UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Funciones De Variación Acotada sobre subconjuntos Compactos Reales ó Complejos. "

Trabajo Especial de Grado presentado por

Yennys Yosmar Cárdenas Nadal

como requisito final
para obtener el título de Licenciada
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional .
Tutor: MSc. Miguel J. Vivas C.

Barquisimeto, Venezuela. Abril de 2013

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA SOBRE SUBCONJUNTOS COMPACTOS REALES Ó COMPLEJOS. "

Presentado por el ciudadano YENNYS YOSMAR CÁRDENAS NADAL titular de la Cédula de Identidad Nº 17.156.346. Con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciada en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ________________

Con una calificación de ________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los ____ días del mes de ________________ de ________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

[1] Aprobado ó Reprobado

Dedicado a **Dios***; a* **Don Lino V.***; a* **Mi Mamá***; a* **Mis Abuelos** *y a toda mi familia.*

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a cada una de las personas que en su momento estuvieron allí. En primer lugar quiero agradecer:

A **Dios Todopoderoso** y a **Don Lino V.** por haber sido mis guías espirituales, por siempre mostrarme la luz en el camino y por nunca dejarme caer y si en algún momento lo hice siempre estuvieron ahí para ayudarme a levantar.

A mis abuelos: **Reyna** y **Eloy** que son mi segunda madre y mi padre respectivamente; gracias por criarme, por ser las mejores personas del mundo, por sus consejos y por ser un ejemplo a seguir; Lo que ahora soy se los debo en gran parte a ustedes. *Los Adoro.*

A mi mamá, **Mary**, gracias por estar siempre a mi lado; esta lucha ha sido de mis abuelos, tuya y mía; gracias por tus consejos, por tu apoyo incondicional, por confiar y creer en mí; por hacer de mí una mejor persona; por amarme; por tenerme tanta paciencia; por ser mi inspiración; por ser esa mujer luchadora que no se deja vencer por nada; y simplemente por ser la mejor madre del mundo. Todos los días le doy gracias a Dios por tener la dicha de ser tu hija. *Te amo mamá.*

A mis hermanos, **Yamileth**, **Atilio** y **Pedro** por preocuparse siempre por mí y cuidarme. Este logro también es de ustedes.

A mi sobrino, **Ale** por traerle alegría a mi vida.

Al amor de mi vida, **Miguel Gizzi**, por estar siempre ahí, por prestarme su hombro cuando llegaba llorando, sin ánimos de nada y con ganas de abandonarlo todo, gracias por sus consejos, por hacerme reír con sus chistes y sus locuras, por amarme, por enseñarme que no hay que dejarse vencer por nada ni por nadie, que siempre hay que seguir adelante con la cabeza bien en alto que las cosas llegan cuando tienen que llegar y por su apoyo incondicional. *Lo amo y lo adoro.*

A mis Tios: **Juan, Miriam, Milaris, Marlyn, Marina, Adelis, Eloy, Williams**, por estar siempre pendiente de mi preparación profesional y por darme su apoyo ya que han sido testigos de esta gran lucha. A todos *los quiero.*

A **Hernán**, por ser como mi padre y por estar siempre al pendiente de mí.

A todos mis primos que como nos criamos juntos los considero como mis hermanos, **Eduard**, **Rolan**, **Yohan**, **Rolma**, **Daniela**, **Juan J.**, **Kervin**, **Otilia**; y muchos más que en su debido momento con todos he compartido mis luchas y mis logros; *los quiero.*

A los pequeños de la casa, **Eduardo**, **Ale**, **Heli** y **Argenis**, cada vez que llegaba sin ánimos a la casa y los veía sonreír, inmediatamente me daban ánimos para pasar la página y seguir adelante; *los adoro.*

A los profesores **Mireya Bracamonte**, **Miguel Vivas** y **Jurancy Ereú** les agradezco por ese apoyo incondicional que me dieron en cada momento clave de la realización de mi tesis y por todos sus consejos. Espero algún día ser una gran profesional como lo son ustedes.

También doy gracias al grupo de investigación en el área de **Variación Acotada del BCV**, dirigido por el **Dr. Nelson Merentes** por facilitar información bibliográfica necesaria y por el apoyo y motivación a la investigación en dicha área.

A todos mis compañeros y amigos, en especial a **Glenny**, **Marcos**, **Javier**, **Eleiny**, **Ana**, **Dionny**, **José**, **Dayana**, **Mary** y muchos más que en su momento compartieron conmigo y me ofrecieron su ayuda. Fue duro el camino que un día comenzamos, en épocas distintas pero al pasar loa años nos conocimos y creció la amistad, el respeto y la admiración; gracias a todos por haber estado allí y espero poder seguir contando con su amistad y cariño así como ustedes cuenten con el mío.

Hay quienes se ven derrotados y se rinden ante el primer obstaculo, otros intentan una vez y al verse vencidos se rinden y no siguen intentandolo, pero está el grupo de aquellas personas que siguen luchando hasta el final. Son los que no conocen fronteras y pelean hasta decir basta; los que llegan a la meta cansados, pero logran sacar vida en el último aliento y sobreviven; por eso me doy gracias por haberme permitido creer en mis capacidades, por luchar sin importar las adversidades, para alcanzar mis sueños y así poder decir que ***Hoy lo Logré***, este es en realidad el inicio de un gran camino.

Al **Decanato de Ciencias y Tecnología** y a la **Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado** por haberme acogido en sus aulas y por haberme brindado lo oportunidad de formarme en ellas.

Finalmente, doy Gracias a todos y a cada una de aquellas personas que creyeron en ***Mí*** y a los que por el contrario dudaron de que lo lograría también les agradezco ya

que me impulsaron a querer ser cada día mejor.

" ***El Liderazgo implica recordar errores del pasado; hacer un análisis de los logros actuales y tener una imaginación establecida para visualizar los problemas del futuro.***"

"***Al que le gustan las matemáticas las estudia. El que las comprende las aplica. El que las sabe las enseña. Y... ese al que ni le gustan, ni las comprende, ni las sabe ... Ese dice como hay que aprenderlas, como hay que aplicarlas y como hay que enseñarlas.***"

"Funciones De Variación Acotada sobre subconjuntos Compactos Reales ó Complejos. "

Resumen

El trabajo está basado en el artículo [9]. Donde los autores extienden la noción de variación acotada para funciones definidas sobre un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ a valores complejos. Así, si el compacto es un intervalo cerrado y acotado la definición coincide con la noción dada por Jordan en [2].

Se comienza introduciendo algunas definiciones básicas necesarias, que busca que el lector interesado pueda abordar el tema fácilmente. Por ello se presenta la definición de función de variación acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, así como también algunas propiedades importantes que cumplen este tipo de funciones y se presenta el concepto de funciones absolutamente continuas y algunas de sus propiedades.

Luego, se estudia la noción de Variación acotada para funciones definidas sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ a valores complejos, donde se demuestra que $BV(\sigma)$ es un espacio vectorial, es un espacio normado y que además es un álgebra de Banach y presentaremos algunas propiedades conocidas e importantes sobre este tipo de funciones .

Por otra parte, los autores en [9] también generalizan la noción de funciones absolutamente continuas con dominio en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ a valores complejos, mostrando algunas de sus propiedades conocidas y probando que el espacio de funciones absolutamente continuas, definidas sobre σ denotado por $AC(\sigma)$ es un subespacio vectorial del espacio $BV(\sigma)$ y que $AC(\sigma)$ una subálgebra de Banach de $BV(\sigma)$.

Para finalizar, se extiende la noción de p-variación acotada para funciones definidas sobre un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ a valores complejos. Donde se prueba que $BV_p(\sigma)$ es un espacio vectorial dotado de las operaciones de suma y producto por un escalar de funciones.

Introducción.

En el año 1.881, Jordan introduce el concepto de función de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ ([2]), y desde entonces esta clase de funciones han jugado un papel muy importante dentro del análisis real y el análisis funcional donde además ha sufrido diversas generalizaciones. Por ejemplo, las clases de funciones de p - variación acotada en el sentido de Wiener, donde $1 < p < \infty$ y posteriormente fue generalizada por L. C. Young para el caso de funciones de de Φ-variación acotada. Además, Riesz en un artículo publicado en 1910 introduce la noción de p- variación acotada en el sentido de Riesz. Unos anos mas tarde, Medvedev en 1953, generaliza la nocion de variación dada por Riesz, introduciendo el concepto de Φ-Variacion acotada en el sentido de Riesz, donde Φ es una φ-funcion.

El concepto original presentado por Jordan para una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\{p_j\}_{j=1}^n$, define la variación de f por:

$$Var(f, [a, b]) = \sup_{\{p_j\}_{j=1}^n \in \Lambda([a,b])} \sum_{j=1}^{n-1} |f(p_{j+1}) - f(p_j)|.$$

y diremos que es de **Variación finita** o de **Variación acotada** si $Var(f, [a, b]) < \infty$.

Por otra parte, en 1905 es Vitali quien introduce un primer concepto de las funciones absolutamente continuas que nos dice lo siguiente:

Sea $f : \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es absolutamente continua si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para cualquier número finito de intervalos disjuntos $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^n$ con $s_i, t_i \in \sigma$ para todo i, se cumple que si $\sum_i^n |t_i - s_i| < \delta$ entonces tenemos que $\sum_i^n |f(t_i) - f(s_i)| < \varepsilon$.

En este trabajo, nos dedicamos al estudio de las funciones de variación acotada definidas sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ a valores complejos, lo cual es una generalización del concepto dado por Jordan en el año 1881; así como también se estudia el concepto de las funciones absolutamente continuas sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ a valores complejos. Para la presentación del mismo, el trabajo se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se introducen algunos conceptos y resultados que permiten establecer las condiciones mínimas necesarias para que el lector pueda alcanzar la comprensión del trabajo.

Haciendo uso del artículo [9]. En el capítulo 2, se estudia el concepto de Variación acotada para funciones definidas sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ a valores complejos . En el capítulo 3, se estudian las Funciones Absolutamente Continuas sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ a valores complejos. Y para finalizar, en el capítulo 4 se estudia el concepto de p - Variación Acotada para funciones definidas sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ a valores complejos. Donde se hace un estudio detallado de las demostraciones de todas las propiedades dadas en cada uno de los caítulos mencionados.

Índice

Capítulo 1

Preliminares.

Este capítulo está dedicado a dar una breve presentación de algunos conceptos y resultados necesarios para el estudio de las funciones de variación acotada, objetivo central del trabajo. El capítulo busca ser completamente autónomo y se puede estudiar independientemente.

§1.1. Álgebra de Banach

La clase de las funciones de variación acotada, como veremos posteriormente, es un álgebra de Banach, por lo cual se considera importante comenzar estos preliminares presentando esta tan importante definición, por tal razón se incluyen cada unas de las definiciones necesarias para su presentación. En esta sección $\mathbb{K}$ denota el campo de los números reales $\mathbb{R}$ o de los números complejos $\mathbb{C}$.

Un espacio vectorial o espacio lineal es una terna $(X, +, \cdot)$, donde X es un conjunto no vacío, $+, \cdot$ son dos operaciones del tipo $+ : X \times X \to \mathbb{K}$, $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ a las que se les llama suma de vectores y multiplicación por escalares, respectivamente y satisfacen las siguientes propiedades:

(S1). $x + y = y + x$, para todo $x, y \in X$ (conmutativa),

(S2). $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $x, y, z \in X$ (asociativa),

(S3). Existe un único vector 0 en X, llamado el vector cero, tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in X$.

(S4). Para cada vector $x \in X$ existe un único vector $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$,

(M1). $1x = x$ para todo $x \in X$.

