UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Teorema de Gauss-Bonnet

Autor: Br. Vianney Barrese
Tutor: Lic. Yves Nogier (UCLA)

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
como requisito final para optar al grado de
Licenciado en Ciencias Matemáticas

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Febrero, 2013.

Agradecimientos

Agradezco...
Primeramente a Dios Padre, por estar siempre a mi lado, guardandome y guiandome con su amor providencial.
A la Santísima Virgen María, bajo la advocación de Nuestra Señora de Coromoto por ser una madre amorosa y compañera fiel. Además por alcanzarme el entendimiento, la fortaleza y perseverancia.
A mis padres José Esteban Barrese Márquez y Zenahir María Tovar Vargas, que me apoyaron siempre de forma incondicional, comprendiendome, dandome su amor y cariño, porque ellos me enseñaron a luchar y a lograr mis metas.
A mi buena madre Karina Uris, quién con su ejemplo, palabras y orientaciones siempre tan oportunas, me ha ayudado a esforzarme, a perseverar y a confiar en Dios.
A mis hermanas y familiares por apoyarme y estimularme a seguir adelante.
A mis hermanas y amigas de la residencia Madre Isabel, por todo lo que hemos compartido..., porque con su ejemplo y cariño desinteresado me han mostrado el valor de la verdadera amistad.
A mi tutor Yves Nogier, por sus buenos consejos, por su gran comprensión y paciencia y por aportarme valiosos conocimientos.
Al profesor Mario Rodriguez, que me orientó y me animó a emprender este trabajo.
A mis compañeros porque siempre estuvieron atentos a las necesidades de los demas y dispuestos a ayudar siempre que fuese necesario.
A todos mis profesores y demás miembros de la UCLA que de alguna u otra manera han contribuido en mi formación profesional y personal.

Resumen

En la demostración del teorema de Gauss-Bonnet, se realizó un estudio detallado de la prueba dada por S.S Chern en el paper *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closet reamannian manifolds* del año 1944 [3]. En este sentido el enfoque de la prueba se basa en el estudio de la geometría diferencial de curvas y superficies usando formas y la técnica del *referencial ortonormal móvil* que permite generalizar el aparato de Frenet a una superficie, sin embargo dicha generalización es posible en al ámbito de la formas diferenciales. De esta manera, se llega a las ecuaciones estructurales de Cartan en las cuales se puede hacer un profundo estudio de la geometría de la superficie. Es importante acotar, que un punto crucial de la prueba es la existencia de la forma de conexión definida en la variedad menos la unión de los puntos singulares, la cual depende del campo vectorial no obstante su diferencial no depende del campo vectorial y es globalmente definida en la variedad. Cabe destacar, que dicho teorema establece una conexión entre la topología y la geometría, puesto que la característica de Euler-Poincaré es un invariante topológico.

ÍNDICE

Introducción

Una de las más interesantes características de la geometría diferencial es la relación entre las propiedades locales y las propiedades que dependen de la superficie entera. Por lo que una de las propiedades más notables en este sentido es el teorema de Gauss-Bonnet que es el objeto de estudio. En su trabajo fundamental (Considerations on curved surfaces, 1827), Gauss probó el caso especial de su teorema para triángulos geodésicos y anticipó su importancia para el desarrollo de la geometría diferencial. El teorema para regiones más generales es debido a O. Bonnet (Jour. Escole Polytech. 19 (1848), 1-146). Con la llegada de la topología, llegó a ser pronto evidente que la formulación global del teorema de Gauss-Bonnet establecía una conexión entre la topología y la geometría. La extensión de ese resultado a dimensiones mayores llegó a ser un problema matemático interesante, después de muchos estudios preliminares una solución satisfactoria fue obtenida en 1944 por S.S Chern. Hecha la observación anterior, se pretende demostrar el teorema de Gauss-Bonnet, basándose en el paper *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closet reamannian manifolds*

Sobre las bases de las consideraciones anteriores, se pretende describir la conformación del estudio cuya estructura viene dada por cuatro capítulos; un primer capítulo titulado preliminares que abarca de manera precisa definiciones y teoremas que involucran variedades diferenciables, otra sección es destinada a las variedades con bordes y en una última sección se introducirá todo lo referente a la partición diferenciable de la unidad sólo en variedades compactas aún cuando se puede definir de forma más general, pues es lo que nos interesa para la demostración del teorema en cuestión.

Seguidamente se encuentra el segundo capítulo el cual es de suma importancia puesto que se plasma de manera detallada la teoría de formas diferenciables junto con sus teoremas y propiedades, además se llega a la generalización de formas en variedades. El tercer capítulo se dedica a la integración de formas en variedades y al teorema de Stokes; herramienta fundamental en la demostración del teorema de Gauss-Bonnet. En el cuarto y último capítulo se define las ecuaciones estructurales y el lema de Cartan de forma general, es decir, en $\mathbb{R}^n$, luego se aplica el método del referencial móvil a un caso particular, se trata de la teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$, que es donde se encuentra inmersa la variedad del teorema de estudio. Y por supuesto se define la curvatura gaussiana. Otra sección está destinada al estudio de la derivada covariante y a la curvatura geodésica. Y en la última sección se dan algunos resultados previos y posteriormente el teorema de Gauss-Bonnet para variedades 2-dimensional sin borde y de forma más general se enuncia y se demuestra el caso en el cual la variedad es con borde.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Para el desarrollo del presente trabajo es necesario proporcionar algunas definiciones y resultados que serán utilizados para la mejor comprensión del mismo, con este objetivo se da inicio a éste primer capítulo que será de gran utilidad para los capítulos posteriores.

1.1. Variedad diferenciable.

Definición 1.1 (Carta) Sea M un conjunto. Una carta n-dimensional sobre M es una aplicación biyectiva $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ cuya imagen $V = \varphi(U)$ es un conjunto abierto del espacio euclídeo.

Definición 1.2 (Parametrización) Sea M un conjunto y $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ una aplicación inyectiva, con U_α abierto en $\mathbb{R}^n$ el par (U_α, f_α) con $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una parametrización (o un sistema de coordenadas) de M en p.

Observación 1.1 *$f_\alpha(U_\alpha)$ es llamada una vecindad coordenada de p.*

Definición 1.3 (Variedad diferenciable.) Una variedad diferenciable n-dimensional es un conjunto M junto con una familia de funciones inyectivas $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de conjuntos abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ en M tales que:

1. $\displaystyle\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$
2. Para cada par α,β, con $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ y $f_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y las funciones $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$, $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ son diferenciables.Ver figura (1.1)
3. La familia $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ es maximal relativa a (1) y (2).

Si una familia (f_α, U_α) satisface la condición (1) y (2) de la definición(1.3) es llamada una estructura diferenciable en M.

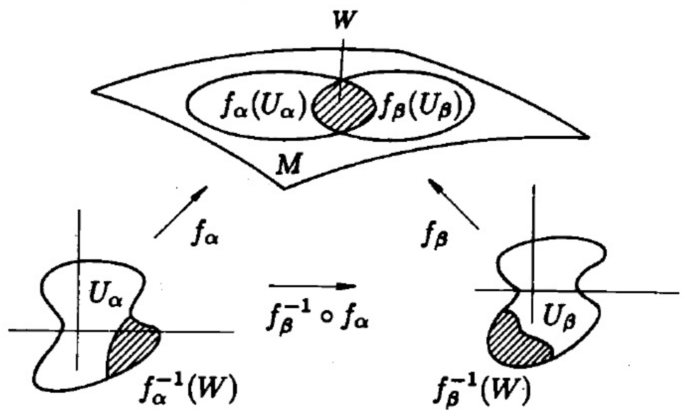

Figura 1.1: Compatibilidad

Ejemplo 1.1. Sea $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p| = 1\}$ llamada esfera unitaria.
Consideremos las aplicaciones $f_i^+ : U_i \to S^2$, $f_i^- : U_i \to S^2$, $i = 1, 2, 3$. Dadas por:
$f_1^+(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$
$f_1^-(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$, con $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = 0, x^2 + y^2 < 1\}$
$f_2^+(y, z) = (\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z)$
$f_2^-(y, z) = (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z)$, con $U_2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2, x = 0, y^2 + z^2 < 1\}$
$f_3^+(x, z) = (x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z)$
$f_3^-(x, z) = (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z)$, con $U_3 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, y = 0, x^2 + z^2 < 1\}$
Así, la familia $\{(U_1, f_1^+), (U_1, f_1^-), (U_2, f_2^+), (U_2, f_2^-), (U_3, f_3^+), (U_3, f_3^-)\}$ cubre a toda la esfera S^2, tal como se muestra en la figura (1.2). Además cumple la condición (2) de la

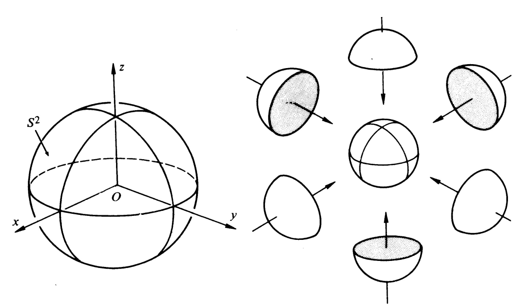

Figura 1.2: Parametrizaciones de la esfera.

definición (1.3).
En efecto. Consideremos
$f_1^+(x,y) = (x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)})$, $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, z = 0, x^2+y^2 < 1\}$
y $f_2^+(y,z) = (\sqrt{1-(y^2+z^2)}, y, z)$, $U_2 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2, x = 0, y^2+z^2 < 1\}$.
Entonces
$f_1^+(U_1) \cap f_2^+(U_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}\}$, ver figura (1.3), y

$$(f_1^+)^{-1}(W) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x > 0, x^2+y^2 < 1\}$$

$$(f_2^+)^{-1}(W) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z > 0, y^2+z^2 < 1\}$$

.
Entonces, $f_2^{-1} \circ f_1 : (f_1^+)^{-1}(W) \to (f_2^+)^{-1}(W)$, dada por

$$\begin{aligned}
(f_2^+)^{-1} \circ f_1^+((f_1^+)^{-1}(W)) &= (f_2^+)^{-1}(f_1^+(f_1^+)^{-1}(W)) \\
&= (f_2^+)^{-1}(W) \\
&= (y, \sqrt{1-y^2})
\end{aligned}$$

.

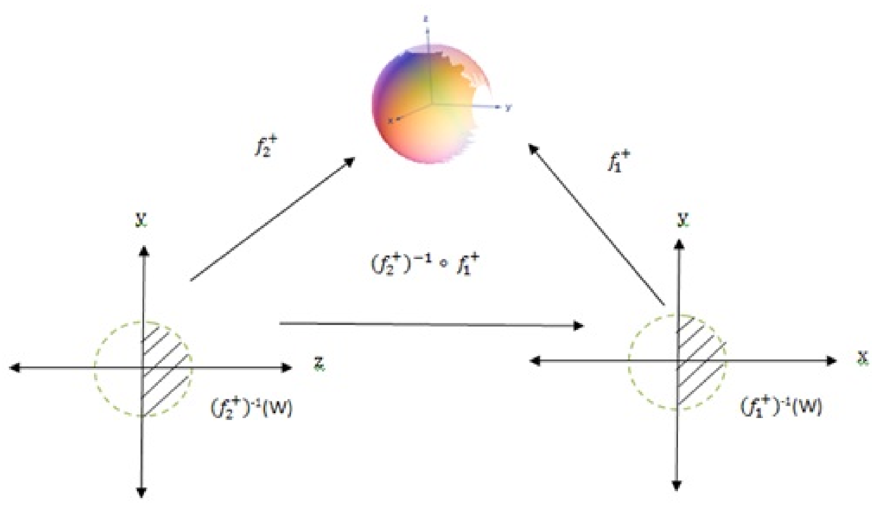

Figura 1.3: Intersección de dos parametrizaciones.

Por lo tanto, el cambio de coordenadas es diferenciable en W, análogamente ocurre con $f_1^{-1} \circ f_2$ y con las otras parametrizaciones.

Definición 1.4 Sean M_1^n, M_2^m variedades diferenciables. Una función $\varphi : M_1 \to M_2$ es diferenciable en un punto $p \in M_1^n$ si dada una parametrización $g : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ alrededor de $\varphi(p)$, existe una parametrización $f : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$, alrededor de p tal que $\varphi(f(U)) \subset g(V)$ y la función $g^{-1} \circ \varphi \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $f^{-1}(p)$. La función φ es diferenciable en un conjunto abierto de M_1 si es diferenciable en todos los puntos de ese conjunto.

Afirmación

La definición 1.4 es independiente de la elección de las parametrizaciones. Es decir dada $g_1 : V_1 \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ alrededor de $\varphi(p)$ existe una parametrización $f_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \to M_1$, alrededor de p tal que $\varphi(f_1(U_1)) \subset g_1(V_1)$ y la función $g_1^{-1} \circ \varphi \circ f_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $f_1^{-1}(p)$ y si damos otra cumple las mismas condiciones.

En efecto, dada $g_2 : V_2 \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ alrededor de $\varphi(p)$ existe una parametrización $f_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^n \to M_1$, alrededor de p tal que $\varphi(f_2(U_2)) \subset g_2(V_2)$. Probemos que $g_2^{-1} \circ \varphi \circ f_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $f_2^{-1}(p)$.

Consideremos

$$\widetilde{\varphi} = g_1^{-1} \circ \varphi \circ f_1 \tag{1.1}$$

y hagamos

$$\overline{\varphi} = g_2^{-1} \circ \varphi \circ f_2 \tag{1.2}$$

Como M_1, M_2 son variedades diferenciables, entonces por la condición (2) de la definición $f_1^{-1} \circ f_2 = h_1 : U_2 \to U_1$ y $g_2^{-1} \circ g_1 = h_2 : V_1 \to V_2$, son diferenciables.

Así

$f_2 = f_1 \circ h_1$ y $g_2^{-1} = h_2 \circ g_1^{-1}$. Por lo tanto sustituyendo en (1.2), nos queda

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} &= (h_2 \circ g_1^{-1}) \circ \varphi \circ (f_1 \circ h_1) \\ &= h_2 \circ (g_1^{-1} \circ \varphi \circ f_1) \circ h_1 \end{aligned}$$

la cual es diferenciable en $f_2^{-1}(p)$, gracias a la regla de la cadena, pues $g_1^{-1} \circ \varphi \circ f_1$ es diferenciable en $f_1^{-1}(p)$ y h_1 y h_2 son diferenciables en U_2 y V_2 respectivamente.

Definición 1.5 Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable en $\mathbb{R}^n$, con $\alpha(0) = p \in \mathbb{R}^n$, y escribamos $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$\alpha'(0) = (x_1'(0), ..., x_n'(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Sea φ una función real en $\mathbb{R}^n$, diferenciable en una vecindad de p. Entonces la derivada de φ a lo largo de v en p está dada por

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}|_{t=0} = (\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i})\varphi.$$

Definición 1.6 (Vector tangente.) Sea $\alpha : I \to M$ una curva diferenciable en una variedad diferenciable M, con $\alpha(0) = p \in M$ y sea D el conjunto de las funciones en M las cuales son diferenciables en p. El vector tangente a la curva α en p es la función $\alpha'(0) : D \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha'(0)\varphi = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0}$, $\varphi \in D$. El conjunto de todos los vectores tangentes en p lo denotaremos por T_pM

Nótese que $(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ es el vector tangente en p en la "curva coordenada".

Lema 1.1 *El conjunto T_pM de vectores tangentes en M en el punto p, es igual a T_f el espacio vectorial generado por $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_0\}$, $i = 1, ..., n$.*

Demostración.
Sea $\alpha'(0)$ el vector tangente a la curva α en p tal que $\alpha : I \to M$ es diferenciable y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ parametrización alrededor de $p = f(0, ..., 0)$ y consideremos la función $\varphi \in D$, entonces la curva $\alpha : I \to M$ y la función $\varphi \in D$ pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ \delta(t) &= (x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \varphi \circ f(q) &= \varphi(x_1, ..., x_n), \qquad\qquad q = (x_1, ..., x_n) \in U \end{aligned}$$

respectivamente. Así

$$\begin{aligned} \alpha'(0)\varphi &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\varphi(x_1(t), ..., x_n(t))|_{t=0} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_0\right)\varphi \end{aligned}$$

Por lo que el vector tangente $\alpha'(0)$ en p puede ser escrito como: $\alpha'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_0\right)$
Por lo tanto, $\alpha'(0) \in T_f$
Reciprocamente, sea $v \in T_f$, entonces $v = \sum_i \lambda_i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_0$. Sea $\alpha : I \to M$ dada en la

parametrización f por $x_i = \lambda_i t$ y sea $\varphi \in D$, entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha'(0)\varphi &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\varphi(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n)|_{t=0}) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_0\Big)\varphi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto
$\alpha'(0) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_0\Big) = v.$
En conclusión

$$T_p M = T_f.$$

■

Definición 1.7 Sea M_1^n y M_2^m variedades diferenciables y sea $\varphi : M_1 \to M_2$ una función diferenciable. Para cada $p \in M_1$, *la diferencial* de φ en p es la función lineal $d\varphi_p : T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2$ la cual asocia a cada $v \in T_p M_1$ el vector $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)} M_2$, definido como sigue: Escogemos una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$, con $\alpha(0) = p$ $\alpha'(0) = v$; entonces $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$

Afirmación.
La definición de $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$, no depende de la elección de la curva α.
En efecto, consideremos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ y sea $\widehat{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$ una curva diferenciable tal que $\widehat{\alpha}(0) = p$, $\widehat{\alpha}'(0) = v$. Como φ es diferenciable, entonces por definición

$$\begin{aligned}
d\varphi_p(v) &= (\varphi \circ \alpha)'(0) \\
&= \frac{d}{dt}\varphi(x_1(t), ..., x_n(t))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\varphi(\widehat{x}_1(t), ..., \widehat{x}_n(t))|_{t=0} \\
&= (\varphi \circ \widehat{\alpha})'(0).
\end{aligned}$$

Definición 1.8 Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables. Una función $\varphi : M_1 \to M_2$ es un *difeomorfismo* si es diferenciable, biyectiva y su inversa φ^{-1} es también diferenciable. La función φ es un *difeomorfismo local* en $p \in M$ si existe una vecindad U de p y V de $\varphi(p)$ tal que $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo.

Corolario 1.1 *Si $f : M_1 \to M_2$ es un difeomorfismo entre variedades y $p \in M_1$, entonces el diferencial $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ es un isomorfismo lineal y $(df_p)^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}$*

Proposición 1.1 (Teorema de la función inversa) *Sea M_1 y M_2 variedades, $p \in M_1$ $f : M_1 \to M_2$ una aplicación diferenciable tal que df_p es un isomorfismo lineal entonces, existe un entorno abierto U de p tal que $f|U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.*

Definición 1.9 (Variedad orientable.) Una *variedad diferenciable M es orientable* si M tiene una estructura diferenciable $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ tal que para cada par α, β con $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, la *diferencial* del cambio de coordenadas $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ tiene determinante positivo. En caso contrario, diremos que M es no orientable.

