultados establecidos en el artículo [1], expuesto por Dinh The Luc, Nguyen Xuan Tan y Phan Nhat Tinh.
El primer resultado que presentamos, caracteriza la continuidad de la funciones convexas sobre puntos del interior relativo de su dominio, un nuevo concepto de subdiferencial de una función convexa es introducido y algunas propiedades similares al caso escalar son probadas, el principal objetivo de este es capítulo se centra en la relación de inclusión entre el jacobiano generalizado y el conjunto subdiferencial, el cual será expuesto en el teorema 3.4.
Dado un cono convexo $C \subset \mathbb{R}^m$ este define el orden parcial como sigue:

$$x, y \in \mathbb{R}^m, \qquad x \succeq_c y \qquad si \;\; x - y \in C \tag{3.1}$$

Escribiremos $\succeq$ en lugar de $\succeq_c$ asumiendo que se entiende cual es el cono C. Sea f una función de un subconjunto convexo no vacío $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Recordemos que f se dice convexa sobre D si para cada $x, y \in D$, $\lambda \in (0, 1)$ se tiene

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \succeq f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \tag{3.2}$$

Denotemos por C' el cono polar positivo de C, esto es

$$C' := \{\xi \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) : \xi(c) \geq 0, \; \forall c \in C\} \tag{3.3}$$

Donde $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ denota el espacio de los funcionales lineales sobre $\mathbb{R}^m$. Denotemos por lC el conjunto $C \cap (-C)$. El cono C es llamado puntual si $lC = \{0\}$.
Los conos y conos polares juegan un rol importante en la teoría subdiferencial, por ello es necesario conocer las propiedades de estos. El siguiente teorema nos muestra la relación que se tiene entre estos dos conjuntos. Este teorema clásico del análisis convexo también es conocido como el teorema bipolar.

Teorema 3.1. *Sea C un cono convexo cerrado.Si C' es el cono polar positivo de C, entonces $C'' = C$.*

Demostración.
$C \subseteq C''$. En efecto, si $x \in C$, entonces por definición 3.3 para cualquier $\xi \in C'$, $\xi(x) \geq 0$, esto es $x(\xi) \geq 0$, $\forall \xi \in C'$. Así $x \in C''$.
Por otra parte, $C'' \subseteq C$, en efecto, por ser C cerrado, entonces C es intersección de semiespacios cerrados que lo contienen, esto es

$$C = \bigcap_{C \subset S} S \tag{3.4}$$

donde S es un semiespacio cerrado determinado por un hiperplano. Procedemos por contrarreciproco, supongamos que $x \notin C$, probemos que $x \notin C''$. Como $x \notin C$, entonces por la ecuación 3.4 $\exists S \supset C : x \notin S$,en otras palabras existe un hiperplano que separa a x de C. Por otra parte por ser C un cono, entonces por teorema 1.4 existe un hiperplano el cual separa propiamente a x de C y pasa a traves del orígen, analíticamente:

$$\exists S_1 \text{ tal que } S_1 \supset C \quad y \quad x \notin C \tag{3.5}$$

Donde S_1 es un semiespacio cerrado determinado por un hiperplano el cual pasa a traves del orígen. Luego existe δ tal que

$$\delta(y) \geq 0 \quad \forall y \in C \tag{3.6}$$

y

$$\delta(x) < 0 \tag{3.7}$$

Ahora bien, la ecuación 3.6, implica que $\delta \in C'$, de esta manera $\exists \delta \in C'$ tal que $\delta(x) < 0$, por lo tanto $x \notin C''$, lo cual completa la prueba.

Corolario 3.1. *Sea C un cono convexo cerrado. Entonces $x \in C \Leftrightarrow \delta(x) \geq 0, \quad \forall \delta \in C'$*

Demostración.

Supongamos que $x \in C$ y sea $\delta \in C'$, entonces por definición 3.3 $\delta(x) \geq 0$. recíprocamente, supongamos que $\delta(x) \geq 0$, $\forall \delta \in C'$, entonces por definición 3.3 y por teorema 3.1 $x \in C'' = C$, y por tanto $x \in C$.

A menudo resulta ser tedioso conocer cuándo una función a valores vectoriales como las estudiadas en este capítulo es convexa. El siguiente teorema nos brinda herramientas para la verificación de la convexidad, tanto en el caso vectorial como el real.

Lema 3.1. *Si C es cerrado, entonces f es convexa si y sólo si la composición $\xi o f$ es una función convexa escalar sobre D, para todo $\xi \in C'$.*

Demostración.