(M2). $(\lambda_1\lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x)$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ y $x \in X$.

(M3). $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$.

(M4). $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ y $x \in X$.

Si V es un subconjunto de un espacio vectorial X, entonces V es un subespacio vectorial si y sólo si

1. Si $x, y \in V$ entonces $u + v \in V$,

2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in V$ entonces $\lambda x \in V$.

Ver [13].

DEFINICIÓN 1.1. *Se dice que $(\mathcal{A}, \cdot)$ es un álgebra sobre $\mathbb{K}$ si $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una operación bilineal con respecto a las operaciones lineales en $\mathcal{A}$.*

Se dice que $(\mathcal{A}, \cdot)$ es un álgebra conmutativa si $\cdot$ es conmutativa. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra y $e \in \mathcal{A}$. Se dice que e es unidad de $\mathcal{A}$, si $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Si existe una unidad en $\mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra con unidad. Es fácil ver que si existe una unidad, entonces la unidad es única.

DEFINICIÓN 1.2. *Una función no negativa $\| \ \|$ sobre un espacio vectorial X es llamada norma sobre X si satisface las condiciones:*

1. $\|x\| \geqslant 0$ *para todo* $x \in X$,

2. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$,

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *para todo* $x \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$, *y*

4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

*Un espacio vectorial con una norma $(X, \| \ \|)$ es llamado **espacio lineal normado** o simplemente **espacio normado**.*

Un espacio normado X se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge en X. Y el espacio $(X, \| \|)$ es llamado **espacio de Banach** si es completo.

Ejemplo 1.1. *Como ejemplo se tiene el espacio de las funciones continuas* $C(([a,b]), \| \|_\infty)$, *donde*

$$C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : f \textit{ es continua}\} \quad y \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Otro ejemplo es el espacio de las funciones acotadas $B(([a,b]), \| \|_\infty)$, *donde*

$$B([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : f \textit{ es acotada}\} \quad y \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Como $[a,b]$ *es compacto, tenemos que* $C([a,b]) \subset B([a,b])$, *es decir* $C([a,b])$ *es un subespacio de* $B([a,b])$.

Definición 1.3 (Álgebra de Banach). *Se dice que* $(\mathcal{A}, \cdot, \|\cdot\|)$ *es un álgebra de Banach si:*

(i) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach.*

(ii) $(\mathcal{A}, \cdot)$ *es un álgebra asociativa.*

(iii) $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\|\|y\|$ *para todo* $x, y \in \mathcal{A}$.

Como ejemplo de un álgebra es el campo de los números complejos. $\mathbb{C}$ es el ejemplo más simple de álgebra de Banach con unidad 1.

Definición 1.4. *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. A está* ***acotado superiormente*** *si y sólo si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant M$ para todo $x \in A$. A cada valor M que satisfaga esta condición se le llama* ***cota superior*** *de A.*

Definición 1.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente. Un número $\beta \in \mathbb{R}$ (no necesariamente de A) se denomina* ***supremo*** *de A, se denota como $\sup A$, si es el menor de las cotas superiores de A. Dicho de otra forma, $\beta = \sup A$ si y sólo si tiene las siguientes propiedades: (i) β es cota superior de A, (ii) Si $b \in \mathbb{R}$ es cota superior de A entonces $\beta \leqslant b$.*

Teorema 1.1 (Axioma del supremo). *Si A es un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, entonces A posee supremo.*

TEOREMA 1.2 (Caracterización del supremo). *Si A es un conjunto de números reales entonces β es el supremo de A si y sólo si β es una cota superior de A y para cada número real positivo ε existe $x \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < x$.*

TEOREMA 1.3. *Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ dos conjuntos acotados superiormente. $A + B := \{a + b : a \in A\, y\, b \in B\}$ tiene supremo y $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.*

§1.2. Funciones de variación acotada sobre $[a, b]$.

En esta sección se presenta el concepto de función de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ así como también presentaremos las propiedades conocidas de estas funciones, pero no nos detendremos en demostrar las propiedades, las cuales son muy conocidas y pueden consultarse en la literatura de análisis clásica, sin embargo hemos considerado importante que forme parte de este trabajo.

Es conocido que una función f, definida sobre un intervalo $[a, b]$ se dice **no decreciente** si $f(x) \leqslant f(y)$ para $x < y$.

Si $f(x) < f(y)$ para $x < y$ entonces se dice que f es **estrictamente creciente**. Análogamente, se definen las funciones que son no crecientes y estrictamente decreciente.

Estas funciones son llamadas **monótonas** o estrictamente monótonas.

DEFINICIÓN 1.6. *Una **partición** $\{t_j\}_{j=1}^{n}$ del intervalo cerrado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es una colección finita tal que $a = p_1 \leqslant p_2 \leqslant ... \leqslant p_n = b$. El conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$ lo denotaremos por $\Lambda([a, b])$.*

*Sean $P = \{t_j\}_{j=1}^{n}, Q = \{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda([a, b])$. Q se dice que es un **refinamiento** de P si $P \subset Q$.*

DEFINICIÓN 1.7. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; definimos la **Variación** de f por:*

$$Var(f, [a, b]) = \sup_{\{t_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda([a,b])} \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|. \tag{1.1}$$

*Diremos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de **variación finita** o de **variación acotada** si $Var(f, [a, b]) < \infty$. Al conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ con variación acotada, definidas sobre $[a, b]$ se le denota por $BV([a, b])$.*

Ejemplo 1.2. *Como primer ejemplo, se tiene que toda función constante es de variación acotada, sobre cualquier intervalo cerrado y acotada en $\mathbb{R}$, además es fácil verificar que su variación es cero.*

Ejemplo 1.3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, entonces f es de variación acotada.*

Solución.

Sea $\xi := \{t_j\}_{j=1}^{n}$ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$, ya que f es monótona se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n-1}(f(t_{j+1}) - f(t_j)) \;=\; f(b) - f(a),$$

en consecuencia,

$$\sup \xi \in \Lambda([a, b]) \sum_{j=1}^{n-1}(f(t_{j+1}) - f(t_j)) \leqslant f(b) - f(a).$$

Esto es, $Var(f, [a, b]) = f(b) - f(a) < \infty$, por lo tanto, f es de variación acotada.

Ejemplo 1.4. *La función coseno es de variación acotada sobre intervalo $[0, 2\pi]$.*

Solución.

En efecto, si $\xi = \{t_j\}_{j=1}^{n} \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$\begin{aligned} |\cos(t_{j+1}) - \cos(t_j)| &= \left|2 \operatorname{sen}\left(\frac{t_{j+1} + t_j}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{t_j - t_{j+1}}{2}\right)\right| \\ &\leqslant 2\frac{|t_{j+1} - t_j|}{2} \cdot 1 = |t_{j+1} - t_j|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Esto nos conduce a

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\cos(t_{j+1}) - \cos(t_j)| \;\leqslant\; \sum_{j=1}^{n-1} |t_{j+1} - t_j| = 2\pi.$$

Dado que esta desigualdad es válida para toda partición de $[0, 2\pi]$ se sigue que $Var(\cos, [0, 2\pi]) = 2\pi. < \infty$.

Note que la desigualdad (1.2) indica que la función coseno es una función Lipschitz, surge entonces la pregunta natural, ¿Toda función Lipschitz es de variación acotada?. La respuesta es afirmativa y se muestra la demostración.

Teorema 1.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, entonces f es de variación acotada.*

Demostración.

Sea f una función que satisface la condición Lipschitz, entonces existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| \text{ para todo } x_1, x_2 \in [a, b].$$

Si $\xi = \{t_j\}_{j=1}^n \in \Lambda([a, b])$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} M|t_{j+1} - t_j| = M \sum_{j=1}^{n-1} |t_{j+1} - t_j| = M(b - a).$$

En consecuencia, tomando el supremo sobre todas las particiones de $[a, b]$ se tiene que $Var(f, [a, b]) \leqslant M(b - a) < \infty$.

Por lo tanto f es de variación acotada.

En el caso de estas funciones de variación acotada, definidas sobre $[a, b]$ y valores reales, es común definir la variación positiva y negativa de una función. En efecto, sea $\xi = \{t_j\}_{j=1}^n$

$$S_+(f, \xi) := \sum_{j=1}^{n-1} \max\{f(t_{j+1}) - f(t_j), 0\}, \qquad S_-(f, \xi) := \sum_{j=1}^{n-1} \min\{f(t_{j+1}) - f(t_j), 0\}.$$

Se le llama **variación positiva** de f sobre $[a, b]$ a $PVar(f, [a, b]) := \sup\limits_{\xi \in \Lambda[a,b]} S_+(f, \xi)$ y respectivamente la variación negativa de f sobre $[a, b]$ a $nVar(f, [a, b]) := \sup\limits_{\xi \in \Lambda[a,b]} S_-(f, \xi)$.

Esto permite demostrar que para toda función $f \in BV([a, b])$ se cumple que:

1. $Var(f, [a, b]) = PVar(f, [a, b]) + NVar(f, [a, b])$,

2. $f(b) - f(a) = PVar(f, [a, b]) - NVar(f, [a, b])$.

Lo cual permite demostrar una caracterización bien conocida e importante de las funciones de variación acotada, dada por [3].

TEOREMA 1.5 (Teorema de Jordan)**.** *Una función f es de variación acotada sobre $[a, b]$ si y sólo si f es la diferencia de dos funciones monótonas a valores reales sobre $[a, b]$.*

La demostración se centra en demostrar que las funciones $g(x) := PVar(f, [a, x])$, $h(x) = NVar(f, [a, x])$ son funciones crecientes y que $f = g - h$.

Además, existen teoremas bien conocidos que pueden ser útiles para el análisis de la variación de una función, que se muestran a continuación.

TEOREMA 1.6. *Sean $f, g \in BV([a, b])$ y $c \in \mathbb{C}$ es constante. Entonces:*

1. $f \in BV([c, d])$ para todo subintervalo $[c, d] \subseteq [a, b]$.
2. $cf \in BV([a, b])$.
3. $f + g, f - g \in BV([a, b])$.
4. $fg \in BV([a, b])$.
5. f es acotada en $[a, b]$.

Ver la demostración en [7].

Este teorema nos garantiza que $BV([a, b])$ es un espacio vectorial, el cual puede ser dotado de una norma, mediante el funcional

$$\|f\|_{BV[a,b]} = |f(a)| + Var(f, [a, b]).$$

Aún más, el espacio $BV[a, b]$ es un espacio de Banach con el producto puntual de funciones.

§1.3. Funciones Absolutamente Continuas sobre $[a, b]$

Una clase espacial de funciones de variación acotada, es la clase de funciones absolutamente continuas. Estas funciones son importantes tanto por sus aplicaciones como por lo interesante como clase de funciones estudiadas teóricamente.

DEFINICIÓN 1.8. *Una función de valores reales f, definida sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ se dice que es **absolutamente continua** sobre $[a, b]$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda colecciï¿½n finita $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ de intervalos disjuntos y abiertos en (a, b) tales que si $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ se cumple la desigualdad*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Este conjunto de funciones es denotado por $AC[a, b]$.

TEOREMA 1.7. *$AC[a, b] \subseteq C[a, b]$.*

Demostración.
Ver demostración en [14, 7, 15].

TEOREMA 1.8. *Si f es una función que satisface la condición de Lipschitz sobre $[a, b]$ entonces f es abolutamente continua en $[a, b]$.*

Demostración.

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que satisface la condición de Lipschitz y $M > 0$ la constante que satisface $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ para todo $x, y \in [a, b]$. Sea $\varepsilon > 0$, estudiemos $a_k < b_k$ con $a_k, b_k \in [a, b]$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} M|b_k - a_k|.$$

Basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, para completar la demostración.