Ejemplo 1.2. El fibrado tangente de una superficie abstracta M es siempre orientable.
En efecto.
Sea $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$ i.e, TM es el conjunto de todos los vectores tangentes a M. Introducimos en TM una estructura diferenciable (de dimensión 2n). Para efectos de nuestro ejemplo consideraremos a M como una variedad de dimensión dos.
Sea $(p, v) \in TM$ y sea el sistema de coordenadas $f : U \to M, U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $p = f(u, w)$, como $v \in T_pM$, entonces $v = \alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial w}$,$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Sea $F : U \times \mathbb{R}^2 \to TM$ dada por $F(u, w, \alpha, \beta) = (f(u, w), df_{(u,w)}(\alpha, \beta))$ coordenadas en una vecindad de $(p, v) \in TM$.
Sean $F_1 : U_1 \times \mathbb{R}^2 \to TM$ y $F_2 : U_2 \times \mathbb{R}^2 \to TM$ dos sistemas de coordenadas de $(p, v) \in TM$. Si $(p, v) \in F_1(U_1 \times \mathbb{R}^2) \cap F_2(U_2 \times \mathbb{R}^2)$, entonces $p = f_1(u_1, w_1) = f_2(u_2, w_2)$, con $(u_1, w_1) \in U_1$ y $(u_2, w_2) \in U_2$ entonces $v = \alpha_1\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \beta_1\frac{\partial f_1}{\partial w_1} = \alpha_2\frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \beta_2\frac{\partial f_2}{\partial w_2}$.
Así tenemos.

$$\begin{aligned} F_2^{-1} \circ F_1(u_1, w_1, \alpha_1, \beta_1) &= F_2^{-1}(p, v) \\ &= (f_2^{-1} \circ f_1(u_1, w_1), d(f_2^{-1} \circ f_1)_{(u_1,w_1)}(\alpha_1, \beta_1)) \end{aligned}$$

donde $f_2^{-1}\circ f_1 \in C^\infty$ y $d(f_2^{-1}\circ f_1) \in C^\infty$ y hagamos $f_2^{-1}\circ f_1 = (g_1, g_2)$ $d(f_2^{-1}\circ f_1) = (g_3, g_4)$. Así

$$\begin{aligned} J(F_2^{-1}\circ F_1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial w_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial w_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial w_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial g_4}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_4}{\partial w_1} & \dfrac{\partial g_4}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial g_4}{\partial \beta_1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial w_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial w_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial w_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial g_4}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_4}{\partial w_1} & \dfrac{\partial g_4}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial g_4}{\partial \beta_1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, como

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial w_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_3}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial g_3}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial g_4}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial g_4}{\partial \beta_1} \end{vmatrix} = A.$$

Puesto que, como $f_2^{-1}\circ f_1 = (g_1(u_1, w_1), g_2(u_1, w_1))$ entonces $\frac{\partial g_1}{\partial u_1} = \frac{\partial (f_2^{-1}\circ f_1)_1}{\partial u_1}$ y $g_3 = d(f_2^{-1}\circ f_1)_1$, $g_4 = d(f_2^{-1}\circ f_1)_2$.
Así,

$$\begin{aligned} d(f_2^{-1}\circ f_1)_1(\alpha_1, \beta_1) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial (f_2^{-1}\circ f_1)_1}{\partial u_1} & \frac{\partial (f_2^{-1}\circ f_1)_1}{\partial w_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial (f_2^{-1}\circ f_1)_1}{\partial u_1}\alpha_1 + \frac{\partial (f_2^{-1}\circ f_1)_1}{\partial w_1}\beta_1. \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre para g_4
Así,

$$\frac{\partial g_3}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial (f_2^{-1}\circ f_1)_1}{\partial \alpha_1}.$$

Análogamente se verifican las demás.

Por lo tanto,

$$J(F_2^{-1} \circ F_1) = A^2 > 0.$$

De lo cual se concluye que TM es orientable.

Definición 1.10 (Campo vectorial.) Un campo vectorial X en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asigna a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_pM$. El campo vectorial X es diferenciable si para toda función diferenciable $\varphi : M \to \mathbb{R}$, $X\varphi$ es también diferenciable.

Mencionemos a continuación dos resultados importantes. $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice compacto si es cerrado y acotado o equivalentemente, si todo cubrimiento abierto de A admite un subcubrimiento finito. Diremos que una variedad M^n es compacta si lo es como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

1.2. Variedad con borde.

Definición 1.11 Un semiespacio de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $H^n = \{(x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n; x_1 \leqslant 0)\}$, con la topología inducida de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.12 Diremos que una función $f : V \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto V de H^n es diferenciable si existe un conjunto abierto $U \supset V$ y una función diferenciable $\bar{f}$ en U tal que la restricción de $\bar{f}$ a V es igual a f. En este caso, la diferencial df_p, $p \in V$, de $f \in p$ se define $df_p = d\bar{f}_p$

Definición 1.13 (Variedad con borde) Una variedad diferenciable n-dimensional con *borde regular* es un conjunto M junto con una familia de funciones inyectivas $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \to M$ de conjuntos abiertos de H^n en M tal que:

1. $\bigcup\limits_{\alpha} f_\alpha(U_\alpha) = M$

2. Para cada par α,β, con $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ y $f_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en H^n y las funciones $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$, $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ son diferenciables.

3. La familia $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ es maximal relativa a (1) y (2).

Ejemplo 1.3. Consideremos $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2, z \leqslant z_0, \ \ z_0 > 0\}$, el conjunto de puntos del paraboloide de rotación acotado superiormente por $z = z_0$. Sea V una vecindad de un punto $p = (x, y, z_0)$ en la frontera de M, nótese que $V \cap M$ es homeomorfo a un conjunto abierto del semiespacio $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leqslant 0\}$, como se muestra en la figura (1.4).

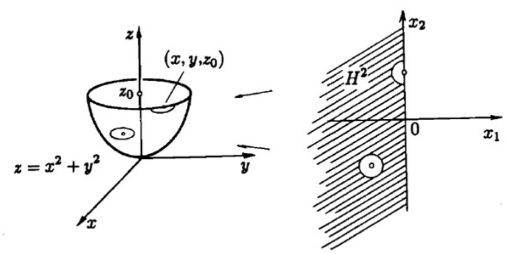

Figura 1.4: Variedad con borde

Definición 1.14 (Punto de borde.) Un punto $p \in M$ se dice que es un punto de borde (o punto frontera) de M si para alguna parametrización $f : U \subset H^n \to M$ alrededor de p tenemos que $f(0, x_2, ..., x_n) = p$

Lema 1.2 *La definición de punto frontera no depende de la parametrización.*

Demostración.
Sea p un punto frontera, entonces existe una parametrización $f_1 : U_1 \to M$ alrededor de p tal que $f_1(q) = p$, $q = (0, x_2, ..., x_n)$.
Razonando por el absurdo supongamos que para alguna parametrización $f_2 : U_2 \to M$ alrededor de p tenemos $f_2^{-1}(p) = q_2 = (x_1, ..., x_n)$ con $x_1 \neq 0$. Figura (1.5)

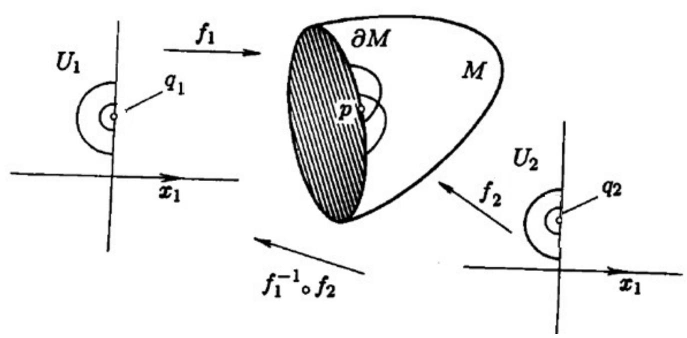

Figura 1.5: Punto frontera

Sea $W = f_1(U_1) \cap f_2(U_2)$. La función $f_1^{-1} \circ f_2 : f_2^{-1}(W) \to f_1^{-1}(W)$ es un difeomorfismo. Como $x_1 \neq 0$, existe una vecindad U de q_2, $U \subset f_2^{-1}(W)$ (abierto) tal que no intersecta al eje x_1.
Así, la restricción de $f_1^{-1} \circ f_2$ en U; es decir, $f_1^{-1} \circ f_2 : U \to H^n$ es un difeomorfismo.
Por consiguiente $d(f_1^{-1} \circ f_2)$ es un isomorfismo lineal. Por lo tanto el determinante de $d(f_1^{-1} \circ f_2)$ es no nulo. Entonces, por el teorema de la función inversa existe una vecindad $V \subset U$ de q_2 tal que $f_1^{-1} \circ f_2 : V \to f_1^{-1} \circ f_2(V)$ es un difeomorfismo.
Así, mediante la función $f_1^{-1} \circ f_2$ se envía la vecindad V de q_2, en una vecindad $f_1^{-1} \circ f_2(V)$ de q que contiene puntos de la forma $(x_1, ..., x_n)$ con $x_1 > 0$ los cuales no están H^n. Luego, p no es un punto frontera, pero esto es una contradicción. Por lo tanto la definición de punto frontera no depende de la parametrización. ■

Proposición 1.2 *La frontera ∂M de una variedad diferenciable M es una $(n-1)$ variedad diferenciable. Además, si M es orientable, una orientación para M induce una orientación para la ∂M.*

Demostración.
Sea $p \in M$ un punto en la frontera de M y sea $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \to M^n$ una parametrización alrededor de p entonces $f_\alpha^{-1}(p) = q = (0, x_2, ..., x_n) \in U_\alpha$.
Sea

$$\overline{U}_{\alpha'} = U_\alpha \cap \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 0\}.$$

Por identificación del conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 0\}$ con $\mathbb{R}^{n-1}$, vemos que $\overline{U}_{\alpha'}$ es un abierto en $\mathbb{R}^{n-1}$. Cosideremos $\bar{f}_\alpha$ la restricción de f_α a $\overline{U}_{\alpha'}$. Por el lema 1.2 $\bar{f}_\alpha(\overline{U}_{\alpha'}) \subset \partial M$.
Afirmación 1.
La familia $\{(\overline{U}_{\alpha'}, \bar{f}_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable para la frontera.
Probemos la segunda parte. Supongamos que M es orientable y escojamos una orientación para M, es decir; una estructura diferenciable tal que el cambio de coordenadas tenga jacobiano positivo. Consideremos los elementos de la familia tal que satisface la condición $f_\alpha(U_\alpha) \cap \partial M \neq \emptyset$ entonces la familia $\{(\overline{U}_\alpha, \bar{f}_\alpha)\}$ descrita en la primera parte es una estructura diferenciable para ∂M
Afirmación 2.
Supongamos que $\bar{f}_\alpha(\overline{U}_\alpha) \cap \bar{f}_\beta(\overline{U}_\beta) \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo, es decir; $\det\left(d(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta)_q\right) > 0$, para todo q, cuya imagen por alguna parametrización está en la frontera.
En efecto.

El cambio de coordenadas $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ toma puntos de la forma $(0, x_1^\beta, ..., x_n^\beta)$ en un punto de la forma $(0, x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$, por el lema (1.2).
Además, el cambio de coordenadas viene dado por:

$$f_\alpha \circ f_\beta^{-1}(0, x_1^\beta, ..., x_n^\beta) = (0, x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$$

Sea $q = (0, x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ un punto cuya imagen está el la frontera, entonces

$$\begin{aligned} d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)_q &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} & \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_2^\beta} & . & . & \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_n^\beta} \\ \frac{\partial x_2^\alpha}{\partial x_1^\beta} & \frac{\partial x_2^\alpha}{\partial x_2^\beta} & . & . & \frac{\partial x_2^\alpha}{\partial x_n^\beta} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_1^\beta} & \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_2^\beta} & . & . & \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_n^\beta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \frac{\partial x_2^\alpha}{\partial x_2^\beta} & . & . & \frac{\partial x_2^\alpha}{\partial x_n^\beta} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_2^\beta} & . & . & \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_n^\beta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \det(d(f_\alpha \circ f_\beta^{-1})_q) &= \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2^\alpha}{\partial x_2^\beta} & . & . & . & \frac{\partial x_2^\alpha}{\partial x_n^\beta} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \\ \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_2^\beta} & . & . & . & \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_n^\beta} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} \det(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta) \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta}q &= \lim_{t\to 0}\frac{x_1^\alpha(q+te_n)-x_1^\alpha(q)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{x_1^\alpha(t,x_2^\beta,...,x_n^\beta)-x_1^\alpha(0,x_2^\beta,...,x_n^\beta)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{x_1^\alpha(t,x_2^\beta,...,x_n^\beta)}{t}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta}q = \lim_{t\to 0}\frac{x_1^\alpha(t,x_2^\beta,...,x_n^\beta)}{t} > 0$$

Así.

$$\frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} > 0.$$

Por lo tanto.

$$\det(d(\bar{f}_\alpha^{-1}\circ \bar{f}_\beta)) > 0.$$

Por consiguiente el cambio de coordenadas, tiene jacobiano positivo. Por lo que M induce una orientación sobre ∂M. ■

1.3. Partición diferenciable de la unidad.

Proposición 1.3 (Existencia de una partición diferenciable de la unidad.) *Sea M una variedad compacta y sea $\{V_\alpha\}$ un cubrimiento de M por vecindades coordenadas. Entonces existen funciones diferenciables $\varphi_1, ..., \varphi_m$ tales que:*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\varphi_i = 1$
2. $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$, *y el soporte de φ_i está contenido en algún V_{α_i} del cubrimiento $\{V_\alpha\}$*

Para demostrar está proposición es necesario, probar antes dos lemas.

Observación 1.2 *La bola de centro cero y radio r viene dada por $B_r(0) = \{p \in \mathbb{R}^n/|p| < r\}$*

Lema 1.3 *Existe una función diferenciable $\varphi : B_3(0) \to \mathbb{R}$ tal que*

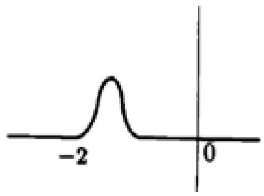

Figura 1.6: Función α.

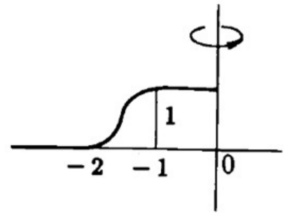

Figura 1.7: Función γ.

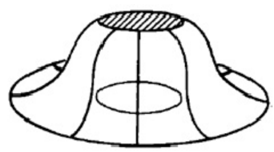

Figura 1.8: φ.

1. $\varphi(p) = 1$, *si* $p \in B_1(0)$

2. $0 < \varphi(p) \leqslant 1$, *si* $p \in B_2(0)$

3. $\varphi(p) = 0$ *si* $p \in B_3(0) - B_2(0)$

Demostración Definamos la función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por (Figura 1.6)

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(t+1)(t+2)}}, & t \in (-2,-1) \\ 0, & t \in \mathbb{R} - (-2,-1) \end{cases}$$

La cual es C^{∞} en todas partes, por tratarse de una traslación de la función $e^{-(\frac{1}{x^2})}$. Ahora tomemos la integral

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(s)ds$$

Y obtenemos una función diferenciable γ ver (Fig 1.7), cuyo valor máximo (en t=-1) es dada por

$$\int_{-2}^{-1} \alpha(s)ds = A$$

Además definamos $\beta(t) = \frac{\gamma(t)}{A}$ una función diferenciable con las siguientes propiedades:

1. $\beta(t) = 0$, si $t \leqslant -2$.
2. $0 < \beta(t) \leqslant 1$, si $t \in (-2, -1)$.
3. $\beta(t) = 1$, si $t \geqslant -1$.

