UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Extinción de especies T-periódicas en el sistema competitivo no autónomo de Lotka-Volterra.”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Jessica Castillo

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Ecuaciones Diferenciales.
Tutor: Dra. Liliana Pérez

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2013

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"EXTINCIÓN DE ESPECIES T-PERIÓDICAS EN EL SISTEMA COMPETITIVO NO AUTÓNOMO DE LOTKA-VOLTERRA."

presentado por el ciudadano BR. JESSICA CASTILLO titular de la Cédula de Identidad No. 18843136, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ______________________

Con una calificación de ______________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ______________________ de ___________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

___

___

___

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios por darme la sabiduría, paciencia e inteligencia para alcanzar esta meta. Gracias Señor.

Agradecimientos

Primero agradezco a **DIOS TODOPODEROSO** porque sin su apoyo y guía espiritual no estaría en este momento acá.
Gracias a los dos seres que me dieron el don de la vida mi madre **Ana** y mi padre **Angel**, gracias por darme calor en tiempos de frió, animo en tiempos de cólera, por cuidar y hacer de mi una persona de bien, hecha y derecha. Gracias por apoyarme y creer siempre en mí cuando otros no lo hacían, mil gracias, no los cambiaria por nada. Son mi orgullo.
A mi familia gracias a su apoyo incondicional y constante, en particular a mis amigos, protectores y hermanos **Angel**, **Yasenia** y a mis sobrinos que son lo más bello de mi vida **Kelly**, **Ana del Valle** y **Luifer**.
A mis colegas, amigos y ocurrentes, vigorosos e indispensable compañeros de aventura **Silmaris (Cariño), Karling, Carlos (señor), Maria (bruja), Mayarín, Yogeidi (chiqui), Mariela, Genesis, Eliecer, Alberto, Alí, Lilibeth, Gaetano (Charly), Jeneth, Darwin, Victor, José, Aldemar, Orlando** ya que estuvieron conmigo y dieron sus palabras de aliento en todos los momentos dificiles que se me presentaron durante este camino.
A mis amigos incondicionales que son el sol en mis tormentas **Yohanna, Angie, Luis (Cucho), Lisandro, Oriana, Isaias.** Y a todos mis hermanos de cursillo gracias por sus oraciones y enseñanzas.
A mis profesores especialmente a mi tutora **Liliana Pérez** por su dedicación, paciencia y orientación durante estos últimos meses.
Gracias a todos aquellos que forman parte de mi vida.

RESUMEN

En este trabajo consideramos el sistema competitivo n dimensional Lotka-Volterra,

$$x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right), \qquad i = 1, \cdots, n; \tag{1}$$

donde las funciones $a_{ij}(t)$ y $b_i(t)$ son continuas, T-periódicas, $a_{ii}(t) > 0$ para $i = 1, \cdots, n.$ y $a_{ij}(t) \geq 0$ para $i \neq j$, $t \in \mathbb{R}$. Además el promedio de las funciones b_i viene dado por:

$$\bar{b} = \frac{1}{T}\int_0^T b_i(s)ds > 0, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{2}$$

Y para cada entero k, $k > 1$, existe un entero $i_k, i_k < k$ tal que para cualquier j, $j \leq k$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\bar{b}_k a_{i_k j}(t) - \bar{b}_{i_k} a_{kj}(t) < 0. \tag{3}$$

El objetivo de este trabajo es desarrollar el articulo [1] donde muestran que bajo las condiciones antes dadas cualquier solución $x(t) = (x_1, \ldots, x_n)$ del sistema (1) cumple la propiedad de que para cada j, con $j = 2, \ldots, n$, $x_j(t)$ se extingue exponencialmente cuando $t \to +\infty$ y $x_1(t)$ se estabiliza a $x^*(t)$ cuando $t \to +\infty$, donde $x^*(t)$ es solución de la ecuación logística:

$$x^{'}(t) = x(t)[b_1(t) - a_{11}(t)x(t)].$$

ÍNDICE

Agradecimientos **i**

Resumen **iii**

Introducción **1**

1. Preliminares **5**

2. Extinción de un sistema de Lotka-Volterra **19**

Referencias Bibliográficas **27**

Introducción

Una de las características más notables de la vida en nuestro planeta es la gran diversidad de aspectos y hábitos que tienen los organismos que la componen. Sin embargo, es bastante difícil observar que esta manifestación de diversidad no se da de una forma arbitraria, sino todo lo contrario. Los organismos viven en comunidades, formando estrechas relaciones de interacción, donde cada especie depende directa o indirectamente de la presencia de las otras. Una de las tareas de la Ecología es el desarrollo de una teoría de la organización de las comunidades que permita entender las causas de la diversidad y los mecanismos de interacción.

A lo largo de las últimas décadas se ha visto un incremento de publicaciones y artículos en revistas internacionales abordando el tema de los sistemas positivos; sin embargo, el análisis se ha volcado fundamentalmente al estudio del comportamiento dinámico de dichos sistemas pudiéndose apreciar la falta de resultados concluyentes relacionados con aspectos de control de estos sistemas. Por tal motivo el objetivo central del trabajo es precisamente el estudio de los aspectos de control, y en particular, en el problema de la selección de la ley de control de una clase particular de lo sistemas positivos no lineales: el llamado sistema de Lotka-Volterra.

Un sistema positivo muy estudiado debido a su impacto en diferentes áreas de aplicaciones es el bien conocido sistema de Lotka-Volterra (L-V), propuesto por el matemático Italiano Vito Volterra y el biólogo americano Alfred Lotka estudiado de manera independiente algunas décadas atrás. Este estudio, reflejado en una considerable parte de la literatura sobre sistemas de L-V ha sido dedicada a cuestiones relacionadas con el análisis de su dinámica y de la estabilidad de sus puntos de equilibrio. Otros conceptos como permanencia, coexistencia de especies y persistencia de las soluciones parecen también dominar la literatura del tema. Es también importante acotar que, debido a su complejidad, con frecuencia se encuentran casos de estudio de subsistemas particulares de la más general ecuación de Lotka-Volterra siendo común, por ejemplo, asumir que el sistema es competitivo, cooperativo, o de tipo depredador-presa pues, la matriz que define la interacción entre las variables del sistema tiene propiedades específicas.

Por otra parte, solo algunos resultados relacionados con el control de estos sistemas ha sido abordado hasta la fecha por otros autores. Si un sistema físico determinado se modela utilizando las ecuaciones de Lotka-Volterra, y de su análisis se concluye que el sistema no es estable o no es robusto ante perturbaciones, entonces, si se quiere poner en práctica, el control de los mismos es de suma importancia. Hay ejemplos prácticos de ecosistemas estudiados a través de las ecuaciones de L-V en los cuales nada se concluye sobre qué hacer en caso de desviaciones en su comportamiento habitual (perturbaciones motivadas por plagas no previstas, entre otras.) y que necesitan ser estudiados. También es bueno destacar que al abordar el control de los sistemas de L-V se está también tratando el estudio del control de sistemas no lineales más generales que pueden ser representados a través de dichas ecuaciones, pudiéndose aportar nuevas herramientas para su control. En adelante se usará la siguiente notación.

Dada una función g definida en $\mathbb{R}$, sean g^l y g^u definidas como:

$$g^l = \inf_{t\in\mathbb{R}} g(t), \qquad g^u = \sup_{t\in\mathbb{R}} g(t).$$

En [2] Montes De Oca y Zeeman consideran el sistema n dimensional

$$x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right), \qquad i = 1, \cdots, n; \tag{4}$$

donde $x_i(t)$ representa el tamaño de la población de esa especie en el tiempo t, $x_i'(t)$ es la razón de cambio del crecimiento de la especie i con respeto al tiempo y denota $\dfrac{dx_i}{dt}$, a_{ij} es el grado de inhibición de la especie i por la presencia de la especie j, a_{ii} es el grado de inhibición de la especie i sobre si misma, b_i es la tasa de crecimiento de la especie i y todas las funciones $a_{ij}(t)$ y $b_i(t)$ son continuas y acotados por constantes positivas en $(-\infty, +\infty)$.