Por otra parte, si f y g son dos funciones absolutamente continuas sobre $[a, b]$, entonces $f + g$, $f - g$ y fg son absolutamente continuas sobre $[a, b]$. En el caso del cociente, si existe una constante $C > 0$ tal que $0 < |g(x)| \geqslant C$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es absolutamente continua sobre $[a, b]$.

TEOREMA 1.9. *Si f es una función absolutamente continua sobre $[a, b]$, entonces f es una función de variación acotada sobre $[a, b]$.*

Demostración.
Ver demostración en [14, 15].

Además, una función absolutamente continua es de variación acotada en cada intervalo compacto, sin embargo no lo es necesariamente sobre $\mathbb{R}$, como puede verificarse con $f(x) := x$.

Teorema 1.10 (Teorema de Weierstrass). .

Sean $f \in C([a,b])$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio p tal que $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.

Demostración.
Ver demostración en [8]

El conocido Teorema de Weierstrass dice que los polinomios son densos en $C([a,b])$.

Teorema 1.11. *Sea* X *un conjunto compacto y sea f una función continua en* X*. Entonces f es uniformemente continua.*

■

Capítulo 2

Funciones de Variación acotada sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$

En este capítulo se definen la variación de una función $f : \sigma \to \mathbb{C}$, cuando $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto compacto, mostrando las similitudes y diferencias entre el conjunto de todas las funciones cuya variación sea finita y el clásico espacio, $BV([a, b])$ de las funciones con variación finita definidas sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

Los conjuntos compactos en $\mathbb{R}$ tienen algunas características especiales dada por las propiedades de los números reales, que es importante tener presente, así por ejemplo, el teorema de Heine-Borel nos garantiza que $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si σ es cerrado y acotado. Es así pues, que si $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ podremos elegir el menor intervalo $J = [a, b]$ que contiene a σ.

Definición 2.1 (Ver definición 1.6)**.** *Sean $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto compacto, $J = [a, b]$ el intervalo más pequeñoo que contiene a σ. Decimos que $\{s_j\}_{j=1}^n$ es una* ***partición*** *de σ si $a = s_1 \leqslant s_2 \leqslant ... \leqslant s_n = b$ para todo j y $s_j \in \sigma$.*

El conjunto de todas las particiones de σ, de forma similar que en capítulo 1, es denotado por $\Lambda(\sigma)$.

Observación 2.1. *$a \in \sigma$, pues en caso contrario, podemos hallar un $\varepsilon > 0$ de manera que $[a, a + \varepsilon) \cap \sigma = \varnothing$. Luego, $[a + \varepsilon, b] \supseteq \sigma$, lo cual contradice la forma en que se ha definido J.*

De forma similar, se verifica que $b \in \sigma$.

Sean $S = \{s_j\}_{j=1}^n, T = \{t_j\}_{j=1}^m \in \Lambda(\sigma)$. T se dice que es un **refinamiento** de S si $S \subset T$. Recordando que un conjunto parcialmente ordenado $(L, \prec)$ se denomina **reticulado** si satisface las siguientes propiedades:

1) Existencia del supremo 2) Existencia del infimo.

De acuerdo a esta definición, $\Lambda(\sigma)$, con el orden parcial dado por el refinamiento, es un **reticulado**.

DEFINICIÓN 2.2. ([9]). *Sea $f : \sigma \to \mathbb{C}$, con $\sigma \subset \mathbb{R}$ compacto; definimos la* ***Variación*** *de f por:*

$$Var(f, \sigma) = \sup_{\{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)} \sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)|. \tag{2.1}$$

Diremos que una función $f : \sigma \to \mathbb{C}$ es de ***Variación finita*** *o de* ***Variación acotada*** *si $Var(f, \sigma) < \infty$. Al conjunto de todas las funciones $f : \sigma \to \mathbb{C}$ con variación acotada, definidas sobre σ se le denota por $BV(\sigma)$.*

Observación 2.2. *En el resto del capítulo, σ representará un subconjunto compacto en $\mathbb{R}$, $J = [a, b]$ el menor intervalo cerrado y acotado tal que $\sigma \subseteq [a, b]$ y, a menos que se exprese lo contrario, $f : \sigma \to \mathbb{C}$.*

Ejemplo 2.1. *Es claro que cualquier función $f : \sigma \to \mathbb{C}$ constante es una función de variación acotada y es fácil verificar que la variación es cero.*

Ejemplo 2.2. *Sea $f : [0, 1] \cup \{2\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = x + xi$. Luego, si $\{s_j\}_{j=1}^n$ es una partición de $\sigma = [0, 1] \cup \{2\}$ entonces $s_1 = 0$ y $s_n = 2$. Luego,*

$$\begin{aligned} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| &= |(s_{j+1} + is_{j+1}) - (s_j + is_j)| \\ &= |(s_{j+1} - s_j) + (s_{j+1} - s_j)i| \\ &= \sqrt{2(s_{j+1} - s_j)^2} \\ &= \sqrt{2}|s_{j+1} - s_j|. \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})-f(s_j)| \;=\; \sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{2}|s_{j+1}-s_j| = \sqrt{2}(2-0) = 2\sqrt{2}.$$

En consecuencia,

$$Var(f,\sigma) \;=\; \sup_{\{s_j\}_{j=1}^{n}\in\Lambda(\sigma)}\sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})-f(s_j)| = \sup_{\{s_j\}_{j=1}^{n}\in\Lambda(\sigma)} 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Teorema 2.1. *Sean $f, g \in BV(\sigma)$, $k \in \mathbb{C}$ y σ como en la observación 2.2. Entonces*

i. $Var(f+g,\sigma) \leqslant Var(f,\sigma) + Var(g,\sigma)$.

ii. $Var(kf,\sigma) = |k|Var(f,\sigma)$.

Demostración.

(i) Sea $\{s_j\}_{j=1}^{n}$ una partición de σ, entonces:

$$\begin{aligned}
|(f+g)(s_{j+1})-(f+g)(s_j)| \;&=\; |f(s_{j+1})+g(s_{j+1})-(f(s_j)-g(s_j))| \\
&=\; |f(s_{j+1})-f(s_j)+g(s_{j+1})-g(s_j)| \\
&\leqslant\; |f(s_{j+1})-f(s_j)|+|g(s_{j+1})-g(s_j)|.
\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{n-1}|(f+g)(s_{j+1})-(f+g)(s_j)| \;\leqslant\; \sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})-f(s_j)|+\sum_{j=1}^{n-1}|g(s_{j+1})-g(s_j)|.$$

Tomando el supremo sobre todas las particiones se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{\{s_j\}_{j=1}^{n}\in\Lambda(\sigma)}\sum_{j=1}^{n-1}|(f+g)(s_{j+1})-(f+g)(s_j)| \;&\leqslant\; \sup_{\{s_j\}_{j=1}^{n}\in\Lambda(\sigma)}\sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})-f(s_j)| \\
&\quad + \sup_{\{s_j\}_{j=1}^{n}\in\Lambda(\sigma)}\sum_{j=1}^{n-1}|g(s_{j+1})-g(s_j)|
\end{aligned}$$

Esto es, $Var(f+g,\sigma) \leqslant Var(f,\sigma)+Var(g,\sigma)$.

(ii) Sean $k \in \mathbb{C}$ y $f \in BV(\sigma)$, dado que

$$|(kf)(s_{j+1}) - (kf)(s_j)| \quad = \quad |k||f(s_{j+1}) - f(s_j)|,$$

y haciendo uso de las propiedades del supremo, se sigue que

$$\begin{aligned} Var(kf,\sigma) &= \sup_{\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma)} \sum_{j=1}^{n-1} |(kf)(s_{j+1}) - (kf)(s_j)| \\ &= \sup_{\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma)} \sum_{j=1}^{n-1} |k||f(s_{j+1}) - f(s_j)| \\ &= |k| \sup_{\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma)} \sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| \\ &= |k| Var(f,\sigma). \end{aligned}$$

Note que una consecuencia inmediata de este teorema es que podemos garantizar que $BV(\sigma)$ es un espacio vectorial dotados de las operaciones de suma y producto por un escalar de funciones: Para $f, g \in BV(\sigma)$ y $c \in \mathbb{C}$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{y} \qquad (cf) := cf(x).$$

Además, podemos dotar a este espacio del producto usual entre funciones como es: Para $f, g \in BV(\sigma)$ se define

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x). \tag{2.2}$$

Después, una pregunta natural es ¿ Es este espacio vectorial un álgebra?, para dar repuesta a esta pregunta es conveniente demostrar las siguientes propiedades.

Teorema 2.2. *Sean $f, g \in BV(\sigma)$, $k \in \mathbb{C}$, σ y J como en la observación 2.2. Entonces*

i. $Var(fg,\sigma) \leqslant \|f\|_\infty Var(g,\sigma) + \|g\|_\infty Var(f,\sigma)$

ii. $Var(f,\sigma) \geqslant |f(b) - f(a)|$

Demostración.

(i) Sean f, g como en la hipótesis. Luego, para cualquier partición $\{s_j\}_{j=1}^n$, considerando el producto definido como en (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
& |(f \cdot g)(s_{j+1}) - (f \cdot g)(s_j)| \\
= \; & |f(s_{j+1}) \cdot g(s_{j+1}) - f(s_j) \cdot g(s_{j+1}) + f(s_j) \cdot g(s_{j+1}) - f(s_j) \cdot g(s_j)| \\
= \; & |[f(s_{j+1}) - f(s_j)] \cdot g(s_{j+1}) + f(s_j) \cdot [g(s_{j+1}) - g(s_j)]| \\
\leqslant \; & |[f(s_{j+1}) - f(s_j)] \cdot g(s_{j+1})| + |f(s_j) \cdot [g(s_{j+1}) - g(s_j)]| \\
\leqslant \; & |f(s_{j+1}) - f(s_j)| \|g\|_\infty + \|f\|_\infty |g(s_{j+1}) - g(s_j)|.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
Var(f \cdot g, \sigma) &= \sup_{\{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)} \sum_{j=1}^{n-1} |(f \cdot g)(s_{j+1}) - (f \cdot g)(s_j)| \\
&\leqslant \sup_{\{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)} \sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| \cdot \|g\|_\infty \\
&\quad + \sup_{\{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)} \|f\|_\infty \sup_{\{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)} \sum_{j=1}^{n-1} |g(s_{j+1}) - g(s_j)| \\
&= Var(f, \sigma) \cdot \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot Var(g, \sigma).
\end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene la demostración de la primera parte del teorema.

(ii) Recordemos que $Var(f, \sigma)$ se define como

$$\sup_{\{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)} \sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)|,$$

en consecuencia, $Var(f, \sigma) \geqslant Var(f, \sigma, P)$ para toda partición $P = \{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)$ y donde

$$Var(f, \sigma, P) := \sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)|.$$

En particular en el caso en que $P = \{a, b\}$, en cuyo caso tendremos que

$$Var(f, \sigma) \geqslant |f(b) - f(a)|.$$

Teorema 2.3 (Monotonía de la Variación). *Sean $f, g \in BV(\sigma)$, σ_1, σ y J como en la observación 2.2. Supongamos que $\sigma_1 \subseteq \sigma$. Entonces $Var(f, \sigma_1) \leqslant Var(f, \sigma)$.*

Demostración.

Note que si $\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma_1)$ entonces $\{s_j\}_{j=1}^{n} \cup \{a, b\} \in \Lambda(\sigma)$. En consecuencia,

$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - t(s_j)| \quad \leqslant \quad |f(t_1) - f(a)| + \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - t(s_j)| + |f(b) - f(s_n)| \leqslant Var(f, \sigma).$$

Como esta desigualdad es válida para toda partición $\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma_1)$, por propiedad de supremos, se tiene que

$$Var(f, \sigma_1) \leqslant Var(f, \sigma).$$

Completando la demostración.

