UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Regularización de Funciones Lipschitz en Variedades"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br.Mariana Yulibeth Alvarez Oropeza

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional.
Tutor: Dra. Yenny Carolina Rangel Oliveros

Barquisimeto, Venezuela. Febrero de 2013

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"Regularización de Funciones Lipschitz en Variedades"

presentado por el ciudadano Br.Mariana Yulibeth Alvarez Oropeza titular de la Cédula de Identidad No. 20.075.970, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ______________________

Con una calificación de ______________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ______________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A mis Abuelos Pedro Alvarez y
Julia Oropeza de Alvarez

Agradecimientos

Quiero comenzar dando gracias a Dios, por darme fuerza y voluntad para continuar en los momentos de dificultad.

Agradezco A mi familiar por su apoyo incondicinal, en especial a mis abuelos Pedro y Julia; a tio Julio y mi apreciada hermana Daizis Arriechi.

Mis más sinceros agradecimientos a los profesores Yenny Rangel, Adriana Araujo, Ebner Pineda, Ismael Huerta, Mario Rodríguez, Minoru Akiyama, por enseñarme lo bueno de hacer matemática y por la ayuda brindada por cada uno de ellos en su debido momento.

Finalmente quiero agradecer a mis compañeros de estudios y a mis compañeros de AsoEM, los momentos compartidos y horas de estudios dedicadas.

Resumen

En el presente trabajo, desarrollaremos en detalle una parte del articulo [1], donde se muestra que para cada función lipschitz definida sobre una variedad Riemanniana M (posiblemente infinito dimensional), para cada función continua $\epsilon\colon M \to (0, +\infty)$, y para cada numero positivo $r > 0$, existe una función de clase C^∞ lipschitz $g\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $|f(p) - g(p)| \leq \epsilon(p)$ para cada $p \in M$ y $lip(g) \leq lip(f) + \epsilon$.

Índice General

Introducción

La Mayoría de los métodos para el estudio del comportamiento de funciones sobre variedades Riemanniana se aplican directamente solo a funciones las cuales tienen algún grado de diferenciabilidad. Por otro lado muchas funciones las cuales se dan de manera natural por la geometría de una variedad son a lo más continuas. Por esto es importante tener a la mano técnicas para construir aproximaciones regulares de funciones continuas. La manera estándar, es el uso de particiones de la unidad combinado con regularización por convoluciones en una localidad. El propósito de este trabajo es presentar un método de aproximación regular el cual tiende a preservar propiedades geométricas, de nuestro interés en particular la propiedad de ser K-lipschitz.

En este ambito Greene y Wu [8] estudiaron el problema para una variedad Riemanniana de dimensión finita utilizando la convolución integral con un núcleo adecuado como herramienta principal; pero este método no puede ser utilizado en dimensión infinita, pues en este caso no se dispone de una medida adecuada para definir la convolución. Debido a esto, es necesario recurrir a una metodología diferente, y en particular nosotros utilizamos tres técnicas distintas para obtener el correspondiente resultado de aproximación infinito dimensional. Por una parte utilizamos las llamadas convolución infimal y suprimal, una tecnica desarrollada por Lasry y Lions en [5] que permite aproximar funciones lipschitzianas en espacios de Hilbert por funciones de clase C^1 y lipschitzianas. Este método, sin embargo, no permite obtener mayor regularidad. Para ello, utilizamos un resultado de Moulis [7] en espacios de Hilbert separables, sobre aproximación de funciones C^1 por funciones C^∞ en la topología fina de primer orden,es decir, aproximación de la función y su derivada. Finalmente, se requiere de una adecuada partición diferenciable de la unidad para combinar estas aproximaciones locales y obtener un resultado global.

En el primer capitulo, resumimos los conceptos básicos sobre variedades Riemannianas que serán utilizados a lo largo de todo este trabajo, matizando muy especialmente aquellas cuestiones fundamentales para el desarrollo de la teoría posterior. En este sentido son especialmente importantes los conceptos de geodésicas y de función exponencial y sus caracterizaciones.

En el capitulo 2, definiremos y desarrollaremos propiedades de los métodos de regularización a utilizar, los cuales son: la convolución infimal y suprimal, regularización de Moreau-Yosida.

Luego en el capitulo 3, utilizaremos los métodos anteriormente dados para probar que dada una función $f\colon H \to \mathbb{R}$ K-lipschitz y acotada, dado $\epsilon > 0$, existe una función $g\colon H \to \mathbb{R}$ K-lipschitz C^∞ tal que $|f(p) - g(p)| < \epsilon$ para todo $p \in H$ y con $lip(g) < lip(f) + \epsilon$, donde H es un espacio de Hilbert separable. Finalmente, mostraremos el hecho mencionado anteriormente pero sobre una variedad Riemanniana Separable.

Capítulo 1

Nociones Básicas Sobre Variedades

En este capitulo presentamos las definiciones y resultados sobre variedades que serán utilizados a lo largo de este trabajo, comenzando con la definición de variedad topológica, y generalizando de tal manera para dar el concepto de una Variedad Riemanniana modelada sobre un espacio de Hilbert.

1.1. Variedades

Definición 1.1. *Un espacio topológico M se dice que es localmente euclídeo de dimensión n si cada punto de M tiene una vecindad en M que es homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Supongamos que M es localmente euclídeo de dimensión n. Si $U \subset M$ es un conjunto abierto que es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces U es llamado una vecindad de coordenadas y cualquier homeomorfismo φ de U en un abierto en $\mathbb{R}^n$ es llamado mapeo de coordenadas. Al par (U, φ) se le llama Sistema de coordenadas (o solo carta) de M.

Definición 1.2. *Una variedad topológica n-dimensional es un espacio de Hausdorff segundo numerable que es localmente euclídeo de dimensión n.*

Ejemplo 1.1. $\mathbb{R}^n$ es una variedad, puesto que toda bola abierta de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ un mapeo continuo, el gráfico de f es el subconjunto $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ definido por

$$\Gamma(f) := \{(x, y) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k) :\in U e y = f(x)\}$$

con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^{n+k}$ es una variedad.

En efecto, veamos que $\Gamma(f)$ es homeomorfo a U. Sea $\Phi_f \colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$ el mapeo continuo e inyectivo

$$\Phi_f(x) = (x, f(x)).$$

Así Φ_f define un mapeo continuo biyectivo de U sobre $\Gamma(f)$, y la restricción sobre $\Gamma(f)$ de la proyección $\pi \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ es su inversa continua, luego Φ_f es un homeomorfismo; de donde se sigue que $\Gamma(f)$ es una variedad n-dimensional.

Ahora bien, recordemos que un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular, si para cada punto $p \in S$, existe una vecindad V de p en $\mathbb{R}^3$ y un mapeo $\mathbf{x} \colon U \subset \mathbb{R}2 \to \ V \cap S$ de un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$, tal que:

(a) $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo diferenciable;

(b) El diferencial $(d\mathbf{x})_q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectivo para todo $q \in S$.

El mapeo $\mathbf{x}$ es llamado una parametrización de S en p. La consecuencia más importante de la definición de superficie regular es el hecho de que el cambio de una parametrización a otra es un difeomorfismo. Más preciso, si $\mathbf{x}_\alpha \colon U_\alpha \to S$ y $\mathbf{x}_\beta \colon U_\beta \to S$ son parametrizaciones tales que $\mathbf{x}_\beta(U_\beta) \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = W \neq \emptyset$, entonces los mapeos $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha \colon \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta \colon \mathbf{x}_\beta^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$ son diferenciables.

Se extiende este concepto a un conjunto abstracto, como sigue.

Definición 1.3. *Una Variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de funciones biyectivas $\mathbf{x}_\alpha \colon U_\alpha \to M$ de conjuntos abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ sobre M tales que:*

(1) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.