Supongamos que f es convexa sobre D y sea $\xi \in C'$, entonces para cada $x, y \in D$ y $\lambda \in (0,1)$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \in C$$

$$\Rightarrow \xi(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \geq 0, \quad \forall \xi \in C'$$

$$\Rightarrow \lambda\xi(f(x)) + (1-\lambda)\xi(f(y)) - \xi(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \geq 0, \quad (\xi \in L(R^m, R))$$

$$\Rightarrow \lambda\xi o f(x) + (1-\lambda)\xi o f(y) - \xi o f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda\xi o f(x) + (1-\lambda)\xi o f(y) \geq \xi o f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

$\Rightarrow \xi o f$ es convexa sobre D.

Recíprocamente, supongamos que $\xi o f$ es convexa sobre D para todo $\xi \in C'$, entonces para cada $x, y \in D$ y $\lambda \in (0,1)$

$\lambda\xi of(x) + (1-\lambda)\xi of(y) \geq \xi of(\lambda x + (1-\lambda)y)$

$\Rightarrow \lambda\xi of(x) + (1-\lambda)\xi of(y) - \xi of(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0$

$\Rightarrow \lambda\xi(f(x)) + (1-\lambda)\xi(f(y)) - \xi(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \geq 0, \quad (\xi \in L(R^m, R))$

$\Rightarrow \xi(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \geq 0, \quad \forall \xi \in C'$

$\Rightarrow \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \in C$ (por corolario 3.1)

$\Rightarrow f$ es convexa sobre$D$

Lema 3.2. *Si una función f es convexa con respecto a C, entonces también es convexa con respecto a cualquier cono más grande que C.*

Demostración.
Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ un cono convexo, tal que $C \subset K$. Supongamos que f es convexa con respecto a C, esto es para cada $x, y \in D$ y $\lambda \in (0,1)$ resulta

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \in C \subset K$$

y por tanto, para cada $x, y \in D$ y $\lambda \in (0,1)$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \in K$$

Así, f es convexa respecto a K.

3.1. Continuidad

Es conocido que las funciones convexas a valores escalares son Lipschitz cerca de puntos del interior relativo de su dominio. Una pregunta natural que podemos hacer es para funciones convexas vectoriales ¿continuará siendo cierta esta propiedad?. Probaremos que si el cono C satisface ciertas propiedades, entonces la respuesta es afirmativa. Como el objetivo principal del presente trabajo se centra en el estudio del conjunto subdiferencial y su relación con el Jacobiano generalizado definido en la siguiente sección, se enuncia el siguiente teorema, para su demostración ver teorema 3.1 en [1]

Teorema 3.2. *Supongamos que la clausura* $\overline{C}$ *del cono* C *es punteado y* f *es una función convexa vectorial de un subconjunto convexo* $D \subset \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}^m$*. Entonces* f *es localmente Lipschitz sobre el interior relativo de* D*.*

Recordemos el celebre teorema de Rademacher, el cual resulta ser de utilidad cuando se consideran funciones localmente de Lipschitz.

Teorema 3.3 (Teorema de Rademacher)**.** *Sea* U *un subconjunto cerrado de* R^n *y supongamos que* $f : U \to R^m$ *es localmente Lipschitz, entonces* f *es diferenciable casi siempre en* U*.*

3.2. Subdiferencial

A lo largo de esta sección supondremos que C es un cono convexo cerrado punteado. Sea f una función convexa de un subconjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ y $x_0 \in D$. Definimos el subdiferencial de f en x_0 como el conjunto

$$\partial f(x_0) := \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : f(x) - f(x_0) \succeq A(x - x_0), \ \ \forall x \in D\} \tag{3.8}$$

Donde $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota el espacio de los operadores lineales continuos de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ que es también considerado como el espacio de las matrices (mxn).
Primeramente consideraremos una relación entre el Jacobiano generalizado y el subdiferencial de la función vectorial convexa f. Supongamos que $intD \neq \varnothing$. Sea $x_0 \in intD$. Por teorema 3.2 , f es Lipschiziana cerca de x_0. Por teorema de Rademacher f es diferenciable casi siempre en una vecindad de x_0.

El Jacobiano generalizado $Jf(x_0)$ de f en x_0 en el sentido de Clarke se define como la cápsula convexa de todas las matrices (mxn) obtenidas como los límites de secuencias de la forma $(Df(x_i))_i$, donde $(x_i)_i$ converge a x_0 y la matriz Jacobiana clásica $Df(x_i)$ de f en x_i, existe.