Ellos demostraron que si para cada $k, k > 1$ existe $i_k < k$ tal que para cualquier $j \leq k$ se satisface la desigualdad:

$$b_k^u a_{i_k j}^u - b_{i_k}^l a_{kj}^l < 0, \tag{5}$$

entonces cada solución $col(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ de (4) con $x_i(t_0) > 0$, $i = 1, \cdots, n$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ tiene la siguiente propiedad:

Para todo j, $j = 2, \dots, n$, $x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ y $x_1(t) - x^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ donde $x^*(t)$ es la única solución de la ecuación diferencial logística:

$$x'(t) = x(t)\big(b_1(t) - a_{11}(t)x(t)\big),$$

la cual es acotada superior e inferiormente por constantes estrictamente positivas. El sistema (4) ha sido estudiado también por Ahmad en [6] y Ahmad y Lazer en [7].

En nuestro caso consideremos el sistema no autónomo Lotka-Volterra (4) donde las funciones $a_{ij}(t)$ y $b_i(t)$ son continuas, T-periódicas, $a_{ii}(t) > 0$ para $i = 1, \cdots, n.$ y $a_{ij}(t) \geq 0$ para $i \neq j$, $t \in \mathbb{R}$. Además el promedio de las funciones b_i viene dado por:

$$\bar{b} = \frac{1}{T}\int_0^T b_i(s)ds > 0, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{6}$$

Acá se prueba que bajo las hipótesis anteriores y el hecho de que para cada entero k, $k > 1$, existe un entero $i_k, i_k < k$ tal que para cualquier j, $j \leq k$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\bar{b}_k a_{i_k j}(t) - \bar{b}_{i_k} a_{kj}(t) < 0, \tag{7}$$

entonces para cualquier solución $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ del sistema (4), se satisface que para cada j, con $j = 2, \dots, n$, $x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ y $x_1(t) - x^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $x^*(t)$ es solución de la ecuación logística:

$$x^{'}(t) = x(t)[b_1(t) - a_{11}(t)x(t)].$$

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se desarrollaran algunos resultados preliminares necesarios para la prueba de nuestro resultado principal.

Definición 1.1. sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada denotaremos por:

$$f^l = \text{ínf}\{f(t) : t \in Dom(f)\} \; y \; f^u = \sup\{f(t) : t \in Dom(f)\}.$$

Definición 1.2. Sea $f(t)$ una función continua T-periódica. Se define el promedio de f como:

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds.$$

Observación 1.1. Si f es una función T-periódica y continua en $\mathbb{R}$, entonces

$$f^l \leq \bar{f} \leq f^u.$$

En efecto, por ser f continua y T-periódica, es acotada esto es, $f^l \leq f(x) \leq f^u$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego integrando desde 0 hasta T y multiplicando por $\dfrac{1}{T}$ nos queda que:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^l dx \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \leq \frac{1}{T}\int_0^T f^u dx,$$

como f^l y f^u son constantes con respecto a x obtenemos $f^l \leq \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)dx \leq f^u$, lo cual es equivalente a $f^l \leq \bar{f} \leq f^u$.

Definición 1.3. Sea $x^*(t)$ una solución de la ecuación logística:

$$x'(t) = x(t)[b(t) - a(t)x(t)],$$

donde $b(t)$ y $a(t)$ son funciones continuas y T-periódicas, se dice que $x^*(t)$ es asintóticamente estable si $\lim\limits_{t\to+\infty}(x(t) - x^*(t)) = 0$ para cualquier solución $x(t)$ de la ecuación logística.

Lema 1.1. *Sea $b(t)$ una función continua y T-periódica. Si $\hat{b}(t) = b(t) - \bar{b}$, entonces $\bar{\hat{b}} = 0$, además la función*

$$B(t) = \int_0^t \hat{b}(s)ds,$$

es T-periódica.

Demostración. Por la definición (1.2) se tiene que $\bar{\hat{b}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \hat{b}(s)ds$, y por hipótesis $\hat{b}(t) = b(t) - \bar{b}$, por tanto, $\bar{\hat{b}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T (b(s) - \bar{b})ds$, utilizando la linealidad se obtiene que $\bar{\hat{b}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T b(s)ds - \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \bar{b}ds$.
Ahora, por el hecho de que $\bar{b}$ es una constante y que $\bar{b} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T b(s)ds$ se tiene que:

$$\bar{\hat{b}} = \bar{b} - \bar{b} = 0.$$

Por otro lado, probemos que $B(t)$ es T-periódica. En efecto,

$$B(t+T) = \int_0^{t+T} \hat{b}(s)ds = \int_0^t \hat{b}(s)ds + \int_t^{t+T} \hat{b}(s)ds.$$

Primero estudiemos $\displaystyle\int_t^{t+T} \hat{b}(s)ds$. Sabemos que $\hat{b}(s) = b(s) - \bar{b}$ y por la linealidad se tiene que:

$$\int_t^{t+T} \hat{b}(s)ds = \int_t^{t+T} b(s)ds - \int_t^{t+T} \bar{b}ds.$$

Haciendo el cambio de variable $s = u - t$ se obtiene:

$$\int_t^{t+T} \hat{b}(s)ds = \int_0^T b(u-t)du - \bar{b}\int_t^{t+T} ds = T\bar{b} - T\bar{b} = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} B(t+T) &= \int_0^t \hat{b}(s)ds + \int_t^{t+T} \hat{b}(s)ds \\ &= \int_0^t \hat{b}(s)ds = B(t). \end{aligned}$$

Por tanto, $B(t)$ es T periódica. ■

Lema 1.2. *Si* $P(t) = e^{B(t)}$ *y* $B(t) = \displaystyle\int_0^t \hat{b}(s)ds$ *entonces,* $P(t)$ *es T-periódica y* $P'(t) = \hat{b}(t)P(t)$.

Demostración. Probemos que $P(t)$ es T-periódica, por lema (1.1) tenemos que $B(t)$ es T-periódica. Así,

$$P(t+T) = e^{B(t+T)} = e^{B(t)} = P(t).$$

Con esto queda demostrado que $P(t)$ es T-periódica.
Ahora mostremos que $P'(t) = \hat{b}(t)P(t)$.
En efecto, derivando la función $P(t)$, se obtiene que $P'(t) = B'(t)e^{B(t)}$.
Por hipótesis se tiene que $B(t) = \displaystyle\int_0^t \hat{b}(s)ds$ y por el teorema fundamental del cálculo se cumple que $B'(t) = \hat{b}(t)$. Y en consecuencia tenemos que:

$$P'(t) = \hat{b}(t)P(t). \tag{1.1}$$

■

Lema 1.3. *Sea* $x(t)$ *solución de la ecuación logística* $x'(t) = x(t)\,[b(t) - a(t)x(t)]$ *donde las funciones* $a(t)$ *y* $b(t)$ *son continuas, T-periódicas y positivas, con* $x(0) > 0$, *entonces* $x(t) > 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $x'(t) = x(t)\,[b(t) - a(t)x(t)] = x(t)Q(t)$, donde

$$Q(t) = b(t) - a(t)x(t),$$

de acá tenemos que $x'(t) - x(t)Q(t) = 0$, multiplicando en ambos lados por el factor integrante $e^{-\int_o^t Q(s)ds}$, obtenemos que $e^{-\int_o^t Q(s)ds}x'(t) - e^{-\int_o^t Q(s)ds}x(t)Q(t) = 0$, donde el primer miembro es $\dfrac{d}{dt}\left\{e^{-\int_o^t Q(s)ds}x(t)\right\}$. Así nos queda que $\dfrac{d}{dt}\left\{e^{-\int_o^t Q(s)ds}x(t)\right\} = 0$. Luego, integrando desde 0 hasta t se tiene la siguiente ecuación $e^{-\int_o^t Q(s)ds}x(t) - x(0) = 0$, de donde obtenemos $x(t) = x(0)e^{\int_0^t Q(s)ds}$, debido a que $e^t > 0$ para todo t y el hecho de que $x(0) > 0$, se tiene que $x(t) > 0$. ∎