(2) Para cualquier par α, β, con $\mathbf{x}_\beta(U_\beta) \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ y $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y los mapeos $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ son diferenciables.

(3) La familia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ es maximal relativo a las condiciones (1) y (2).

Al par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ con $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ es llamado parametrización o sistema de coordenadas de M en p; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ es llamada vecindad coordenada en p. Una familia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ que satisface (1) y (2) es llamada estructura diferenciable sobre M.

La condición (3) esta incluida por pura razones técnicas. En efecto, dado una estructura diferenciable sobre M, podemos fácilmente completar esta a una maximal, tomando la union de todas las parametrizaciones que, junto con las de la estructura diferencial satisfagan la condición (2). Por lo tanto una podemos decir que una variedad diferenciable es un conjunto dotado de una estructura diferenciable.

Observación 1.1. Una estructura diferenciable induce una topología natural sobre M. Es suficiente con definir $A \subset M$ como un conjunto abierto en M si y solo si $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ para todo α.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, con la estructura diferenciable dada por la identidad, es un ejemplo de una variedad diferenciable.

Ahora extenderemos la idea de diferenciabilidad de mapeos entre Variedades diferenciables, y de vectores tangentes a una variedad.

Definición 1.4. *Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables un mapeo $\varphi\colon M_1 \to M_2$ es diferenciable en $p \in M$ si dada un parametrización $\mathbf{y}\colon V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ en $\varphi(p)$ existe una parametrización $\mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ en p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ y el mapeo*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

es diferenciable en $\mathbf{x}^{-1}(p)$. φ es diferenciable sobre un conjunto abierto de M_1, si esta es diferenciable en todos los puntos de este conjunto abierto.

Definición 1.5. *Sea M una variedad diferenciable. Sea $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ una curva diferenciable. Supongamos que $\alpha(0) = P \in M$, y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de funciones diferenciables sobre M en p. El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0)\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha^{'}(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\bigg|_{t=0}, \qquad\qquad f \in \mathcal{D} \tag{1.2}$$

Un vector tangente en p es el vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p sera indicado por T_pM y llamaremos fibrado tangente al conjunto $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$.

Si elegimos una parametrización $\mathbf{x}\colon U \to M$ y $p = \mathbf{x}(0)$, podemos expresar a la función f y a la curva α en esta parametrización por

$$f \circ \mathbf{x}(q) = f(x_1, ..., x_n) \quad q = (x_1, ..., x_n),\ y$$
$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

respectivamente. Por lo tanto restringiendo f a α, se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_1(t),...,x_n(t))\Big|_{t=0} \\ &= \sum x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i}) = (\sum x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i}))f. \end{aligned}$$

El vector $\alpha'(0)$ puede ser expresado en la parametrización por

$$\alpha'(0) = \sum x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0. \tag{1.3}$$

Observe que $(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ es el vector tangente en p de la curva coordenada. La expresión (1.3) muestra que el vector tangente a la curva α en p solo depende de la derivada de α en el sistema de coordenadas. De esa expresión también se sigue que el conjunto T_pM, con las operaciones usuales de funciones, forma un espacio vectorial de dimensión n, y que la elección de parametrización determina una base asociada $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_0\}$ en T_pM. El espacio vectorial T_pM es llamado espacio tangente a M en p.

Con la idea de espacio tangente daremos una extensión a una variedad diferenciable de el diferencial de un mapeo diferenciable entre variedades, junto con algunos teoremas cuya demostraciones se pueden ver en el libro [2].

Proposición 1.1. *Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables y $\varphi\colon M_1 \to M_2$ un mapeo diferenciable. Para cada $p \in M_1$ y para cada $v \in T_pM_1$, elegimos una curva diferenciable $\alpha\colon (-\epsilon,\epsilon) \to M_1$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. haciendo $\beta = \varphi\circ\alpha$. El mapeo $d\varphi_p\colon T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ dado por $d_{\varphi_p}(v) = \beta'(0)$ es un mapeo lineal que no depende de la elección de α.*

Definición 1.6. *El mapeo lineal definido por la proposición 1.1 es llamado el diferencial de φ en p.*

Definición 1.7. *Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables. Un mapeo $\varphi\colon M_1 \to M_2$ es un difeomorfismo si este es diferenciable, biyectivo, y su inversa φ^{-1} es diferenciable. se dice que φ es un difeomorfismo local en $p \in M$ si existen vecindades U de p y V de $\varphi(p)$ tal que $\varphi\colon U \to V$ es un difeomorfismo.*

Teorema 1.1. *Sea $\varphi\colon M_1 \to M_2$ un mapeo diferencial y sea $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p\colon T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ es un Isomorfismo. Entonces φ es un difeomorfismo local en p.*

Ahora definiremos lo que es un campo vectorial o campo de vectores sobre una variedad diferenciable, lo cual sera de gran uso para definir geodésicas, y luego el mapeo exponencial.

Definición 1.8. *Un campo vectorial o campo de vectores* X *sobre una variedad diferenciable* M *es una correspondencia que asocia a cada punto* p *en* M *un vector tangente* $\mathrm{X}(p) \in T_pM$. *En términos de mapeos,* X *es un mapeo de* M *en el fibrado tangente* TM. *El campo* X *es diferenciable si el mapeo* $\mathrm{X}\colon M \to TM$ *es diferenciable.*

Considerando una parametrización $\mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ podemos escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.4}$$

donde cada $a_i\colon U \to \mathbb{R}$ es una función sobre U y $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es la base asociada a $\mathbf{x}$, $i = 1, ..., n$. Es claro que X es diferenciable si y solo si las funciones a_i son diferenciables para alguna (y por lo tanto para cualquier) parametrización.

1.2. Variedades Riemanniana

Dada una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ tenemos una manera natural de medir las longitudes de los vectores tangentes a S, a saber: el producto interno $\langle v, w\rangle$ de dos vectores tangentes a S en un punto p, es simplemente el producto interno des estos en $\mathbb{R}^3$. La manera de Calcular la longitud de una curva es por definición la integral de la longitud de su vector velocidad. La definición de $\langle , \rangle$ permite medir no solo la longitud de curvas en S, si no también todas la otras ideas métricas usadas en geometría, esto nos lleva ahora a introducir en cada punto de M una manera de medir la longitud de los vectores tangente como sigue.

Definición 1.9. *Una métrica Riemanniana (o estructura Riemanniana) sobre una variedad diferenciable* M *es una correspondencia la cual asocia a cada punto* p *de* M *un producto interno* $\langle , \rangle_p$ *(que es, una forma bilineal, simétrica definida positiva) sobre el espacio tangente* T_pM*, la cual varia diferenciablemente en el siguiente sentido: si* $\mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *es un sistema de coordenadas alrededor de* p*, con* $\mathbf{x}(x_1, ..., x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ *y* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, ..., i, ..., 0)$*, entonces* $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ *es una función diferenciable sobre* U.

Es usual borrar el índice p siempre y cuando no exista posibilidad de confusión. La función $g_{i,i}(= g_{ji})$ es llamada la representación local de la métrica Riemanniana en el sistema de coordenadas $\mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Una Variedad diferenciable con una métrica Riemanniana sera llamada *variedad Riemanniana.*

Lo que haremos a continuación es mostrar como una métrica Riemanniana puede ser usada para el calculo de la longitud de curvas.