Una consecuencia importante de este teorema y el hecho que $\Lambda(\sigma)$ es un reticulado si la variación definida en (2.1) puede ser definida equivalentemente mediante la sustitución del supremo por el límite cuando $n \to \infty$ (el número de elementos de la partición).

Teorema 2.4. *Sean $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, J = [a, b]$ como en la observación 2.2, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ y $f \in BV(\sigma)$. Supongamos que $\sigma_1 \subset [a, c]$, $\sigma_2 \subset [c, b]$ y $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \{c\}$ entonces $Var(f, \sigma) = Var(f, \sigma_1) + Var(f, \sigma_2)$.*

Demostración.

Sea $\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma_1)$ y $\{t_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma_2)$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| + |f(b) - f(s_n)| \leqslant Var(f, \sigma)$$

Como esta desigualdad es válida para toda partición de σ_1 y el lado derecho de esta última desigualdad es finito (y constante) se tiene que

$$Var(f, \sigma_1) \leqslant Var(f, \sigma).$$

Esto significa que si f es de variación acotada en σ también tendrá variación acotada en cualquier subconjunto compacto de σ.

Luego, si $\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma_1)$ y $\{t_j\}_{j=1}^{m} \in \Lambda(\sigma_2)$, entonces $\{s_j\}_{j=1}^{n} \cup \{t_j\}_{j=1}^{m} \in \Lambda(\sigma)$, así,

$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| + \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \;\leqslant\; Var(f,\sigma).$$

Si tomamos, supremo sobre el conjunto de las particiones $\Lambda(\sigma_1)$ y $\Lambda(\sigma_2)$ se obtiene que

$$Var(f,\sigma_1) + Var(f,\sigma_2) \leqslant Var(f,\sigma). \tag{2.3}$$

Recíprocamente, si $\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma)$ y además, existe $1 \leqslant m < n$ tal que $s_m = c$. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| \;&\leqslant\; \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| + |f(c) - f(s_m)|}_{Var(f,\sigma_1)} \\ &+\; \underbrace{|f(s_{m+1}) - f(c)| + \sum_{j=m+1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)|}_{Var(f,\sigma_2)} \\ &\leqslant\; Var(f,\sigma_1) + Var(f,\sigma_2). \end{aligned}$$

Dado que la desigualdad se cumple para toda partición $\{s_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma)$ se obtiene que

$$Var(f,\sigma) \;\leqslant\; Var(f,\sigma_1) + Var(f,\sigma_2). \tag{2.4}$$

Así, de (2.3) y (2.4) se obtiene la tesis del teorema.

Veamos ahora que el espacio vectorial $BV(\sigma)$ puede ser dotado de una norma.

TEOREMA 2.5. *El funcional* $\|f\|_{BV(\sigma)} = \|f\|_{\infty} + Var(f,\sigma)$ *define una norma sobre* $BV(\sigma)$.

Demostración.

Sean $f, g \in BV(\sigma)$ con σ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Es claro que $\|f\|_{BV(\sigma)} \geqslant 0$ por ser la suma de dos expresiones no negativas.

2. Por otra parte, dado que $\|.\|_\infty$ es una norma y en virtud del Teorema 2.1 se tiene que

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_{BV(\sigma)} &= \|\alpha f\|_\infty + Var(f,\sigma)\\ &= |\alpha|\|f\|_\infty + |\alpha|Var(f,\sigma)\\ &= |\alpha|(\|f\|_\infty + Var(f,\sigma))\\ &= |\alpha|\|f\|_{BV(\sigma)}.\end{aligned}$$

3. Para verificar que se cumple la desigualdad triangular haremos uso nuevamente del Teorema 2.1 , y las propiedades de la norma $\|.\|_\infty$. Así se tiene que:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{BV(\sigma)} &= \|f+g\|_\infty + Var(f+g,\sigma)\\ &\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + Var(f,\sigma) + Var(g,\sigma)\\ &= (\|f\|_\infty + Var(f,\sigma)) + (\|g\|_\infty + Var(g,\sigma))\\ &= \|f\|_{BV(\sigma)} + \|g\|_{BV(\sigma)}.\end{aligned}$$

   Por lo tanto $\|f+g\|_{BV(\sigma)} \leqslant \|f\|_{BV(\sigma)} + \|g\|_{BV(\sigma)}$

4. Para finalizar es claro que $f \equiv 0$ entonces $\|f\|_{BV(\sigma)} = 0$. Recíprocamente, si $\|f\|_{BV(\sigma)} = 0$ entonces $\|f\|_\infty = Var(f,\sigma) = 0$. Y dado que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma se obtiene que $f \equiv 0$.

Por tanto, $\|f\|_{BV(\sigma)} = \|f\|_\infty + var(f,\sigma)$ define una norma sobre $BV(\sigma)$.

Teorema 2.6. *$BV(\sigma)$ es un álgebra.*

Demostración.

Ya se demostró en el Teorema 2.5 que $BV(\sigma)$ es un espacio normado, además en el Teorema 2.2 se verificó que el producto de dos funciones de variación acotada es otra función de variación acotada, para verificar que este espacio es un álgebra sólo nos falta verificar que la norma de un producto es menor o igual al producto de las normas. En efecto, sean $f, g \in BV(\sigma)$,

$$|f(t).g(t)| = |f(t)|\cdot|g(t)| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

Esto implica que $\|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$ es cota superior de $|f(t)\cdot g(t)|$ y al ser $\|f\cdot g\|_\infty$ la mínima cota se deduce que $\|f\cdot g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$.

Así, por esta observación y por el Teorema 2.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f.g\|_{BV(\sigma)} &= \|f\cdot g\|_\infty + var(f\cdot g,\sigma)\\
&\leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot Var(g,\sigma) + \|g\|_\infty \cdot Var(f,\sigma)\\
&\leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty + \|g\|_\infty \cdot Var(f,\sigma) + \|f\|_\infty \cdot Var(g,\sigma) + Var(f,\sigma)\cdot Var(g,\sigma)\\
&= (\|f\|_\infty + Var(f,\sigma)).\|g\|_\infty + (\|f\|_\infty + Var(f,\sigma)).Var(g,\sigma)\\
&= (\|f\|_\infty + Var(f,\sigma))\cdot(\|g\|_\infty + Var(g,\sigma))\\
&= \|f\|_{BV(\sigma)} \cdot \|f\|_{BV(\sigma)}.
\end{aligned}$$

Con lo cual concluye la demostración del teorema.

Presentamos definiciones que nos serán de gran utilidad.

Definición 2.3. *Sean σ, J, f como en la Observación 2.2. Para $t \in J\backslash\sigma$ se definen:*

$$\alpha(t) = \sup\{x : [t,x] \subset J\backslash\sigma\} \qquad y \qquad \beta(t) = \text{ínf}\{x : [x,t] \subset J\backslash\sigma\}.$$

Se define la función $\iota(f) : J \to \mathbb{C}$ por

$$\iota(f)(t) = \begin{cases} f(t), & si \quad t \in \sigma \\ \left(\dfrac{f(\alpha(t)) - f(\beta(t))}{\alpha(t)-\beta(t)}\right)(t-\beta(t)) + f(\beta(t)), & si \quad t \in J\setminus\sigma. \end{cases}$$

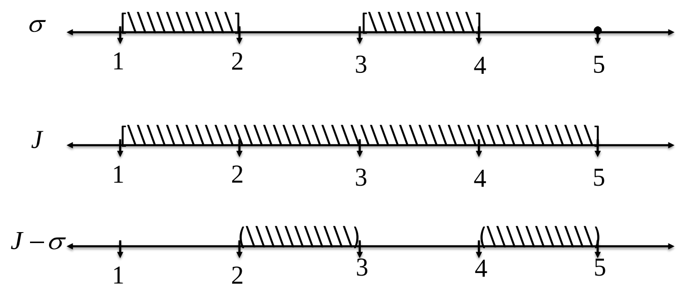
Esto es, $\iota(f)$ es definida de modo lineal en los huecos que le deja σ a J.

Veamos un ejemplo para ilustrar la definición dada.

Ejemplo 2.3. *Sea $\sigma = [1,2]\cup[3,4]\cup\{5\}$. En este caso $J = [1,5]$ y en consecuencia $J-\sigma = (2,3)\cup(4,5)$.*

Además,

$$\alpha(t) = \begin{cases} 3, & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ 5, & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases} \qquad\qquad \beta(t) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ 4, & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases}$$



Consideremos $f : \sigma \to \mathbb{C}$ definida por $f(t) := t+it^2$. Ahora veamos cómo queda definida $\iota(f)$.

$$
\begin{aligned}
\iota(f)(t) &= \begin{cases} f(t), & \text{si} \quad t \in [1,2] \cup [3,4] \cup \{5\} \\ \left(\dfrac{f(\alpha(t)) - f(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)}\right)(t - \beta(t)) + f(\beta(t)), & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ \left(\dfrac{f(\alpha(t)) - f(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)}\right)(t - \beta(t)) + f(\beta(t)), & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(t), & \text{si} \quad t \in [1,2] \cup [3,4] \cup \{5\} \\ \left(\dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2}\right)(t - 2) + f(2), & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ \left(\dfrac{f(5) - f(4)}{5 - 4}\right)(t - 4) + f(4), & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases} \\
&= \begin{cases} t + it^2, & \text{si} \quad t \in [1,2] \cup [3,4] \cup \{5\} \\ \left(\dfrac{3 + 9i - (2 + 4i)}{3 - 2}\right)(t - 2) + (2 + 4i), & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ \left(\dfrac{5 + 25i - (4 + 16i)}{5 - 4}\right)(t - 4) + (4 + 16i), & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\iota(f)(t) = \begin{cases} t + it^2, & \text{si} \quad t \in [1,2] \cup [3,4] \cup \{5\} \\ (1+5i)\,(t-2) + (2+4i), & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ (1+9i)\,(t-4) + (4+16i), & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t + it^2, & \text{si} \quad t \in [1,2] \cup [3,4] \cup \{5\} \\ t - 2 + 5it - 10i + 2 + 4i, & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ t - 4 + 9it - 36i + 4 + 16i, & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t + it^2, & \text{si} \quad t \in [1,2] \cup [3,4] \cup \{5\} \\ t + 5it - 6i, & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ t + 9it - 26i, & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t + it^2, & \text{si} \quad t \in [1,2] \cup [3,4] \cup \{5\} \\ t + (5t-6)i, & \text{si} \quad t \in (2,3) \\ t + (9t-26)i, & \text{si} \quad t \in (4,5) \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 2.1. *Sean $\sigma_1 \subset \sigma_2$ subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ y $f \in BV(\sigma_2)$. Entonces $\|f|\sigma_1\|_{BV(\sigma_1)} \leqslant \|f\|_{BV(\sigma_2)}$ y así $f|\sigma_1 \in BV(\sigma_1)$.*

Demostración.

Es claro que $\|f|\sigma_1\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, además el Teorema 2.3 nos garantiza que $Var(f|\sigma_1, \sigma_1) \leqslant Var(f, \sigma_2)$, en consecuencia:

$$\begin{aligned} \|f|\sigma_1\|_{BV(\sigma_1)} &= \|f|\sigma_1\|_\infty + Var(f|\sigma_1, \sigma_1) \\ &\leqslant \|f\|_\infty + Var(f, \sigma_2) \\ &= \|f\|_{BV(\sigma_2)}. \end{aligned}$$

Esto implica que $f \in BV(\sigma_1)$, como se deseaba demostrar.