Así, existe una función $\varphi : B_3(0) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(p) = \beta(-|p|)$, $p \in B_3(0)$; (para el caso de $\mathbb{R}^2$ tiene la forma de la figura 1.8), que cumple con las tres condiciones. ■

Lema 1.4 *Sea M^n una variedad diferenciable, sea $p \in M$ y sea $g : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ una parametrización alrededor de p, entonces es posible obtener una parametrización $f : B_3(0) \to M$ alrededor de p de tal modo que $f(B_3(0)) \subset g(U)$ y que $f^{-1}(p) = (0, ..., 0)$*

Demostración Sea $(x_1^0, ..., x_n^0) \in U$ tal que $g(x_1^0, ..., x_n^0) = p$. Como U es abierto existe $r > 0$ tal que $B_r(x_1^0, ..., x_n^0) \subset U$.
Sea T la traslación en $\mathbb{R}^n$ que toma $(x_1^0, ..., x_n^0)$ a $(0, ..., 0)$, y sea $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función dada por $H(p) = \frac{3}{r}p$, para cada $p \in \mathbb{R}^n$. Entonces $H \circ T : B_r(x_1^0, ..., x_n^0) \to B_3(0)$.
En efecto
Sea $q \in H \circ T(B_r(x_1^0, ..., x_n^0))$, entonces $H \circ T(y_1, ..., y_n) = q$, $(y_1, ..., y_n) \in B_r(x_1^0, ..., x_n^0)$
Así por definición de H

$$H(T(y_1, ..., y_n)) = \frac{3}{r}T(y_1, ..., y_n) = q.$$

Pero,

$$|\frac{3}{r}T(y_1, ..., y_n)| < 3$$

Entonces, $|q| < 3$.
Por lo tanto, $q \in B_3(0)$.
Lo que implica que, $H \circ T(B_r(x_1^0, ..., x_n^0)) \subset B_3(0)$. Ahora bien, definamos la parametrización $f : B_r(0) \to M$ por $f = g \circ T^{-1} \circ H^{-1}$ que cumple que $f(B_3(0)) \subset g(U)$ y $f^{-1}(p) = (0, ..., 0)$.
En efecto.
$x \in f(B_3(0))$ implica que $x = f(y)$, $y \in B_3(0)$ pero, por definición de f nos queda, $x = g \circ T^{-1} \circ H^{-1}(y)$, $y \in B_3(0)$.
Por lo tanto, $x = g \circ T^{-1}(y')$, $y \in B_3(0)$, $y = \frac{3}{r}y'$, $y' \in \mathbb{R}^n$.
Así, $y' = \frac{r}{3}y < r$, entonces, $x = g \circ T^{-1}(y')$, $y' \in B_r(0)$, lo que implica que $x = g(x')$, donde $x' \in B_r(x_1^0, ..., x_n^0)$.
Por consiguiente, $x = g(x')$ $x' \in U$, pues $B_r(x_1^0, ..., x_n^0) \subset U$.
Por lo tanto, $f(B_3(0)) \subset g(U)$

Además sea $p \in M$, $g : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, una parametrización alrededor de p. Y consideremos $f : B_3(0) \to M$, $f = g \circ T^{-1} \circ H^{-1}$. Por lo tanto.

$$\begin{aligned} f^{-1}(p) &= (g \circ T^{-1} \circ H^{-1})^{-1}(p) \\ &= ((T^{-1} \circ H^{-1})^{-1} \circ g^{-1})(p) \\ &= (H \circ T \circ g^{-1})(p) \\ &= (H \circ T)(x_1^0, ..., x_n^0) \\ &= \frac{3}{r} T(x_1^0, ..., x_n^0) \\ &= \frac{3}{r}(0, ..., 0) \\ &= (0, ..., 0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(p) = (0, ..., 0)$.
Ahora, si estamos en condiciones para probar la proposición (1.3)
Para cada $p \in M$ consideremos la parametrización $f_p : B_3(0) \to M$ dada por el lema (1.4), con $f_p(B_3(0)) = V_p \subset V_\alpha$, para algún V_α del cubrimiento $\{V_\alpha\}$ (donde la g que se encuentra en la definición de f en el lema (1.4), es una parametrización alrededor de p tal que $g_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to V_\alpha$). El conjunto $W_p = f_p(B_1(0)) \subset V_p$, pues $B_1(0) \subset B_3(0)$.
Por lo tanto, el conjunto $\{W_p\}$ es un cubrimiento abierto de M. Como M es compacto, existe un subcubrimiento finito, digamos $W_1, ..., W_m$ y también $V_1, ..., V_n$ es un cubrimiento de M.
Definamos la función $\theta_i : M \to \mathbb{R}$, $\quad i = 1, .., m$ dada por.

$$\theta = \begin{cases} \varphi \circ f_i^{-1}, & \text{en } V_i \\ 0, & \text{en } M - V_i \end{cases}$$

donde $\varphi : B_3(0) \to \mathbb{R}$ es la función dada en el lema (1.2) y las θ_i son funciones diferenciables tales que $Sop\theta_i \subset V_i$, pues

$$\begin{aligned} p \in Sop\theta_i &\Rightarrow p \in \overline{\left\{p \in M : \theta_i(p) \neq 0\right\}} \\ &\Rightarrow B_r(p) \cap \left\{p \in M : \theta_i(p) \neq 0\right\} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow p \in \left\{p \in M : \theta_i(p) \neq 0\right\} \\ &\Rightarrow \theta_i(p) \neq 0 \\ &\Rightarrow \varphi \circ f_i^{-1}(p) \neq 0 \\ &\Rightarrow f_i^{-1} \in B_2(0) \subset B_3(0) \\ &\Rightarrow p \in V_i. \end{aligned}$$

Así, $Sop\theta_i \subset V_i$
Finalmente definamos φ_i por

$$\varphi_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\sum_{j=1}^{m} \theta_j(p)}, \quad p \in M, \quad i = 1, .., m.$$

Es fácil chequear que las funciones φ_i así construidas satisfacen las condiciones (a) y (b).

CAPÍTULO 2

Formas diferenciales.

El objetivo de éste capítulo es definir en $\mathbb{R}^n$ campos de formas alternantes que serán usadas más tarde para obtener resultados geométricos.
En orden a fijar ideas, iniciarenos nuestro trabajo en el espacio tres-dimensional $\mathbb{R}^3$. Más adelante generalizaremos el concepto de formas diferenciables a variedades diferenciables que se usará en los capítulos posteriores.

2.1. k-formas.

Definición 2.1 (Espacio dual) A cada espacio tangente $\mathbb{R}^3_p$ podemos asociarle su *Espacio dual* $(\mathbb{R}^3_p)^*$ el cual es el conjunto de todas las funciones lineales φ:$\mathbb{R}^3_p \to \mathbb{R}$

La base canónica $\{(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p\}$ de $\mathbb{R}^3_p$ induce una base dual $\{(\varphi_1)_p, (\varphi_2)_p, (\varphi_3)_p\}$ de $(\mathbb{R}^3_p)^*$, dada por

$$(\varphi_i)_p(e_j)_p = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Afirmamos.

$$(dx_i)_p = (\varphi_i)_p$$

En efecto.
Consideremos las proyecciones $\pi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por $\pi_i(X) = x_i$, donde $X = (x_1, x_2, x_3)$.

Como π_i es una 0-forma diferenciable, $d\pi_i$ es una 1-forma entonces.

$$\begin{aligned}(dx_i)_p(v) &= Dx_i \cdot v \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= v_i\end{aligned}$$

Pero, $(\varphi_i)_p(v) = v_i$
Por lo tanto.

$$(dx_i)_p(v) = (\varphi_i)_p(v)$$

Así, $(dx_i)_p = (\varphi_i)_p$.
Esto es, la base dual de la base canónica coincide con el diferencial de las funciones coordenadas, esto justifica que de ahora en adelante la base dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$ será $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$.
Por lo que ya estamos preparados para dar la siguiente definición.

Definición 2.2 (1-forma) Una forma lineal en un campo (o una 1-forma) es una función ω que asigna a cada punto p en $\mathbb{R}^3$ un elemento $\omega(p) \in (\mathbb{R}^3_p)^*$, tal que:

$$\omega(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx)_p$$

donde a_i, $i = 1, 2, 3$ son funciones reales en $\mathbb{R}^3$.

Por otra parte consideremos $\Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)$ el conjunto de todas las funciones $\varphi : \mathbb{R}^3_p \times \mathbb{R}^3_p \to \mathbb{R}$ que son:

- Bilineales; es decir, φ es lineal en cada una de sus variables.
- Alternante; es decir, $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$

Se puede decir que $\Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)$ con las operaciones usuales de funciones es un espacio vectorial.

Consideremos $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3_p)^*$, podemos obtener un elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ dado por:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = det(\varphi_i(v_j))$$

En efecto,
sea $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^3_p$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\alpha v_1 + v_2, w) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha v_1 + v_2) & \varphi_1(w) \\ \varphi_2(\alpha v_1 + v_2) & \varphi_2(w) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha\varphi_1(v_1) + \varphi_1(v_2) & \varphi_1(w) \\ \alpha\varphi_2(v_1) + \varphi_2(v_2) & \varphi_2(w) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha\varphi_1(v_1) & \varphi_1(w) \\ \alpha\varphi_2(v_1) & \varphi_2(w) \end{pmatrix} \\
&+ \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_2) & \varphi_1(w) \\ \varphi_2(v_2) & \varphi_2(w) \end{pmatrix} \\
&= \alpha\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, w) + \varphi_1 \wedge \varphi_2(v_2, w).
\end{aligned}$$

Análogamente se prueba la linealidad en la otra variable. Por lo tanto, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es lineal en cada variable.
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es alternante.
En efecto.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_2) & \varphi_1(v_1) \\ \varphi_2(v_2) & \varphi_2(v_1) \end{pmatrix} \\
&= -\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_2, v_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es alternante. Luego, $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$.
Por otro lado.
Sean $(dx_i)_p, (dx_j)_p \in (\mathbb{R}^3_p)^*$ entonces por lo anterior $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ que lo denotamos por $(dx_i \wedge dx_j)_p$. Donde el conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j)_p : i < j\}$ es una base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ y cumple con las siguientes propiedades.

1. $(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p, i \neq j$
2. $(dx_i \wedge dx_i)_p = 0$

Observación 2.1 *Considerar $i < j$ se debe al hecho de que por la propiedad (1) antes mencionada ($(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p$), al tener los dos elementos en la base, uno de ellos se puede escribir como combinación lineal del otro y viceversa, así tendríamos elementos dependientes en el conjunto, lo que dejaría de ser una base.*

Definición 2.3 (2-forma) Una forma bilineal alternante o una *2-Forma* en $\mathbb{R}^3$ es una función ω que asigna a cada $p \in \mathbb{R}^3$ un elemento $\omega(p) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$, donde ω puede escribirse de la forma:

$$\omega(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3)_p.$$

donde a_{ij} son funciones reales el $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.4 (2-forma diferenciable) Diremos que ω es diferenciable si las funciones a_{ij}, son diferenciables; es decir, $a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

Ahora, podemos generalizar la noción de forma para $\mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}^n_p$ es el espacio tangente en $\mathbb{R}^n$ en el punto p y $(\mathbb{R}^n_p)^*$ es el espacio dual. Sea $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ el conjunto de todas las funciones k-lineales alternantes, de la forma $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n_p \times ... \times \mathbb{R}^n_p}_{K-veces} \to \mathbb{R}$, es decir φ es lineal en cada una de sus variables y cambia de signo en el intercambio de dos argumento consecutivos. Con las operaciones usuales de funciones $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ es un espacio vectorial. Dado $\varphi_1, ..., \varphi_k$ $\in (\mathbb{R}^n_p)^*$, podemos obtener un elemento $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k$ de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ dado por:

$$\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k(v_1, ..., v_k) = det(\varphi_i(v_j)), con\ i, j = 1, ..., k$$

Se sigue de las propiedades de los determinantes que $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k$ es k-lineal y alternante. En particular $(dx_{i_1})_p \wedge ... \wedge (dx_{i_k})_p$ pertenece a $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$, con $i_1, ..., i_k = 1, ..., n$, denotado por $(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p$.

Teorema 2.1 *El conjunto* $\{(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p : i_1 < ... < i_k, \imath_j \in \{1, .., n\}\}$, *es una base para* $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$

Demostración. Se demostrarán tres afirmaciones dadas a continuación:
Afirmación 1
Si $i_1 < i_2 < ... < i_k$ y $j_1 < j_2 < ... < j_k$, entonces

$$(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1, ..., i_k = j_k \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En Efecto.
Consideremos $\alpha = \det(dx_{i_l})(e_{j_n})$ y supongamos que $i_1 > j_1$, entonces $i_k > ... > i_1 > j_1$.

Por lo tanto.
$dx_{i_l}(e_{j_1}) = 0$ implica que $det(dx_{i_l}(e_{j_1})) = 0$. Supongamos que $j_1 > i_1$, entonces $j_k > ... > j_2 > j_1 > i_1$.Así $dx_{i_1}(e_{j_n}) = 0$ implica que $det(dx_{i_1}(e_{j_n})) = 0$
Por consiguiente.
Para $i_1 \neq j_1$ se tiene que $\alpha = 0$
Ahora, supongamos que $i_1 = j_1$ y $i_2 \neq j_2$
Para $i_2 > j_2$ se tiene que $i_k > ... > i_2 > j_2$ entonces $dx_{i_l}(e_{j_2}) = 0$ implica que $\alpha = 0$.
Para $j_2 > i_2$ se tiene que $j_k > ... > j_2 > i_2$ entonces $dx_{i_l}(e_{j_2}) = 0$
Repitiendo el procedimiento. Supongamos que $i_1 = j_1, ..., i_{k-1} = j_{k-1}$ y $i_k \neq j_k$
Para $i_k > j_k$ tal que $i_k > j_k > ... > j_1$ entonces $dx_{i_k}(e_{j_n}) = 0$ implica que $\alpha = 0$
Y por último supongamos que $i_1 = j_1, ..., i_k = j_k$ entonces $dx_{i_l}(e_{j_n}) = 1$, $l = 1, ..., k$, $n = 1, ..., k$. Por lo tanto $\alpha = 1$
Así.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1, ..., i_k = j_k \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Afirmación 2
Los elementos de A=$\{(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p : i_1 < ... < i_k, \imath_j \in \{1, .., n\}\}$, son linealmente independientes.
En efecto, consideremos

$$\sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1 ... i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = 0 \tag{2.1}$$

Apliquemos la expresión (1.1) a $(e_{j_1}, ..., e_{j_k})$ donde, $j_1 < ... < j_k, j_l \in \{1, ..., n\}$, obtenemos por la afirmación 1 que:
$((dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p)(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 1$, cuando $i_1 = j_1, ..., i_k = j_k$
Así,

$$\begin{aligned} \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1 ... i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} &= a_{j_1 ... j_k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los elementos de A son linealmente independientes.
Afirmación 3

Si $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$, entonces f es una combinación lineal de la forma:

$$f = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1...i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

En efecto.
Sea $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ arbitrario, y consideremos

$$g = \sum_{i_1 < ... < i_k} f(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \tag{2.2}$$

Nótese que $g \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$, pues g es una función k-lineal alternante, donde $f(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$ pertenece a $\mathbb{R}$.
Además, evaluando el vector $(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$ en la ecuación (1.2), se tiene que
$g(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) = f(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$, para todo $i_1, ..., i_k$, lo que implica que

$$f = g \tag{2.3}$$

Hagamos.

$$f(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) = a_{i_1...i_k} \tag{2.4}$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.3) y (1.4) en (1.2)

$$f = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1...i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

Por consiguiente.
Todos los elementos de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ se escriben como combinación lineal de los elementos de la base.
En conclusión.
El conjunto $\{(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p : i_1 < ... < i_k, \imath_j \in \{1, .., n\}\}$ es una base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$.

Definición 2.5 (k-forma exterior) Una *k-forma exterior* en $\mathbb{R}^n$ es una función ω que asocia a cada p en $\mathbb{R}^n$ un elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$; por teorema 1, puede ser escrito como:

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1...i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p,$$

$i_j \in \{1, ..., n\}$, donde $a_{i_1...i_k}$ son funciones reales en $\mathbb{R}^n$. Cuando las $a_{i_1...i_k}$ son funciones diferenciables, ω es llamada una k-forma diferencial.

Ejemplo 2.4. En $\mathbb{R}^4$ tenemos los siguientes tipos de formas exteriores (donde a_i, a_{ij},..., son funciones en $\mathbb{R}^4$):

1. 0-formas, funciones en $\mathbb{R}^4$.
2. 1-formas, $a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 + a_4dx_4$.
3. 2-formas, $a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{14}dx_1 \wedge dx_4 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3 + a_{24}dx_2 \wedge dx_4 + a_{34}dx_3 \wedge dx_4$.
4. 3- formas, $a_{123}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + a_{124}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + a_{134}dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + a_{234}dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.
5. 4-formas, $a_{1234}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

Es importante resaltar que la dimensión de la base viene dada por $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Observación 2.2 *Denotaremos por I la* k-upla $(i_1, ..., i_k), i_1 < ... < i_k, i_j \in \{1, ..., n\}$ *y usaremos la siguiente notación para* ω*:*

$$\omega = \sum_I a_I dx_I$$

Definición 2.6 (Suma de k-formas.) Sean ω y φ dos k-formas, donde $\omega = \sum_I a_I dx_I$ y $\varphi = \sum_I b_I dx_I$, entonces podemos definir la suma de k-formas:

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$$

Ejemplo 2.5. Sean las 2- formas, $\omega_1 = x^2dxdy + y^3xdydz + ysenzdxdz$ y $\omega_2 = ydydz$ entonces.

$$\omega_1 + \omega_2 = x^2dxdy + (y^3x + y)dydz + ysenzdxdz.$$

Definición 2.7 (Producto exterior) Sean $\omega = \sum_I a_I dx_I$, $I = (i_1, ..., i_k)$, $i_1 < ... < i_k$ y $\varphi = \sum_J b_J dx_J$, $J = (j_1, ..., j_k), j_1 < ... < j_k$, entonces el *producto exterior* se define:

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_I dx_I \wedge dx_J.$$

Ejemplo 2.6. Si $\omega = xdx - ydy$ y $\beta = xdydz + zdxdy$, hallar $\omega \wedge \beta$

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \beta &= (xdx - ydy)(xdydz + zdxdy) \\
&= [(xdx - ydy) \wedge xdxdz] + [(xdx - ydy) \wedge zdxdy] \\
&= (x^2 dx \wedge dydz) - (zydy \wedge dydz) + (xzdx \wedge dxdy) - (yzdy \wedge dxdy) \\
&= [x^2 dx \wedge (dy \wedge dy)] - [yzdy \wedge (dy \wedge dz)] + [xzdx \wedge (dx \wedge dy)] - [yzdy \wedge (dx \wedge dz)] \\
&= x^2 dxdydz - xy(0 \wedge dy) + xz(0 \wedge dy)[yz(dy \wedge dy) \wedge dx] \\
&= x^2 dxdydz.
\end{aligned}$$

Teorema 2.2 *Sean ω una k-forma, φ una s-forma y θ una r-forma, entonces.*

1. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$.
2. $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$.
3. *Si* r=s, *entonces* $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$.

Demostración.
Parte (1)

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta &= \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J \wedge \sum_K c_K dx_K \\
&= \sum_{IJK} a_I b_J c_K (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K \\
&= \sum_I c_I dx_I \wedge \sum_{JK} b_J c_K dx_J \wedge dx_K \\
&= \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)
\end{aligned}$$

Parte (2)

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \varphi &= \sum_{IJ} a_I b_J dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_s} \\
&= \sum_{IJ} b_J a_I dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge (-1)(dx_{j_1} \wedge dx_{i_k}) \wedge ... \wedge dx_{j_s} \\
&= \sum_{IJ} b_J a_I (-1) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} \wedge ... \wedge dx_{j_s} \\
&= \sum_{IJ} b_J a_I (-1)^k dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_s}
\end{aligned}$$

Como J tiene s elementos, obtenemos repitiendo un argumento similar para cada $dx_{j_l}, j_l \in J$

$$\begin{aligned}\omega \wedge \varphi &= \sum_{JI} b_J a_I (-1)^{ks} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \\ &= (-1)^{ks} \omega \wedge \varphi\end{aligned}$$

Parte (3) Supongamos que $r = s$, entonces

$$\begin{aligned}\omega \wedge (\varphi + \theta) &= \sum_{IJ} a_I (b_J + c_J) dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{IJ} (a_I b_J + a_I c_J) dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J + \sum_{IJ} a_I c_J dx_I \wedge dx_J \\ &= \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta\end{aligned}$$

2.2. Pull-back.

Una de las características más importantes de las formas es el modo como ellas se comportan bajo funciones diferenciables. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable entonces f induce una función f^* que toma k-forma en $\mathbb{R}^m$ en k-forma en $\mathbb{R}^n$ y se define como sigue:

Definición 2.8 (Pull-back.) Sea ω una k-forma en $\mathbb{R}^m$, entonces $f^*\omega$ es la k-forma en $\mathbb{R}^n$ dada por:

$$(f^*\omega)(p)(v_1, ..., v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), ..., df_p(v_k))$$

donde, $p \in \mathbb{R}^n$, $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n_p$ y $df_p : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$ es la diferencial de la función f en p.