Definición 1.10. *Un mapeo diferenciable $c\colon I \to M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en una variedad diferenciable M es llamada una curva (o curva parametrizada).*

Definición 1.11. *Un campo vectorial V a lo largo de una curva $c\colon I \to M$ es un mapeo diferenciable que asocia a cada $t \in I$ un vector tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Decir que V es diferenciable significa que para cualquier función diferenciable f sobre M, la función $t \to V(t)f$ es diferenciable sobre I.*

El campo vectorial $\frac{dc}{dt}$ es llamado campo de velocidad de c. La restricción de una curva c a un intervalo $[a, b] \subset I$ es llamado segmento de curva. Si M es una variedad Riemanniana, se define la longitud del segmento de curva por

$$l_a^b(c) = \int_a^b \langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \rangle_{c(t)} dt$$

Ahora daremos un teorema sobre la existencia de Métrica Riemannianas, veáse [2] para la demostración.

Teorema 1.2. *Una Variedad diferenciable Hausdorff con base enumerable tiene una métrica Riemanniana.*

1.3. Conexiones Afín

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $c\colon I \to S$ una curva parametrizada en S, con $V\colon I \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial a lo largo de c tangente a S. El vector $\frac{dV}{dt}(t), t \in I$, en general no pertenece a el plano tangente de S, $T_{c(t)}S$. El concepto de diferenciación de un campo vectorial no es por lo tanto una noción de la geometría intrínseca de sobre S. Para remediar este asunto consideramos, en cambio, de la derivada usual $\frac{dV}{dt}(t)$, la proyección ortogonal de $\frac{dV}{dt}(t)$ sobre $T_{c(t)}S$. A este vector de la proyección ortogonal se le llama derivada covariante y es denotado por $\frac{DV}{dt}(t)$. La derivada covariante es la derivada de V vista desde o sobre la superficie S.

Un punto básico es que de la derivada covariante solo depende de la primera forma fundamental de S y por lo tanto un concepto que puede ser considerado dentro de la geometría Riemanniana.

Sera indicado por $\mathcal{X}(M)$ a el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^∞ sobre M y por $\mathcal{D}(M)$ el conjunto de todas las funciones a valores reales de clase C^∞ definidas sobre M.

Definición 1.12. *Una conexión afín* ∇ *sobre una variedad diferenciable* M *es un mapeo*

$$\nabla\colon \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$$

la cual es denotada por $(\mathrm{X},\mathrm{Y})\to\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}$ *y la cual satisface las siguientes propiedades.*

$$\begin{aligned} i) &\qquad \nabla_{f\mathrm{X}+g\mathrm{Y}}\mathrm{Z} = f\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z} + g\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z}.\\ ii) &\qquad \nabla_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z}) = \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} + \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z}.\\ iii) &\qquad \nabla_{\mathrm{X}}f\mathrm{Y} = f\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} + \mathrm{X}(f)\mathrm{Y}, \end{aligned}$$

en el las cuales $\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}\in\mathcal{X}(M)$ *y* $f,g\in\mathcal{D}(M)$.

Proposición 1.2. *Sea* M *una variedad diferenciable con una conexión afín* ∇. *Existe una única correspondencia la cual asocia a un campo vectorial* V *a lo largo de una curva diferenciable* c *otro campo vectorial* $\frac{DV}{dt}$ *a lo largo de* c, *llamado la derivada covariante de* V *a lo largo de* c, *tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *donde* W *es un campo vectorial a lo largo de y* f *es una función diferenciable sobre* I.

c) Si V *es inducido por un campo vectorial* $\mathrm{Y}\in\mathcal{X}(M)$, *i.e,* $V(t)=\mathrm{Y}(c(t))$, *entonces* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}\mathrm{Y}$.

Demostración. Supongamos que existe tal correspondencia la cual satisface a),b),c). Sea $\mathbf{x}\colon U\subset\mathbb{R}^n\to M$ un sistema de coordenadas con $\mathbf{x}(u)\cap c(I)\notin\emptyset$, luego la expresión local de $c(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ $t\in I$.

Por otro lado sea $X_i = \frac{\partial}{\partial}$, así podemos expresar localmente al campo vectorial $V=\sum_j v^j X_j$, donde $v^j = v^j(t)$ y $X_j = X_j(c(t))$.

Ahora bien, por a) y b)

$$\begin{aligned}
\frac{DV}{dt} &= \frac{D}{dt}(\sum_j v^j X_j) = \sum_j \frac{D}{dt}(v^j X_j) \\
&= \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt} + \frac{dv^j}{dt} Xj \\
&= \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt} + \sum_j \frac{dv^j}{dt} Xj.
\end{aligned}$$

Por c) e i) de la definición 1.12,

$$\begin{aligned}
\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j &= \nabla_{(\sum \frac{dx_i}{dt} X_i)} X_j \\
&= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j \tag{1.5}$$

La expresión (1.5) muestra que si existe tal correspondencia esta es única, puesto que depende de las funciones coordenadas del campo vectorial las cuales son únicas.

Para mostrar la existencia, se define $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{x}(U)$ por (1.5). Es fácil verificar que (1.5) satisface las propiedades deseadas. Si $\mathbf{y}(W)$ es otra vecindad coordenada, con $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(W) \neq \emptyset$ y definimos $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{y}(W)$ por (1.5), las definiciones en $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(W)$ son iguales por la unicidad de $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{x}(U)$. Se sigue que la definición puede ser extendida sobre todo M. $\square$

Definición 1.13. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Un campo vectorial V a lo largo de una curva $c\colon I \to M$ diremos que es paralelo cuando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Proposición 1.3. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Sea $c\colon I \to M$ una curva diferenciable en M y sea V_0 un vector tangente a M en $c(t_0), t_0 \in I$ (i.e. $V_o \in T_{c(t_0)}M$). Entonces existen un único campo vectorial V a lo largo de c, tal que $V(t_0 = V_0)$, ($V(t)$ es llamado transporte paralelo de V_0 a lo largo de c).*

La demostración de la proposición anterior se puede ver en [2]

1.4. Conexión Riemanniana

Definición 1.14. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín y una métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. Diremos que una conexión es compatible con la métrica $\langle , \rangle$, cuando para cualquier curva diferenciable c y cualquier par de campos de vectores P, P' a lo largo de c, se tiene $\langle P, P' \rangle = constante$.*

Proposición 1.4. *Sea M una variedad Riemanniana. Una conexión ∇ sobre M es compatible com la métrica si y solo si para cualquier par de campo vectorial V y W a lo largo de una curva diferenciable $c \colon I \to M$ tenemos*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle \quad t \in I. \tag{1.6}$$

Corolario 1.1. *Una conexión ∇ sobre una variedad Riemanniana M es compatible con la métrica si y solo si*

$$\mathrm{X}\langle \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle = \langle \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle + \langle \mathrm{Y}, \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z}\rangle \quad \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \mathcal{X}(M).$$

Definición 1.15. *Una conexión afín sobre una variedad diferenciable M se dice que es simétrica cuando*

$$\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} - \nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{X} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] := \mathrm{XY} - \mathrm{YX} \quad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{X}(M).$$

Teorema 1.3. *(Levi-Cività). Dada una variedad Riemanniana M, entonces existe una única conexión afín sobre M que satisface las condiciones:*

a) ∇ *es simétrica.*

b) ∇ *es compatible con la métrica Riemanniana.*

A esta conexión se le llama conexión Levi-Cività o conexión Riemanniana.

1.5. Geodésicas

En lo que sigue M sera una variedad Riemanniana, junto con la conexión Riemanniana.

Definición 1.16. *Una curva parametrizada $\gamma \colon I \to M$ es una geodésica en $t_0 \in I$ si $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ en el punto t_0; si γ es una geodésica en t, para todo $t \in I$, diremos que γ es una geodésica.*

A veces, por abuso del lenguaje, nos referiremos a la imagen $\gamma(I)$ de una geodésica, como una geodésica.

Si $\gamma\colon I \to M$ es una geodésica, entonces

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\rangle = 2\langle\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}),\frac{d\gamma}{dt}\rangle = 0,$$

esto es, la longitud del vector tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ es constante.