Lema 1.4. *Si $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ es solución de la ecuación diferencial n dimensional $x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right)$ y $\hat{b}_i(t) = b_i(t) - \bar{b}$, entonces $y(t) = col(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ con $y_i(t) = \dfrac{x_i(t)}{P_i(t)}$ y $P_i(t)$ está dado como en el lema* (1.2) *es solución de*

$$y_i'(t) = y_i(t)\left[\bar{b}_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)P_j(t)y_j(t)\right]. \tag{1.2}$$

Demostración. Sea $x(t)$ solución de $x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right)$. Haciendo el cambio de variable $x_i(t) = P_i(t)y_i(t)$, en la ecuación diferencial:

$$x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right),$$

obtenemos:

$$(P_i(t)y_i(t))' = P_i(t)y_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)P_j(t)y_j(t)\right],$$

utilizando la derivada del producto y el hecho de que $P'(t) = \hat{b}(t)P(t)$, se tiene que:

$$P_i(t)y_i'(t) = P_i(t)y_i(t)\left[b_i(t) - \hat{b}_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)P_j(t)y_j(t)\right].$$

Como por hipótesis $\bar{b}_i = b_i(t) - \hat{b}_i(t)$, obtenemos:

$$y_i'(t) = y_i(t)\left[\bar{b}_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)P_j(t)y_j(t)\right].$$

En consecuencia, $y_i(t) = \dfrac{x_i(t)}{P_i(t)}$ es solución de (1.2). ∎

Lema 1.5. *Sea $y(t) = col(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ una solución de la ecuación diferencial n-dimensional (1.2), y $M_i > \text{máx}\left\{ \max_{t\in\mathbb{R}} \left(\frac{\bar{b}_i}{a_{ii}(t)P_i(t)} \right), y_i(t_0) \right\}$, $1 \leq i \leq n$. Se cumple que para t cercanos a t_0, con $t > t_0$, $y_i(t) < M_i$ para $i = 1, \ldots, n$; con $y_i(t_0) < M_i$.*

Demostración. En efecto, supongamos por absurdo que no se cumple para $t > t_0$, es decir, existe un entero k y un número t_1, $t_1 > t_0$ tal que $y_i(t) < M_i$, para $t_0 \leq t < t_1$ y $y_k(t_1) = M_k$. Por un lado, por la definición de derivada por la izquierda se cumple que:

$$D^- y_k(t_1) = \lim_{t\to t_1^-} \frac{y_k(t) - y_k(t_1)}{t - t_1},$$

y como por hipótesis tenemos que $y_k(t_1) = M_k$, se tiene que:

$$D^- y_k(t_1) = \lim_{t\to t_1^-} \frac{y_k(t) - M_k}{t - t_1}.$$

Por ser $y_k(t) < M_k$ para todo $t \in [t_0, t)$, obtenemos que $y_k(t) - M_k < 0$. Además, como $t \to t_1^-$ se garantiza que $t < t_1$, esto es $t - t_1 < 0$. Por lo que se obtiene que $y_k'(t_1) \geq 0$. Por otro lado, de la ecuación diferencial se obtiene que:

$$y_k'(t_1) = y_k(t_1) \left[\bar{b}_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t_1)P_j(t_1)y_j(t_1) \right],$$

y como $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t_1)P_j(t_1)y_j(t_1) \geq a_{kk}(t_1)P_k(t_1)y_k(t_1)$ se cumple:

$$y_k'(t_1) \leq y_k(t_1) \left[\bar{b}_k - a_{kk}(t_1)P_k(t_1)y_k(t_1) \right].$$

Luego, sustituyendo $y_k(t_1) = M_k$ en la ecuación anterior, se obtiene:

$$y_k'(t_1) \leq M_k \left[\bar{b}_k - a_{kk}(t_1)P_k(t_1)M_k \right].$$

Sacando factor común $a_{kk}(t_1)P_k(t_1)$, nos queda:

$$y_k'(t_1) = M_k a_{kk}(t_1)p_k(t_1) \left[\frac{\bar{b}_k}{a_{kk}(t_1)P_k(t_1)} - M_k \right].$$

Ahora, $M_k > \frac{\bar{b}_k}{a_{kk}(t_1)P_k(t_1)}$, por lo que $\frac{\bar{b}_k}{a_{kk}(t_1)P_k(t_1)} - M_k < 0$. Así tenemos que $y_k'(t_1) < 0$, lo cual es una contradicción.
Así, para $1 \leq i \leq n$ y $t \geq t_0$, $y_i(t) < M_i$. ■

Lema 1.6. *Si* $x(t) = Col(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ *es solución del sistema n-dimensional (4) con* $x_i(t) > 0$ *para* $i = 1, \cdots, n$, *y* $\hat{b}(t) = b_i(t) - \bar{b}$, *entonces existen* δ *y* Δ *constantes positivas tal que* $\delta \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \Delta$ *para todo* $t \geq t_0$ *y algún* $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sean $P_i(t) = e^{B_i(t)}$ con $i = 1, \ldots, n$; y $B_i(t) = \int_0^t \hat{b}_i(s)ds$. Haciendo $x_i(t) = P_i(t)y_i(t)$ para $1 \leq i \leq n$, donde $y_i(t)$ son las componentes de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial (1.2). Por la derivada del producto se tiene que:

$$x_i'(t) = P_i'(t)y_i(t) + P_i(t)y_i'(t).$$

Además del lema (1.2) tenemos que $P_i'(t) = \hat{b}_i(t)P_i(t)$, sustituyendo esta ecuación en la anterior se concluye que $x_i'(t) = [\hat{b}_i(t)P_i(t)]y_i(t) + P_i(t)y_i'(t)$. Esto implica que:

$$y_i'(t) = \frac{x_i'(t)}{P_i(t)} - \hat{b}_i(t)y_i(t),$$

sustituyendo la ecuación diferencial $x_i'(t) = x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right]$, obtenemos:

$$y_i'(t) = \frac{x_i(t)}{P_i(t)}\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right] - \hat{b}_i(t)y_i(t), \tag{1.3}$$

como se tiene que $x_i(t) = P_i(t)y_i(t)$, se cumple que $y_i(t) = \dfrac{x_i(t)}{P_i(t)}$, en consecuencia la ecuación (1.3) nos queda como sigue:

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= y_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)P_j(t)y_j(t)\right] - \hat{b}_i(t)y_i(t) \\ &= y_i(t)\left[b_i(t) - \hat{b}_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)P_j(t)y_j(t)\right]. \end{aligned}$$

Por hipótesis se tiene que $\bar{b_i} = b_i(t) - \hat{b_i}(t)$, por lo que:

$$y_i'(t) = y_i\left[\bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)P_j(t)y_j(t)\right],$$

y por el lema (1.5) se cumple que para $1 \leq i \leq n$, y $t \geq t_0$, $y_i(t) < M_i$. Considerando $\beta > \text{máx}\{P_1^u, \ldots, P_n^u\}$ y $t \geq t_0$ tenemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t)y_i(t)$. Y como $y_i(t) < M_i$ obtenemos la siguiente desigualdad: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} P_i(t)M_i$. Por ser $P_i(t) \leq P_i^u$ se cumple que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} P_i^u(t)M_i$. Ahora como $\beta > \text{máx}\{P_1^u, \ldots, P_n^u\}$ tenemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \beta\sum_{i=1}^{n} M_i$. Haciendo $\Delta = \beta\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i$ nos queda:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \Delta. \tag{1.4}$$

Por otro lado, considerando $\delta_1 < \text{mín}\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i(t_0), \frac{\bar{b}_1}{2\beta\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^u}, \ldots, \frac{\bar{b}_1}{2\beta\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^u}\right\}$.