Teorema 2.7. *Sea $f \in BV(\sigma)$. Entonces $Var\,(f,\sigma) = Var(\iota(f), J)$.*

Demostración.

Si $P = \{t_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(\sigma)$ entonces $P \in \Lambda(J)$, en consecuencia

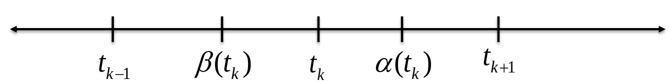
$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| = \sum_{j=1}^{n-1} |\iota(f)(t_{j+1}) - \iota(f)(t_j)| \leqslant Var(\iota(f), J).$$

Como esta desigualdad es válida para toda partición de σ se sigue que

$$Var(f,\sigma) \leqslant Var(\iota(f), J). \tag{2.5}$$

Por otra parte, si $Q = \{t_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(J)$, supongamos que sólo un punto $t_k \in J \setminus \sigma$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} |\iota(f)(t_{j+1}) - \iota(f)(t_j)| \quad &= \quad \sum_{j=1}^{k-2} |\iota(f)(t_{j+1}) - \iota(f)(t_j)| \\ &\quad +|\iota(f)(t_k) - \iota(f)(t_{k-1})| + |\iota(f)(t_{k+1}) - \iota(f)(t_k)| \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{n-1} |\iota(f)(t_{j+1}) - \iota(f)(t_j)|. \end{aligned} \tag{2.6}$$



Observe que

$$\begin{aligned} & |\iota(f)(t_k) - \iota(f)(t_{k-1})| + |\iota(f)(t_{k+1}) - \iota(f)(t_k)| \\ \leqslant \; & |\iota(f)(t_k) - \iota(f(\beta(t_k)))| + |\iota(f(\beta(t_k))) - \iota(f)(t_{k-1})| \\ & +|\iota(f)(t_{k+1}) - \iota(f(\alpha(t_k)))| + |\iota(f(\alpha(t_k))) - \iota(f)(t_k)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\left(\frac{f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right)(t_k-\beta(t_k))+f(\beta(t_k))-f(\beta(t_k))\right| \\
&\quad +|f(\beta(t_k))-f(t_{k-1})|+|f(t_{k+1})-f(\alpha(t_k))| \\
&\quad +\left|f(\alpha(t_k))-\left(\frac{f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right)(t_k-\beta(t_k))-f(\beta(t_k))\right| \\
&= \left|\left(\frac{f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right)(t_k-\beta(t_k))\right| \\
&\quad +|f(\beta(t_k))-f(t_{k-1})|+|f(t_{k+1})-f(\alpha(t_k))| \\
&\quad +\left|f(\alpha(t_k))-\left(\frac{f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right)(t_k-\beta(t_k))-f(\beta(t_k))\right| \\
&= \left|\left(\frac{f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right)(t_k-\beta(t_k))\right| \\
&\quad +|f(\beta(t_k))-f(t_{k-1})|+|f(t_{k+1})-f(\alpha(t_k))| \\
&\quad +\left|f(\alpha(t_k))-\left(\frac{f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right)(t_k-\beta(t_k))-f(\beta(t_k))\right| \\
&= |f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))|\,\frac{t_k-\beta(t_k)}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)} \\
&\quad +|f(\beta(t_k))-f(t_{k-1})|+|f(t_{k+1})-f(\alpha(t_k))| \\
&\quad +\left|f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))-(f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k)))\frac{t_k-\beta(t_k)}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right| \\
&= |f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))|\,\frac{t_k-\beta(t_k)}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)} \\
&\quad +|f(\beta(t_k))-f(t_{k-1})|+|f(t_{k+1})-f(\alpha(t_k))| \\
&\quad +|f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))|\left|\left[1-\frac{t_k-\beta(t_k)}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right]\right| \\
&= |f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))|\,\frac{t_k-\beta(t_k)}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)} \\
&\quad +|f(\beta(t_k))-f(t_{k-1})|+|f(t_{k+1})-f(\alpha(t_k))| \\
&\quad +|f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))|\left|\left[\frac{\alpha(t_k)-\beta(t_k)-t_k+\beta(t_k)}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}\right]\right| \\
&= |f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))|\,\frac{t_k-\beta(t_k)}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}+|f(\beta(t_k))-f(t_{k-1})| \\
&\quad +|f(t_{k+1})-f(\alpha(t_k))|+|f(\alpha(t_k))-f(\beta(t_k))|\,\frac{\alpha(t_k)-t_k}{\alpha(t_k)-\beta(t_k)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= |f(\alpha(t_k)) - f(\beta(t_k))| \frac{t_k - \beta(t_k)}{\alpha(t_k) - \beta(t_k)} + |f(\alpha(t_k)) - f(\beta(t_k))| \frac{\alpha(t_k) - t_k}{\alpha(t_k) - \beta(t_k)} \\
&\quad + |f(\beta(t_k)) - f(t_{k-1})| + |f(t_{k+1}) - f(\alpha(t_k))| \\
&= |f(\alpha(t_k)) - f(\beta(t_k))| \left(\frac{t_k - \beta(t_k)}{\alpha(t_k) - \beta(t_k)} + \frac{\alpha(t_k) - t_k}{\alpha(t_k) - \beta(t_k)} \right) \\
&\quad + |f(\beta(t_k)) - f(t_{k-1})| + |f(t_{k+1}) - f(\alpha(t_k))| \\
&= |f(\alpha(t_k)) - f(\beta(t_k))| \left(\frac{\alpha(t_k) - \beta(t_k)}{\alpha(t_k) - \beta(t_k)} \right) \\
&\quad + |f(\beta(t_k)) - f(t_{k-1})| + |f(t_{k+1}) - f(\alpha(t_k))| \\
&= |f(\alpha(t_k)) - f(\beta(t_k))| + |f(\beta(t_k)) - f(t_{k-1})| + |f(t_{k+1}) - f(\alpha(t_k))|
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.6) esta última desigualdad, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} |\iota(f)(t_{j+1}) - \iota(f)(t_j)| &= \sum_{j=1}^{k-2} |\iota(f)(t_{j+1}) - \iota(f)(t_j)| \\
&\quad + |\iota(f)(t_k) - \iota(f)(t_{k-1})| + |\iota(f)(t_{k+1}) - \iota(f)(t_k)| \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{n-1} |\iota(f)(t_{j+1}) - \iota(f)(t_j)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k-2} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \\
&\quad |f(\alpha(t_k)) - f(\beta(t_k))| + |f(\beta(t_k)) - f(t_{k-1})| \\
&\quad + |f(t_{k+1}) - f(\alpha(t_k))| \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \\
&\leqslant Var(f, \sigma).
\end{aligned}$$

Ahora bien, una partición $Q = \{t_j\}_{j=1}^{n} \in \Lambda(J)$ tiene a lo más una cantidad finita de puntos en $J - \sigma$, este procedimiento se puede realizar una cantidad finita de veces, así, obtenemos que

$$Var(\iota(f), J) \leqslant Var(f, \sigma).$$

Así, de esta desigualdad y (2.5) se obtiene la igualdad deseada.

Proposición 2.2. *Sea $f : \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces $f \in BV(\sigma)$ si y sólo si $\iota(f) \in BV(J)$.*

Demostración.

Sea $f : \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\sigma \subset \mathbb{R}$ compacto.
En efecto

$$\begin{aligned} f \in BV(\sigma) &\Longleftrightarrow Var(f, \sigma) < \infty \\ &\Longleftrightarrow Var(\iota(f), J) < \infty \\ &\Longleftrightarrow \iota(f) \in BV(J) \end{aligned}$$

Con lo que queda probada la proposición.

Proposición 2.3. *La aplicación $\iota : BV(\sigma) \longrightarrow BV(J)$ es una Isometría lineal.*

Demostración.

Para verificar la linealidad de ι consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f, g \in BV(\sigma)$. Luego, si $t \in \sigma$ se tiene que

$$\iota(\lambda f + g)(t) = (\lambda f + g)(t) = \lambda f(t) + g(t) = \lambda\iota(f)(t) + \iota(g)(t).$$

Por otra parte, si $t \in J - \sigma$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \lambda\iota(f) + \iota(g) \\ = \; & \lambda\left(\frac{f(\alpha(t)) - f(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)}\right)(t - \beta(t)) + \lambda f(\beta(t)) \\ & + \left(\frac{g(\alpha(t)) - g(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)}\right)(t - \beta(t)) + g(\beta(t)) \\ = \; & \left(\frac{\lambda f(\alpha(t)) - \lambda f(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)} + \frac{g(\alpha(t)) - g(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)}\right)(t - \beta(t)) + \lambda f(\beta(t)) + g(\beta(t)) \\ = \; & \left(\frac{(\lambda f + g)(\alpha(t)) - (\lambda f + g)(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)}\right)(t - \beta(t)) + (\lambda f + g)(\beta(t)) \\ = \; & \iota(\lambda f + g)(t). \end{aligned}$$

Para demostrar que es una Isometría, note que
$\|\iota(f)\|_{BV(J)} = \|\iota(f)\|_\infty + Var(\iota(f), J)$ y $\|f\|_{BV(\sigma)} = \|f\|_{BV(\infty)} + Var(f, \sigma)$, así en virtud del teorema 2.7 es suficiente demostrar que $\|\iota(f)\|_\infty = \|f\|_{BV(\infty)}$.

En efecto, dado que $\sigma \subset J$ se tiene que

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\sigma} |f(t)| = \sup_{t\in\sigma} |\iota(f)(t)| \leqslant \sup_{t\in J} |\iota(f)(t)| = \|\iota(f)\|_\infty.$$

De lo cual se tiene que $\|f\|_\infty \leqslant \|\iota(f)\|_\infty$.

Para obtener la otra desigualdad debemos estudiar los $t \in J\backslash\sigma$. Note que, para $t \in J\backslash\sigma$, de acuerdo a (2.5), se tiene que $\beta(t) \leqslant t \leqslant \alpha(t)$, así

$$\begin{aligned}
& |f(\beta(t)) - \iota(f(t))| + |f(\alpha(t)) - \iota(f(t))| \\
= \; & \left|\left(\frac{f(\alpha(t)) - f(\beta(t))}{\alpha(t)-\beta(t)}\right)(t-\beta(t))\right| + \left|\left(\frac{f(\alpha(t)) - f(\beta(t))}{\alpha(t)-\beta(t)}\right)(t-\beta(t)) + f(\beta(t)) - f(\alpha(t))\right| \\
= \; & |(f(\alpha(t)) - f(\beta(t)))| \frac{t-\beta(t)}{\alpha(t)-\beta(t)} + \left|\left(1 - \frac{t-\beta(t)}{\alpha(t)-\beta(t)}\right)(f(\beta(t)) - f(\alpha(t)))\right| \\
= \; & |f(\alpha(t)) - f(\beta(t))| \frac{t-\beta(t)}{\alpha(t)-\beta(t)} + \left|\left(\frac{\alpha(t)-\beta(t)-t+\beta(t)}{\alpha(t)-\beta(t)}\right)(f(\beta(t)) - f(\alpha(t)))\right| \\
= \; & |f(\alpha(t)) - f(\beta(t))| \frac{t-\beta(t)}{\alpha(t)-\beta(t)} + \frac{\alpha(t)-t}{\alpha(t)-\beta(t)} |f(\beta(t)) - f(\alpha(t))| \\
= \; & |f(\alpha(t)) - f(\beta(t))| \frac{t-\beta(t)}{\alpha(t)-\beta(t)} + \frac{\alpha(t)-t}{\alpha(t)-\beta(t)} |f(\beta(t)) - f(\alpha(t))| \\
= \; & |f(\alpha(t)) - f(\beta(t))| .
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|\iota(f(t))| \leqslant \text{máx}\,\{|f(\alpha(t))|, |f(\beta(t))|\} \leqslant \|f\|_\infty. \tag{2.7}$$

Como esto es válido para todo $t \in J - \sigma$, además de cada $t \in \sigma$, por lo tanto se tiene que $\|\iota(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Lema 2.1. *Para toda $f \in BV(\sigma)$, $|f(t)| \leqslant \|f\|_{BV(\sigma)}$*

Demostración.