En el capítulo 2 obtuvimos en el caso donde f es diferenciable, que para $m = 1$ se tiene la igualdad $\partial f(x) = Jf(x)$, $x \in intD$. Para $m > 1$ no es cierto en general. Sin embargo, la inclusión $Jf(x) \subseteq \partial f(x)$ $x \in intD$, sigue siendo válida. Para su demostración veamos primeramente los siguientes resultados.
En el caso escalar obtuvimos que una de las propiedades del conjunto subdiferencial,

visto en el capítulo 2, es que este conjunto es convexo y cerrado. El concepto de conjunto subdiferencial introducido en este capítulo continúa conservando esta propiedad, lo cual se establece en el siguiente lema.

Lema 3.3. *Para todo $x \in D$, $\partial f(x)$ es un conjunto convexo cerrado.*

Demostración.
Sean $A_1, A_2 \in \partial f(x)$ y $\lambda \in (0,1)$, probemos que $\lambda A_2 + (1-\lambda)A_1 \in \partial f(x)$.
Como $A_1, A_2 \in \partial f(x)$, entonces para todo $x_0 \in D$

$$f(x_0) - f(x) - A_1(x_0 - x) \in C \tag{3.9}$$

$$f(x_0) - f(x) - A_2(x_0 - x) \in C \tag{3.10}$$

Multiplicando en 3.9 por $(1-\lambda) > 0$ y en 3.10 por $\lambda > 0$, obtenemos

$$f(x_0) - f(x) - A_1(x - x_0) - \lambda f(x_0) + \lambda f(x) + \lambda A_1(x_0 - x) \in C \tag{3.11}$$

$$\lambda f(x_0) - \lambda f(x) - \lambda A_2(x_0 - x) \in C \tag{3.12}$$

Ahora bien, por ser C un cono convexo, entonces por definición C es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalar positivo, de manera que al sumar las expresiones en 3.11 y 3.12 obtenemos

$$f(x_0) - f(x) - A_1(x_0 - x) + \lambda A_1(x_0 - x) - \lambda A_2(x_0 - x) \in C$$

Así

$$f(x_0) - f(x) - (\lambda A_2(x_0 - x) + (1-\lambda)A_1(x_0 - x)) \in C$$

Esto es

$$f(x_0) - f(x) - (\lambda A_2 + (1-\lambda)A_1)(x_0 - x) \in C$$

y por tanto por definición 3.1

$$f(x_0) - f(x) \succeq (\lambda A_2 + (1-\lambda)A_1)(x_0 - x)$$

finalmente por definición 3.8

$$\lambda A_2 + (1-\lambda)A_1 \in \partial f(x)$$

Lo cual prueba la convexidad del conjunto $\partial f(x)$.
Verifiquemos ahora la cerradura de $\partial f(x)$. Sea $(A_i)_i \subseteq \partial f(x)$ una secuencia la cual converge a algún $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Para cada $x_0 \in D$ se tiene

$$f(x_0) - f(x) - A_i(x_0 - x) \in C$$

Tomando $i \to \infty$ por la cerradura de C tenemos

$$f(x_0) - f(x) - A(x_0 - x) \in C$$

esto es por definición 3.1

$$f(x_0) - f(x) \succeq A(x_0 - x)$$

De aquí, $A \in \partial f(x)$ y por tanto el conjunto $\partial f(x)$ es cerrado.
El siguiente lema nos será de utilidad para el estudio de propiedades importantes del conjunto subdiferencial.

Lema 3.4. *Si f es diferenciable en $x \in intD$, entonces $Df(x) \in \partial f(x)$.*

Demostración.
Por ser f diferenciable en x, entonces por teorema $\xi o f$ es también diferenciable en x, para todo $\xi \in C'$, con $\xi o Df(x) = D(\xi o f)(x) \in \partial(\xi o f)(x)$.
Por definición de subdiferencial, para todo $\xi \in C'$, $z \in D$, tenemos

$$(\xi o f)(z) - (\xi o f)(x) - (\xi o Df(x)(z - x) \geq 0$$

Ahora por ser ξ un funcional lineal,

$$\xi(f(z) - f(x) - Df(x)(z - x)) \geq 0$$

Así por corolario 3.1

$$f(z) - f(x) - Df(x)(z - x) \in C$$

Luego de la definición 3.1, resulta

$$f(z) - f(x) \succeq Df(x)(z - x)$$

Por lo tanto, de la definición 3.8 $Df(x) \in \partial f(x)$.