Demostremos que $\delta_1 < \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i(t)$ para todo $t \geq t_0$.

En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe un número t_1, $t_1 > t_0$ tal que $\delta_1 < \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i(t)$, para $t_0 \leq t < t_1$ y $\delta_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i(t_1)$. Por la derivada lateral por la izquierda, se prueba fácilmente que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y'(t_1) \leq 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. De la definición de la ecuación diferencial se obtiene:

$$y_i'(t_1) = y_i(t_1)\left[\bar{b_i} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t_1)P(t_1)y_j(t_1)\right],$$

como $a_{ij}(t) \leq a_{ij}^u$, $P_j(t) \leq P_j^u$ y $\delta_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i(t_1)$ se tiene que:

$$y_i'(t_1) \geq y_i(t_1)\left[\bar{b_i} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^u P_j^u \delta_1\right].$$

Debido a que $\text{máx}\{P_1^u, \ldots, P_n^u\} < \beta$ obtenemos $y_i'(t_1) \geq y_i(t_1)\left[\bar{b_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta a_{ij}^u \delta_1\right]$. Y sacando factor común $\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}$, nos queda $y_i'(t_1) \geq y_i(t_1)\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}\left(\dfrac{\bar{b_i}}{\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}} - \delta_1\right)$.

Sabemos que $\delta_1 \leq \dfrac{\bar{b_i}}{2\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}}$, por lo que se cumple que:

$$
\begin{aligned}
y_i'(t_1) &\geq y_i(t_1)\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}\left(\frac{\bar{b_i}}{\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}} - \frac{\bar{b_i}}{2\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}}\right) \\
&= y_i(t_1)\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}\left(\frac{\bar{b_i}}{2\beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u}}\right) \\
&= \frac{y_i(t_1)\bar{b_i}}{2} > 0.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, se obtiene una contradicción. Por lo tanto, para todo $t \geq t_0$

$$\delta_1 < \sum_{i=1}^{n} y_i(t). \tag{1.5}$$

Como $x_i(t) = P_i(t)y_i(t)$ para $1 \leq i \leq n$, y $P_i(t) \geq P_i^l$ se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^l y_i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t).$$

Tomemos $0 < \alpha < \text{mín}\{P_i^l, \ldots, P_n^l\}$ por lo que obtenemos:

$$\alpha\sum_{i=1}^{n} y_i(t) = \sum_{i=1}^{n}\alpha y_i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t).$$

Por la desigualdad (1.5) se tiene que $\alpha\delta_1 < \sum_{i=1}^{n}\alpha y_i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$. Tomando $\delta = \alpha\delta_1$, se cumple que:

$$\delta \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t). \tag{1.6}$$

De las desigualdades (1.4) y (1.6), se concluye:

$$\delta \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \Delta \; para \; todo \; t \geq t_0.$$

$\blacksquare$

Lema 1.7. *Existe una única solución $z^*(t)$ de la ecuación diferencial*

$$z'(t) + \bar{b}z(t) = a(t)P(t), \tag{1.7}$$

con la propiedad $\dfrac{(aP)^l}{\bar{b}} \leq z^*(t) \leq \dfrac{(aP)^u}{\bar{b}}$, para todo t en $\mathbb{R}$. Además, si $z(t)$ es cualquier solución de (1.7) con $z(t_0) = z_0 \neq z_0^* = z^*(t_0)$, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} (z(t) - z^*(t)) = 0.$$

Demostración. Hagamos el cambio de variable $t = s$ en la ecuación (1.7). Multiplicando por el factor integrante $e^{\int_{t_0}^{s} \bar{b}d\sigma}$ obtenemos que:

$$z'(s)e^{\int_{t_0}^{s} \bar{b}d\sigma} + \bar{b}z(s)e^{\int_{t_0}^{s} \bar{b}d\sigma} = a(s)P(s)e^{\int_{t_0}^{s} \bar{b}d\sigma},$$

donde el primer miembro es la derivada de $z(s)e^{\int_{t_0}^{s} \bar{b}d\sigma}$, por lo que queda:

$$\frac{d}{ds}\left\{z(s)e^{\int_{t_0}^{s} \bar{b}d\sigma}\right\} = a(s)P(s)e^{\int_{t_0}^{s} \bar{b}d\sigma}.$$

Integrando esta ecuación desde t_0 hasta t obtenemos:

$$z(t)e^{\int_{t_0}^{t} \bar{b}d\sigma} - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left(a(s)P(s)e^{\int_{t_0}^{s} \bar{b}d\sigma}\right) ds.$$

Despejando a $z(t)$ nos queda $z(t) = z(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} \bar{b}d\sigma} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(a(s)P(s)e^{-\int_{s}^{t} \bar{b}d\sigma}\right)$.
Por otro lado, analicemos la expresión:

$$\int_{-\infty}^{t} \left(a(s)P(s)e^{-\int_{s}^{t} \bar{b}d\sigma}\right) ds. \tag{1.8}$$

Sabemos que para cualquier $s \in \mathbb{R}$ tenemos que $a(t)$ es T-periódica y continua, así $a(t)$ es acotada es decir, $a^l \leq a(s) \leq a^u$. Como $P(t) = e^{\int_0^t \hat{b}(s)ds}$, esta integral es T-periódica y continua, por lo que podemos concluir que $e^{\int_0^t \hat{b}(s)ds}$ es acotada. Luego el producto de funciones continuas y acotadas es acotada por lo que $a(s)P(s)$ es acotada. Así se cumple que:

$$(ap)^l \leq a(s)P(s) \leq (ap)^u.$$

Ahora multiplicando por $e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma}$ todos los lados de la desigualdad anterior, se obtiene:

$$(aP)^l e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma} \leq a(s)P(s)e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma} \leq (ap)^u e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma}.$$

Por ser $\bar{b}$ contante con respecto a σ tenemos que $-\displaystyle\int_s^t \bar{b}d\sigma = \bar{b}(t-s)$. Así sustituyendo tenemos:

$$(aP)^l e^{-\bar{b}(t-s)} \leq a(s)P(s)e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma} \leq (aP)^u e^{-\bar{b}(t-s)},$$

integrando desde $-\infty$ hasta t se tiene:

$$(ap)^l \int_{-\infty}^t e^{-\bar{b}(t-s)}ds \leq \int_{-\infty}^t \left(a(s)P(s)e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma}\right)ds \leq (aP)^u \int_{-\infty}^t e^{-\bar{b}(t-s)}ds.$$

Ahora estudiemos $\displaystyle\int_{-\infty}^t e^{-\bar{b}(t-s)}ds.$

Sabemos que la integral impropia está definida por:

$$\int_{-\infty}^t e^{-b(t-s)}ds = \lim_{a\to-\infty}\int_a^t e^{-b(t-s)}ds.$$

Haciendo $v = -\bar{b}(t-s)$, resolviendo la integral indefinida $\displaystyle\int e^{-b(t-s)}ds$. Obtenemos que $\displaystyle\int e^{-\bar{b}(t-s)}ds = \frac{e^v}{\bar{b}}$, devolviendo el cambio nos queda que $\displaystyle\int e^{-\bar{b}(t-s)}ds = \frac{e^{-b(t-s)}}{\bar{b}}$. Con esto tenemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^t e^{-\bar{b}(t-s)}ds = \lim_{a\to-\infty}\frac{e^{-\bar{b}(t-t)}}{\bar{b}} - \lim_{a\to\infty}\frac{e^{-\bar{b}(t-a)}}{\bar{b}}$.