Ahora vamos a determinar la ecuaciones locales que satisface una geodésica γ en un sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ alrededor de $\gamma(t_0)$. En U una curva γ con coordenadas

$$\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)),$$

es una geodésica, si y solo si

$$0 = \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = \sum_k (\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt})\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

De aquí el sistema de segundo orden

$$(\mathbf{1}) \qquad \frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \qquad k = 1, ..., n,$$

Para estudiar el sistema ($\mathbf{1}$), es conveniente usar el fibrado tangente TM, el cual también sera usado en situaciones futuras.

TM es el conjunto de pares (q, v) $q \in M$ $v \in T_qM$. Si $(U, \mathbf{x})$ es un sistema de coordenadas sobre M, entonces cualquier vector en T_qM $q \in \mathbf{x}(U)$, puede ser escrito como $\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Tomando $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ como coordenadas del punto (q, v) en TU.

Observe que $TU = U \times \mathbb{R}^n$, esto es, el fibrado tangente es localmente un producto. Además la proyección canónica $\pi\colon TM \to M$ dada por $\pi(q, v) = q$ es diferenciable.

Cualquier curva diferenciable $t \to \gamma(t)$ en M determina una curva $t \to (\gamma(t), \dfrac{d\gamma}{dt}(t))$ en TM. Si γ es una geodésica entonces, sobre TU, la curva

$$t \to (x_1(t), ..., x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, ..., \frac{dx_n(t)}{dt}),$$

satisface el sistema

$$(\mathbf{1'}) \qquad \begin{cases} \frac{dx_k}{dt} & = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} & = -\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}y_iy_j \qquad k = 1, ..., n \end{cases}$$

en términos de las coordenadas $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ sobre TU. Por tanto el sistema de segundo orden (**1**) sobre U es equivalente a el sistema de primer orden (**1**') sobre TU.

Recordemos el siguiente resultado de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.4. *Si* X *es un campo vectorial C^∞ sobre un conjunto abierto en la variedad M y $p \in M$ entonces existe un abierto $V_0 \subset V, p \in V_0$, un numero $\delta > 0$, y un mapeo C^∞ $\varphi\colon (-\delta, \delta) \times V_0 \to V$ tal que la curva $t \to \varphi(t, q)$ $t \in (-\delta, \delta)$, es la única trayectoria de* X *la cual en el instante $t = 0$ para por el punto q, para cada $q \in V_0$.*

El mapeo $\varphi_t\colon V_0 \to V$ dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ es llamado flujo de X sobre V.

Lema 1.1. *Existe un único campo vectorial G sobre TM donde sus trayectorias son de la forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$, donde γ es una geodésica sobre M.*

Definición 1.17. *El campo de vectores dado en el lema anterior es llamado el campo geodésico sobre TM y su flujo es llamado flujo geodésico sobre TM.*

Proposición 1.5. *Dado $p \in M$, entonces existe un conjunto abierto $V \subset M$, con $p \in V$, numeros $\delta > 0, \epsilon_1 > 0$ y un mapeo*

$$\gamma\colon (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M \qquad \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM \mid v \mid < \epsilon_1\},$$

de clase C^∞, tal que la curva $t \to \gamma(t, q, v), t \in (-\delta, \delta)$, es la única geodésica de M la cual en el instante $t = 0$ pasa por el punto q con velocidad v, para cada $q \in V$ y para cada $v \in T_qM$ con $\mid v \mid < \epsilon_1$.

Lema 1.2. *(homogeneidad de una geodésica). Si la geodésica $\gamma(t, q, v)$ esta definida sobre el intervalo $(-\delta, \delta)$, entonces la geodésica $\gamma(t, q, av), a \in \mathbb{R}, a > 0$, esta definida sobre el intervalo $(\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ y*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Proposición 1.6. *Dado $p \in M$, existe una vecindad de p en M, un numero $\epsilon > 0$ un mapeo C^∞ $\gamma\colon (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M$, $\mathcal{U} = \{(q, w); q \in V, w \in T_qM \mid w \mid < \epsilon\}$ tal que $t \to \gamma(t, q, v), t \in (-2, 2)$, es la única geodésica de M la cual, en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad w, para cada $q \in V$ y para cada $w \in T_qM$ con $\mid w \mid < \epsilon$.*

La proposición anterior permite introducir el concepto de mapeo exponencial en la siguiente manera.

Definición 1.18. *Sea $p \in M$ y sea $\mathcal{U} \subset TM$ el conjunto abierto dado en la proposición (1.6). Entonces el mapeo $exp\colon \mathcal{U} \to M$ dado por*

$$exp(q,v) = \gamma(1,q,v) = \gamma(\mid v \mid, q, \frac{v}{\mid v \mid}) \quad (q,v) \in \mathcal{U},$$

es llamado el mapeo exponencial sobre $\mathcal{U}$.

Es claro que exp es diferenciable. En más aplicaciones, podemos utilizar la restricción de exp a un subconjunto abierto de T_qM, esto es, se define

$$exp_q\colon B_\epsilon(0) \subset T_qM \to M$$

por $exp_q(v) = exp(q,v)$. Denotaremos por $B_\epsilon(0)$ una bola con centro en el origen de T_qMy de radio ϵ. exp_q es diferenciable por serlo γ y además $exp_q(0) = q$.

Geométricamente, $exp_q(v)$ es un punto de M obtenido por desplazarse una longitud $\mid v \mid$, desde q, a lo largo de una geodésica la cual pasa por q y con velocidad inicial igual a $\frac{v}{|v|}$.

Proposición 1.7. *Dado $q \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q\colon B_\epsilon(0) \subset T_qM \to M$ es un difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre un subconjunto abierto de M.*

Demostración. Consideremos la curva $\alpha(t) = tv, \in T_qM$. Note que $\alpha(0) = 0$ *y* $\alpha'(0) = v$. El mapeo $(exp_q \circ \alpha(t)) = exp_q(tv)$ en $t = 0$ tiene el vector tangente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(exp(tv)) \mid_{t=0} &= \frac{d}{dt}(\gamma(1,q,tv)) \mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(t,q,v)) \mid_{t=0} = v. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$d(exp_q)_0(v) = v$$

por lo cual $d(exp_q)_0$ es la identidad de T_qM, así resulta ser un isomorfismo local, por lo tanto exp_q es un difeomorfismo local en una vecindad de 0. □

A continuación daremos una generalización de algunos conceptos dados anteriormente, básicamente tomadas del Lang [3] y del articulo de Fernando López-Mesas Colomina [6]

Definición 1.19. *Una Variedad de clase C^p modelada sobre un espacio de Hilbert E, es un conjunto M y una familia (U_i, φ_i) que satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) Cada U_i es un subconjunto de M, y los U_i cubren a M.

(2) Cada φ_i es una biyección de U_i sobre un subconjunto abierto $\varphi_i(U_i)$ de E, y para cualquier i, j, $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto en E.

(3) El mapeo

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es un C^p-isomorfismo para cada par de indices i, j.