Observación 2.3 *Si g es una 0-forma entonces $f^*(g) = g \circ f$.*

En el siguiente teorema presentamos algunas propiedades del operador f^*.

Teorema 2.3 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, ω y φ k-forma en $\mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to R$ una 0-forma en $\mathbb{R}^m$, entonces:*

1. $f^*(\omega+\varphi)=f^*(\omega)+f^*(\varphi)$.

2. $f^*(g\omega)=f^*(g)f^*(\omega)$.

3. *Si* $\varphi_1,...,\varphi_k$ *son* 1-*forma en* $\mathbb{R}^m$ *entonces* $f^*(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_k)=f^*(\varphi_1)\wedge...\wedge f^*(\varphi_k)$.

Demostración.
Sean $p\in\mathbb{R}^n$, $v_1,...,v_k\in\mathbb{R}^n_p$.
Parte(1)

$$\begin{aligned}
f^*(\omega+\varphi)(p)(v_1,...,v_k) &= (\omega+\varphi)(f(p))(df_p(v_1),...,df_p(v_k)\\
&= \omega(f(p))(df_p(v_1),...,df_p(v_k))+\varphi(f(p))(df_p(v_1),...,df_p(v_k))\\
&= (f^*\omega)(p)(v_1,...,v_k)+(f^*\varphi)(p)(v_1,...,v_k)\\
&= (f^*\omega+f^*\varphi)(p)(v_1,...,v_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f^*(\omega+\varphi)=f^*(\omega)+f^*(\varphi)$$

Parte(2)

$$\begin{aligned}
f^*(g\omega)(p)(v_1,...,v_k) &= (g\omega)(f(p))(df_p(v_1),...,df_p(v_k))\\
&= (g(f(p))\cdot\omega(f(p)))(df_p(v_1),...,df_p(v_k))\\
&= (g\circ f(p)\cdot\omega\circ f(p))(df_p(v_1),...,df_p(v_k))\\
&= (g\circ f(p))(df_p(v_1),...,df_p(v_k))\cdot(\omega\circ f(p))(df_p(v_1),...,df_p(v_k))\\
&= f^*g(p)(v_1,...,v_k)\cdot f^*\omega(p)(v_1,...,v_k)\\
&= (f^*g\cdot f^*\omega)(p)(v_1,...,v_k).
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$f^*(g\omega)=f^*(g)f^*(\omega)$$

Parte (3) Omitiendo el punto p nos queda

$$\begin{aligned}
f^*(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_k)(v_1,...,v_k) &= (\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_k)(df_p(v_1),...,df_p(v_k)\\
&= \det(\varphi_i(df_p(v_j)))
\end{aligned}$$

esta última igualdad es posible gracias al ejemplo (2.8).
Pero

$$\begin{aligned} \det(\varphi_i(df_p(v_j))) &= \det(f^*\varphi_i(v_j)) \\ &= f^*\varphi_i \wedge ... \wedge f^*\varphi_k(v_1, ..., v_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f^*(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge ... \wedge f^*(\varphi_k)$$

Ahora podemos presentar al operador f^* como cambio de coordenadas. Sean $(x_1, ..., x_n)$ coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y $(y_1, ..., y_m)$ coordenadas en $\mathbb{R}^m$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por: $y_1 = f_1(x_1, ..., x_n), ..., y_n = f_n(x_1, ..., x_n)$ y $\omega = \sum_I a_I dy_I$ una k-forma en $\mathbb{R}^m$. Usando las propiedades de f^* obtenemos que:

$$f^*\omega = \sum_I f^*(a_I)(f^*dy_{i_1}) \wedge (f^*dy_{i_k})$$

En efecto

$$\begin{aligned} f^*(\sum_I a_I dy_I) &= f^*(\sum_{i_1<...<i_k} a_I dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1<...<i_k} f^*(a_I) f^*(dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1<...<i_k} f^*(a_I) f^*(dy_{i_1}) \wedge ... \wedge f^*(dy_{i_k}) \end{aligned}$$

Además como,

$$\begin{aligned} f^*(dy_i) &= (dy_i)(df(v)) && (2.5) \\ &= d(y_i \circ f)(v) && (2.6) \\ &= df_i(v) && (2.7) \end{aligned}$$

$f^*(a_I) = a_I(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$ (1.8)
Así sustituyendo (1.7) y (1.8) en la igualdad anterior nos queda

$$f^* = \sum_I a_I(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)) df_{i_1} \wedge .... \wedge df_{i_k}$$

Ejemplo 2.7. Sea $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, una 1-forma en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Sea $f : U \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ donde $U = \{(r,\theta)/r > 0 \wedge 0 < \theta < 2\pi\}$ y $f(r,\theta) = (rcos\theta, rsin\theta)$. Calculemos $f^*\omega$.
$y = rsin\theta$ implica que $dy = sin\theta dr + rcos\theta d\theta$
$x = rcos\theta$ implica que $dx = cos\theta dr - rsin\theta d\theta$. Entonces

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \frac{-rsin\theta}{r^2}cos\theta dr + \frac{r^2sin^2\theta}{r^2}d\theta + \frac{rcos\theta}{r^2}sin\theta dr + \frac{r^2cos^2\theta}{r^2}d\theta \\ &= d\theta. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable dada por $f(x_1,...,x_n) = (y_1,...,y_n)$ y sea $\omega = dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$. Pruebe que $f^*\omega = det(df)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*(dy_1 \wedge ... \wedge dy_n) \\ &= f^*(dy_1) \wedge ... \wedge f^*(dy_n) \\ &= d(f^*y_1) \wedge ... \wedge d(f^*y_n) \\ &= d(y_1 \circ f) \wedge ... \wedge d(y_n \circ f) \\ &= d(f_1) \wedge ... \wedge d(f_n) \\ &= \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i}dx_i \wedge ... \wedge \frac{\partial f_n}{\partial x_i}dx_i \\ &= (\sum Sgn(\sigma)\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \times ... \times \frac{\partial f_n}{\partial x_i})dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \\ &= \det(df)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \end{aligned}$$

2.3. Diferencial exterior.

Ahora vamos a definir una operación en formas diferenciables que generaliza la diferenciación de funciones. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una 0-forma (es decir, una función diferenciable). Entonces la diferencial

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i$$

es una 1-forma. Queremos generalizar ese proceso definiendo una operación que toma k-formas en $k+1$-formas.

DEFINICIÓN 2.9 (Diferencial Exterior) Sea $\omega = \sum a_I dx_I$ una k-forma en $\mathbb{R}^n$. *La diferencial exterior* $d\omega$ de ω está definida por:

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx_I$$

Ejemplo 2.9. Sea $\omega = xyzdx + yzdy + (x+y)dz$, usando la definición (1.10), obtenemos:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xyz) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x+z) \wedge dz \\ &= (yzdx + xzdy + xydz) \wedge dx + (ydz + zdy) \wedge dy + (dx + dz)dz \\ &= xzdy \wedge dx + xydz \wedge dx + ydz \wedge dy + dx \wedge dz \\ &= -xzdx \wedge dy - xydx \wedge dz - ydy \wedge dz + dx \wedge dz \\ &= -xzdx \wedge dy - ydy \wedge dz + (1 - xy)dx \wedge dz \end{aligned}$$

Ahora presentamos algunas propiedades de la diferencial exterior.

TEOREMA 2.4 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, ω una k-forma en $\mathbb{R}^m$, ω_1 y ω_2 k-forma y φ una s-forma, entonces se cumplen:*

1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d(\omega_1) + d(\omega_2)$.
2. $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$.
3. $d(d\omega) = 0$.
4. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

Demostración.
Parte (1)

$$\begin{aligned} d(\omega_1 + \omega_2) &= d(\sum_I a_I dx_I + \sum_I b_I dx_I) \\ &= d(\sum_I (a_I + b_I) dx_I) \\ &= \sum_I d(a_I + b_I) \wedge dx_I \\ &= \sum_I (da_I + db_I) \wedge dx_I \\ &= \sum_I da_I \wedge dx_I + \sum_I db_I \wedge dx_I \\ &= d\omega_1 + d\omega_2. \end{aligned}$$

Parte (2)

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \varphi) &= d(\sum_I a_I dx_I \wedge \sum_J b_J dx_J) \\
&= d(\sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J) \\
&= \sum_{IJ} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{IJ} (b_J da_I + a_I db_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{IJ} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{IJ} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{IJ} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_I da_I \wedge dx_I \wedge \sum_J b_J dx_J + \sum_{IJ} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= d\omega \wedge \varphi + \sum_{IJ} a_I (-1)^k dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\
&= d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \sum_I a_I dx_I \wedge \sum_J db_J \wedge dx_J \\
&= d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi.
\end{aligned}$$

Parte (3)
Haremos la demostración por casos:
Caso I. Primero supongamos que ω es una 0-forma, i.e, ω es una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que asigna a cada $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ el valor $f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$

Así

$$\begin{aligned}
d(df) &= d(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j) \\
&= \sum_{j=1}^n d(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j) \\
&= \sum_{j=1}^n d(\frac{\partial f}{\partial x_j}) \wedge dx_j \\
&= \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j)
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ y $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$
Obtenemos que

$$d(df) = \sum_{i<j} (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}) dx_i \wedge dx_j = 0$$

Por lo tanto, $d(df) = 0$
Caso II
Supogamos que ω es una $k-forma$ dada por $\omega = \sum_I a_I dx_I$, por la parte (1), podemos restringir este paso solamente a $\omega = a_I dx_I$, $a_I \neq o$, además por la parte (2), tenemos que $d\omega = da_I \wedge dx_I + a_I d(dx_I)$. Pero

$$d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0.$$

Por lo tanto

$$d\omega = da_I \wedge dx_I$$

Así,

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(da_I \wedge dx_I) \\ &= d(da_I) \wedge dx_I + da_I \wedge d(dx_I) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que:

$$d(d(\sum_I a_I dx_I) = \sum_I d(d(a_I dx_I)) = 0$$

Por lo tanto

$$d(d\omega) = 0.$$

Parte (4)
Primero probemos el resultado para una 0-forma. Sea $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función diferenciable

que asigna a cada $(y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ un valor $g(y_1, ..., y_m)$, entonces

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= f^*(\sum_{i=1} (\frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i) \\ &= \sum_{i=1} f^*(\frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i) \\ &= \sum_{i,j} (\frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j) \\ &= d(g \circ f) \\ &= d(f^* g) \end{aligned}$$

Ahora, sea $\varphi = \sum_I a_I dx_I$ una k-forma entonces

$$\begin{aligned} d(f^*\varphi) &= d(f^* \sum_I a_I dx_I) \\ &= d(\sum_I f^*(a_I) f^*(dx_I)) \\ &= \sum_I d(f^*(a_I) f^*(dx_I)) \\ &= \sum_I f^* d(a_I) \wedge f^*(dx_I)) \\ &= f^*(\sum_I d(a_I) \wedge (dx_I) \\ &= f^*(d\varphi) \end{aligned}$$

Teorema 2.5 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ funciones diferenciables y sean ω y φ 2-formas en $\mathbb{R}^m$. Entonces*

1. $f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi)$.
2. $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$.

Demostración.
Parte(1)
Hagamos $(y_1, ..., y_m) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^m$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $\omega = \sum_I a_I dy_I$ y $\varphi = \sum_J b_J dy_J$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
f^*(\omega \wedge \varphi) &= f^*(\sum_{IJ} a_I b_J dy_I \wedge dy_J) \\
&= \sum_{IJ} f^*(a_I b_J) f^*(dy_I \wedge dy_J) \\
&= \sum_{IJ} f^*(a_I b_J) f^*(dy_I) \wedge f^*(dy_J) \\
&= \sum_{IJ} (a_I b_J)(f_1, ..., f_n) df_I \wedge df_J
\end{aligned}
$$

Esta última igualdad es gracias a la ecuación (1.7) ilustrada anteriormente. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
f^*(\omega \wedge \varphi) &= \sum_{IJ} (a_I b_J)(f_1, ..., f_n) df_I \wedge df_J \\
&= \sum_{IJ} a_I(f_1, ..., f_n) b_J(f_1, ..., f_n) f_I \wedge f_J \\
&= \sum_{I} a_I(f_1, ..., f_n) df_I \wedge \sum_{J} b_J(f_1, ..., f_n) df_J \\
&= \sum_{I} f^*(a_I) f^*(dy_I) \wedge \sum_{J} f^*(b_J) f^*(dy_J) \\
&= f^*(\sum_{I} a_I(dy_I) \wedge f^*(\sum_{J} b_J dy_J) \\
&= f^*(\omega) \wedge f^*(\varphi)
\end{aligned}
$$

Parte(2)

$$\begin{aligned}
(f\circ g)^*\omega &= (f\circ g)^*(\sum_I a_I dy_I)\\
&= \sum_I (f\circ g)^*(a_I dy_I)\\
&= \sum_I (f\circ g)^*(a_I)(f\circ g)^*(dy_I)\\
&= \sum_I (a_I)((f\circ g)_1,...,(f\circ g)_m)d(f\circ g)_I\\
&= \sum_I g^*(a_I(f_1,...,f_m))g^*(df_I)\\
&= g^*(\sum_I a_I(f_1,...,f_m)df_I)\\
&= g^*(\sum_I f^*(a_I)f^*(df_I)\\
&= g^*\sum_I f^*(a_I df_I)\\
&= g^*(f^*\omega)
\end{aligned}$$

2.4. k-formas en variedades.

Ahora extenderemos a variedades diferenciables la noción de forma diferencial. Dado un espacio vectorial V, denotamos por $\Lambda^k(V)$ el conjunto de k-formas lineales alternantes $\omega : V\times ...\times V \to \mathbb{R}$, donde $V\times ...\times V$ contiene k factores.

Definición 2.10 Sea M^n una variedad diferenciable una *k-forma exterior* ω en M es una función que asigna, a cada $p\in M$, un elemento $\omega(p)$ del espacio $\Lambda^k(T_pM)^*$ de k-formas lineales alternantes del espacio tangente T_pM.

Dada una k-forma exterior ω y una parametrización $f_\alpha : U_\alpha \to M^n$, alrededor de $p\in f(U_\alpha)$, definamos la *representativa de* ω en esa parametrización como la k-forma exterior ω_α en $U_\alpha\subset\mathbb{R}^n$ dada por.

$$\omega_\alpha(v_1,...,v_k) = \omega(df_\alpha(v_1),...,df_\alpha(v_k)),\quad v_1,...,v_k\in\mathbb{R}^n$$

Si cambiamos de coordenadas a $f_\beta : U_\beta \to M^n$, $p \in f_\beta(U_\beta)$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta(v_1, ..., v_k) &= \omega_\beta(d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha))(v_1), ..., (d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha))(v_k) \\
&= \omega((df_\beta \circ d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha))(v_1), ..., (df_\beta \circ d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha))(v_k) \\
&= \omega_\alpha(v_1, ..., v_k)
\end{aligned}$$

Así que

$$(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta = \omega_\alpha. \tag{2.8}$$

Definición 2.11 Una *forma diferencial de orden* k (o una k-forma) en una variedad diferenciable M^n es una k-forma exterior tal que, en algún sistema de coordenada (por lo tanto, en todo), su representativa es diferenciable.

Un hecho importante es que todas las operaciones definidas para formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$ pueden ser extendidas a formas diferenciales pensando en sus representaciones locales. Además, si ω es una forma diferenciable en M, $d\omega$ es la forma diferenciable en M cuya representativa local $d\omega_\alpha$ viene dada por.

$$d\omega_\alpha = d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* d\omega_\beta$$

$d\omega$ es una forma diferencial bien definida en M.

CAPÍTULO 3

Integración de formas y teorema de Stokes

En éste capítulo antes de definir como integrar una forma en una variedad, vamos a definir como integrarla en un cierto entorno coordenado. Luego utilizaremos *la partición de la unidad* (introducida en el capítulo 1), para integrar en una variedad. En el caso de una variedad cubierta por una sola parametrización el segundo paso es innecesario. (En la práctica, por tanto, generalmente sólo será necesario el primer paso). Otro de nuestros objetivos es demostrar el teorema de Stokes. Para el caso dos-dimensional, una descripción aproximada del teorema es como sigue.
Sea ω una 1-forma diferenciable definida en una variedad M^2 dos-dimensional, compacta y orientable, y sea $d\omega$ su diferencial exterior. Consideremos una región $\mathbf{R}$ de M^n rodeada por una curva regular cerrada $C = \partial R$. La orientación en $\mathbf{R}$ induce una orientación en C, y la inclusión $i : C \to M$ nos permite considerar la *restricción* $i^*\omega$ de ω a C. Bajo esas condiciones el teorema de Stokes declara que la integral de la 2-forma $d\omega$ en $\mathbf{R}$ es igual a la integral de $i^*\omega$ en $\partial\mathbf{R} = C$.
Primero supongamos que $M^n = \mathbb{R}^n$. Tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1 Sea ω una n-forma en $\mathbb{R}^n$, tal que $\omega = a(x_1, ..., x_n)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ supongamos que el soporte K de ω es compacto y está contenido en U. Definamos

$$\int_U \omega = \int_K a dx_1 ... dx_n$$

Ahora daremos la definición de la integral de una n-forma en M^n.