Como $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{e^{-\bar{b}(t-a)}}{\bar{b}} = 0$, entonces obtenemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^t e^{-\bar{b}(t-s)}ds = \frac{1}{\bar{b}}$. y de esta manera:

$$\frac{(aP)^l}{\bar{b}} \leq \int_{-\infty}^t \left(a(s)P(s)e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma}\right)ds \leq \frac{(aP)^u}{\bar{b}}.$$

Por lo que la expresión (1.8) está acotada inferiormente por $\dfrac{(aP)^l}{\bar{b}}$ y superiormente por $\dfrac{(aP)^u}{\bar{b}}$.

Definamos $z^*(t)$ como sigue:

$$z^*(t) = \int_{-\infty}^t \left(a(s)P(s)e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma}\right)ds.$$

Si en la expresión que define a $z(t)$ sumamos y restamos la función $z^*(t)$ obtenemos que $z(t) = z_0 e^{-\bar{b}(t-t_0)} + z^*(t) - \displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} \left(a(s)P(s)e^{-\int_s^t \bar{b}d\sigma} \right) ds$, sacando $e^{\int_s^t e^{\bar{b}} d\sigma}$ en la integral se tiene que $z(t) = z_0 e^{-\bar{b}(t-t_0)} + z^*(t) - e^{-\int_{t_0}^t \bar{b}d\sigma} \displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} \left(a(s)P(s)e^{-\int_s^{t_0} \bar{b}d\sigma} \right) ds.$
Como $z^*(t_0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} \left(a(t)P(t)e^{-\int_s^{t_0} \bar{b}d\sigma} \right) ds$, se sigue que:

$$z(t) = z_0 e^{-\bar{b}(t-t_0)} + z^*(t) - e^{-\bar{b}(t-t_0)} z_0^*,$$

agrupando las funciones exponenciales se tiene que $z(t) = (z_0 - z_0^*)e^{-\bar{b}(t-t_0)} + z^*(t)$. Más aún, la ecuación se puede expresar como:

$$z^*(t) = z(t) + (z_0^* - z_0)e^{-\bar{b}(t-t_0)}. \tag{1.9}$$

Donde $z(t)$ es solución de la ecuación no homogénea (1.7). Veamos que:

$$z_H = (z_0^* - z_0)e^{-\bar{b}(t-t_0)},$$

es solución de la homogénea asociada a (1.7).
En efecto, derivando $z_H(t) = (z_0^* - z_0)e^{-\bar{b}(t-t_0)}$ con respecto a t nos queda:

$$z_H'(t) = -\bar{b}(z_0^* - z_0)e^{-\bar{b}(t-t_0)}.$$

Así sustituyendo en la ecuación homogénea (1.7), tenemos:

$$z_H'(t) + \bar{b}z_H(t) = -\bar{b}(z_0^* - z_0)e^{-\bar{b}(t-t_0)} + \bar{b}(z_0^* - z_0)e^{-\bar{b}(t-t_0)} = 0.$$

En consecuencia, $z_H(t)$ es solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1.7).
Por otro lado, de (1.9) se tiene que $|z(t) - z^*(t)| = |z_0 - z_0^*|e^{-\bar{b}(t-t_0)}$. Por lo tanto,

$$\lim_{t\to+\infty} |z(t) - z^*(t)| = \lim_{t\to+\infty} |z_0 - z_0^*|e^{-\bar{b}(t-t_0)} = 0.$$

Esto es, para todo $\epsilon > 0$ *existe* $T > 0$ *tal que, para todo* $t > T$, $|z(t) - z^*(t)| < \epsilon$, así tomando a ϵ suficientemente pequeño tenemos que $z(t) = z^*(t)$, por tanto $z^*(t)$ es único. ■

Teorema 1.1. *(Alvarez-Lazer) Existe una única solución no trivial, T-periódica positiva $x^*(t)$ de la ecuación logística:*

$$x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t)]. \tag{1.10}$$

Además, si $x(t)$ es cualquier otra solución de (1.10) con $x(0) > 0$, entonces $x(t) - x^*(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$.

Demostración. Ver [4] y [5]. ■

Lema 1.8. *Si los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$ son continuas, T-periódicas con $a(t) > 0$ para todo t y $\hat{b}(t) = b(t) - \bar{b}$, entonces existe una única solución T-periódica $x^*(t)$ de la ecuación logística:*

$$x'(t) = x(t)[b(t) - a(t)x(t)] \tag{1.11}$$

tal que $\dfrac{\bar{b}P^l}{(aP)^u} \leq x^*(t) \leq \dfrac{\bar{b}P^u}{(aP)^l}$ en $(-\infty, +\infty)$, donde $P(t)$ está definido como en el lema (1.2)*. Además, si $x(t)$ es una solución de (1.11) con $x(0) > 0$, entonces $x(t) - x^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.*

Demostración. Sea $x(t)$ solución de la ecuación logística (1.11). Por el teorema (1.1) se garantiza que existe una única solución $x^*(t)$ T-periódica y positiva. Trabajando como en la prueba del lema (1.4). Se tiene que $y(t) = \dfrac{x(t)}{P(t)}$ es solución de la ecuación

$$y'(t) = y(t)[\bar{b} - a(t)P(t)y(t)]. \tag{1.12}$$

Más aún $y(t) > 0$, debido a que $x(t) > 0$ pues lo garantiza el lema (1.3) y además $P(t)$ es positiva por como está dada.
Haciendo $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$, la cual está bien definida por ser $y(t) > 0$. Derivando $z(t)$ se obtiene que $z'(t) = \dfrac{-y'(t)}{(y(t))^2}$, despejando de esta última ecuación a $y'(t)$ e igualando con la ecuación (1.12), se obtiene:

$$z'(t) + \bar{b}z(t) = a(t)P(t) \tag{1.13}$$

Por el lema (1.7) existe una única solución $z^*(t)$ de (1.13) tal que

$$\frac{(aP)^l}{\bar{b}} \leq z^*(t) \leq \frac{(aP)^u}{\bar{b}} \text{ y } \lim_{t\to\infty}(z(t) - z^*(t)) = 0.$$

Devolviendo el cambio $z^*(t) = \dfrac{1}{y^*(t)}$, nos queda $\dfrac{(aP)^l}{\bar{b}} \leq \dfrac{1}{y^*(t)} \leq \dfrac{(aP)^u}{\bar{b}}$ la cual es equivalente a:

$$\frac{\bar{b}}{(aP)^u} \leq y^*(t) \leq \frac{\bar{b}}{(aP)^l}, \tag{1.14}$$

pero $y^*(t) = \dfrac{x^*(t)}{P(t)}$, por lo que la desigualdad (1.14) nos queda $\dfrac{\bar{b}P(t)}{(aP)^u} \leq x^*(t) \leq \dfrac{\bar{b}P(t)}{(aP)^l}$.
Como $P(t)$ es acotada, superior e inferiormente, se cumple que $\dfrac{\bar{b}P^l}{(aP)^u} \leq x^*(t) \leq \dfrac{\bar{b}P^u}{(aP)^l}$.
Nuevamente por teorema (1.1) se cumple que $x(t) - x^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. ■

Lema 1.9. *Sea $g(t)$ una función diferenciable en $[0, +\infty)$. Si existe un número positivo M tal que $|g'(t)| \leq M$ para todo $t \geq 0$ y*

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|dt < +\infty,$$

entonces $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$.