Sea $t \in \sigma$, entonces

$$\|f\|_{BV(\sigma)} \;\; = \|f\|_\infty + Var(f,\sigma) \geqslant \sup_{x\in\sigma} |f(x)| \geqslant |f(t)|.$$

Por lo tanto, $|f(t)| \leqslant \|f\|_{BV(\sigma)}$.

Lema 2.2. *Supongamos que* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy en* $BV(\sigma)$. *Entonces* $F = \lim_{n\to\infty} \iota(f_n) \in BV(J)$ *existe y* $F = \iota(F|\sigma)$.

Demostración.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $BV(\sigma)$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ de manera que

$$n, m > N \implies \|f_n - f_m\|_{BV(\sigma)} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Así, para cada $n, m > N$, en virtud de la proposición 2.3 y (2.8), se tiene que

$$\|\iota(f_n) - \iota(f_m)\|_{BV(J)} = \|\iota(f_n - f_m)\|_{BV(J)} = \|f_n - f_m\|_{BV(\sigma)} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Esto significa que $\{\iota(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $BV(J)$, el cual es un espacio de Banach (ver sección 1.2) por lo tanto esta sucesión converge, digamos a una función $F \in BV(J)$. Para completar la demostración necesitamos demostrar que $F = \iota(F|_{\sigma})$, lo cual es equivalente a demostrar que:

1. $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = F|_{\sigma}(t)$ para cada $t \in \sigma$,
2. Para cada $t \in J\backslash\sigma$ se cumple al igualdad
   $F(t) = \left(\dfrac{F(\alpha(t)) - F(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)}\right)(t - \beta(t)) + F(\beta(t))$.

Dado que $\iota(f_n) \to F$ cuando $n \to \infty$ se tiene que, dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir $N_1 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\|\iota(f_n) - F\|_{BV(J)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad n \geqslant N_1. \tag{2.10}$$

Además, observe que de (2.9) se desprende, para $t \in \sigma$ y $\varepsilon > 0$,

$$|f_n(t) - f_m(t)| = |\iota(f_n(t)) - \iota(f_m(t))| \leqslant \|\iota(f_n) - \iota(f_m)\|_{BV(J)} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Esto es, las sucesiones $\{f_n(t)\}_n$ y $\{\iota(f_n)(t)\}_n$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{C}$, por lo tanto convergentes. De hecho, de (2.10) y (2.11) obtenemos para $t \in \sigma$, y $n \geqslant M := \max\{N, N_1\}$.

$$\begin{aligned} |f_n(t) - F|_{\sigma}(t)| &= |\iota(f_n(t)) - F(t)| \\ &\leqslant |\iota(f_n(t)) - \iota(f_M(t))| + |\iota(f_M(t)) - F(t)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|\iota(f_M) - F\|_{BV(J)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto implica que $f_n \to F|_\sigma$ para cada $t \in \sigma$.

Para finalizar la demostración del lema hacemos uso de esta convergencia puntual. En efecto, sea $t \in J \backslash \sigma$

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{n\to\infty} \iota(f_n(t)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{f_n(\alpha(t)) - f_n(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)} \right) (t - \beta(t)) + f_n(\beta(t)) \right) \\ &= \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\alpha(t)) - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)} \right) (t - \beta(t)) + \lim_{n\to\infty} f_n(\beta(t)) \\ &= \left(\frac{F(\alpha(t)) - F(\beta(t))}{\alpha(t) - \beta(t)} \right) (t - \beta(t)) + F(\beta(t)) \\ &= \iota(F|_\sigma)(t). \end{aligned}$$

Como se deseaba demostrar.

TEOREMA 2.8. $(BV(\sigma), \|.\|_{BV(\sigma)})$ *es un álgebra de Banach*

Demostración.

Es suficiente demostrar la completitud de $BV(\sigma)$, dado que el Teorema 2.6 nos garantiza que $BV(\sigma)$ es un álgebra normada. Para ellos consideramos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $BV(\sigma)$, luego el lema 2.2, nos garantiza que $\{\iota(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ también es una sucesión de Cauchy en $BV(J)$ y $F = \iota(F|_\sigma)$. Además, $\iota(F|_\sigma)$ es una función en $BV(\sigma)$ en virtud de la Proposición 2.1. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - F|_\sigma\|_{BV(\sigma)} = \lim_{n\to\infty} \|\iota(f_n) - \iota(f)\|_{BV(J)} = \lim_{n\to\infty} \|\iota(f_n) - F\|_{BV(J)} = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $F|_\sigma$ y así el espacio es completo con lo que se obtiene la demostración del teorema.

§2.1. Comparación con otros espacios conocidos.

Es claro que esta clase de funciones generaliza la dada en el primer capítulo cuando $\sigma = [a, b]$. Entonces existen preguntas como ¿Las funciones Lipschitz permanecen en esta clase, cuando están definidas sobre un subconjunto compacto cualquiera?. La repeusta es positiva, como se muestra a continuación.

TEOREMA 2.9. *Sea $f : \sigma \to \mathbb{R}$ una función Lipschitziana, entonces f es de variación acotada en σ.*

Demostración.

Sean f una función que satisface la condición Lipschitz, y $M > 0$ la constante de Lipschitz, es decir, que satisface

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| \quad \text{para todo} \quad x_1, x_2 \in \sigma.$$

Luego, para $\xi = \{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)| &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} M|s_{j+1} - s_j| \\ &= M \sum_{j=1}^{n-1} |s_{j+1} - s_j| \\ &= M(b - a), \end{aligned}$$

donde a, b son los extremos del intervalo más pequeño que contiene a σ (Ver definición 2.1).

En consecuencia, tomando el supremo de sobre todas las particiones de σ se tiene que $Var(f, \sigma) \leqslant M(b - a) < \infty$.

TEOREMA 2.10. *La restricción de cualquier función de C^∞ a σ es una función de variación acotada en σ.*

Demostración.

En efecto, sean $f \in C^\infty$ y $\{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(J)$. Note que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en cada intervalo $[s_j, s_{j+1}] \subseteq [a, b]$, con $[a, b]$ como en la definición 2.1. Luego, para cada $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ existe $c_j \in (s_j, s_{j+1})$ de manera que $f'(c_j) = \dfrac{f(s_{j+1}) - f(s_j)}{s_{j+1} - s_j}$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})-f(s_j)| &= \sum_{j=1}^{n-1}|f'(c_j)||s_{j+1}-s_j| \\ &\leqslant \|f'\|_\infty\sum_{j=1}^{n-1}|s_{j+1}-s_j| \\ &= \|f'\|_\infty(b-a).\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f \in BV(J)$ y por lo tanto se tiene que $f \in BV(\sigma)$.

Este teorema implica que las funciones polinómicas a trozos son de variación acotada. Es válido preguntarse entonces si todas las funciones son de variación acotada. El siguiente ejemplo muestra una función que es continua pero no es de variación acotada.

Ejemplo 2.4. *La función f definida sobre $\sigma := [0,1] \cup \{2\}$ por:*

$$f(x) := \begin{cases} x\cos(\frac{\pi}{x}) & si \quad x \in (0,1] \cup \{2\} \\ \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Solución.

Consideremos la siguiente partición $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n-1} < ... < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1 < 2$.

Note que

$$cos(m\pi) := \begin{cases} \quad 1 \;\; \text{si} \;\; m \;\; es \;\; par \\ \\ -1 \;\; \text{si} \;\; m \;\; es \;\; impar. \end{cases}$$

Esto es, $\cos(m\pi) = (-1)^m$, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{n-1}\left|x_{m+1}\cos\left(\frac{\pi}{x_{m+1}}\right)-x_m\cos\left(\frac{\pi}{x_m}\right)\right| \\
= & \sum_{m=1}^{n-1}\left|\frac{1}{m+1}\cos((m+1)\pi)-\frac{1}{m}\cos(m\pi)\right| \\
= & \sum_{m=1}^{n-1}\left|(-1)^m\left(\frac{-1}{m+1}-\frac{1}{m}\right)\right| \\
= & \sum_{m=1}^{n-1}\left|\left(\frac{-1}{m+1}-\frac{1}{m}\right)\right| \\
= & \sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m}\right) \\
= & \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m+1}+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m} \\
\geqslant & \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si hacemos que $n \to \infty$ entonces $\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}$ es una serie divergente, de lo cual se concluye que f no es de variación acotada.

■

Capítulo 3

Funciones Absolutamente Continuas sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$

En 1905 es Vitali quien introduce un primer concepto de las funciones absolutamente continuas. Hay propiedades de dichas funciones que guardan una estrecha relación con las funciones de variación acotada.

Definición 3.1. *Sea $f : \sigma \to \mathbb{C}$. Se dice que f es* ***absolutamente continua*** *si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para cualquier número finito de intervalos disjuntos $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^n$ con $s_i, t_i \in \sigma$ para todo i, se cumple que si $\sum_i^n |t_i - s_i| < \delta$ entonces tenemos que $\sum_i^n |f(t_i) - f(s_i)| < \varepsilon$.*

Al conjunto de todas las funciones absolutamentes continuas definidas sobre σ lo denotaremos por $AC(\sigma)$.

Proposición 3.1. *Sea $f : \sigma \to \mathbb{C}$. Entonces $f \in AC(\sigma)$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$tal que para toda sucesión finita de intervalos disjuntos $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^n$ con $\sum_{i=1}^n |t_i - s_i| < \delta$ entonces $\sum_{i=1}^n Var(f, [s_i, t_i] \cap \sigma) < \varepsilon$.*

Demostración.
Sean $f \in AC(\sigma)$ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe un $\delta > 0$ de forma que para toda sucesión finita $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^n$ de intervalos disjuntos que satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i| < \delta \quad \text{implica que} \quad \sum_{i}^{n}|f(t_i) - f(s_i)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1}$$

Sea $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^{n}$ una colección finita de intervalos disjuntos tales que $\sum\limits_{i=1}^{n}|t_i - s_i| < \delta$. En virtud del Teorema 2.4, $f \in BV([s_i, t_i] \cap \sigma)$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Esto es, para cada $i = 1, \cdots, n$, $\sup\limits_{\xi \in \Lambda([s_i,t_i]\cap\sigma)} Var(f, [s_i, t_i] \cap \sigma) < +\infty$. En consecuencia, en virtud de la caracterización 1.2, podemos elegir una partición $\xi_i = \{u_i^j\}_{j=1}^{m_i} \in \Lambda([s_i, t_i] \cap \sigma)$ de manera que

$$Var(f, [s_i, t_i] \cap \sigma) - \frac{\varepsilon}{2(n-1)} < \sum_{j=1}^{m_i-1}|f(u_i^{j+1}) - f(u_i^j)| \tag{3.2}$$

Note que, cada partición ξ_i $(i = 1, \cdots, n)$ genera una colección de intervalos finitos no solapados contenidos en $[s_i, t_i]$, que satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i-1}|u_i^{j+1} - u_i^j| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}|t_i - s_i| < \delta,$$

en consecuencia, de (3.1) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i-1}|f(u_i^{j+1}) - f(u_i^j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, de esta última desigualdad y (3.2) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n-1} Var(f, [s_i, t_i] \cap \sigma) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2(n-1)} \quad < \quad \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_i-1}|f(u_i^{j+1}) - f(u_i^j)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lo cual es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n-1} Var(f, [s_i, t_i] \cap \sigma) \quad < \quad \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2(n-1)} = \varepsilon.$$

Queda así demostrada la primera parte del teorema.