Definición 3.2 Sea M una variedad diferenciable, compacta y orientable supongamos inicialmente que el soporte K está contenido en alguna vecindad coordenada $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$, entonces si la representación local ω_α de ω en U_α es $\omega_\alpha = a_\alpha(x_1, ..., x_n)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ definimos.

$$\int_M \omega = \int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

Ejemplo 3.10. Sea $\omega = z^2dxdy$ una 2-forma en $\mathbb{R}^3$, y sea S la semiesfera unitaria superior en $\mathbb{R}^3$, vamos a calcular $\displaystyle\int_S \omega$.
En efecto.
Consideremos la parametrización global $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ dada por $\phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, donde $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ y $\phi(D) = S$.
Además llamaremos a ω_α la representación local de ω en la parametrización ϕ, que viene dada por: $\omega_\alpha = \cos^2 udu \wedge dv$. Entonces por la definición (3.2) de integración se tiene que

$$\int_S \omega = \int_{\phi(D)} \omega_\alpha = \int_{\phi(D)} \phi^*\omega = \int_D \cos^2 u \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv\right]$$

donde $\left[\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]$ es el jacobiano del cambio de coordenadas, tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\sin \sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} \\ &= \sin u \cos u \cos^2 v + \cos u \sin u \sin^2 v \\ &= \sin u \cos u. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_D \cos^2 u \cos u \sin ududv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \sin ududv \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\cos^4 u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dv \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vamos a probar que la definición anterior no depende de la escogencia de la vecindad coordenada. En efecto
supongamos que K está contenido en alguna vecindad coordenada $V_\beta = f_\beta(U_\beta)$ de la misma familia que $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$ y supongamos además que contraemos a U_α y U_β de forma tal que $V_\alpha = V_\beta$. Reajustamos las parametrizaciones $f_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ y $f_\beta : U_\beta \to V_\beta$. Y sean $\omega_\alpha = a_\alpha dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ y $\omega_\beta = a_\beta dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ las representaciones locales de ω en U_α y U_β respectivamente.
Consideremos el cambio de coordenadas $f = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : U_\beta \to U_\alpha$. Dado por

$x_i = f_i(y_1, ..., y_n)$, $i = 1, ..., n$, $(x_1, ..., x_n) \in U_\alpha$ $(y_1, ..., y_n) \in U_\beta$.
Como $\omega_\beta = f^*(\omega_\alpha)$ por la ecuación (2.8), obtenemos en virtud del ejercicio 2 de la sección (2.2) que

$$\omega_\beta = \det(df)a_\beta dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$$

donde

$$a_\beta = a_\alpha(f_1(y_1, ..., y_n), ..., f_n(y_1, ..., y_n))$$

así, por el teorema de cambio de variable

$$\int_{V_\alpha} \omega = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1, ..., dx_n = \int_{U_\beta} |\det(df)| a_\beta dy_1, ..., dy_n$$

y como M es orientable $\det(df) > 0$.

$$\int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{V_\beta} \omega_\beta.$$

Puede suceder que el soporte K de ω no esté contenido en ninguna vecindad coordenada. Para este caso haremos uso de la proposición (1.3) introducida en el capítulo I. Para que tenga sentido la siguiente definición.

Definición 3.3 Sea M una variedad diferenciable n-dimensional compacta orientable. Sea ω una n-forma en M^n. Consideremos $\{\varphi_i\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{V_\alpha\}$ de vecindades coordenadas y tal que $Sop\varphi_i\omega \subseteq V_i$, para todo i, entonces definamos

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_M \varphi_i \omega.$$

Para que la igualdad del lado derecho tenga sentido es necesario verificar que $Sop\varphi_i\omega \subseteq V_i$. En efecto
sea ω una n-forma en M. Fijando i consideremos $q \in \{p \in M : \varphi_i(p)\omega_p \neq 0\}$ entonces $\varphi_i(q)\omega_q \neq 0$ lo que implica que $\varphi_i(q) \neq 0$ y $\omega_q \neq 0$, entonces $q \in \{p \in M : \varphi_i(p) \neq 0\}$
Por lo tanto

$$\{p \in M : \varphi_i(p)\omega_p \neq 0\} \subset \{p \in M : \varphi_i(p) \neq 0\}.$$

Así

$$\overline{\{p \in M : \varphi_i(p)\omega_p \neq 0\}} \subset \overline{\{p \in M : \varphi_i(p) \neq 0\}}.$$

Por lo tanto, $Sop\varphi_i\omega \subset Sop\varphi_i$ Pero, por la proposición (1.3) $Sop\varphi_i \subset V_i$.
Así, $Sop\varphi_i\omega \subset V_i$. Probemos además que la definición dada anteriormente tiene sentido; es decir, no depende de la elección del cubrimiento ni de la partición de la unidad subordinada a dicho cubrimiento.
Consideremos otro cubrimiento $\{W_\beta\}$ de M el cual determina en M la misma orientación como $\{V_\alpha\}$, y sea $\{\psi_j\}$, $j = 1, ..., s$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{W_\beta\}$. Entonces $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$ será un cubrimiento para M y la familia $\varphi_i\psi_j$ será una partición de la unidad subordinada a $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$. Además $Sop\varphi_i\psi_j \subset V_i \cap W_j$ el cual es compacto.
Así

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i\omega &= \sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i \Big(\sum_{j=1}^{s} \psi_j\Big)\omega \\ &= \sum_{ij} \int_M \varphi_i\psi_j\omega \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó que, para cada i, las funciones $\varphi_i\psi_j$ están definidas en V_i. Similarmente

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s} \int_M \psi_j\omega &= \sum_{j=1}^{m} \int_M \Big(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i\Big)\psi_j\omega \\ &= \sum_{ij} \int_M \varphi_i\psi_j\omega \end{aligned}$$

luego

$$\sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i\omega = \sum_{j=1}^{s} \int_M \psi_j\omega$$

por lo tanto la integral de ω no depende de la elección del cubrimiento ni de la partición de la unidad subordinada a dicho cubrimiento.

Teorema 3.1 (Teorema de Stokes) *Sea M^n una variedad diferenciable con frontera, compacta y orientable. Sea ω una $(n-1)$-forma diferenciable en M y sea $i : \partial M \to M$ la función inclusión de la frontera ∂M en M, entonces*

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_M d\omega.$$

Demostración Sea K el soporte de ω. Consideremos los siguientes casos.
Caso A.

Supongamos que K está contenido en alguna vecindad coordenada $V = f(U)$ de una parametrización $f : U \subset H^n \to M$. En U,

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j dx_1 \wedge ... \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge ... \wedge dx_n$$

(ω es una $n-1$-forma que se escribe como combinación lineal de los elementos de la base, cuya base tiene dimensión n) donde $a_j = a_j(x_1, ..., x_n)$ son funciones diferenciables en U. Así.

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Dividamos éste caso en subcasos.

Caso A_1

Supongamos primero que $f(U) \cap \partial M \neq \emptyset$, entonces ω es cero en ∂M, (pues ∂M no contiene puntos de K, porque $K \subset f(U)$). Además $i^*\omega = 0$.

Así,

$$\int_{\partial M} i^*\omega = 0.$$

Probemos que

$$\int_M d\omega = \int_V d\omega = \int_U \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

En efecto. Extendemos la función a_j a H^n.

Dada por

$$a_j(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} a_j(x_1, ..., x_n), & si \ \ (x_1, ..., x_n) \in U \\ 0, & si \ \ (x_1, ..., x_n) \in H^n - U \end{cases}$$

Como $K \subset f(U)$, K es compacto, entonces $f^{-1}(K) \subset U$, por lo que las funciones a_j son diferenciables en H^n.

Ahora, sea $Q \subset H^n$ un paralelepipedo dado por $x_j^1 \leqslant x_j \leqslant x_j^0, \quad j = 1, ..., n$ que contiene a $f^{-1}(K)$ en su interior, figura (3.1). Consideremos la carta coordenada (U_1, f_1) donde $U_i = U \cap intQ$, así, $f^{-1}(K) \subset U_1$ y como la integral es independiente de la escogencia de la vecindad coordenada, se tiene que

$$\int_U \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n = \int_{U_1} \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

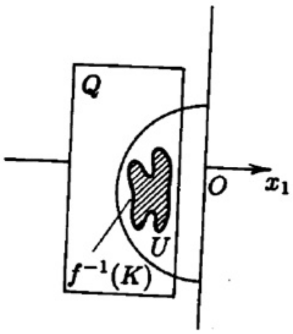

Figura 3.1: Caso A_1.

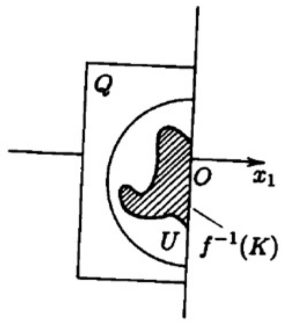

Figura 3.2: Caso A_2.

Por lo tanto.

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_U \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int [a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n) - a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n)] dx_1 \wedge ... \wedge dx_n
\end{aligned}$$

Esta última igualdad es posible gracias al teorema de Fubini y al teorema fundamental del cálculo.
Así,

$$\int_U \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n = 0$$

Pues, $a_j(x_1, ..., x_j^0, ..., x_n) = a_j(x_1, ..., x_j^1, ..., x_n) = 0$ para los puntos que están en U y $a_j(x_1, ..., x_j^0, ..., x_n) = a_j(x_1, ..., x_j^1, ..., x_n)$, para los puntos que están en U.
Por lo tanto

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega$$

Caso A_2.
Supongamos ahora que $f(U) \cap \partial M \neq 0$ entonces la función inclusión i puede ser escrita como: $x_1 = 0$, $x_j = x_j$. Así, usando la orientación inducida en la frontera,

$$i^* \omega = \sum_{j=1}^{n} (i^* a_j)(i^* dx_1 \wedge .... \wedge i^* dx_{j-1} \wedge i^* dx_{j+1} \wedge ... \wedge dx_n \tag{3.1}$$

donde, $i^*dx_j = d(i^*x_j) = d(x_j \circ i) = dx_j$ y $dx_1 = d0 = 0$.
Por lo tanto, sustituyendo en (3.1), nos queda

$$i^*\omega = a_1 \circ i(p) dx_2 \wedge ... \wedge dx_n = a_1(0, x_2, ..., x_n) dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Como en el caso $(A_1$, extendamos la función a_j a H^n, consideremos el paralelepipedo Q dado por
$x_1^1 \leqslant x_1 \leqslant 0, \quad x_j^1 \leqslant x_j \leqslant x_j^0, \ j = 2, ..., n$ y tal que la unión de Q con el hiperplano $x_1 = 0$ contiene a $f^{-1}(K)$,ver figura (3.2). Entonces

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 ... dx_n \\
&= \int_Q [a_1(0, x_2, ..., x_n) - a_1(x_1^1, x_2, ..., x_n)] dx_2 \wedge ... \wedge dx_n \\
&+ \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \int_Q [a_j(x_1, ..., x_j^0, ..., x_n) - a_j(x_1, ..., x_j^1, ..., x_n)] dx_1 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n
\end{aligned}$$

Como $a_j(x_1, ..., x_j^0, ..., x_n) = 0$ para los puntos que están fuera de U, para todo $j = 2, ..., n$ y $a_j(x_1, ..., x_j^0, ..., x_n) = a_j(x_1, ..., x_j^1, ..., x_n)$, para los puntos que están en U y $a_1(x_1^1, x_2, ..., x_n) = 0$, pues $(x_1^1, x_2, ..., x_n) \in H^n - U$
Obtenemos que,

$$\int_M d\omega = \int_Q a_1(0, x_2, ..., x_n) dx_2 ... dx_n = \int_{\partial M} i^*\omega.$$

Caso B: Caso general.
Supongamos que el soporte de ω no está contenido en alguna vecindad coordenada. Sea $\{V_\alpha\}$ un cubrimiento de M por vecindades coordenadas compatible con la orientación y sean $\varphi_1, ..., \varphi_m$ la partición diferenciable de la unidad subordinada al cubrimiento $\{V_\alpha\}$. La forma $\omega_j = \varphi_j \omega$, $j = 1, ..., m$, satisface la condición del caso A es decir, el soporte de $\varphi_j \omega$ está contenido en V_i.
Además $\sum_j d\varphi_j = 0$. Por la parte (a) de la proposición (1.3) tenemos que:
$\sum \omega_j = \omega$, en efecto.

$$\sum_j \omega_j = \sum_j \varphi_j \omega = \omega \sum_j \varphi_j = \omega.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum d\omega_j &= (\varphi_j \omega) \\
&= \sum d\varphi_j \wedge \omega + (-1)^0 \varphi_j \wedge d\omega \\
&= d\omega.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\sum d\omega_j = d\omega$
Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \sum_{j=1}^{m}\int_M d\omega_j \\ &= \sum_{j=1}^{m}\int_{\partial M} i^*\omega_j \\ &= \int_{\partial M} i^*\sum_{j=1}^{m}\omega_j \\ &= \int_{\partial M} i^*\omega.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.11. Sea $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, compacta, orientable con borde ∂M, sea v un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a M^2. Entonces

$$\int_{M^2}\langle rotv, N\rangle\sigma = \int_{\partial M}\langle v, \vec{t}\rangle ds.$$

donde N es el campo normal unitario, σ es el elemento de area de M^2, $\vec{t}$ el vector tangente unitario a ∂M y ds el elemento de arco de ∂M.
Antes de verificar dicha igualdad vamos a dar la siguiente definición.

Definición 3.4 (Operador estrella de Hodge.) Dada una k-forma $\omega \in \mathbb{R}^n$. Se define una $(n-k)$-forma $*\omega$ por.

$$*(dx_{i_1}\wedge ... \wedge dx_{i_k}) = (-1)^{\sigma}(dx_{j_1}\wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}}).$$

Donde $i_1 < ... < i_k$, $j_1 < ... < j_{n-k}$, $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k})$ es una permutación de $(1, ..., n)$ y σ es 0 ó 1 si la permutación es par ó impar respectivamente y el operador $*$ es lineal.

Ejemplo 3.12. Sea $\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$, entonces como $n = 2$ y $k = 1$ $*\omega$ es una $(2-1)$-forma dada por.
$*\omega = *(a_1dx_1) + *(a_2dx_2)$ tal que:
$*dx_1 = (-1)^{\sigma}dx_2$, cuya permutación es $(1, 2)$ como es par $\sigma = 0$.
Por lo tanto
$*dx_1 = dx_2$.
$*dx_2 = (-1)^{\sigma}dx_1$, donde $(2, 1)$ es una permutación impar, así, $\sigma = 1$. Por lo que

$*dx_2 = -dx_1$.
Luego

$$*\omega = a_1 dx_2 - a_2 dx_1.$$

En primer lugar, tenemos que $rotv = *(d\omega)$, donde ω es la 1-forma dual a v en el producto interno natural de $\mathbb{R}^3$, ver definición (2,18) del capítulo 2. Ahora escojamos un campo ortonormal local e_1, e_2, N tal que e_1, e_2 son tangentes a M y e_1 es tangente a ∂M. Así, obtenemos por la definición del *operador estrella de Hodge*.

$$d\omega(e_1, e_2) = (*d\omega)(N) = \langle rotv, N\rangle$$

Esta última igual es por identificación, gracias al isomorfismo canónico.
Por otra parte,

$$\omega(e_1) = \langle v, e_1\rangle = \langle v, \vec{t}\rangle$$

Además,

$$d\omega(e_1, e_2) = \langle rotv, N\rangle \sigma(e_1, e_2)$$

lo que implica que

$$d\omega = \langle rotv, N\rangle \sigma$$

y además

$$i^*\omega = \langle v, \vec{t}\rangle ds$$

Ahora aplicando el teorema de Stokes.

$$\int_{M^2} \langle rotv, N\rangle \sigma = \int_{\partial M} \langle v, \vec{t}\rangle ds.$$

que normalmente se conoce en el cálculo

$$\int_{M^2} \nabla \times \vec{V} d\vec{s} = \int_{\partial M} \vec{V} d\vec{l}$$

CAPÍTULO 4

Teorema de Gauss-Bonnet

Definición 4.1 (Variedad riemaniana) Una *variedad riemaniana* es una variedad diferenciable M junto con una función g diferenciable que asigna a cada punto $p \in M$ un producto interno positivo $\langle , \rangle_p$ definido en un espacio tangente T_pM de M en p, tal que g es diferenciable en p en el siguiente sentido: Si X e Y son campos vectoriales diferenciables en M entonces la función $g : p \mapsto \langle X, Y\rangle_p$, $p \in M$, es diferenciable en M. Diferenciable siempre significará de clase C^∞. El producto interno $\langle , \rangle$ es usualmente llamado una métrica Riemaniana en M.
Una noción natural de equivalencia entre variedades riemaniana es la noción de isometría. Un difeomorfismo $f : M \to M^{'}$ entre dos variedades riemanianas M y M' es una isometría si para todo $p \in M$ y todo para $X, Y \in T_pM$ se tiene

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle df_p(X), df_p(Y)\rangle_{f(p)}$$

4.1. Ecuaciones estructurales. Curvatura gaussiana.

Iniciaremos, por tanto, estableciendo las llamadas ecuaciones de estructura de $\mathbb{R}^n$. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sean $e_1, ..., e_n$, n campos diferenciables de vectores en U de tal modo que, para todo $p \in U$, se tiene que $\langle e_i, e_j\rangle_p = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\quad i, j = 1, ..., n$. Un tal conjunto de campos de vectores es llamado *un referencial ortonormal móvil* en U. De ahora en adelante omitiremos los adjetivos ortonormal y móvil. A partir del referencial $\{e_i\}$ podemos definir formas diferenciales lineales $\omega_1, ..., \omega_n$ por la condición $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$; en otras palabras, en cada punto $p \in U$, la base $\{(\omega_i)_p\}$ es una base dual de la base $\{(e_i)_p\}$. El conjunto de las formas diferenciales es llamado *el correferencial asociado* al referencial $\{e_i\}$
Cada campo e_i puede ser pensado como una aplicación diferenciable $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. La diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_p$, con $p \in M$ es una aplicación lineal. Por tanto, para todo

$v \in \mathbb{R}^n$, podemos escribir

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v)e_j$$

Es inmediato verificar que las expresiones $(\omega_{ij})_p(v)$, encima definidas, dependen linealmente de v. Por tanto $(\omega_{ij})_p$ es una forma lineal en $\mathbb{R}^n$. Como e_i es una campo diferenciable, ω_{ij} es una forma lineal diferenciable. Con éste significado en mente, escribimos

$$de_i = \sum_j \omega_{ij}e_j$$

Llamaremos a las formas ω_{ij}, formas de conexión de $\mathbb{R}^n$ en el referencial $\{e_i\}$.
Derivando la expresión $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, obtenemos

$$0 = \langle de_i, e_j\rangle + \langle e_i, de_j\rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji}.$$

Esto es, las formas de conexión $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ son antisimétricas en los índices i, j

Proposición 4.1 (Las ecuaciones estructurales de $\mathbb{R}^n$) *Sea $\{e_i\}$ un referencial ortonormal móvil en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\{\omega_i\}$ el correferencial asociado a $\{e_i\}$. Entonces*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \tag{4.1}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad k = 1, ..., n \tag{4.2}$$

Demostración
Sea $a_1 = (1, ..., 0)$, $a_2 = (0, 1, ..., 0)$,...,$a_n = (0, ..., 1)$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_i : U \to \mathbb{R}$ la función que asigna al punto $(x_1, ..., x_n)$ su i-ésima coordenada. Entonces dx_i es una 1-forma diferenciable en U y, como $dx_j(a_j) = \delta_{ij}$, concluimos que $\{dx_i\}$ es el correferencial asociado a $\{a_i\}$. Ahora, escribimos

$$e_i = \sum_j \beta_{ij}a_j, \tag{4.3}$$

donde β_{ij} son funciones diferenciables en U, y para cada $p \in U$, la matriz $(\beta_{ij}(p))$ es una matriz ortogonal.
En efecto
sea $p \in U$ consideremos $\beta = [\beta_{ij}(p)]_{n\times n}$ y $\beta^t = [\beta_{lk}(p)]_{n\times n}$ tal que $\beta \cdot \beta^t = [C_{ik}(p)]_{n\times n}$. Así,

$$C_{ik} = \sum_{j,l}^{n} \beta_{ij} \cdot \beta_{kl}, \qquad i, k = 1, ..., n.$$