Definición 1.20. *Una variedad Riemanniana (M, g), es una variedad M de clase C^∞ modelada sobre un espacio de Hilbert H (posiblemente infinito-dimensional), tal que para todo $p \in M$ existe un producto escalar $g(p) = g_p := \langle ., . \rangle_p$ en el espacio tangente $T_pM \simeq H$, de modo que $\|x\|_p = (\langle x, x \rangle_p)$ define una norma equivalente en T_pM para todo $p \in M$.*

Si una función $f \colon M \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in M$, la norma de la diferencial $df(p) \in T_p^*M$ en el punto p se define por

$$\|df(p)\|_p = \sup\{df(p)(v) : v \in TM_p, \|v\|_p \leq 1\}.$$

Para un camino,$\gamma \colon [a, b] \to M$, de clase C^1 , definimos su longitud por

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\frac{d\gamma}{dt}(s)\| ds.$$

Para dos puntos $p, q \in M$, definimos la distancia d entre p y q como

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \textit{ es un camino de clase } C^1 \textit{ que une } p \textit{ y } q \textit{ en } M\},$$

cuando p y q están en la misma componente conexa de M , y $d(p, q) = \infty$ en el caso contrario. Entonces d es una métrica en M (denominada g-distancia en M) la cual define la misma topología que la dada en M. Para esta métrica definimos la bola cerrada de centro p y radio $r > 0$ como

$$B(p, r) = B_g(p, r) := \{q \in M : d(p, q) \leq r\}.$$

Exponemos, a continuación, algunas propiedades de la función exponencial, pero antes daremos la definición de ser K-lipschitz.

Definición 1.21. *Sea E un espacio métrico, sea función $f \colon E \to \mathbb{R}$, llamaremos constante de lipschitz de f y denotada por $lip(f)$ a:*

$$\begin{aligned} lip(f) &= \text{ínf}\{L \geq 0 : |f(p) - f(q)| < Ld(p,q), p, q \in M\} \\ &= \sup\Big\{\frac{|f(p) - f(q)|}{d(p,q)} : p, q \in M, p \neq q\Big\}. \end{aligned}$$

Si $lip(f)$ es finita diremos que f es lipschitz, y si $K \geq lip(f)$ diremos que K es una constante de lipschitz de f o que f es K-lipschitz. Más aún, si f es diferenciable con derivada acotada se tiene que $lip(f) = \|df\|_{\sup}$. Ver [6].

Lema 1.3. *Sea M una variedad Riemanniana. Una función $f\colon M \to \mathbb{R}$ es K-lipschitz, si y solo si es localmente K-lipschitz, es decir, para cada $p \in M$ existe un entorno U_p de p tal que para todo $p_1, p_2 \in U_p$*

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq Kd(p_1, p_2).$$

Vamos a finalizar este Capitulo con un resultado que nos será útil a lo largo de la memoria y que nos proporciona una importante propiedad de la función exponencial.

Teorema 1.5. *Sea M una variedad Riemanniana, $p \in M$. $\forall \epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que si $0 < \delta < r$ tenemos que $exp_p\colon B(0_p, \delta) \to B(p, \delta)$ es un difeomorfismo $(1+\epsilon)$-bilipschitz (es decir, las aplicaciones $exp_p\colon B(0_p, \delta) \to B(p, \delta)$ y $(exp_p)^{-1}\colon B(p, \delta) \to B(0_p, \delta)$, son $(1+\epsilon)$-lipschitz).*

Véase [4] para una demostracíon.

Capítulo 2

Métodos de Aproximación

En este capitulo estudiaremos algunas herramientas que nos serán de utilidad para obtener los resultados deseados de aproximación.

2.1. Convolución integral

En los espacios de dimensión finita podemos definir las convoluciones integrales de dos funciones reales de la forma clásica y gracias a esta definición podemos aproximar, uniformemente en los acotados, a una función continua por una función de clase C^1 y que guarde varias de las propiedades de la función original (como son la convexidad, la Lipschitzianidad, etc.).

Definición 2.1. *Dada una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y una función $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define la convolución integral f con g como la función:*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Por otro lado si para toda función continua $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definimos la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ por

$$f_k(x) = f * \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_k(x-y)dy,$$

donde las funciones $\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son de clase C^∞, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$ y $\mathrm{sop}(\varphi_k) \subset B(0, \frac{1}{k})$ (estas funciones φ_k se conocen como núcleos de convolución) se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe un entero $N = N(\epsilon) > 0$ tal que $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $k \geq N$.

Este método de aproximación diferenciable tiene muchas ventajas sobre otros, puesto que la convolución integral preserva muchas de las propiedades geométricas que f pueda tener, como por ejemplo la convexidad o la lipschitzianidad. Es decir, si f es K-Lipschitz entonces f_k es K-Lipschitz también.

Para variedades Riemannianas finito-dimensionales, Greene y Wu [8] usaron un refinamiento de este procedimiento de convolución integral para obtener resultados muy útiles sobre aproximación diferencial de funciones lipschitz o convexas definidas sobre una variedad Riemanniana. Desafortunadamente, el método de convolución integral falla en dimención infinita, debido a la falta de una medida adecuada como la medida de Lebesgue, y en su lugar han sido empleados otros métodos.

2.2. Convolución infimal

A continuación daremos la definición y algunas propiedades básicas de la convolución infimal de dos funciones.

Definición 2.2. *Sean $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, donde E es un espacio normado. se define la convolución infimal o suma epigráfica , de f y g por*

$$f *_{inf} g(v) = \inf\Big\{ f(w) + g(v-w) : w \in E \Big\}.$$

Análogamente si $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, se define la suma hipográfica de f y g por

$$f *_{hip} g(v) = \sup\Big\{ f(w) + g(v-w) : w \in E \Big\}.$$

Para una función $f\colon E \to \mathbb{R}$, se define el epigrafo de f por

$$epi(f) = \big\{ (v,t) \in E \times (-\infty, \infty] : t \geq f(v) \Big\}$$

y el epigrafo estricto de f por

$$epi_s(f) = \Big\{ (v,t) \in E \times (-\infty, \infty] : t \geq f(v) \Big\}.$$

Por otro lado si $C, D \subset E$ $y\lambda \in \mathbb{R}$ se denotan por:

$$C + D = \big\{ v + w : v \in C, w \in D \big\} \text{ y } \lambda C = \big\{ \lambda v : v \in C \big\}.$$

Para una función $f\colon E \to \mathbb{R}$, se define el argumento mínimo como

$$argmin(f) = \Big\{ v \in E : f(v) = \inf f(E) \Big\}.$$

A continuación enunciaremos las propiedades más elementales de la convolución infimal de dos funciones.

Proposición 2.1. *Sean* $f, g, h\colon E \to \mathbb{R}$, *entonces:*

(1) $(f *_{inf} g) *_{inf} h = f *_{inf} (g *_{inf} h)$.

(2) $f *_{inf} g = g *_{inf} f$.

(3) $epi_s(f *_{inf} g) = epi_s f + epi_s g$.

(4) $argmin(f) + argmin(g) \subset argmin(f *_{inf} g)$, *es decir, si* v *minimiza a* f *en* E *y* w *minimiza a* g *en* E, *entonces* $v + w$ *minimiza a* $f *_{inf} g$.

(5) si f *y* g *son convexas, entonces* $f *_{inf} g$ *es convexa.*

(6) si f *es cóncava, entonces* $f *_{inf} g$ *es cóncava para toda* g.

(7) si f *es afín y* g *es convexa, entonces* $f *_{inf} g$ *es afín.*

Demostración. Comenzamos con (1):

Sea $v \in E$

$$
\begin{aligned}
(f *_{inf} g) *_{inf} h(v) &= \inf_{w\in E}\Big\{ f *_{inf} g(w) + h(v-w)\Big\}\\
&= \inf_{w\in E}\Big\{ \inf_{u\in E}\big\{ f(u) + g(w-u)\big\} + h(v-w)\Big\}\\
&= \inf_{w\in E}\Big\{ \inf_{u\in E}\big\{ f(u) + g(w-u) + h(v-w)\big\}\Big\}\\
&= \inf_{w,u\in E}\Big\{ f(u) + g(w-u) + h(v-w)\Big\}\\
&= \inf_{u,w\in E}\Big\{ f(u) + g(w-u) + h(v-w)\Big\}\\
&= \inf_{u\in E}\Big\{ \inf_{w\in E}\big\{ g(w-u) + h(v-w)\big\} + f(u)\Big\}\\
&= \inf_{u\in E}\Big\{ \inf_{p\in E}\big\{ g(p) + h((v-u)-p)\big\} + f(u)\Big\}\\
&= \inf_{u\in E}\Big\{ f(u) + g *_{inf} h(v-u)\Big\}\\
&= f *_{inf} (g *_{inf} h)(v).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(f *_{inf} g) *_{inf} h = f *_{inf} (g *_{inf} h)$.