Demostración. ver [8]. ■

CAPÍTULO 2

EXTINCIÓN DE UN SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

En este capítulo estudiaremos la extinción de especies T-periódicas en el sistema competitivo no autónomo de Lotka-Volterra

$$x_i'(t) = x_i(t)\left(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right), \qquad i = 1, \cdots, n; \tag{2.1}$$

donde las funciones $a_{ij}(t)$ y $b_i(t)$ son continuas, T-periódicas, $a_{ii}(t) > 0$ para $i = 1, \cdots, n.$ y $a_{ij}(t) \geq 0$ para $i \neq j$, $t \in \mathbb{R}$. Además el promedio de las funciones b_i viene dado por:

$$\bar{b} = \frac{1}{T}\int_0^T b_i(s)ds > 0, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{2.2}$$

Y para cada entero k, $k > 1$, existe un entero $i_k, i_k < k$ tal que para cualquier j, $j \leq k$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\bar{b}_k a_{i_k j}(t) - \bar{b}_{i_k} a_{kj}(t) < 0. \tag{2.3}$$

Teorema 2.1. *Si se satisfacen las ecuaciones (2.2), (2.3) y* $\hat{b}_i(t) = b_i(t) - \bar{b}_i$, *entonces para cualquier solución* $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *del sistema (2.1) se cumple que* $x_i(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$ *para* $i = 2, \ldots, n.$ *, mientras que* $x_1(t) - x^*(t) \to 0$*, donde* $x^*(t)$ *es una solución T-periódica de la ecuación logística:*

$$x^{'}(t) = x(t)[b_1(t) - a_{11}(t)x(t)]. \tag{2.4}$$

Demostración. En primer lugar, probemos que $x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$ para $i = 2, \ldots, n$. Procedamos por inducción. En efecto; sustituyendo $\hat{b}_i(t) = b_i(t) - \bar{b_i}$ en el sistema (2.1) obtenemos que:

$$x_i^{'}(t) = x_i(t)\Big(\bar{b}_i + \hat{b}_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\Big), \ i = 1, \ldots, n.$$

Demostraremos primero que $x_n(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Sea $i = i_n$ dado como en la desigualdad (2.3). Observemos que:

$$\frac{x_n^{'}(t)}{x_n(t)} = \bar{b}_n + \hat{b}_n(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)x_j(t) \ \text{ y } \ \frac{x_i^{'}(t)}{x_i(t)} = \bar{b}_i + \hat{b}_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t).$$

Multiplicando la primera ecuación por $\bar{b}_i$, la segunda por $\bar{b}_n$ y restándolas se obtiene:

$$\frac{x_n^{'}(t)}{x_n(t)}\bar{b_i} - \frac{x_i^{'}(t)}{x_i(t)}\bar{b_n} = \bar{b_n}\bar{b_i} + \hat{b_n}(t)\bar{b_i} - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)x_j(t)\bar{b_i} - \Big[\bar{b_i}\bar{b_n} + \hat{b_i}(t)\bar{b_n} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\bar{b_n}\Big].$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{x_n^{'}(t)}{x_n(t)}\bar{b_i} - \frac{x_i^{'}(t)}{x_i(t)}\bar{b_n} = \hat{b_n}(t)\bar{b_i} - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)x_j(t)\bar{b_i} - \hat{b_i}(t)\bar{b_n} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\bar{b_n}. \qquad (2.5)$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)}\right)\right] = \frac{\bar{b_i}x_n^{'}(t)}{x_n(t)} - \frac{\bar{b_n}x_i^{'}(t)}{x_i(t)};$$

sustituyendo esta última ecuación en (2.5), tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)}\right)\right] = \hat{b_n}(t)\bar{b_i} - \hat{b_i}(t)\bar{b_n} + \sum_{j=1}^{n} \big(a_{ij}(t)\bar{b_n} - a_{nj}(t)\bar{b_i}\big)x_j(t).$$

Por la desigualdad (2.3) se tiene que $\bar{b_n}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{nj}(t)$ es negativo, entonces

$$\bar{b_n}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{nj}(t) < -\alpha_j < 0 \ \ j = 1, \ldots, n;$$

para algún número positivo α_j. Sea $\alpha = \text{mín}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Así,

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)}\right)\right] \leq \hat{b_n}(t)\bar{b_i} - \hat{b_i}(t)\bar{b_n} - \sum_{j=1}^{n} \alpha x_j(t).$$

Como $B_n(t) = \displaystyle\int_0^t \hat{b_n}(s)ds$, por teorema fundamental del cálculo, se cumple $B_n^{'}(t) = \hat{b_n}(t)$ y además por lema (1.6) tenemos que $\delta \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_i(t)$.

En consecuencia, $-\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_i(t) \leq -\delta$. Así,

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)}\right)\right] \leq \bar{b_i}B_n^{'}(t) - \bar{b_n}B_i^{'}(t) - \alpha\delta,$$

integrando esta última desigualdad desde t_0 hasta t obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(s)}{x_i^{\bar{b_n}}(s)}\right)\right)ds \leq \int_{t_0}^{t}\left(\bar{b_i}B_n^{'}(s) - \bar{b_n}B_i^{'}(s) - \alpha\delta\right)ds.$$

Por la linealidad de las integrales y teorema fundamental del cálculo tenemos que:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)}\right) - \ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t_0)}{x_i^{\bar{b_n}}(t_0)}\right) &\leq \int_{t_0}^{t}\bar{b_i}B_n^{'}(s)ds - \int_{t_0}^{t}\bar{b_n}B_i^{'}(s)ds - \int_{t_0}^{t}\alpha\delta ds,\\ &\leq \bar{b_i}B_n(t) - \bar{b_i}B_n(t_0) - \bar{b_n}B_i(t) + \bar{b_n}B_i(t_0) - \alpha\delta(t-t_0).\end{aligned}$$

Esta desigualdad es equivalente a:

$$\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)}\right) \leq \bar{b_i}B_n(t) - \bar{b_i}B_n(t_0) - \bar{b_n}B_i(t) + \bar{b_n}B_i(t_0) - \alpha\delta(t-t_0) + \ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t_0)}{x_i^{\bar{b_n}}(t_0)}\right).$$

Por ser $B_n(t) \leq B_n^u$ y $-B_i(t) \leq -B_i^l$, se tiene que:

$$\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)}\right) \leq \bar{b_i}B_n^u - \bar{b_i}B_n(t_0) - \bar{b_n}B_i^l(t) + \bar{b_n}B_i(t_0) - \alpha\delta(t-t_0) + \ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t_0)}{x_i^{\bar{b_n}}(t_0)}\right).$$

Haciendo $H = \bar{b_i}B_n^u - \bar{b_i}B_n(t_0) - \bar{b_n}B_i^l(t) + \bar{b_n}B_i(t_0) + \ln\left(\dfrac{x_n^{\bar{b_i}}(t_0)}{x_i^{\bar{b_n}}(t_0)}\right)$, nos queda:

$$\ln\left(\frac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)}\right) \leq H - \alpha\delta(t-t_0).$$

Aplicando exponencial tenemos que $\dfrac{x_n^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)} \leq e^H e^{-\alpha\delta(t-t_0)}$, despejando $x_n(t)$ de esta desigualdad obtenemos $x_n(t) \leq x_i^{\frac{\bar{b_n}}{\bar{b_i}}}(t)e^{\frac{H}{\bar{b_i}}}e^{\frac{-\alpha\delta(t-t_0)}{\bar{b_i}}}$.