Pero

$$\begin{aligned} C_{ik} &= \sum_{j,l}^{n} \beta_{ij} \cdot \beta_{kl} \\ &= (\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j) \cdot (\sum_{l=1}^{n} \beta_{kl} a_l) \\ &= e_i \cdot e_k, \quad i,k = 1, ..., n \end{aligned}$$

Y como $\{e_i\}$ son ortonormales se tiene que $e_i \cdot e_k = 1, \ \ i = k \quad$ o $\quad e_i \cdot e_k = 0, \ \ i \neq k.$
Por lo tanto,

$$\beta \cdot \beta^t = [C_{ik}(p)]_{n \times n} = I$$

Así, β es una matriz ortonormal.
Además, como $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ entonces

$$\begin{aligned} (\sum_k \beta_{ik} dx_k)(e_j) &= (\sum_k \beta_{ik} dx_k)(\sum_l \beta_{jl} a_l) \\ &= \sum_{kl} \beta_{ik} \beta_{jl} \delta_{kl} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\omega_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j, \tag{4.4}$$

Afirmamos que $d\beta_{ij} = \sum_j \omega_{ik} \beta_{kj}$

En efecto,

$$\begin{aligned} de_i &= \sum_k \omega_{ik} e_k \\ &= \sum_k \omega_{ik} (\sum_j \beta_{kj} a_j) \\ &= \sum_{jk} \omega_{ik} \beta_{kj} a_j \end{aligned}$$

Diferenciando (4.3)

$$de_i = \sum d\beta_{ij} a_j$$

y obtenemos por comparación

$$d\beta_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \beta_{kj}. \tag{4.5}$$

Así, diferenciando (4.4) y sustituyendo (4.5) nos queda

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j \\ &= \sum_j (\sum_k \omega_{ik}\beta_{kj}) \wedge dx_j \\ &= \sum_{jk} \beta_{kj} dx_j \wedge \omega_{ik} \\ &= \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ik} \end{aligned}$$

Para la segunda ecuación estructural, diferenciamos la ecuación $d\beta_{ij} = \sum_k \omega_{ik}\beta_{kj}$, tenemos que,

$$0 = \sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj}$$

así,

$$\sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj}$$

pero,

$$d\beta_{kj} = \sum_s \omega_{ks}\beta_{sj}$$

lo que implica que

$$\sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \sum_s \omega_{ks}\beta_{sj}$$

Multiplicando por la inversa de (β_{kj}), nos queda

$$d\omega_{is} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{ks}.$$

■

Lema 4.1 (Lema de Cartan) *Sea V^n un campo vectorial de dimensión n, y sea $\omega_1, ..., \omega_r : V^n \to \mathbb{R}$, $r \leqslant n$, formas lineales en V que son linealmente independientes. Supongamos que existen formas $\theta_1, ..., \theta_r : V \to \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0$ entonces*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \quad con \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Demostración

Completemos las formas ω_i en la base $\omega_1, ..., \omega_r, \omega_{r+1}, ..., \omega_n$ de V^* y escribamos

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l, \qquad l = r+1, ..., n$$

Sustituyendo nos queda

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge (\sum_j a_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l) \\ &= \sum_{ij} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{il} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l \\ &= \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji})\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i<l} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l \end{aligned}$$

Pero, $\omega_k \wedge \omega_s, \quad k < s = 1, ..., n$ son linealmente independientes, concluimos que $a_{ij} = a_{ji}$. Así

$$\sum_{i<l} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l = 0$$

y como ω_r son linealmente independientes, se tiene que $b_{il} = 0$. Por lo tanto,

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j$$

■

Lema 4.2 *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\omega_1, ..., \omega_n$ 1-formas diferenciales en U linealmente independientes. Supongamos que existe un conjunto de 1-formas diferenciales $\{\omega_{ij}\}, \quad i, j = 1, ..., n$ que satisface la condición $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $d\omega_j = \sum \omega_k \wedge \omega_{kj}$ entonces tal conjunto es único.*

Demostración

Supongamos que existe $\bar{\omega}_{ij}$ con $\bar{\omega}_{ij} = -\bar{\omega}_{ji}$, $d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \bar{\omega}_{kj}$, entonces igualando.

$$\sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj} = \sum_k \omega_k \wedge \bar{\omega}_{kj}$$

Implica que

$$\sum_k \omega_k (\bar{\omega}_k j - \omega_{kj}) = 0$$

Entonces, por el lema de Cartan

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B^j_{ki}\omega_i, \qquad B^j_{ki} = B^j_{ik}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} &= \sum_i B^j_{ki}\omega_i \\ &= -(\bar{\omega}_{jk} - \omega_{jk}) \\ &= -\sum B^k_{ji}\omega_i\end{aligned}$$

Como las ω_i son linealmente independientes entonces $B^j_{ki} = -B^k_{ji}$. Usando la simetría

$$B^k_{ji} = -B^j_{ki} = -B^j_{ik} = B^i_{jk} = B^i_{kj} = -B^k_{ij} = -B^k_{ji}$$

Entonces

$$B^k_{ji} = -B^k_{ji}$$

Lo que implica que

$$-B^k_{ji} = 0$$

Así,

$$B^j_{ki} = 0$$

Por lo tanto,

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B^j_{ki}\omega_i = 0$$

Entonces

$$\bar{\omega}_{kj} = \omega_{kj}$$

Por lo tanto, el conjunto es único. ■

DEFINICIÓN 4.2 Sea $X : M \to \mathbb{R}^{n+q}$, diremos que X es una inmersión si X es diferenciable y su diferencial $dX_p : T_p(M) \to \mathbb{R}^{n+q}$ es inyectiva para todo punto $p \in M$.

Vamos aplicar el método del referencial móvil a un caso particular, se trata de la teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$. Sea M una variedad diferenciable de dimensión dos y $X : M \to \mathbb{R}^3$ una inmersión. Para cada punto $p \in M$ fijo definamos un producto interno $\langle , \rangle_p$ en $T_p(M)$ por la regla.
Si $v_1, v_2 \in T_p(M)$ entonces $\langle v_1, v_2\rangle_p = \langle dX_p(v_1), dX_p(v_2)\rangle_{X(p)}$,
donde en el segundo miembro aparece el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Es inmemdiato verificar que $\langle , \rangle_p$ es diferenciable y define, por tanto, una métrica riemaniana en M, llamada la métrica inducida por la inmersión X.
Vamos a estudiar la geometría local de M entorno al punto $p \in M$. Sea $U \subset M$ una

vecindad de p en M tal que la restricción X/U sea inyectiva. Sea V una vecindad de $X(p)$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $X(U) \subset V$. Tomando U y V suficientemente pequeño, podemos escoger en V un referencial ortonormal móvil e_1, e_2, e_3, adaptado a X, esto es, de modo que, cuando restrinjamos a $X(U)$, e_1 y e_2 sean tangentes a $X(U)$ (e_3 será entonces normal a $X(U)$).
En V definamos las formas ω_i, que son los correferenciales $\{e_i\}$, $\quad i = 1,2,3$ y las formas de conexión $\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\omega_{32} = -\omega_{23}$, $\omega_{13} = -\omega_{31}$, tales formas satisfacen en V las siguientes estructuras:

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31} \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12} + \omega_3 \wedge \omega_{32} \\
d\omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} \\
d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} \\
d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\
d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13}
\end{aligned}
$$

La inmersión $X : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^3$ induce en U formas $X^*(\omega_i)$,$X^*(\omega_{i,j})$, $\quad i,j = 1,2,3$. Como X^* conmuta con d y $\wedge$, tales formas satisfacen las mismas ecuaciones dadas anteriormente. Obsérvese que $X^*(\omega_3) = 0$
Pues para todo $q \in U$ y todo $v \in T_p(M)$, tenemos $dX(v) = a_1e_1 + a_2e_2$ y por tanto

$$
\begin{aligned}
(X^*\omega_3)(v) &= \omega_3(dX(v)) \\
&= \omega_3(a_1e_1 + a_2e_2) \\
&= a_1\omega_3(e_1) + a_2\omega_3(e_2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Para no sobrecargar de notación convendremos escribir $X^*\omega_i = \omega_i$, $X^*\omega_{ij} = \omega_{ij}$ tratándose de formas en U. Ésta convención equivale a pensar a U como un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ por la inclusión $X : U \to \mathbb{R}^3$ (observe que X/U es inyectiva) y pensar las formas ω_i, ω_{ij} como restrictas a $U \subset V \subset \mathbb{R}^3$. Tales formas satisfacen por tanto las ecuaciones estructurales, con la relación $\omega_3 = 0$.
Pasemos ahora al estudio de la geometría local de M. Como $\omega_3 = 0$, tenemos que $d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$ entonces, por el lema de Cartan

$$
\begin{aligned}
\omega_{13} &= h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 \\
\omega_{23} &= h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2
\end{aligned}
$$

donde $h_{ij} = h_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$ son funciones diferenciables en U.
Para interpretar geométricamente estas funciones observemos que, por un lado,

$$\begin{aligned} \omega_{13}(e_1) &= h_{11}\omega_1(e_1) + h_{12}\omega_2(e_1) \\ \omega_{13}(e_2) &= h_{12} \\ \omega_{23}(e_1) &= h_{21} \\ \omega_{23}(e_2) &= h_{22} \end{aligned}$$

Y por otro lado, como $de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j$

$$de_3(v) = \omega_{31}(v)e_1 + \omega_{32}(v)e_2 \qquad \textit{para todo } q \in U \ \ \textit{y todo } v \in T_qM$$

por otro lado escribamos,

$$v = a_1e_1 + a_2e_2$$

Y obtenemos

$$\begin{aligned} de_3(v) &= \omega_{31}(a_1e_1 + a_2e_2)e_1 + \omega_{32}(a_1e_1 + a_2e_2)e_2 \\ &= [a_1\omega_{31}(e_1) + a_2\omega_{31}(e_2)] + [a_1\omega_{32}(e_1) + a_2\omega_{32}(e_2)]e_2 \\ &= (-a_1h_{11} - a_2h_{12})e_1 + (-a_1h_{21} - a_2h_{22})e_2 \end{aligned}$$

así,

$$de_3(v) = -\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Esto es, $(-h_{ij})$ es una matriz de la diferencial de la aplicación $e_3 : U \to \mathbb{R}^3$ en la base $\{e_1, e_2\}$. Como $|e_3| = 1$, ésta última aplicación toma valores en la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Fijemos una orientación en U y escojamos un referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$ de tal modo que, para todo $q \in U$, $(e_1)_q, (e_2)_q$ sea una base de T_qM en la orientación escogida y $(e_1)_q, (e_1)_q, (e_1)_q$ sea una base positiva de $\mathbb{R}^3$; un tal referencial, se dice compatible con la orientación de U. En nuestro caso la aplicación $e_3 : U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ está completamente definida y es llamada la aplicación normal de Gauss en U.
Por lo tanto, $(-h_{ij})$ es una matriz de la diferencial de la aplicación normal de Gauss en la base $\{e_1, e_2\}$. Como la matriz (h_{ij}) es simetrica, concluimos inmediatamente que la diferencial $de_3 : TM \to TS^2$ de la función de Gauss $e_3 : U \to S^2$ es una aplicación lineal, una tal aplicación lineal puede ser diagonalizada, con valores propios $-\lambda_1, -\lambda_2$ reales, y vectores propios ortogonales. Es usual definir la curvatura gaussiana K de M en p por

$$K = det(de_3)_p = \lambda_1\lambda_2 = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$

La expresión de K en términos del referencial asociado nos queda:

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} \\ &= -(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) \\ &= -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= -K\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

La expresión $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ permite demostrar uno de los teoremas más importantes en la teoría de superficie en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.1 (Gauss.) *K depende únicamente de la métrica inducida de M^2; esto es, si $x, x' : M \to \mathbb{R}^3$ son dos inmersiones de M^2 con la misma métrica inducida, entonces $K(p) = K'(p)$, $p \in M$, donde K y K' son las curvaturas Gaussianas de x y x', respectivamente.*

Demostración.
Sea $U \subset M$ una vecindad de p y consideremos el referencial móvil $\{e_1, e_2\} \in U$, ortonormal en la métrica inducida. El conjunto $\{dx(e_1), dx(e_2)\}$ puede ser extendido a un referencial adaptado en $V \supset x(U)$ y, similarmente, el conjunto $\{dx'(e_1), dx'(e_2)\}$ puede ser extendido a un referencial adaptado en $V' \supset x'(U)$. Denotaremos con prima todo lo que se refiere a la inmersión x'. Entonces $\omega_1 = \omega_1'$, $\omega_2 = \omega_2'$. Por la unicidad del lema (4.2), $\omega_{12} = \omega_{12}'$. De esto se sigue que

$$d\omega_{12} = d\omega_{12}' = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -K'\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Así

$$K = K'$$

■

A continuación presentaremos algunos lemas previos, para definir la curvatura gaussiana y probar que no depende de la escogencia del referencial.

Lema 4.3 (Teorema de Levi Civitta) *Sea M^2 una variedad riemaniana (2-dimensional), sea $U \subset M$ un conjunto abierto donde un referencial ortonormal móvil $\{e_1, e_2\}$ es definido y sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ el referencial ortonormal asociado. Entonces existe una única 1-forma $\omega_{12} = -\omega_{21}$ tal que*

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \tag{4.6}$$

$$d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 \tag{4.7}$$

Demostración.
La unicidad ya ha sido probada en el lema (4.2). Para probar la existencia definamos

$$\begin{aligned} \omega_{12}(e_1) &= d\omega_1(e_1, e_2) && (4.8) \\ \omega_{12}(e_2) &= d\omega_2(e_1, e_2) && (4.9) \end{aligned}$$

Usando (4.8) verifiquemos que se cumple (4.6).

$$\begin{aligned} d\omega_1(e_1, e_2) &= \omega_{12}(e_1) \\ &= \omega_{12}(e_1)\omega_2(e_2) - \omega_{12}(e_2)\omega_2(e_1) \\ &= \omega_{12} \wedge \omega_2(e_1, e_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2.$$

Análogamente se verifica la otra ecuación. ■
El problema ahora es obtener entidades geometricas (es decir, independiente de la elección del referencial) de las formas $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$. Para eso, conviene ver como tales formas cambian bajo un cambio de referencial.
Sea $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ otro referencial en U. Si $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tiene la misma orientación de $\{e_1, e_2\}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= fe_1 + ge_2 \\ \bar{e}_2 &= -ge_1 + fe_2 \end{aligned}$$

donde f y g son funciones diferenciables en U, y $f^2 + g^2 = 1$; por otro lado, si la orientación de $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ y $\{e_1, e_2\}$ son opuestas, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= fe_1 + ge_2 \\ \bar{e}_2 &= ge_1 - fe_2 \end{aligned}$$

Lema 4.4 *Si $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ y $\{e_1, e_2\}$ tienen la misma orientación, entonces*

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau$$

donde $\tau = fdg - gdf$. Si $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ y $\{e_1, e_2\}$ tienen orientaciones opuestas, entonces

$$\omega_{12} = -\bar{\omega}_{12} - \tau$$

Demostración.
Supongamos que las orientaciones son las mismas, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= fe_1 + ge_2\\ \bar{e}_2 &= -ge_1 + fe_2\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\omega_1(\bar{e}_1) &= \omega_1(fe_1 + ge_2)\\ &= f\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\omega_1(\bar{e}_2) &= \omega_1(-ge_1 + fe_2)\\ &= -g.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\omega_1 = f\bar{\omega}_1 - g\bar{\omega}_2 \tag{4.10}$$

y

$$\omega_2 = g\bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2 \tag{4.11}$$

Diferenciando (4.10), se tiene que

$$d\omega_1 = df \wedge \bar{\omega}_1 + fd\bar{\omega}_1 - dg \wedge \bar{\omega}_2 - gd\bar{\omega}_2$$

Usando las ecuaciones estructurales

$$\begin{aligned}d\bar{\omega}_1 &= \bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_{21}\\ d\bar{\omega}_2 &= \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_{12}\\ \bar{\omega}_{12} &= -\bar{\omega}_{21}\end{aligned}$$

nos queda

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= df \wedge \bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_{21} - dg \wedge \bar{\omega}_2 - g\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_{12} \\
&= df \wedge \bar{\omega}_1(f^2+g^2) + f\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_{21} - dg \wedge \bar{\omega}_2(f^2+g^2) - g\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_{12} + fgdf \wedge \bar{\omega}_2 - fgdf \wedge \bar{\omega}_2 \\
&+ fgdg \wedge \bar{\omega}_1 - fgdg \wedge \bar{\omega}_1 \\
&= f^2 df \wedge \bar{\omega}_1 + g^2 df \wedge \bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_{21} - f^2 dg \wedge \bar{\omega}_2 - g^2 dg \wedge \bar{\omega}_2 - g\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_{12} + fgdf \wedge \bar{\omega}_2 \\
&- fgdf \wedge \bar{\omega}_2 + fgdg \wedge \bar{\omega}_1 - fgdg \wedge \bar{\omega}_1 \\
&= f^2 df \wedge \bar{\omega}_1 + g^2 df \wedge \bar{\omega}_1 - f\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_{12} - f^2 dg \wedge \bar{\omega}_2 - g^2 dg \wedge \bar{\omega}_2 - g\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_{12} + fgdf \wedge \bar{\omega}_2 \\
&- fgdf \wedge \bar{\omega}_2 + fgdg \wedge \bar{\omega}_1 - fgdg \wedge \bar{\omega}_1 \\
&= f^2 df \wedge \bar{\omega}_1 + g^2 df \wedge \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{12} \wedge f\bar{\omega}_2 - f^2 dg \wedge \bar{\omega}_2 - g^2 dg \wedge \bar{\omega}_2 - g\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_{12} + fgdf \wedge \bar{\omega}_2 \\
&- fgdf \wedge \bar{\omega}_2 + fgdg \wedge \bar{\omega}_1 - fgdg \wedge \bar{\omega}_1 \\
&= \bar{\omega}_{12} \wedge (f\bar{\omega}_2 + g\bar{\omega}_1) + fdf \wedge (f\bar{\omega}_1 - g\bar{\omega}_2) + gdg \wedge (f\bar{\omega}_1 - g\bar{\omega}_2) + gdf \wedge (g\bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2) \\
&- fdg \wedge (g\bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2) \\
&= \bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 + fdf \wedge \omega_1 + gdg \wedge \omega_1 + gdf \wedge \omega_2 - fdg \wedge \omega_2 \\
&= \bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 + (fdf + gdg) \wedge \omega_1 + (gdf - fgd) \wedge \omega_2
\end{aligned}
$$

Como $f^2 + g^2 = 1$, entonces $fdf + gdg = 0$. Así

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= \bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 + (gdf - fdg) \wedge \omega_2 \\
&= \bar{\omega}_{12} \wedge \omega_2 - \tau \wedge \omega_2.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$d\omega_1 = (\bar{\omega}_{12} - \tau \wedge \omega_2) \wedge \omega_2.$$

Similarmente diferenciando (4.11) obtenemos

$$d\omega_2 = -(\bar{\omega}_{12} - \tau) \wedge \omega_2$$

Pero, por las ecuaciones estructurales

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_{21} \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12}
\end{aligned}
$$

entonces por la igualdad de las formas de conexión. Lema (4.3)

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau.$$

Hemos probado la primera parte del lema, el caso en el cual la orientación es opuesta es totalmente análogo. ■

Una interpretación geométrica para la 1-forma τ es dada debajo y afirmamos que, a lo largo de una curva en U, τ es el diferencial (de la función ángulo) entre e_1 y $\bar{e}_1$ a lo largo de la curva; actualmente, lo que vamos hacer es probar que es posible definir tal función de modo que sea diferenciable.