Ahora probaremos (2), tomemos $v \in E$

$$\begin{aligned} f *_{inf} g(v) &= \inf_{w \in E} \Big\{ f(w) + g(v-w) \Big\} \\ &= \inf_{u \in E} \Big\{ f(v-u) + g(u) \Big\} \\ &= g *_{inf} f(v). \end{aligned}$$

Como $v \in E$ es arbitrario se cumple que la convolución infimal es conmutativa.

Para probar (3) se hará por doble inclución, esto es probaremos

(i) $epi_s(f *_{inf} g) \subset epi_s(f) + epi_s(g)$

(ii) $epi_s(f) + epi_s(g) \subset epi_s(f *_{inf} g)$.

Note primero que

$$\begin{aligned} epi_s(f) + epi_s(g) &= \big\{(v,t) \in E \times (-\infty, \infty] : t \geq f(v)\big\} + \{(v',t') \in E \times (-\infty, \infty] : t' > g(v')\} \\ &= \big\{(v+v', t+t') \in E \times (-\infty, \infty] : t > f(v), t' > g(v')\big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} epi_s(f *_{inf} g) &= \big\{(v,t) \in E \times (-\infty, \infty] : t > f *_{inf} g(v)\big\} \\ &= \Big\{(v,t) \in E \times (-\infty, \infty] : t > \inf_{u \in E} \big\{ f(u) + g(v-u) \big\} \Big\}. \end{aligned}$$

Sea $(v_1, t_1) + (v_2, t_2) \in epi_s(f) + epi_s(g)$, luego $(v_1, t_1) \in epi_s(f)$ y $(v_2, t_2) \in epi_s(g)$; por lo que $t_1 > f(v_1)$ y $t_2 > g(v_2)$.

Por otro lado $f *_{inf} g(v_1 + v_2) = \inf_{w \in E} \Big\{ f(w) + g(v_1 + v_2 - w) \Big\}$, como $f(v_1) + g(v_2) \in \Big\{ f(w) + g(v_1 + v_2 - w) \Big\}$ se tiene que $f(v_1) + g(v_2) \geq f *_{inf} g(v_1 + v_2)$.

Así $t_1 + t_2 > f(v_1) + g(v_2) \geq f *_{inf} g(v_1 + v_2)$; por lo tanto $(v_1, t_1) + (v_2, t_2) \in epi_s(f *_{inf} g)$, con esto se cumple (ii).

Recíprocamente, sea $(v,t) \in epi_s(f *_{inf} g)$, esto es $t > f *_{inf} g(v)$. Existe t' tal que $t > t' > f *_{inf} g = \inf_{w \in E} \big\{ f(w) + g(v-w) \big\} = m$. Así existe $w_0 \in E$ tal que $m \geq f(w_0) + g(v - w_0) < t' < t$. Entonces $(v,t) = (w_0, t' - g(v - w_0)) + (v - w_0, t' - g(v - w_0 + t)$, donde $(w_0, t' - g(v - w_0)) \in epi_s(f)$ y $(v - w_0, -t' + g(v - w_0 + t) \in epi_s(g)$ puesto que $f(w_0) < t' - g(v - w_0)$ y como $t' > t$ $-t' + g(v - w_0) + t > g(v - w_0)$, luego $(v,t) \in epi_s(f) + epi_s(g)$, con lo que se cumple (i). Por lo tanto (3) queda demostrada.

Vamos a demostrar (4):

Si v minimiza a f y w minimiza a g en E, entonces para todo $v_1, v_2 \in E$ tenemos que $f(v) + g(w) \leq f(v_1) + g(v_2)$, luego para todo $u \in E$ se tiene

$$\begin{aligned} f *_{inf} g(v+w) &= \inf_{z \in E} \big\{ f(z) + g(w+v-z) \big\} \\ &\leq f(v) + g(w) \leq \inf_{v_1 \in E} \big\{ f(v_1) + g(u-v_1) \big\} \\ &= f *_{inf} g(u). \end{aligned}$$

Esto es $\inf\{f *_{inf} g\} \geq f *_{inf} g(v+w) \geq \inf\{f *_{inf} g\}$, po lo tanto $v+w$ minimiza a $f *_{inf} g$.

Ahora vamos a demostrar (5):

Para ello usaremos el siguiente lema.

Lema 2.1. *Sea E un espacio normado, y sea $G\colon E \times E \to \mathbb{R}$ convexa en $E \times E$; definamos $\psi\colon E \to \mathbb{R}$ por $\psi(v) = \inf_{u \in E} G(v,u)$. Entonces ψ es convexa en E.*

Demostración. Sean $v, w \in E$, dado $\epsilon > 0$ existen $u_1, u_2 \in E$ tales que $\psi(v) + \epsilon \geq G(v, u_1)$ y $\psi(w) + \epsilon \geq G(w, u_2)$, ahora para todo $t \in [0,1)$ se tiene

$$\begin{aligned} \psi(tv + (1-t)w) &= \inf_{u \in E} G(tv + (1-t)w, u) \\ &\leq G(tv + (1-t)w, tu_1 + (1-t)u_2) \\ &= G(t(v,u_1) + (1-t)(w,u_2)) \\ &\leq tG(v,u_1) + (1-t)G(w,u_2) \\ &\leq t(\psi(v) + \epsilon) + (1-t)(\psi(w) + \epsilon) \\ &= t\psi(v) + (1-t)\psi(w) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario se tiene que $\psi(tv + (1-t)w) \leq t\psi(v) + (1-t)\psi(w) + \epsilon$, por lo tanto ψ es convexa. □

Siguiendo ahora con la demostración de (5), consideremos $G\colon E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $G(v,w) = f(w) + g(v-w)$. G es convexa en $E \times E$, en efecto

$$\begin{aligned} G(t(v,w) &+ (1-t)(v_1,w_1)) = G(tv+(1-t)v_1, tw+(1-t)w_1) \\ &= f(tv+(1-t)v_1) + g(tv+(1-t)v_1 - tw - (1-t)w_1) \\ &= f(tv+(1-t)v_1) + g(t(v-w)+(1-t)(v_1-w_1)) \\ &\leq tf(v)+(1-t)f(v_1)+tg(v-w)+(1-t)g(v_1-w_1) \\ &= t[f(v)+g(v-w)]+(1-t)[f(v_1)+g(v_1-w_1)] \\ &= tG(v,w)+(1-t)G(v_1.w_1). \end{aligned}$$

Entonces por el lema anterior tenemos que $f *_{inf} g(v) = \operatorname{ínf}_{w\in E} G(v,w)$ es convexa en E.

Ahora demostraremos (6):

Supongamos que f es cóncava y g cualquier función. Entonces para cada $u \in E$ $v \to G_u(v) = g(u) + f(v-u)$ es cóncava por serlo f, y como el ínfimo de funciones cóncavas es una función cóncava, obtenemos que la función $v \to f *_{inf} g(v) = \operatorname{ínf}_{u\in E} G_u(v)$ es cóncava.