Lema 3.5. *El conjunto de valores de la función ∂f de D a $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es cerrado en cualquier punto $x \in D$ en el cual f es continua.*

Demostración.

Supongamos que f es continua en $x \in D$. Sea $(x_i, A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una secuencia la cual converge a (x, A), para algún $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, donde $A_i \in \partial f(x_i)$. Para todo $x_0 \in D$, se tiene

$$f(x_0) - f(x_i) - A_i(x_0 - x_i) \in C$$

tomando $i \to \infty$, y por el hecho de ser f continua en x y C cerrado, tenemos

$$f(x_0) - f(x) - A(x_0 - x) \in C$$

Se sigue, por definición de subdiferencial, que $A \in \partial f(x)$, lo cual completa la prueba.

Observación 3.1. Sea $\mathcal{A} \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\xi \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ arbitrario. Denotaremos por $\xi\mathcal{A}$ el conjunto $\{\xi o A \ : A \in \mathcal{A}\}$

Afirmación 3.1. *Sea f una función convexa de un subconjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$,entonces es claro de la definición de subdiferencial y de la observación 3.1*

$$\xi\partial f(x) \subseteq \partial(\xi o f)(x), \ \forall \xi \in C' \tag{3.13}$$

En efecto, sea $\xi \in C'$, luego de la observación 3.1

$$\xi\partial f(x) = \{\xi o A \ : \ A \in \partial f(x)\}$$

$$= \{\xi o A \ : \ f(x_0) - f(x) - A(x - x_0) \in C, \ \forall x_0 \in D\}$$

$$= \{\xi o A \ : \ \xi(f(x_0) - f(x) - A(x - x_0)) \geq 0, \ \forall x_0 \in D\} \quad \text{(por corolario 3.1)}$$

$$= \{\xi o A \ : \ \xi o f(x_0) - \xi o f(x) - \xi o A(x - x_0) \geq 0, \ \forall x_0 \in D\} \quad (\xi \in C')$$

$$= \{\xi o A \ : \ \xi o f(x_0) \geq \xi o f(x) + \xi o A(x - x_0), \ \forall x_0 \in D\} \ \text{(I)}$$

Por otra parte, de la definición de subdiferencial

$\partial(\xi o f)(x) = \{x^* \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \ : \ \xi o f(x_0) \geq \xi o f(x) + \langle x^*, x_0 - x\rangle \ \ \forall x_0 \in D\}$ (II)

Luego de (I) y (II) se obtiene la inclusión 3.13

Como comentanos a principios de este capítulo, existe una relación directa con el conjunto subdiferencial y el gradiente de una función diferenciable convexa y fué establecido en el capítulo 2, cuya relación resulta ser una igualdad . En este caso, es decir cuando se considera una función convexa a valores vectoriales, no resulta ser una igualdad la relación entre el jacobiano y el conjunto subdiferencial. El siguiente teorema establece la relación entre estos conjuntos.

Teorema 3.4. *Sea f una función convexa de un subconjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ con $intD \neq \varnothing$, entonces $Jf(x) \subseteq \partial f(x)$, para todo $x \in intD$.*

Demostración.
Sea $A \in Jf(x)$, esto es $A = \lim Df(x_i)$ donde $x = \lim x_i$ y la matriz jacobiana clásica $Df(x_i)$ de f en x_i existe.
Luego como $Df(x_i)$ existe, entonces por lema 3.4 $Df(x_i) \in \partial f(x_i)$. Hagamos $A_i = Df(x_i)$, entonces $A_i \in \partial f(x_i)$, además por teorema 3.2 f es continua en x y así por lema 3.5 $A \in \partial f(x)$.
Los siguientes resultados son consecuencia directa del teorema anterior, siendo una muestra de una serie de propiedades que se desglosan del mismo, y por motivos de tiempo no serán introducidos en el presente trabajo.

Teorema 3.5. *Sea f una función convexa de un subconjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ con $intD \neq \varnothing$, entonces para cada $\xi \in C'$ $\xi Jf(x) = J(\xi o f)(x)$ para todo $x \in intD$.*

Demostración.
Comenzemos por notar que por la observación 3.1 tenemos
$\xi Jf(x) = \{\xi o A \; : \; A \in Jf(x)\}$
Luego por teorema 3.4, resulta $Jf(x) \subseteq \partial f(x)$ y así

$$\xi Jf(x) \subseteq \{\xi o A \; : \; A \in \partial f(x)\} = \xi \partial f(x) \tag{3.14}$$