Lema 4.5 *Sea $p \in U$ un punto y sea $\gamma : I \to U$ una curva tal que $\gamma(t_0) = p$, sea $\varphi_0 = angulo(e_1(p), \bar{e}_1(p))$ entonces*

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \left(f\frac{dg}{dt} - g\frac{df}{dt} \right) dt + \varphi_0$$

Demostración

Primero vamos a probar que $f(t)\cos\varphi(t) + g(t)\sin\varphi(t) \equiv 1$

En efecto.

Nótese que de la definición de φ tenemos que

$$\varphi' = fg' - gf' \tag{4.12}$$

Así

$$\begin{aligned}
(f\cos\varphi + g\sin\varphi)' &= f'\cos\varphi - f\sin\varphi\varphi' + g'\sin\varphi + g\cos\varphi\varphi' \\
&= f'\cos\varphi - f\sin\varphi(fg' - gf') + g'\sin\varphi + g\cos\varphi(fg' - gf') \\
&= f'\cos\varphi - f^2g'\sin\varphi + fgf'\sin\varphi + g'\sin\varphi + fgg'\cos\varphi - g^2f'\cos\varphi \\
&= (fgf' - f^2g' + g')\sin\varphi + (f' + fgg' - g^2f')\cos\varphi
\end{aligned}$$

Pero, $f^2 + g^2 = 1$ entonces $ff' + gg' = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(fgf' - f^2g' + g')\sin\varphi + (f' + fgg' - g^2f')\cos\varphi &= (g'(1 - f^2) + fgf')\sin\varphi \\
&+ (f'(1 - g^2) + fgg')\cos\varphi \\
&= (g'g^2 + fgf')\sin\varphi + (f'f^2 + fgg')\cos\varphi \\
&= g(gg' + ff')\sin\varphi + f(ff' + gg')\cos\varphi \\
&= g \cdot (0) \cdot \sin\varphi + f \cdot (0) \cdot \cos\varphi
\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$(f\cos\varphi + g\sin\varphi)' = 0$$

Por lo tanto

$$f \cos\varphi + g \sin\varphi = cost$$

Pero, $\varphi(t_0) = \varphi_0$ y $\varphi_0 = ang(e_1(p), \bar{e}_1)$. Por lo que $\cos\varphi_0 = f(t_0)$ y $\sin\varphi_0 = g(t_0)$. Ahora bien, sea t_0 entonces

$$\begin{aligned} f(t_0)\cos\varphi(t_0) + g(t_0)\sin\varphi(t_0) &= f(t_0)\cos\varphi_0 + g(t_0)\sin\varphi_0 \\ &= f(t_0)f(t_0) + g(t_0)g(t_0) \\ &= (f^2 + g^2)(t_0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como $f \cos\varphi + g \sin\varphi = cost$ y hemos obtenido que $f(t_0)\cos\varphi(t_0) + g(t_0)\sin\varphi(t_0) = 1$ entonces

$$f(t)\cos\varphi(t) + g(t)\sin\varphi(t) = 1.$$

Además

$$\begin{aligned} (f - \cos\varphi)^2 + (g - \sin\varphi)^2 &= f^2 - 2f\cos\varphi + \cos^2\varphi + g^2 - 2g\sin\varphi + \sin^2\varphi \\ &= 2 - 2f\cos\varphi - 2g\sin\varphi \\ &= 2 - 2(f\cos\varphi - g\sin\varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$(f - \cos\varphi)^2 + (g - \sin\varphi)^2 = 0$$

Por lo tanto
$f = \cos\varphi$ y $g = \sin\varphi$ ■
Es de hacer notar que la forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ no depende del referencial escogido (dentro e la clase de referenciales escogidos con la orientación de M), y es, por tanto, definida globalmente en M. En efecto, la forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ aplicada a un par de vectores $u = u_1e_1 + u_2e_2$, $v = v_1e_1 + v_2e_2$ de $T_p(M)$, linealmente independientes en la orientación de T_pM, por tanto

$$\omega_1 \wedge \omega_2(u, v) = \omega_1(u)\omega_2(v) - \omega_2(u)\omega_1(v) = u_1v_2 - u_2v_1$$

que es el área del paralelogramo formado por u y v. Por esta razón $\omega_1 \wedge \omega_2 = \sigma$ es llamado el elemento de área de M. Además usando las ecuaciones (4.10) y (4.11) es posible obtener.

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (f\bar{\omega}_1 - g\bar{\omega}_2) \wedge (g\bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2) \\ &= f^2\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + g^2\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= (f^2 + g^2)\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2$$

Proposición 4.2 *Sea M^2 una variedad riemaniana de dimensión dos. Para cada $p \in M$ definamos un número $K(p)$ que escoge un referencial móvil $\{e_1, e_2\}$ alrededor de p y obtenemos*

$$d\omega_{12}(p) = -K(p)(\omega_1 \wedge \omega_2)(p)$$

entonces $K(p)$ no depende de la escogencia del referencial, y es llamado la curvatura gaussiana de M en p.

Demostración.
Sea $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ otro referencial alrededor de p. Supongamos primero que los dos referenciales tienen la misma orientación. Entonces por el lema (4.4)

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau$$

Como $\tau = fdg - gdf$, entonces $d\tau = 0$.
Así
$d\omega_{12} = d\bar{\omega}_{12} - d\tau$ impica que $d\omega_{12} = d\bar{\omega}_{12}$. De lo cual se sigue que

$$\begin{aligned} -K\omega_1 \wedge \omega_2 &= d\omega_{12} \\ &= d\bar{\omega}_{12} \\ &= -\bar{K}\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= -K\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$K = \bar{K}$$

Supongamos que las orientaciones son opuestas

$$\omega_{12} = -\bar{\omega}_{12} - \tau$$

Y además

$$\begin{aligned}\omega_1 &= f\bar{\omega}_1 + g\bar{\omega}_2\\ \omega_2 &= g\bar{\omega}_1 - f\bar{\omega}_2\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 &= (f\bar{\omega}_1 + g\bar{\omega}_2) \wedge (g\bar{\omega}_1 - f\bar{\omega}_2)\\ &= -f^2\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 - g^2\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\\ &= -\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2.\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}-K\omega_1 \wedge \omega_2 &= d\omega_{12}\\ &= -d\bar{\omega}_{12}\\ &= -(-\bar{K}\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2)\\ &= -\bar{K}\omega_1 \wedge \omega_2.\end{aligned}$$

Por tanto

$$K = \bar{K}.$$

■

4.2. Derivada covariante. Curvatura geodésica.

Las entidades geométricas que sólo dependen de la métrica inducida de M es llamada geometría intrínseca de la variedad. Además de la curvatura gaussiana, otro concepto que puede ser definido intrísecamente es el de derivada covariante de campos de vectores, que pasaremos a introducir. Sea Y un campo diferenciable de vectores tangentes a M y sea $x \in T_pM$, $p \in M$. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una curva con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$. Restringiendo a la curva α, el campo $Y(\alpha(t)) = Y(t)$ es una función vectorial $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$. Se define la derivada covariante $\nabla_x Y$ de Y en x en el punto p por $(\nabla_x)Y(p)$ igual a la proyección ortogonal sobre T_pM de $(\frac{dY}{dt})_{t=0}$.
En otras palabras, $(\nabla_x)Y(p)$ es la parte de la derivada usual $(\frac{dY}{dt})_{t=0}$ que es vista desde T_pM.

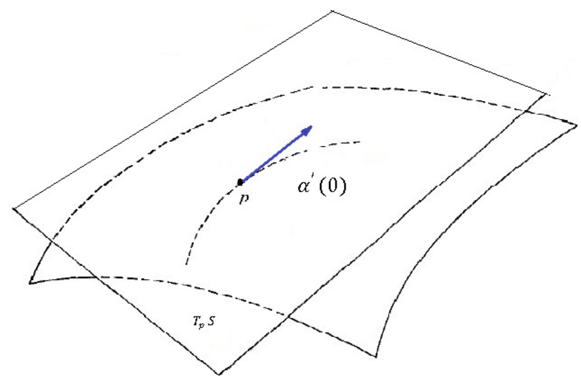

Figura 4.1: Derivada covariante

Definición 4.3 (Derivada covariante.) Sea M^2 una variedad riemaniana y sea Y un campo diferenciable de vectores en M. Sea $p \in M$, $x \in T_pM$, y cosideremos una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = x$. Definamos la derivada covariante $(\nabla_x Y)(p)$ de Y relativo a x en p, escojamos un referencial $\{e_i\}$ alrededor de p, la expresión de $Y(\alpha(t))$ en el referencial viene dada por.

$$Y(\alpha(t)) = \sum y_i(t)e_i,$$

por tanto

$$(\nabla_x Y)(p) = \sum_i \left(\frac{dy_i}{dt}(0) + \sum_j \omega_{ji} y_j(0) \right) e_i,$$

convenimos que $\omega_{ii} = 0$

Lema 4.6 *La derivada covariante no depende de la elección del referencial.*

Demostración.
Sean $\{e_1, e_2\}$ y $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ dos referenciales ortonormales alrededor de p. Supongamos que tienen la misma orientación entonces

$$\begin{aligned} y_1 &= f\bar{y}_1 - g\bar{y}_2 \\ y_2 &= g\bar{y}_1 + f\bar{y}_2 \\ e_1 &= f\bar{e}_1 - g\bar{e}_2 \\ e_2 &= g\bar{e}_1 + f\bar{e}_2 \end{aligned}$$

donde $Y(\alpha(t)) = \sum y_i(t)e_i = \sum \bar{y}_i(t)\bar{e}_i$, y f y g son funciones diferenciables con $f^2+g^2 = 1$. Por definición

$$\nabla_x Y = \left(\frac{dy_1}{dt} + \omega_{21}(x)y_2\right)e_1 + \left(\frac{dy_2}{dt} + \omega_{12}(x)y_1\right)e_2$$

las funciones son tomadas en $t = 0$. Usando las ecuaciones descritas anteriormente y el hecho de que $\omega_{12} = \overline{\omega}_{12} - \tau$ y $ff' + gg' = 0$ y

$$\frac{dy_1}{dt} = f\frac{d\bar{y}_1}{dt} + f'\bar{y}_1 - g\frac{d\bar{y}_2}{dt} - g'\bar{y}_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = g\frac{d\bar{y}_1}{dt} + g'\bar{y}_1 + f\frac{d\bar{y}_2}{dt} + f'\bar{y}_2$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla_x Y &= \left(\frac{dy_1}{dt} + \omega_{21}(x)y_2\right)e_1 + \left(\frac{dy_2}{dt} + \omega_{12}(x)y_1\right)e_2 \\
&= \left(f\frac{dy_1}{dt} + f'\bar{y}_1 - g\frac{dy_2}{dt} - g'\bar{y}_2 + \omega_{21}(x)(g\bar{y}_1 + f\bar{y}_2)\right)e_1 \\
&+ \left(g\frac{dy_1}{dt} + g'\bar{y}_1 + f\frac{dy_2}{dt} + f'\bar{y}_2 + \omega_{12}(x)(f\bar{y}_1 - g\bar{y}_2)\right)e_2 \\
&= \left(f\frac{dy_1}{dt} + f'\bar{y}_1 - g\frac{dy_2}{dt} - g'\bar{y}_2 + g\bar{y}_1\omega_{21}(x) + f\bar{y}_2)\omega_{21}(x)\right)(f\bar{e}_1 - g\bar{e}_2) \\
&+ \left(g\frac{dy_1}{dt} + g'\bar{y}_1 + f\frac{dy_2}{dt} + f'\bar{y}_2 + f\bar{y}_1\omega_{12}(x) - g\bar{y}_2)\omega_{12}(x)\right)(g\bar{e}_1 + f\bar{e}_2) \\
&= f^2\frac{dy_1}{dt}\bar{e}_1 + ff'\bar{y}_1\bar{e}_1 - gf\frac{dy_2}{dt}\bar{e}_1 - fg'\bar{y}_2\bar{e}_1 + gf\bar{y}_1\omega_{21}(x)\bar{e}_1 + f^2\bar{y}_2)\omega_{21}(x)\bar{e}_1 \\
&- gf\frac{dy_1}{dt}\bar{e}_2 - gf'\bar{y}_1\bar{e}_2 + g^2\frac{dy_2}{dt}\bar{e}_2 + gg'\bar{y}_2\bar{e}_2 - g^2\bar{y}_1\omega_{21}(x)\bar{e}_2 - fg\bar{y}_2)\omega_{21}(x)\bar{e}_2 \\
&+ g^2\frac{dy_1}{dt}\bar{e}_1 + gg'\bar{y}_1\bar{e}_1 + fg\frac{dy_2}{dt}\bar{e}_1 + gf'\bar{y}_2\bar{e}_1 + gf\bar{y}_1\omega_{12}(x)\bar{e}_1 - g^2\bar{y}_2)\omega_{12}(x)\bar{e}_1 \\
&+ fg\frac{dy_1}{dt}\bar{e}_2 + fg'\bar{y}_1\bar{e}_2 + f^2\frac{dy_2}{dt}\bar{e}_2 + ff'\bar{y}_2\bar{e}_2 + f^2\bar{y}_1\omega_{12}(x)\bar{e}_2 - fg\bar{y}_1)\omega_{12}(x)\bar{e}_2 \\
&= \frac{d\bar{y}_1}{dt}\bar{e}_1 + \omega_{21}(x)\bar{y}_2\bar{e}_1 + \frac{d\bar{y}_2}{dt}\bar{e}_2 + \omega_{12}(x)\bar{y}_1\bar{e}_2 \\
&= \left(\frac{d\bar{y}_1}{dt} + \omega_{21}(x)\bar{y}_2\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{d\bar{y}_2}{dt} + \omega_{12}(x)\bar{y}_1\right)\bar{e}_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla_x Y = \left(\frac{d\bar{y}_1}{dt} + \omega_{21}(x)\bar{y}_2\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{d\bar{y}_2}{dt} + \omega_{12}(x)\bar{y}_1\right)\bar{e}_2.$$

■

Nótese que la derivada covariante puede ser usada para dar una interpretación geométrica a la forma de conexión ω_{12} asociada a un referencial $\{e_1, e_2\}$.
En efecto como $e_1 = 1e_1 + 0e_2$ obtenemos $\nabla_x e_1 = \omega_{12} e_2$. Así

$$\omega_{12}(x) = \langle \nabla_x e_1, e_2 \rangle$$

por lo que la forma de conexión aplicada a un vector x es la e_2 componente de la derivada covariante.

Definición 4.4 Un campo vectorial Y a lo largo de la curva $\alpha : I \to M^2$ se dice paralelo a lo largo de α si $\nabla_{\alpha'(t)} Y = 0$, para todo $t \in I$.

Definición 4.5 Una curva $\alpha : I \to M^2$ es una geodésica si $\alpha'(t)$ es un campo paralelo a lo largo de α; es decir,

$$\nabla_{\alpha'(t)} \alpha = 0, \qquad para \;\; todo \;\; t \in I, \quad \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)M}$$

Definición 4.6 Supongamos que M^2 es orientable y sea $\alpha : I \to M$ una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco s con $\alpha'(s) \neq 0$, $s \in I$. En una vecindad de un punto $\alpha(s) \in M$, consideremos un referencial móvil $\{e_1, e_2\}$ en la orientación de M tal que, restringiendo a α, $e_1(s) = \alpha'(s)$. La curvatura geodésica, denotada kg de α en M está definida por

$$kg = (\alpha^* \omega_{12})(\frac{d}{ds})$$

donde $\frac{d}{ds}$ es la base canónica en $\mathbb{R}$.

Proposición 4.3 *Sea $\alpha : I \to M^2$ y $\{e_1, e_2\}$ como en la definición (4.6) (allí no necesitamos suponer que M^2 es orientable, así que hay dos posibles escogencias para e_2). Entonces e_1 es paralelo a lo largo de α si y sólo si $\alpha^* \omega_{12} = 0$*

Demostración
e_1 es paralelo a lo largo de α si y sólo si $\nabla_{\alpha'(s)} e_1 = 0$. Pero $e_1(s) = \alpha'(s)$. Así

$$\nabla_{e_1(s)} e_1 = 0$$

Como $\langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle = 0$ entonces $0 = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle = \omega_{12}(e_1)$. Por lo tanto

$$0 = \omega_{12}(e_1) = \omega_{12}(d\alpha(\frac{d}{ds})) = (\alpha^* \omega_{12})(\frac{d}{ds})$$

Lo que implica que

$$(\alpha^*\omega_{12})(\frac{d}{ds}) = 0.$$

Entonces

$$\alpha^*\omega_{12} = 0$$

■

COROLARIO 4.1 *Una curva diferenciable $\alpha : I \to M^2$ es una geodésica si y sólo si su curvatura geodésica se anula en todas partes.*

Demostración.
α es geodésica si y sólo si $\alpha'(t)$ es paralelo a lo largo de α. Así, $e_1 = \alpha'$ es paralelo a lo largo de α, si y sólo si $\alpha^*\omega_{12} = 0$ si y sólo si $kg = \alpha^*\omega_{12} = 0$.
Por lo tanto,
α es una geodésica si y sólo si su curvatura geodésica kg se anula en todas partes. ■

PROPOSICIÓN 4.4 *Sea M^2 orientable y sea $\alpha : I \to M^2$ una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco s con $\alpha'(s) \neq 0$ $s \in I$. Sea V un campo vectorial paralelo a lo largo de α y sea $\varphi = ang(V, \alpha'(s))$, donde el ángulo es medido en la orientación dada. Entonces*

$$kg(s) = \frac{d\varphi}{ds}$$

Demostración.
Escojamos dos refereciales $\{e_1, e_2\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ alrededor de $\alpha(s)$ como sigue $e_1 = \frac{V}{|V|}$ y e_2 normal a e_1 en la dirección positiva. $\bar{e}_1 = \alpha'(s)$ y $\bar{e}_2$ normal a $\bar{e}_1$ en la dirección positiva.
Primero, definamos a lo largo de un pequeño intervalo de la curva α sobre $\alpha(s)$, y entonces extendamos a una vecindad de $\alpha(s)$ en M (se puede extender porque M^2 es orientable y la derivada de los cambios de coordenadas tienen determinante positivo, no cambian de dirección).
Ahora consideremos φ el ángulo entre e_1 y $\bar{e}_1$. Sabemos por el lema (4.4) que $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau$.
Lo que implica que $\tau = \bar{\omega}_{12} - \omega_{12}$ y además $d\varphi = \alpha^*\tau$. Así,

$$\begin{aligned} d\varphi &= \alpha^*(\bar{\omega}_{12} - \omega_{12}) \\ &= \alpha^*\bar{\omega}_{12} - \alpha^*\omega_{12} \end{aligned}$$

Pero, como $e_1 = \frac{V}{|V|}$ es un campo vectorial paralelo a lo largo de α, entonces $\alpha^*\omega_{12} = 0$.
Por lo tanto,

$$d\varphi = \alpha^*\bar{\omega}_{12}$$

También, como $\bar{e}_1 = \alpha'(s)$, tenemos que

$$\begin{aligned} kg &= (\alpha^* \bar{\omega}_{12}) \frac{d}{ds} \\ &= d\varphi(\frac{d}{ds}) \\ &= \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned}$$

■

4.3. Teorema de Gauss-Bonnet.

Vamos a dar inicio a nuestro estudio del teorema de Gauss-Bonnet, el cual establece una conexión entre la topología y la geometría diferencial. Para ello daremos algunos resultados que serán de gran utilidad en la demostración.