Para demostrar el recíproco, consideremos $\varepsilon > 0$, por hipótesis podemos elegir un $\delta > 0$ tal que para toda sucesión finita de intervalos disjuntos $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^{n}$ con $\sum\limits_{i=1}^{n}|t_i - s_i| < \delta$ y además por el Teorema 2.2(ii) se tiene que

$$|f(t_i) - f(s_i)| \leqslant Var(f, [s_i, t_i] \cap \sigma)$$

Luego, sumando en ambos lados de la desigualdad se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(s_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} Var(f, [s_i, t_i] \cap \sigma) < \varepsilon.$$

Esto es, $f \in AC(\sigma)$.

Con lo que queda demostrada la proposición.

Lema 3.1. *Sea $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ ambos compactos de $\mathbb{R}$ y $f \in AC(\sigma_2)$. Entonces $f|\sigma_1 \in AC(\sigma_1)$.*

Demostración.

Supongamos que $f \in AC(\sigma_2)$ y sea $\varepsilon > 0$. Del supuesto que $f \in AC(\sigma_2)$ podemos garantizar la existencia de $\delta > 0$ tal que para una sucesión de intervalos $\{[s_j, t_j]\}_{j=1}^{n}$ que satisface

$$\sum_{j=1}^{n} |t_j - s_j| < \delta \quad \text{implica que} \quad \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(s_j)| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Luego, para una sucesión de intervalos $\{[s_j, t_j]\}_{j=1}^{n}$ con $\sum\limits_{j=1}^{n} |t_j - s_j| < \delta$ con $s_j, t_j \in \sigma_1 \subseteq \sigma_2$ se satisface (3.3) , con lo cual concluye la demostración.

Lema 3.2. *Sea $a = s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 = b$ y sea $f \in C([a, b])$ donde $f|[s_i, s_{i+1}] \in AC([s_i, s_{i+1}])$ para todo i, Entonces $f \in AC([a, b])$.*

Demostración.

Consideremos $a = s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 = b$ y sea $f \in C([a, b])$ donde $f|[s_i, s_{i+1}] \in AC([s_i, s_{i+1}])$ para todo i, debemos probar que $f \in AC([a, b])$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $f|[s_i, s_{i+1}] \in AC([s_i, s_{i+1}])$ con $i = 1, 2$ existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que para cualquier colección finita de intervalos no solapados $\{[s_i^k, t_i^k]\}_{k=1}^{n_k}$ satisfacen

$$\sum_{k=1}^{n_k} |t_i^k - s_i^k| < \delta_i \implies \sum_{k=1}^{n_k} Var(f, [s_i^k, t_i^k] \cap [s_i, s_{i+1}]) < \frac{\varepsilon}{2},$$

para cada $i = 1, 2$.

Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y una colección finita de intervalos no solapados $\{[p_i, q_i]\}_{i=1}^{m}$ tal que $\sum_{i=1}^{m} |q_i - p_i| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} Var(f, [p_i, q_i]) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} Var(f, [p_k, q_k]) + Var(f, [p_k, s_2])}_{\varepsilon/2} + \underbrace{Var(f, [s_2, q_k])}_{\varepsilon/2} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in AC([a, b])$.

Teorema 3.1. *Sea $a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant ... \leqslant a_n < b_n$. Supongamos que $\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, $f : \sigma \to \mathbb{C}$ es continua y para cada i, $f|[a_i, b_i] \in AC([a_i, b_i])$. Entonces $f \in AC(\sigma)$.*

Demostración.

Consideremos a $J = [a, b]$ el intervelo más pequeñoo que contiene a σ. Entonces usando el Lema 3.2 tenemos que $\iota(f) \in C([a, b])$ con $\iota(f)|[a_i, b_i] = f|[a_i, b_i] \in AC[a_i, b_i]$ para cada i. Ahora, sabemos que $\iota(f)$ es lineal en cada $[b_i, a_{i+1}]$ para cada i, entonces $\iota(f)|[b_i, a_{i+1}] \in AC[b_i, a_{i+1}]$. El virtud del Lema 3.2 se tiene que $\iota(f) \in AC([a, b])$ y finalizamos la demostración haciendo uso del Lema 3.1 que nos garantiza que $f = \iota(f)|\sigma \in AC(\sigma)$.

Ahora, daremos una versión de la Proposición 2.2 para funciones absolutamente continuas definidas sobre un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2. *Sea $f : \sigma \to \mathbb{C}$. Entonces $f \in AC(\sigma)$ si y sólo si $\iota(f) \in AC(J)$.*

Demostración.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\iota(f) \in AC(J)$, entonces usando el Lema 3.1 se tiene que $f = \iota(f)|\sigma \in AC(\sigma)$.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que $f \in AC(\sigma)$. Puesto que σ es compacto, entonces $J \backslash \sigma$ es abierto y además puede ser escrito como la unión numerable de intervalos abiertos disjuntos $\cup O_n$. Por otra parte, para cada n sea I_n el mayor intervalo cerrado que satisface que $O_n \subset I_n \subset O_n \cup \sigma$. Además, sea $\sigma_n = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$, es claro que σ_n puede ser escrito como la unión finita de intervalos cerrados disjuntos. Consideremos J' uno de estos intervalos y si hacemos $V_1 = \sigma \cap J'$ y $V_2 = \overline{J' \backslash \sigma}$, entonces tanto V_1 como V_2 son uniones disjuntas de intervalos cerrados. Ahora bien, $\iota(f)|V_1 = f|V_1$, así por el Lema 3.1 se obtiene que $\iota(f)|V_1 \in AC(V_1)$. Por otra parte, sabemos que $\iota(f)$ es lineal en cada uno de los componentes de V_2, así podemos decir que $\iota(f)|V_2 \in AC(V_2)$. En consecuencia, haciendo uso del Lema 3.2 y el Corolario 3.1 podemos concluir que $\iota(f)|\sigma_n \in AC(\sigma_n)$.

Ahora; para cada n, sea $\tau_n = \overline{J \backslash \sigma_n}$. Entonces τ_n es unión finita de intervalos cerrados disjuntos. Sea $J = \cup \sigma_n$, entonces para algún $\delta > 0$, existe N tal que para todo $n \geqslant N$ la medida de τ_n es menor que δ.

Dado $\varepsilon > 0$, por Definición 3.1 , existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^m$ es un conjunto finito de intervalos no - solapados con $s_i, t_i \in \sigma$ para todo i y $\sum_1^m |t_i - s_i| < \delta_1$ entonces $\sum_1^m |f(t_i) - f(s_i)| < \varepsilon/2$. Y además debemos elegir un n de tal manera que la medida de $\tau_n < \delta_1$ y escribimos τ_n como la unión de intervalos disjuntos $J_1, ..., J_l$.

Dado que $\iota(f)|\sigma_n \in AC(\sigma_n)$ podemos encontrar un $\delta_2 > 0$ tal que si $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^m$ es un conjunto finito de intervalos no - solapados con $s_i, t_i \in \sigma_n$ para todo i y $\sum_1^m |t_i - s_i| < \delta_2$, entonces $\sum_1^m |\iota(f)(t_i) - \iota(f)(s_i)| < \varepsilon/2$.

Tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, supongamos que $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^m$ es un conjunto finito de subintervalos no - solapados de J con $\sum_1^m |d_i - c_i| < \delta$. En vista de que σ_n sólo tiene un número finito de componentes, el conjunto $(\cup_{i=1}^m [c_i, d_i]) \cap \sigma_n$ puede ser escrito como una unión finita de intervalos cerrados disjuntos $\cup_{i=1}^{m_1} [c_i^1, d_i^1]$. Similarmente, escribimos $(\cup_{i=1}^m [c_i, d_i]) \cap \tau_n = \cup_{i=1}^{m_2} [c_i^2, d_i^2]$. Ahora, haciendo uso de la Proposición 2.1, la Proposición 3.1 y el Teorema 2.7 tenemos

$$\sum_{i=1}^{m_1} Var\left(\iota(f), [c_i^1, d_i^1]\right) \leqslant \sum_{i=1}^{l} Var\left(\iota(f), J_i\right) = \sum_{i=1}^{l} Var\left(f, J_i\right) < \varepsilon/2.$$

Por otro lado, $\sum_{i=1}^{m_2} Var\left(\iota(f), [c_i^2, d_i^2]\right) < \varepsilon/2$ y así

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} Var\left(\iota(f),[c_i,d_i]\right) &= \sum_{i=1}^{m_1} Var\left(\iota(f),[c_i^1,d_i^1]\right)+\sum_{i=1}^{m_2} Var\left(\iota(f),[c_i^2,d_i^2]\right)\\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\iota(f) \in AC(J)$.

Corolario 3.1. *Si $f \in AC(\sigma)$ entonces $f \in BV(\sigma)$.*

Demostración.

Sea $f : \sigma \to \mathbb{C}$ y $\sigma \subset \mathbb{R}$ compacto.
Supongamos que $f \in AC(\sigma)$ entonces por el Teorema 3.2 tenemos que $\iota(f) \in AC(J)$.

Además sabemos que si $\iota(f) \in AC(J)$ entonces $\iota(f)$ es de variación acotada, es decir $\iota(f) \in BV(J)$ y usando la Proposición 2.1 obtenemos que $f = \iota(f)|\sigma \in BV(\sigma)$.

Como se deseaba probar.

Teorema 3.3. *Sea $\sigma \subset \mathbb{R}$ compacto. Entonces $AC(\sigma)$ es una subálgebra de Banach de $BV(\sigma)$.*

Demostración.

Sean $f, g \in AC(\sigma)$ y $k \in \mathbb{C}$. En primer lugar, demostremos que $AC(\sigma)$ es subálgebra.

En efecto, para $s, t \in \sigma$ probaremos a continuación que $AC(\sigma)$ es cerrado bajo la suma, el producto por un escalar y el producto.

1.

$$\begin{aligned}|(f+g)(t)-(f+g)(s)| &= |(f(t)+g(t))-(f(s)-g(s))|\\ &= |(f(t)+f(s))+(g(t)-g(s))|\\ &\leqslant |f(t)-f(s)|+|g(t)-g(s)|.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}|kf(t)-kf(s)| &= |k(f(t)-f(s))|\\ &= |k||f(t)-f(s)|\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
|(fg)(t)-(fg)(s)| &= |f(t).g(t)-f(s).g(t)+f(s).g(t)-f(s).g(s)| \\
&= |[f(t)-f(s)]g(t)+f(s)[g(t)-g(s)]| \\
&\leqslant |[f(t)-f(s)]g(t)|+|f(s)[g(t)-g(s)]| \\
&= |f(t)-f(s)||g(t)|+|f(s)||g(t)-g(s)| \\
&\leqslant \|f\|_\infty |g(t)-g(s)|+\|g\|_\infty |f(t)-f(s)|.
\end{aligned}
$$

La última desigualdad ocurre puesto que $|f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$.

Así, tomando ε y δ de la definición de $AC(\sigma)$ se deduce que $AC(\sigma)$ es subálgebra de $BV(\sigma)$.