Por otra parte, por el hecho de ser $\xi o f(x)$ escalar, entonces
$J(\xi o f)(x) = \partial(\xi o f)(x)$
Luego de la afirmación 3.1

$\xi\partial f(x) \subseteq \partial(\xi of)(x)$

$$= J(\xi of)(x)$$

Por lo tanto, $\xi Jf(x) \subseteq J(\xi of)(x)$, $\forall x \in intD$.
Para la demostración de la inclusión $\xi Jf(x) \supseteq J(\xi of)(x)$ ver [3] teorema 2.6.6

Corolario 3.2. *Sea f una función convexa de un subconjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ con $intD \neq \varnothing$.Sí $x \in intD$, entonces para cada $\xi \in C'$, $\xi Jf(x) = \xi\partial f(x)$*

Demostración.
Sea $x \in intD$, luego por teorema 3.4

$$Jf(x) \subseteq \partial f(x) \tag{3.15}$$

Sea $\xi \in C'$, así por teorema $\xi Jf(x) = J(\xi of)(x)$, además del hecho de ser ξofes una función convexa escalar,entonces

$$\xi Jf(x) = \partial(\xi of)(x) \tag{3.16}$$

Por otro lado de la defincíón de subdiferencial

$$\partial(\xi of)(x) \supseteq \xi\partial f(x) \tag{3.17}$$

De esta manera, de las ecuaciones 3.17 y 3.16 $\xi\partial f(x) \subseteq \partial(\xi of)(x) = \xi Jf(x)$, esto es $\xi\partial f(x) \subseteq \xi Jf(x)$, también de la ecuación 3.15 $\xi\partial f(x) \supseteq \xi Jf(x)$, por lo tanto $\xi Jf(x) = \xi\partial f(x)$.

Teorema 3.6. *Sea f una función convexa de un subconjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, $x \in D$ y $\xi \in C'$. Si $intD \neq \varnothing$ y $x \in intD$. Entonces,*

$$\partial(\xi of)(x) = \xi\partial f(x)$$

Demostración.
Sean $x \in intD$. Para cada $\xi \in C'$, como ξof es una función convexa escalar, entonces

$$\partial(\xi of)(x) = J(\xi of)(x) \tag{3.18}$$

Por teorema 3.5

$$\xi Jf(x) = J(\xi of)(x) \tag{3.19}$$

luego por corolario 3.2

$$\xi Jf(x) = \xi \partial f(x) \tag{3.20}$$

Así, de las ecuaciones 3.19 y 3.20,

$$J(\xi of)(x) = \xi \partial f(x) \tag{3.21}$$

finalmente de las ecuaciones 3.18 y 3.21

$\partial(\xi of)(x) = \xi \partial f(x)$

Conclusiones

El cálculo subdiferencial de una función convexa, como rama del análisis funcional, ha sido de interés en el área de la optimización. En el presente trabajo se observó que al considerar una función convexa definida sobre espacios euclídeos, esta función es de Lipschitz sobre puntos de el interior relativo de su dominio sí la clausura del cono sobre el cual se define la relación de orden 3.1 es punteado. Este resultado es una generalización para este tipo de funciones, ya que es conocido que en el caso en el cual se considera una función convexa definինida a valores reales, esta es de Lipschitz sobre puntos del interior relativo de su dominio. Otro resultado relevante es que al definir el conjunto subdiferencial de una función convexa sobre espacios euclídeos, este conjunto es convexo y cerrado. Tambien se establece una relación de inclusión entre el jacobiano generalizado en el sentido de Clarke y el conjunto subdiferencial, este resultado permite el estudio de operaciones tales como la suma y la compuesta de subdiferencial.

Referencias Bibliográficas

[1] Dihn T. L., Nguyen X, T., Phan N. Tinh. *Convex vector functions and their subdifferential.* Acta Math. Vietnamica. (1998) **23** Nro. 1, pp. 107-127.

[2] R. Tyrrell. Rockafellar. *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey. (1970).

[3] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis* , Wiley-Interscience, New York. (1983).

[4] Haim Brézis. *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*, Masson, París. (1983).

[5] Stefan Banach. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae III. (1922)

[6] M. Fréchet. Tesis. Rendiconti del circolo Matematico di Palermo. 22 1-74, (1906).

[7] R. T. Rockafellar. *Characterization of the subdifferentials of convex functions.* Pacific journal of mathematics. (1966) **17** Nro. 3.

[8] Levin V. L., Subdiferentials of convex mappings and composite functions, Sibirsk. Mat. Zh., 13, No. 6, 1295-1303 (1972).