Por lema (1.6) sabemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \Delta$, lo cual implica que $x_i(t) \leq \Delta$ para todo $i = 1, \ldots, n$, obtenemos que $x_n(t) \leq \Delta^{\frac{\bar{b_n}}{\bar{b_i}}} e^{\frac{H}{\bar{b_i}}} e^{\frac{-\alpha\delta(t-t_0)}{\bar{b_i}}}$. Haciendo $k_n = \Delta^{\frac{\bar{b_n}}{\bar{b_i}}} e^{\frac{H}{\bar{b_i}}}$ nos queda:

$$x_n(t) \leq k_n e^{\frac{-\alpha\delta(t-t_0)}{\bar{b_i}}} = k_n e^{-\delta_n(t-t_0)},$$

donde $\delta_n = \dfrac{\alpha\delta}{\bar{b_i}}$, en consecuencia $x_n(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$.
Ahora suponemos por hipótesis inductiva que, para $r < j \leq n$, $x_j(t) \leq k_j e^{-\delta_j(t-t_0)}$. Probaremos ahora que $x_r(t) \leq k_r e^{-\delta_j(t-t_0)}$. En efecto, sea $i = i_r$ dada como en la desigualdad (2.3) entonces usando el mismo razonamiento tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{x_r^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_r}}(t)} &= \bar{b_i}\hat{b_r}(t) - \bar{b_r}\hat{b_i}(t) + \sum_{j=1}^{n} \big(\bar{b_r}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{rj}(t)\big)x_j(t) \\
&= \bar{b_i}\hat{b_r}(t) - \bar{b_r}\hat{b_i}(t) + \sum_{j=1}^{r} \big(\bar{b_r}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{rj}(t)\big)x_j(t) + \sum_{j=r+1}^{n} \big(\bar{b_r}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{rj}(t)\big)x_j(t) \\
&= \bar{b_i}B_r'(t) - \bar{b_r}B_i'(t) + \sum_{j=1}^{r} \big(\bar{b_r}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{rj}(t)\big)x_j(t) + \sum_{j=r+1}^{n} \big(\bar{b_r}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{rj}(t)\big)x_j(t).
\end{aligned}$$

Para $j = 1, \ldots, r$, se cumple $\bar{b_r}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{rj}(t) < 0$, así $\bar{b_r}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{rj}(t) < -\alpha_j < 0$, donde α_j es un número positivo. Sea $\alpha = \text{mín}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{r} \big(\bar{b_r}a_{ij}(t) - \bar{b_i}a_{rj}(t)\big)x_j(t) < -\alpha \sum_{j=1}^{r} x_j(t).$$

Ahora por lema (1.6), se cumple que $\delta \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$, por tanto

$$\delta \leq \sum_{i=1}^{r} x_i(t) + \sum_{i=r+1}^{n} x_i(t). \tag{2.6}$$

Por la hipótesis inductiva se garantiza $\displaystyle\sum_{i=r+1}^{n} x_i(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$, por lo que se cumple que dado $\delta > 0$, existe $t_1 > 0$ tal que $t > t_1$, implica que:

$$\left| \sum_{i=r+1}^{n} x_i(t) \right| < \frac{\delta}{2}. \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7) se cumple que $\delta \leq \sum_{i=1}^{r} x_i(t) + \frac{\delta}{2}$ lo cual es equivalente a que $\sum_{i=1}^{r} x_i(t) \geq \frac{\delta}{2}$ para todo $t \geq t_1$.

Por tanto, $\sum_{j=1}^{r} \big(\bar{b_r} a_{ij}(t) - \bar{b_i} a_{rj}(t)\big) x_j(t) < -\alpha\frac{\delta}{2}$ para todo $t \geq t_1$. Ahora acotemos $\sum_{j=1+r}^{n} \big(\bar{b_r} a_{ij}(t) - \bar{b_i} a_{rj}(t)\big) x_j(t)$. Observemos que:

$$\sum_{j=r+1}^{n} (\bar{b_r} a_{ij}(t) - \bar{b_i} a_{rj}(t)) x_j(t) \leq \sum_{j=r+1}^{n} (\bar{b_r} a_{ij}^u - \bar{b_i} a_{rj}^l) x_j(t).$$

Ahora tomemos $\mu > 0$ tal que $\mu < \alpha\frac{\delta}{2}$.

Dado que $\sum_{j=r+1}^{n} x_j(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, se tiene que $\sum_{j=r+1}^{n} (\bar{b_r} a_{ij}^u - \bar{b_i} a_{rj}^l) x_j(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, esto es que dado $\mu > 0$, existe un t_2, tal que para $t > t_2$, implica que:

$$\left| \sum_{j=1+r}^{n} x_j(t) \right| < \mu. \tag{2.8}$$

Así,

$$\sum_{j=r+1}^{n} (\bar{b_r} a_{ij}(t) - \bar{b_i} a_{rj}(t)) x_j(t) \leq \sum_{j=r+1}^{n} (\bar{b_r} a_{ij}^u - \bar{b_i} a_{rj}^l) x_j(t) < \mu,$$

por lo tanto, para $t \geq \text{máx}\{t_1, t_2\} = \bar{t}$, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_i}}(t)} \right) \right] \leq \bar{b_i} B_r'(s) - \bar{b_r} B_i'(s) - \left(\frac{\alpha\delta}{2} - \mu \right).$$

Integrando desde $\bar{t}$ hasta t, $t \geq \bar{t}$, obtenemos:

$$\int_{\bar{t}}^{t} \frac{d}{ds}\left[\ln\left(\frac{x_r^{b_i}(t)}{x_i^{\bar{b_r}}(t)} \right) \right] ds \leq \int_{\bar{t}}^{t} \left[\bar{b_i} B_r'(s) - \bar{b_r} B_i'(s) - \left(\frac{\alpha\delta}{2} - \mu \right) \right] ds,$$

utilizando el razonamiento anterior tenemos que:

$$\ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_r}}(t)} \right) - \ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(\bar{t})}{x_i^{\bar{b_r}}(\bar{t})} \right) \leq \bar{b_i} B_r(t) - \bar{b_i} B_r(\bar{t}) - \bar{b_r} B_i(t) + \bar{b_r} B_i(\bar{t}) - \left(\frac{\delta\alpha}{2} - \mu \right)(t - \bar{t}),$$

que es equivalente a:

$$\ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_r}}(t)} \right) \leq \bar{b_i} B_r(t) - \bar{b_i} B_r(\bar{t}) - \bar{b_r} B_i(t) + \bar{b_r} B_i(\bar{t}) - \left(\frac{\delta\alpha}{2} - \mu \right)(t - \bar{t}) - \ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(\bar{t})}{x_i^{\bar{b_r}}(\bar{t})} \right),$$

y debido a que: $B_r(t) \leq B_r^u$ y $B_i(t) \geq B_i^l$, nos queda que

$$\ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_r}}(t)}\right) \leq \bar{b_i}B_r^u - \bar{b_i}B_r(\bar{t}) - \bar{b_r}B_i^l + \bar{b_r}B_i(\bar{t}) - \left(\frac{\delta\alpha}{2} - \mu\right)(t-\bar{t}) - \ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(\bar{t})}{x_i^{\bar{b_r}}(\bar{t})}\right).$$

Haciendo $G = \bar{b_i}B_r^u - \bar{b_i}B_r(\bar{t}) - \bar{b_r}B_i^l + \bar{b_r}B_i(\bar{t}) - \ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(\bar{t})}{x_i^{\bar{b_r}}(\bar{t})}\right)$. Obtenemos:
$\ln\left(\frac{x_r^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_r}}(t)}\right) \leq G - \left(\frac{\delta\alpha}{2} - \mu\right)(t-\bar{t})$. Aplicando exponencial nos queda:

$$\frac{x_r^{\bar{b_i}}(t)}{x_i^{\bar{b_n}}(t)} \leq e^G e^{-(\frac{\delta\alpha}{2}-\mu)(t-\bar{t})},$$