Por ultimo vamos a demostrar (7):

Si f es afín y g es convexa entonces por (5) $f *_{inf} g$ es convexa, y por (6) $f *_{inf} g$ es cóncava. Luego $f *_{inf} g$ es convexa y a la vez cóncava, es decir, $f *_{inf} g$ es afín. $\square$

Definición 2.3. *Sea $f\colon E \to \mathbb{R}$, donde E es un espacio normado. Se dice que f está minorada cuadráticamente si existe $c > 0$, tal que $f(v) \geq -\frac{c}{2}(1+\|v\|^2)$ para todo $v \in E$.*

Definición 2.4. *Sea E un espacio normado, $f\colon E \to \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$. Se define la regularización de Moreau-Yosida de f por:*

$$f_\lambda(v) = \operatorname*{ínf}_{u\in E}\Big\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\Big\}, \forall v \in E.$$

Es decir, $f_\lambda = f *_{inf} \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|^2$.

Análogamente, suponiendo que $f\colon E \to \mathbb{R}$ y $\mu > 0$ se define la regularización hipográfica Moreau-Yosida de f por:

$$f^\mu(v) = \sup_{u\in E}\Big\{f(u) - \frac{1}{2\mu}\|v-u\|^2\Big\}, \forall v \in E. \tag{2.1}$$

Es decir, $f^\mu = f *_{hip} \frac{1}{2\mu}\|\cdot\|^2$.

Proposición 2.2. *. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $f\colon E \to \mathbb{R}$. Entonces*

(1) $f_\lambda \leq f$*, para todo* λ*.*

(2) Si $0 < \lambda' < \lambda$ *entonces* $f_\lambda \leq f_{\lambda'} \leq f$*.*

(3) $f^\mu = -(-f_\mu)$*, para todo* $\mu > 0$*.*

(4) $\inf_{v\in E} f_\lambda(v) = \inf_{v\in E} f(v)$*. De hecho cualquier mínimo de* f *es mínimo de* f_λ*; y si* f *es semicontinua inferiormente, entonces cualquier mínimo de* f_λ *es también mínimo de* f*; es decir ,*

$$argmin(f_\lambda) = argmin(f)$$

si f *es semicontinua inferiormente.*

(5) $(f_\lambda)_\mu = f_{\lambda+\mu}$ *si* $\lambda > 0$*.*

(6) si f *es convexa, entonces* f_λ *es convexa.*

(7) si f *es cóncava,entonces* f_λ *es cóncava.*

(8) si f *es afín, entonces* f_λ *es afín.*

(9) si f *es invariante por un conjunto de isometrías de* E*, entonces* f_λ *también lo es. Es decir si* $\{T_i : i \in I\}$ *es un conjunto de isometrías de* E *tal que* $f(T_i v) = f(v)$ *para todo* $i \in I$*, entonces* $f_\lambda(T_i v) = f_\lambda(v)$ *para todo* $i \in I$*.*

Demostración. Las propiedades (1) (2) (3) son obvias,vamos a demostrar (4):

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\inf_{v\in E} f_\lambda(v) &= \inf_{v\in E}\inf_{u\in E}\big\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\big\}\\
&= \inf_{v,u\in E}\big\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\big\}\\
&= \inf_{u\in E}\inf_{v\in E}\big\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\big\}\\
&= \inf_{u\in E} f(u),
\end{aligned}$$

pues como $f(u) \leq f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2$ $\forall v \in E$, en particular cuando $v = u, f(u) \in \{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\}$.

Luego el $\text{ínf}_{v\in E} f_\lambda(v) = \text{ínf}_{v\in E} f(v)$. Sea v mínimo de f; como 0 es mínimo de $g = \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|^2$, por la proposición 2.1 (4) nos dice que $v+0 = v$ es mínimo de $f *_{inf} g = f_\lambda$. Luego $argmin(f) \subset argmin(f_\lambda)$.

Por otro lado supongamos que f es semicontinua inferiormente, sea v mínimo de f_λ, veamos que v es mínimo de f:

Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in E$ tal que

$$f_\lambda(v) + \frac{1}{n} \geq f(u_n) + \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|^2.$$

Como n es arbitrario existe una secuencia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que cada u_n satisface

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{1}{2\lambda}\|v-u_n\|^2 &\leq f_\lambda(v) + \frac{1}{n} - f(u_n) \\
&\leq f_\lambda(v) + \frac{1}{n} - \text{ínf}(f) \\
&= \text{ínf}(f_\lambda) + \frac{1}{n} - \text{ínf}(f) = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Así cuando $n \to \infty$ se tiene que $\|v-u_n\|^2 \to 0$, por lo que $u_n \to v$ y como f es semicontinua inferiormente obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(v) &\leq \liminf_{n\to\infty} f(u_n) \leq \liminf_{n\to\infty}\big(f_\lambda(v) + \frac{1}{n}\big) \\
&= f_\lambda(v) = \text{ínf}(f_\lambda) = \text{ínf}(f).
\end{aligned}$$

de aquí se sigue que $f(v) = \text{ínf}(f)$, por lo tanto v es un mínimo de f.

Así $argmin(f_\lambda) \subset argmin(f)$, si f es semicontinua inferiormente, y en consecuencia $argmin(f_\lambda) = argmin(f)$

Vamos a demostrar (5): Sea $v \in E$ luego

$$\begin{aligned}
(f_\lambda)_\mu(v) &= \inf_{w\in E}\{f_\lambda(w) + \frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2\} \\
&= \inf_{w\in E}\{\inf_{u\in E}\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2\} + \frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2\} \\
&= \inf_{w,u\in E}\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2\} + \frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf_{u,w\in E}\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2\}+\frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2\}\\
&= \inf_{u\in E}\{f(u)+\inf_{w\in E}\{\frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2+\frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2\}\},
\end{aligned}$$

por lo que

$$(f_\lambda)_\mu(v)=\inf_{u\in E}\{f(u)+\inf_{w\in E}\{\frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2+\frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2\}\} \tag{2.2}$$

Ahora veamos que $\inf_{w\in E}\left\{\frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2+\frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2\right\}=\frac{1}{2\lambda+\mu}\|v-u\|^2$. En efecto, sea $w\in E$, dado $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|w-u\|\|w-v\|\leq\epsilon(\lambda+\mu)N.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\lambda+\mu}\|v-u\|^2 &= \frac{1}{2\lambda+\mu}\|v+w-w-u\|^2\\
&= \frac{1}{2\lambda+\mu}\|(v-w)+(w-u)\|^2\\
&= \frac{1}{2\lambda+\mu}(\|(v-w)\|+\|(w-u)\|)^2\\
&\leq \frac{1}{2\lambda+\mu}(\|(v-w)\|^2+\|(w-u)\|^2+2\|v-w\|\|w-u\|)\\
&= \frac{1}{2\lambda+\mu}\|(v-w)\|^2+\frac{1}{2\lambda+\mu}\|(w-u)\|^2+\frac{1}{\lambda+\mu}\|v-w\|\|w-u\|\\
&\leq \frac{1}{2\mu}\|(v-w)\|^2+\frac{1}{2\lambda}\|(w-u)\|^2+\frac{1}{\lambda+\mu}\epsilon(\lambda+\mu)N.
\end{aligned}$$

Luego $\dfrac{1}{2\lambda+\mu}\|v-u\|^2\leq\dfrac{1}{2\mu}\|(v-w)\|^2+\dfrac{1}{2\lambda}\|(w-u)\|^2+\epsilon N.$

Como ϵ es arbitrario se tiene que
$\dfrac{1}{2\lambda+\mu}\|v-u\|^2\leq\dfrac{1}{2\mu}\|(v-w)\|^2+\dfrac{1}{2\lambda}\|(w-u)\|^2.$

Como $w\in E$ es arbitrario se tiene que $\dfrac{1}{2\lambda+\mu}\|v-u\|^2\leq\inf_{w\in E}\{\dfrac{1}{2\mu}\|v-w\|^2+\dfrac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2\}.$