Definición 4.7 (Punto singular.) Sea X un campo vectorial diferenciable en M. Un punto $p \in M$ es un punto singular de X si $X(p) = 0$; el punto singular p es *aislado* si existe una vecindad $V \subset M$ de p la cual no contiene otro punto singular.

Será conveniente escoger un homeomorfismo de V a un disco abierto del plano. Nótese que el número de puntos singulares aislados es finito, cuando M es compacta. A cada punto singular aislado de X, le asociaremos un entero llamado el índice de X en p, como sigue: Primero, escojamos una métrica riemaniana en M, y consideremos el referencial móvil $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, donde $\bar{e}_1 = \frac{X}{|X|}$ y $\bar{e}_2$ es un campo vectorial unitario ortogonal a $\bar{e}_1$ y en la orientación de M, eso determina formas diferenciales $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{12}$ en $V - \{p\}$. Luego escojamos otro referencial móvil $\{e_1, e_2\}$, con la misma orientación que el anterior definido en todo V, así obtenemos formas ω_1, ω_2, ω_{12} en V. La diferencia $\bar{\omega}_{12} - \omega_{12} = \tau$ está definida en $V - \{p\}$.

Ahora consideremos una curva cerrada C que acota una región compacta de V que contiene a p en su interior; por la proposición (1.2) C será orientada como la frontera de esa región. Por el lema (4.5) la restricción de τ a C es la diferencial del ángulo $\varphi(t)$ entre e_1 y $\bar{e}_1$ a lo largo de C. Así

$$\int_C \tau = \int_C d\varphi = 2\pi I.$$

El entero I es llamado el índice de X en p. Intuitivamente el índice es el número de vueltas que el campo X da a lo largo de C.

Nótese que en la definición de índice hemos hecho varias escogencias; la de la métrica riemaniana, la del referencial y la de la curva C. Es claro que necesitamos probar que el índice I no depende de dichas escogencias.

Lema 4.7 *La definición de I no depende de la curva C.*

Demostración.
Sean C_1, C_2 dos curvas cerradas simples alrededor de p como en la definición de índice. Supongamos primero que C_1 y C_2 no se intersectan y consideremos la región Δ acotada por C_1 y C_2. Sea I_1 el índice calculado con C_1 y I_2 el índice calculado con C_2. Por el teorema de Stokes y por el hecho de que $d\tau = 0$.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{C_2}\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta} d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I_1 = I_2$$

Ahora, supongamos que C_1 y C_2 se intersectan. Tomemos una curva C_3 que no intersecta ni a C_1 ni a C_2. Entonces

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 &= \frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{C_3}\tau \\ &= \int_{\Delta_1} d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde Δ_1 es la región anular acotada por C_1 y C_3.Así, $I_1 = I_3$
Análogamente, $I_2 = I_3$ lo que implica que $I_1 = I_3 = I_2$, entonces $I_1 = I_2$. ■

Lema 4.8 *La definición de I no depende de la elección del referencial móvil $\{e_1, e_2\}$. Más precisamente sea $S_r = \partial B_r$ la frontera de un disco de radio r y centro p, y consideremos el referencial $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de la definición, entonces el limite*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{S_r}\bar{\omega}_{12} = \bar{I}$$

existe y $\bar{I} = I$.

Demostración.
Sean S_{r_1} y S_{r_2} círculos concéntricos, $r_2 < r_1$ y sea Δ la región anular acotada por S_{r_1} y S_{r_2}. Por el teorema de Stokes.

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} - \int_{r_2} \bar{\omega}_{12} = \int_{\Delta} d\bar{\omega}_{12} \tag{4.13}$$

Pero, $d\bar{\omega}_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -K\sigma$, por proposición (4.2) y además $K : M \to \mathbb{R}$, es continua y M es compacta entonces K es acotada, por lo que

$$\int_{\Delta} -K\sigma \leqslant M \int_{\Delta} \sigma \to 0, \quad \textit{cuando} \;\; r_1, r_2 \to 0$$

Por lo tanto

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} - \int_{S_{r_2}} \bar{\omega}_{12} = \int_{\Delta} d\bar{\omega}_{12} \to 0, \quad \textit{cuando} \;\; r_1, r_2 \to 0$$

Nótese que $\bar{\omega}_{12}$ no está definida en B_{r_2}; de cualquier modo, $d\bar{\omega}_{12} = -K\sigma$ ciertamente está definida en todas partes. Consideremos la sucesión.

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12}, ..., \int_{S_{r_n}} \bar{\omega}_{12}, ...$$

con $\{r_n\} \to 0$, es una sucesión de Cauchy, por lo tanto convergente. Así

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \bar{\omega}_{12} = \bar{I}$$

existe. Probemos además que $\bar{I} = I$.
En efecto.
En (4.13) fijamos r_1 y hacemos $r_2 \to 0$

$$\begin{aligned} \int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} - 2\pi\bar{I} &= \int_{B_{r_1}} d\bar{\omega}_{12} \\ &= -\int_{B_{r_1}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} = -\int_{B_{r_1}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + 2\pi\bar{I} \tag{4.14}$$

Por otro lado, $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + \tau$, por el lema (4.4). Así

$$\begin{aligned}\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} &= \int_{S_{r_1}} \omega_{12} + \tau \\ &= \int_{B_{r_1}} d\omega_{12} + \int_{S_{r_1}} \tau \\ &= -\int_{B_{r_1}} K\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi I\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} = -\int_{B_{r_1}} K\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi I \tag{4.15}$$

Luego, de (4.14) y (4.15)

$$-\int_{B_{r_1}} K\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi I = -\int_{B_{r_1}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + 2\pi \bar{I}$$

Por lo tanto

$$I = \bar{I}$$

Ahora bien, consideremos otro referencial digamos $\{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2\}$ al cual se le asocia la forma de conexión $\widehat{\omega}_{12}$ con la misma orientación que $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Por el lema (4.4) $\bar{\omega}_{12} = \widehat{\omega}_{12} + \tau$ y procediendo de forma análoga a la anterior, concluimos que $\widehat{I} = \bar{I}$. Por lo tanto

$$I = \widehat{I}$$

■

Lema 4.9 *El índice no depende de la métrica.*

Demostración.
Sea $\langle , \rangle_0$ y $\langle , \rangle_1$ dos métricas Riemannianas en M. Sea, para $t \in [0, 1]$

$$\langle , \rangle_t = t\langle , \rangle_1 + (1 - t)\langle , \rangle_0$$

entonces $\langle , \rangle_t$ define un producto interno positivo en M el cual varia diferenciablemente con p que comienza con $\langle , \rangle_0$ y finaliza con $\langle , \rangle_1$. Sean I_0, I_1 y I_t sus correspondientes índices. Ahora bien. I_t es una función continua de t. En efecto. Sea $t_0 \in [0, 1]$
Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = 1 > 0$ tal que $|t - t_0| < 1 \Rightarrow |I_t - I_{t_0}| = 0 < \varepsilon$, pues por el lema (4.7) y el lema (4.8) los índices coinciden.

Así, como $I_t : [0,1] \to \mathbb{Z}^+$ y es continua, por lo tanto $I_t = const$, para todo $t \in [0,1]$. Entonces

$$I_0 = I_1.$$

■

Ahora si estamos preparados para probar el siguiente teorema.

Teorema 4.2 *Sea M^2 una variedad diferenciable 2-dimensional orientable y compacta. Sea X un campo vectorial diferenciable en M con singularidades aisladas $p_1, ..., p_k$, cuyos índices son $I_1, ..., I_k$. Entonces para alguna métrica Riemanniana en M*

$$\int_M K\sigma = 2\pi \sum_{i=1}^{k} I_i$$

donde K es la curvatura Gaussiana de la métrica y σ su elemento de área.

Demostración.
Consideremos en $M^2 - \cup_i\{p_i\}$ el referencial $\{\bar{e}_1 = \frac{X}{|X|}, \bar{e}_2\}$, donde $\bar{e}_2$ es un campo vectorial unitario ortogonal a $\bar{e}_1$ en la orientación de M. Denotemos por B_i las bolas con centro p_i las cuales no contienen otros puntos singulares que p_i, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{M- \cup_i\{B_i\}} K\sigma &= \int_{M- \cup_i\{B_i\}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\
&= -\int_{M- \cup_i\{B_i\}} d\bar{\omega}_{12}
\end{aligned}$$

pero por el teorema de Stokes, se obtiene que

$$-\int_{M- \cup_i\{B_i\}} d\bar{\omega}_{12} = -\int_{\partial(M- \cup_i\{B_i\})} \bar{\omega}_{12}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_{M- \cup_i\{B_i\}} K\sigma &= -\int_{\partial(M- \cup_i\{B_i\})} \bar{\omega}_{12} \\
&= -\sum_i \int_{\partial(M-B_i)} \bar{\omega}_{12} \\
&= -\sum_i - \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12} \\
&= \sum_i \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12}
\end{aligned}$$

donde ∂B_i tiene la orientación inducida por B_i (que es la opuesta de la orientación de $M - B_i$, de aqui el signo negativo en la tercera igualdad). Entonces

$$\int_{M- \cup_i \{B_i\}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = \sum_i \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12}$$

Así, tomando limite cuando el radio de B_i se va a cero, en ambos lados de la igualdad y usando el lema (4.8), obtenemos

$$\int_M K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = 2\pi \sum_i I_i.$$

■

El número $\sum_{i=1}^{k} I_i$ es llamado la característica de Euler-Poincaré de M.

Ejemplo 4.13. Consideremos $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3; |p| = 1\}$ la esfera unitaria, sea $X = (-y, x)$ un campo vectorial tangente a la esfera. Sean $p_1 = (0, 0, 1)$ y $p_2 = (0, 0, -1)$ el polo norte y el polo sur respectivante. Entonces

$$X(p_1) = (0, 0) \;\; y \;\; X(p_2) = (0, 0)$$

por lo tanto, p_1 y p_2 son puntos singulares aislados.
Además, por el lema (4.5) $d\varphi = fdg - gdf$ y hagamos (f,g)=(-y,x). Ahora consideremos una curva cerrada $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ y calculemos el índice de X en p_1 que lo denotaremos por I_1, como sigue:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_c d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c^* d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1$$

Análogamente, $I_2 = 1$, que es el índice de X en p_2.
De lo cual se puede concluir que $\chi(S^2) = 2$.
Por otra parte, es bien conocido que $K = \frac{1}{r^2}$, por lo tanto $K = 1$. Así

$$\int_{S^2} K\sigma = \int_{S^2} \sigma = 4\pi$$

Por lo tanto, se verifica la igual de la ecuación del teorema de Gauss-Bonnet.
Vamos a probar el teorema de Gauss-Bonnet para superficies con borde.

Teorema 4.3 *Sea M una variedad diferenciable 2-dimensional orientable, compacta, con frontera ∂M, y sea X un campo vectorial diferenciable en M tal que es transversal a*

∂M, (tal que, X es en ninguna parte tangente a ∂M). Supongamos que las singularidades $p_1, ..., p_k$ de X son aisladas, y no pertenecen a la ∂M y denotaremos por $I_1, ..., I_k$ sus índices. Entonces para alguna métrica Riemanniana en M

$$\int_M K\sigma + \int_{\partial M} kgds = 2\pi \sum I_i$$

donde kg es la curvatura geodésica de ∂M y ds es el elemento de área de ∂M.

Demostración.
Escojamos una métrica riemanniana en M y consideremos en $M - \{p_i\}$ el referencial ortonormal orientado $\{\bar{e}_1 = \frac{X}{|X|}, \bar{e}_2\}$ en M.
Sea $V \subset M$ una vecindad de ∂M, y escojamos en dicha vecindad otro referencial digamos $\{e_1, e_2\}$ tal que, restringiendo a la ∂M, e_1 es tangente a la ∂M. Consideremos $\bar{\omega}_{12}$ y ω_{12} las formas de conexión asociadas a $\{\bar{e}_1 = \frac{X}{|X|}, \bar{e}_2\}$, $\{e_1, e_2\}$ respectivamente, como los referenciales tiene la misma orientación se tiene por el lema (4.4) que

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + \tau$$

Así

$$\begin{aligned} i^*\bar{\omega}_{12} &= i^*\omega_{12} + i^*\tau \\ &= i^*\omega_{12} + d\varphi \end{aligned}$$

esta última igualdad es posible gracias al lema (4.5). Donde $i : \partial M \to M$ es la función inclusión y φ es el ángulo entre $\bar{e}_1$ y e_1 a lo largo de ∂M.
Sean B_i las bolas de centro p_i, $i = 1, ..., k$ tales que B_i no contiene otros puntos singulares que p_i. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{M - \cup_i\{B_i\}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 &= -\int_{M - \cup_i\{B_i\}} d\bar{\omega}_{12} \\ &= \int_{\cup_i\{\partial B_i\}} \bar{\omega}_{12} - \int_{\partial M} i^*\bar{\omega}_{12} \end{aligned}$$

la segunda igualdad es gracias al teorema de Stokes.
Por lo tanto

$$\int_{M - \cup_i\{B_i\}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + \int_{\partial M} i^*\bar{\omega}_{12} = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12}$$

Además

$$\int_{\partial M} i^*\bar{\omega}_{12} = \int_{\partial M} i^*\omega_{12} + \int_{\partial M} d\varphi$$

Pero, por definición de integral $\int_{\partial M} \omega_{12} = \sum \int_{\partial M} \varphi_i \omega_{12}$. Así

$$\int_{\partial M} i^* \omega_{12} = \sum \int_{\partial M} i^* \varphi_i \omega_{12}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} i^* \varphi_i \omega_{12} &= \int_{C(t)} i^* \varphi_i \omega_{12} \\ &= \int_{C(t)} i^* \varphi_i i^* \omega_{12} \end{aligned}$$

Parametrizamos $C : [a, b] \to \partial M$ por longitud de arco al parametro s

$$\begin{aligned} \int_{C(t)} i^* \varphi_i i^* \omega_{12} &= \int_a^b C_j^* (i^* \varphi_i i^* \omega_{12}) \\ &= \int_a^b C_j^* (i^* \varphi_i)(i \circ C_j)^* \omega_{12} ds \end{aligned}$$

Además $i \circ C_j$ es una curva parametrizada por longitud de arco, entonces por definición $(i \circ C_j)^* \omega_{12} = kg$

Así

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} i^*\omega_{12} &= \sum \int_{\partial M} i^*\varphi_i\omega_{12}\\
&= \sum \int_{C(t)} i^*\varphi_i\omega_{12}\\
&= \sum \int_{C(t)} i^*\varphi_i i^*\omega_{12}\\
&= \sum \int_a^b C_j^*(i^*\varphi_i i^*\omega_{12})\\
&= \sum \int_a^b C_j^*(i^*\varphi_i)(i\circ C_j)^*\omega_{12}ds\\
&= \sum \int_a^b C_j^*(i^*\varphi_i)kgds\\
&= \sum \int_{C(t)} (i^*\varphi_i)kgds\\
&= \int_{C(t)} i^*\sum \varphi_i kgds\\
&= \int_{C(t)} i^*1kgds\\
&= \int_{C(t)} (1\circ i)kgds\\
&= \int_{C(t)} kgds\\
&= \int_{\partial M} kgds
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\partial M} i^*\omega_{12} = \int_{\partial M} kgds$$

Luego,

$$\int_{\partial M} i^*\bar{\omega}_{12} = \int_{\partial M} kgds + \int_{\partial M} d\varphi$$

Además $\bar{e}_1 = \frac{X}{|X|}$ en ninguna parte es tangente a la frontera ∂M, entonces $\varphi = angulo(\bar{e}_1, e_1) = \frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto $d\varphi = 0$, de lo cual concluimos que $\int_{\partial M} d\varphi = 0$.

$$\int_{\partial M} i^*\bar{\omega}_{12} = \int_{\partial M} kgds$$

Luego, tomando el limite cuando el radio de B_i tiende a cero, obtenemos

$$\int_{M-\cup_i\{B_i\}} K\sigma = \int_{M-\{p_i\}} K\sigma$$

y como $\{p_i\}$, $i = 1, ..., k$ tienen medida cero, entonces

$$\int_{M-\cup_i\{B_i\}} K\sigma = \int_{M} K\sigma$$

Así

$$\begin{aligned} \int_M K\sigma + \int_{\partial M} kgds &= \sum_{i=1}^{k} \lim_{r_i \to 0} \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12} \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2\pi I_i \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^{k} I_i \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_M K\sigma + \int_{\partial M} kgds = 2\pi \sum_{i=1}^{k} I_i.$$

■

Bibliografía

[1] Barret O´ Neil. *Elementary Differential Geometry*. Elsevier, (2006).

[2] Do Carmo M.*Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag, (1994)

[3] S. S. Chern. *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closet riemannian manifolds*. Annals of Math, pages 747 - 752 (1944).