despejando a $x_r(t)$ se tiene que $x_r(t) \leq x_i^{\frac{\bar{b_n}}{\bar{b_i}}}(t) e^{\frac{G}{\bar{b_i}}} e^{-\frac{1}{\bar{b_i}}(\frac{\delta\alpha}{2}-\mu)(t-\bar{t})}$. Por lema(1.6), $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \Delta$, esto es, $x_i(t) \leq \Delta$ para todo i. Así $x_r(t) \leq \Delta^{\frac{\bar{b_n}}{\bar{b_i}}} e^{\frac{G}{\bar{b_i}}} e^{-\frac{1}{\bar{b_i}}(\frac{\delta\alpha}{2}-\mu)(t-\bar{t})}$. Haciendo $K_r = \Delta^{\frac{\bar{b_n}}{\bar{b_i}}} e^{\frac{G}{\bar{b_i}}}$ y $\delta_r = \frac{1}{\bar{b_i}}(\frac{\delta\alpha}{2} - \mu)$, obtenemos $x_r(t) \leq K_r e^{-\delta_r(t-\bar{t})}$. Esto prueba que para $j = 2, \ldots, n,\ x_j(t) \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$.
Ahora mostremos que $x_1(t) - x^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, donde $x^*(t)$ es la única solución no trivial T-periódica de la ecuación (2.4) dada en el lema (1.8).
Consideremos los siguientes casos:
Caso1: Supongamos que $x_1(t) \geq x^*(t)$ para todo $t \geq t_0$. En este caso,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x^*(t)}{x_1(t)}\right)\right] &= \frac{1}{\frac{x^*(t)}{x_1(t)}}\left[\frac{x'^*(t)x_1(t) - x^*(t)x_1'(t)}{(x_1(t))^2}\right] \\
&= \frac{x'^*(t)}{x^*(t)} - \frac{x_1'(t)}{x_1(t)} \\
&= [b_1(t) - a_{11}(t)x(t)] - b_1(t) + a_{11}(t)x_1(t) + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)x_j(t) \\
&= a_{11}(t)(x_1(t) - x^*(t)) + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)x_j(t).
\end{aligned}$$

Como $x_1(t) \geq x^*(t)$ entonces $x_1(t) - x^*(t) \geq 0$. En consecuencia, tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 &\leq a_{11}^l(x_1(t) - x^*(t)) \\
&\leq a_{11}(t)(x_1(t) - x^*(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x^*(t)}{x_1(t)}\right)\right] - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(t)x_j(t) \\
&\leq \frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x^*(t)}{x_1(t)}\right)\right].
\end{aligned}$$

Integrando desde t_0 hasta t, tenemos:

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{t_0}^{t} a_{11}^l(x_1(s) - x^*(s))ds &\leq \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{x^*(s)}{x_1(s)}\right)\right] \\
&= \ln\left(\frac{x^*(t)}{x_1(t)}\right) - \ln\left(\frac{x^*(t_0)}{x_1(t_0)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\frac{x^*(t)}{x_1(t)}}{\frac{x^*(t_0)}{x_1(t_0)}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{x^*(t)x_1(t_0)}{x_1(t)x^*(t_0)}\right).
\end{aligned}$$

Por lema (1.8) tenemos que $\dfrac{\bar{b_1}P_1^l}{(aP)} \leq x^*(t)$ y como $x^*(t) \leq x_1(t) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq \Delta$ para todo $t \geq t_0$, se garantiza que $x^*(t)$ y $x_1(t)$ son acotados superior e inferiormente por constantes positivas. Por tanto, $\ln\left(\frac{x^*(t)x_1(t_0)}{x_1(t)x^*(t_0)}\right) < M$, donde M es una constante positiva. En consecuencia,

$$\int_{t_0}^{t} (x_1(s) - x^*(s))ds < +\infty.$$

Más aún, dado que $x_1(t) - x^*(t)$ es una función diferenciable no negativa tal que $x_1'(t) - x'^*(t)$ es acotado en $[t_0, +\infty)$, entonces por lema (1.9) tenemos que $x_1(t) - x^*(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

Caso 2: Ahora supongamos que existe $t_1 \geq t_0$ tal que $x_1(t_1) < x^*(t_1)$.

Afirmación 2.1. $x_1(t) \leq x^*(t), \ \forall t \geq t_1$.

En efecto, para cada entero positivo n, sea $y_n(t)$ la solución del problema:

$$x'(t) = x(t)(b_1(t) - a_{11}(t)x(t)) + \frac{1}{n}; \qquad x(t_1) = x^*(t_1).$$

Claramente $y_n(t) \to x^*(t)$, cuando $n \to +\infty$.
Ahora dado que $x_1(t_1) < x^*(t_1) = y_n(t_1)$ probemos que $x_1(t) < y_n(t)$ para t cercano a t_1 y $t \geq t_1$. Supongamos por absurdo que no se cumple.
Entonces existe un entero k y un número $t_2 > t_1$ tal que $x_1(t) < y_k(t)$ para $t_1 \leq t \leq t_2$ y $x_1(t_2) = y_k(t_2)$.
Por un lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1'(t_2) - y_k'(t_2) &= x_1(t_2)\left(b_1(t_2) - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t_2)x_j(t_2)\right) - y_k(t_2)\left(b_1(t_2) - a_{11}(t_2)y_k(t_2)\right) + \frac{1}{k} \\ &= -x_1(t_2)\sum_{j=2}^{n} a_{ij}(t_2)x_j(t_2) - \frac{1}{n} < 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, por definición de derivada por la izquierda tenemos:

$$\begin{aligned} D^-(x_1(t_2) - y_k(t_2)) &= \lim_{t \to t_2^-} \frac{(x_1(t) - y_k(t)) - (x_1(t_2) - y_k(t_2))}{t - t_2} \\ &= \lim_{t \to t_2^-} \frac{x_1(t) - y_k(t)}{t - t_2}. \end{aligned}$$

Como $t \to t_2^-$, $t - t_2 < 0$ y además $x_1(t) - y_k(t) < 0$.
Por tanto, $D^-(x_1(t_2) - y_k(t_2)) = \lim_{t \to t_2^-} \dfrac{x_1(t) - y_k(t)}{t - t_2} > 0$. Lo cual es una contradicción.
Por tanto, para todo n y $t \geq t_1$ se tiene que $x_1(t) < y_n(t)$.
Ahora por la continuidad de las soluciones con respecto a los parámetros y tomando límite tenemos que $x_1(t) \leq x^*(t)$ para todo $t \geq t_1$.
Así usando el mismo argumento del caso 1 obtenemos:

$$0 \leq a_{11}^l \int_{t_1}^{t} (x^*(s) - x_1(s))ds \leq \ln\left(\frac{x_1(t)x{*}(t_1)}{x^*(t)x_1(t_1)}\right) - \sum_{j=2}^{n} a_{ij}^u \int_{t_1}^{t} x_j(s)ds \leq \ln\left(\frac{x_1(t)x{*}(t_1)}{x^*(t)x_1(t_1)}\right) < +\infty$$

En consecuencia,

$$\int_{t_1}^{\infty} (x^*(s) - x_1(s))ds < +\infty.$$

Así, nuevamente po lema (1.9) se tiene que $x^*(t) - x_1(t) \to 0$, cuando $t \to +\infty$. ∎

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] S.Ahmad and F. Montes de Oca. Extinction in Nonautonomous T-periodic Competitive Lotka-Volterra System. *Amer. Math. Month.*, (1998) 155–166

[2] F. Montes de Oca and M.L. Zeeman. Extinction in nonautonomous competitive Lotka-Volterra system. *Proc. Amer. Math. Soc* , (1996) 124:3677–3687.

[3] J. Hale and H. Kosak. Dynamics and Bifucations. *Springer-Verlang, New York*, (1991).

[4] C.Alvarez and A. Lazer. An Application of Topological Degrre to the Periodic Competing Species Problem. *Austral. Math. Soc. Serie B28* (1986) 202-219.

[5] F. Montes de Oca. Dinámica Poblacional de una Especie. II Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado.(1996)

[6] S. Ahmad. On the nonautonomous Volterra-Lotka competition equations.*Proc. Amer. Math. Soc*, 117; 199-205(1993).

[7] S. Ahmad and A. C. Lazer. One species extinction in an autonomous competition model, in Proceedings of the World Congress on Nonlinear Analysis. *Walter de Gruyter, Berlin-NY* (1996).

[8] Pérez L. Modelos continuos con retardo de una comunidad aislada de una especie. Trabajo de grado. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto (2003). 21p.