Ahora probemos la completitud, para ello debemos probar que toda sucesión de Cauchy es convergente.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $AC(\sigma)$ y usando el mismo argumento que se usó en el Lema 2.2 se tiene que $\{\iota(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ también es una sucesión de Cauchy en $AC(J)$ que además converge a un $F \in AC(J)$. Por el Lema 3.1 tenemos que $F|\sigma \in AC(\sigma)$.

En consecuencia, volviendo a hacer uso del Lema 2.2 se tiene que $\iota(F|\sigma) = F$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f_n - F|\sigma\|_{BV(\sigma)} &= \lim_{n\to\infty} \|\iota(f_n - F|\sigma)\|_{BV(J)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\iota(f_n) - \iota(F|\sigma))\|_{BV(J)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|F - F\|_{BV(J)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $F|\sigma$ y así el espacio es completo con lo que se obtiene la demostración del teorema.

Teorema 3.4. *El conjunto de polinomios $\mathcal{P}$ es denso en $AC(\sigma)$.*

Demostración.

Sea $f \in AC(\sigma)$. Ya que $\mathcal{P}$ es denso en $C(J)$ y además $AC(J) \subseteq C(J)$ entonces $\mathcal{P}$ también es denso en $AC(J)$.

Por otro lado, haciendo uso del Teorema de Weierstrass (1.10) se tiene que:
Dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $\|\iota(f) - p\|_{BV(J)} < \varepsilon$.
Entonces

$$\begin{aligned} \|f - p\|_{BV(\sigma)} &= \|(\iota(f) - p)|\sigma\|_{BV(\sigma)} \\ &= \|\iota(f) - p\|_{BV(J)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ahora, daremos un ejemplo de una función uniformemente continua pero no es absolutamente continua en el compacto.

Ejemplo 3.1. *La función f definida sobre $[0,1] \cup \{2\} = \sigma$ por:*

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(\dfrac{1}{x}) & si \quad x \in (0,1] \cup \{2\} \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Solución.

En efecto, haciendo uso del mismo argumento del Ejemplo 2.4 tenemos que f no es de variación acotada y por el contrarrecíproco del Corolario 3.1 se tiene que f no es absolutamente continua.

Sin embargo, esta función es uniformemente continua. En efecto, sabemos que f es continua en el compacto, entonces haciendo uso del Teorema 1.11 se tiene que f es uniformemente continua en ese mismo compacto.

Ejemplo 3.2. *La función $f(x) = \sqrt{x}$ es absolutamente continua en el compacto $[0,1]$, pero f no es Lipschitziana en ese compacto.*

Solución.

Primeramente veamos que $\sqrt{x}$ es Absolutamente continua.

En Efecto, Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon^2 > 0$ y sea $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^{n}$ una colección finita de intervalos no - solapados en $[0,1]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} |d_i - c_i| < \varepsilon^2$ entonces $\sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| < 2\varepsilon$.

Por otro lado, sea $a = \dfrac{\varepsilon^2}{4}$ y dividamos la suma $\sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)|$ en dos partes: los intervalos que se encuentran en $[0, a]$ y los que están en $[a, 1]$.

Consideremos la suma sobre los intervalos que se encuentran en $[0, a]$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |f(d_i) - f(c_i)| &= \sum_{i=1}^{m} |\sqrt{d_i} - \sqrt{c_i}| \\
&\leqslant \sqrt{a} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ahora consideremos la suma de los intervalos que se encuentran en $[a, 1]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| &= \sum_{i=m+1}^{n} |\sqrt{d_i} - \sqrt{c_i}| \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} |\sqrt{d_i} - \sqrt{c_i}|.\left|\frac{\sqrt{d_i} + \sqrt{c_i}}{\sqrt{d_i} + \sqrt{c_i}}\right| \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} \frac{|d_i - c_i|}{\sqrt{d_i} + \sqrt{c_i}} \\
&\leqslant \sum_{i=m+1}^{n} \frac{|d_i - c_i|}{2\sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}} \sum_{i=m+1}^{n} |d_i - c_i| \\
&< \frac{1}{2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}}}.\varepsilon^2 \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Combinando esas dos sumatorias tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(d_i)-f(c_i)| &\leqslant \sum_{i=1}^{m}|f(d_i)-f(c_i)| + \sum_{i=m+1}^{n}|f(d_i)-f(c_i)|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon\\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = \sqrt{x}$ es una función absolutamente continua en el compacto $[0, 1]$.

Ahora, veamos que $f(x) = \sqrt{x}$ no es Lipschitziana en ese compacto.

En efecto, diremos que f no satisface la condición de Lipschitz si no existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ para todo $x, y \in [0, 1]$ entonces:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\\ &= \left|(\sqrt{x}-\sqrt{y})\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right|\\ &= \left|\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right|\\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right|.|x+y|\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.|x+y|\end{aligned}$$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ cuando $x \to 0$, se concluye que no existe la constante M que satisfaga la condición de Lipschitz.

Teorema 3.5. *Toda función absolutamente continua es continua.*

Demostración.

Sea f una función absolutamente continua entonces por la definición 3.1 se tiene lo siguiente: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cualquier número finito de intervalos disjuntos $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^n$ con $s_i, t_i \in \sigma$ para todo i, se cumple que si $\sum\limits_i^n |t_i - s_i| < \delta$ entonces $\sum\limits_i^n |f(t_i) - f(s_i)| < \varepsilon$.

Ahora, tomando en particular un sólo intervalo digamos $[s, t]$, para todo $s, t \in \sigma$ se tiene que $|t - s| < \delta$ entonces $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Así f es uniformemente continua y por tanto continua, como se quería demostrar.

Teorema 3.6. *Sea $f : \sigma \to \mathbb{R}$ una función Lipschitziana, entonces f es absolutamente continua en σ.*

Demostración.

Sean f una función que satisface la condición Lipschitz, y $M > 0$ la constante de Lipschitz, es decir, que satisface

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| \quad \text{para todo} \quad x_1, x_2 \in \sigma.$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cualquier número finito de intervalos disjuntos $\{[s_i, t_i]\}_{i=1}^n$ con $s_i, t_i \in \sigma$ para todo i, se cumple que si $\sum\limits_i^n |t_i - s_i| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)| &= \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)| \cdot \frac{|t_i - s_i|}{|t_i - s_i|} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{|f(t_i) - f(s_i)|}{|t_i - s_i|} \cdot |t_i - s_i| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n M \cdot |t_i - s_i| \\
&= M \sum_{i=1}^n |t_i - s_i| \\
&< M\delta
\end{aligned}$$

Basta tomar $\delta = \varepsilon / M$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)| < M\delta = M \cdot \varepsilon / M = \varepsilon.$$

Como deseabamos probar. ∎

Capítulo 4

Funciones de p - Variación Acotada sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$

En 1.924 Wiener introdujo el concepto de funciones de p -variación acotada ($p > 0$) como una generalización del concepto de variación acotada dado por Jordan.

Definición 4.1. *Sea $f : \sigma \to \mathbb{C}$, con $\sigma \subset \mathbb{R}$ compacto, $1 \leqslant p < \infty$ y $\{s_j\}_{j=1}^n$ una partición de σ; definimos la **Variación** de f por:*

$$Var_p(f,\sigma) = \sup_{\{s_j\}_{j=1}^n \in \Lambda(\sigma)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |f(s_{j+1}) - f(s_j)|^p \right)^{1/p}. \tag{4.1}$$

*Diremos que una función $f : \sigma \to \mathbb{C}$ es de **p - Variación finita** o de **p - Variación acotada** si $Var_p(f,\sigma) < +\infty$. Al conjunto de todas las funciones de p -variación acotada lo denotaremos por $BV_p(\sigma)$.*

Teorema 4.1. *Sean $f, g \in BV_p(\sigma)$, $k \in \mathbb{C}$. Entonces*

i. $Var_p(f + g,\sigma) \leqslant Var_p(f,\sigma) + Var_p(g,\sigma)$.

ii. $Var_p(kf,\sigma) = |k|Var_p(f,\sigma)$.

Demostración.

(i) Sea $\{s_j\}_{j=1}^n$ una partición de σ y usando la desigualdad de Minkowski se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n-1}|(f+g)(s_{j+1})-(f+g)(s_j)|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})+g(s_{j+1})-f(s_j)-g(s_j)|^p\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1}|\big(f(s_{j+1})-f(s_j)\big)+\big(g(s_{j+1})-g(s_j)\big)|^p\right)^{1/p}\\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})-f(s_j)|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n-1}|g(s_{j+1})-g(s_j)|^p\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Así, tomando el supremo sobre todas las particiones del subconjunto compacto σ se tiene que

$$Var_p(f+g,\sigma)\leqslant Var_p(f,\sigma)+Var_p(g,\sigma)$$

.

(ii) Sea $k\in\mathbb{C}$ y sea $\{s_j\}_{j=1}^n$ una partición de σ, entonces

$$\sum_{j=1}^{n-1}|(kf)(s_{j+1})-(kf)(s_j)|^p \;=\; |\lambda|^p\sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})-f(s_j)|^p,$$

Entonces

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1}|(kf)(s_{j+1})-(kf)(s_j)|^p\right)^{1/p} \;=\; |\lambda|\left(\sum_{j=1}^{n-1}|f(s_{j+1})-f(s_j)|^p\right)^{1/p}$$

Así, tomando el supremo sobre todas las particiones del subconjunto compacto σ se tiene que

$$Var_p(kf,\sigma)=|k|Var_p(f,\sigma)$$

.

Note que una consecuencia inmediata de este teorema es que podemos garantizar que $BV_p(\sigma)$ es un espacio vectorial dotados de las operaciones de suma y producto por un escalar de funciones: Para $f,g\in BV(\sigma)$ y $c\in\mathbb{C}$ se tiene que

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x) \qquad \text{y} \qquad (cf)(x):=cf(x).$$

Además, $\|f\|_{BV_p(\sigma)}=\|f\|_\infty+Var_p(f,\sigma)$ es una norma para $BV_p(\sigma)$. ■

Referencias bibliográficas.

[1] J. Fourier, *The analytical of Heat*, Traslated by A. Freeman, Dover Publications, Inc., New York, (1955).

[2] Jordan, C., sur la serie de fourier,C. R. Acad. Sci. Paris, 2 (1881).

[3] C. Jordan, *sur la série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2 (1881), 228-230.

[4] H.L. Royden, Real Analysis, Macmillan Pub., New York, 1988.

[5] Bachman G., Narici L. Functional Analysis. Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[6] Mukherjea A., Pothoven K. Real and Functional Analysis. University of South Florida, Tampa. New York, San Francisco London. 1966.

[7] N. Merentes y S. Rivas., *El operador de composición en espacios de funciones con algún tipo de variación acotada*, Novena escuela venezolana de Matemáticas., Mérida.1996.

[8] Saxe K. Beginning Functional Analysis.Mathematics Department. Macalester College, Saint Paul, Minnesota. Estados Unidos. 2002.

[9] Ashton B. and Doust I. Functions of bounded variation on compact subsets of the plane. 2005.

[10] G. Galavís, Funciones de $\phi-$Variación Acotada.Biblioteca de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (Ucla), Barquisimeto. 2011.

[11] A. Belzárez, $\phi-$ Variación Acotada en el Plano Real. Biblioteca de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (Ucla), Barquisimeto. 2011.

[12] M. Pérez, Funciones de $p-$ Variación Acotada.Biblioteca de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (Ucla), Barquisimeto. 2012.

[13] Rudin, W. *Análisis funcional*. 1979. Editorial Revertó S.A., impreso en España.

[14] E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series*, Third Edition, Dover Publications, New York,1927.

[15] I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable.* Trans. by L. F. Boron, with the editorial collaboration of and with annotations by E. Hewitt. New York, Ungar, 1955. 277 pp.