Por otro lado tomando $w = \dfrac{1}{\lambda+\mu}(\mu u + \lambda v) \in E$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2 &= \frac{1}{2\mu}\|v - \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu u + \lambda v)\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu u + \lambda v) - u\|^2 \\
&= \frac{1}{2\mu}\|v - \frac{\lambda v + \mu v - \mu u - \lambda v}{\lambda+\mu}\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|\frac{\mu u + \lambda v \lambda u + \mu u}{\lambda+\mu}\|^2 \\
&= \frac{1}{2\mu}\frac{\|\mu(v-u)\|^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{1}{2\lambda}\frac{\|\lambda(v-u)\|^2}{(\lambda+\mu)^2} \\
&= (\frac{\mu^2}{2\mu(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda^2}{2\lambda(\lambda+\mu)^2})\|v-u\|^2 \\
&= \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\|v-u\|^2.
\end{aligned}$$

Así

$$\inf_{w\in E}\{\frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2\} = \frac{1}{2\lambda+\mu}\|v-u\|^2. \tag{2.3}$$

Se sigue de (2.2) y (2.3)

$$\begin{aligned}
(f_\lambda)_\mu(v) &= \inf_{u\in E}\{f(u) + \frac{1}{2\lambda+\mu}\|v-u\|^2\} \\
&= f_{\lambda+\mu}(v).
\end{aligned}$$

Como $v \in E$ es arbitrario se concluye que $(f_\lambda) = f_{\lambda+\mu}$.

(6) (7) (8) son consecuencia de (5)(6)(7) de la proposición 2.1, teniendo en cuenta que $g = \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|^2$ es convexa y que $f *_{inf} g = f_\lambda$.

Vamos a demostrar (9): sea T_i una isometria de E, luego

$$\begin{aligned}
f_\lambda(T_i v) &= \inf_{u\in E}\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|T_i v - u\|^2\} \\
&= \inf_{u\in E}\{f(T_i u) + \frac{1}{2\lambda}\|T_i(v-u)\|^2\} \\
&= \inf_{u\in E}\{f(T_i u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\} \\
&= \inf_{u\in E}\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\} \\
&= f_\lambda(v).
\end{aligned}$$

En virtud de lo anterior f_λ es invariante por isometrias si f lo es. □

Proposición 2.3. *Sea E un espacio normado y $\lambda > 0$ si $f\colon E \to \mathbb{R}$ es K-lipschitz sobre E entonces la función $f_\lambda(v) = \inf_{u\in E}\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\}$ es K-lipschitz sobre E.*

Demostración. Note que

$$\inf_{u\in E}\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2\}=\inf_{u\in E}\{f(v-u)+\frac{1}{2\lambda}\|u\|^2\};$$

así podemos redefinir a f_λ por

$$f_\lambda(v)=\inf_{u\in E}\Big\{f(v-u)+\frac{1}{2\lambda}\|u\|^2\Big\}.$$

Sea $u\in E$ fijo definamos $g\colon E\to\mathbb{R}$ por

$$g(v)=f(v-w)+\frac{1}{2\lambda}\|u\|^2$$

Veamos que g es K-lipschitz; sean $v,w\in E$

$$\begin{aligned}|g(v)-g(w)| &= |f(v-u)+\frac{1}{2\lambda}\|u\|^2-(f(w-u)+\frac{1}{2\lambda}\|u\|^2)|\\ &= |f(v-u)-f(w-u)|\\ &\leq K\|v-u-(w-u)\|\\ &= K\|v-w\|.\end{aligned}$$

Se sigue de lo anterior que g es K-lipschitz; luego f_λ es el ínfimo de funciones continuas y K-lipschitz por lo tanto es K-lipschitz.

De manera similar se demuestra que para $\mu>0$ $f^\mu(v)=\sup_{u\in E}\big\{f(u)-\frac{1}{2\mu}\|v-u\|^2\big\}$ es continua K-lipschitz si f lo es. $\square$

Capítulo 3

Aproximación de Funciones Lipschitz Definidas en una Variedad

3.1. Aproximación en un espacio de Hilbert

Habiendo estudiado en la capitulo anterior las propiedades de la regulariozación de Moreau-Yosida procedemos a introducir ahora la regularización de Lasry y Lions. Esta técnica de regularización es un método explícito que conserva la convexidad,concavidad o afinidad que pretenden ser regularizada.

El resultado clave es que cualquier función minorada cuadráticamente, su sup-inf convolución con normas al cuadrado $(f_\lambda)^\mu$ es una función de clase $C^{1,1}$. Una función es de clase $C^{1,1}$ cuando es de clase C^1 y su derivada es lipschitziana.

A continuación enunciaremos el teorema de Lasry y Lions cuya demostración puede verse en [5]

Teorema 3.1. *(Lasry y Lions) Sea H un espacio de Hilbert y sea $f\colon H \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe $c > 0$, con $f(v) \geq -\dfrac{c}{2}(1 + \|v\|^2)$ para todo $v \in H$. Entonces la función $(f_\lambda)^\mu\colon H \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$(f_\lambda)^\mu(v) = \sup_{w\in E} \inf_{u\in E} \Big\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2 \Big\}$$

verifica que $(f_\lambda)^\mu \in C^{1,1}(H)$, para $0 < \mu < \lambda < \frac{1}{c}$. Además si f es uniformemente continua y acotada en H, se tiene que $(f_\lambda)^\mu$ converge uniformemente a f cuando $0 < \mu < \lambda \to 0$.

Es importante notar que por la proposición 2.3 tenemos que si f es k-lipschitz entonces $(f_\lambda)^\mu$ es también k-lipschitz sobre H.

En lo que sigue vamos a demostrar el resultado de aproximación de una función lipschitz y acotada en un espacio de Hilbert separable. Este resultado se obtiene utilizando la técnica de regularización de Lasry y Lions de convoluciones sup-inf que acabamos de ver, con el siguiente teorema de Moulis cuya demostración puede verse en [7].

Teorema 3.2. *(Moulis) Sea U un subconjunto de un espacio de Hilbert separable H. Sea $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, y sea $\epsilon\colon U \to (0,\infty)$ una función continua. Entonces existe una función $g\colon U \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $|f(v)-g(v)| \leq \epsilon(v)$ y $\|df(v)-dg(v)\| \leq \epsilon(v)$ para todo $v \in H$.*

Ahora se enuncia y demostra el resultado central de esta sección.

Teorema 3.3. *Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert separable, sea $f\colon H \to \mathbb{R}$ una función lipschitz y acotada, y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una función $g\colon H \to \mathbb{R}$ lipschitz de clase C^∞ ta que $|f(v)-g(v)| \leq \epsilon$ para todo $v \in H$, y $Lip(g) \leq Lip(f) + \epsilon$*

Demostración. Denotaremos $K = lip(f)$. Como f es lipschitz y acotada en particular es minorada cuadráticamente, así por el teorema de Lasry Lions se tiene que las funciones $(f_\lambda)^2\colon H \to \mathbb{R}$ dada por:

$$(f_\lambda)^\mu(v) = \sup_{w\in H} \inf_{u\in H} \Big\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|w-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|v-w\|^2 \Big\},$$

son de clase $C^{1,1}$ sobre H y convergen a f uniformemente sobre H cuando $0 < \mu < \lambda \to 0$. A partir de esto podemos escoger μ, λ suficientemente pequeño con $0 < \mu < \lambda < 0$ tales que:

$$|(f_\lambda)^\mu(v) - f(v)| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{3.1}$$

para todo $v \in H$

De la proposición 2.3 $(f_\lambda)^\mu$ es K-lipschitz. Por otra parte, en virtud de que $(f_\lambda)^\mu$ es de clase C^1, podemos usar el teorema 3.2 para encontrar una función $g\colon H \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

$$|g(v) - (f_\lambda)^\mu| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \|dg(v) - d(f_\lambda)^\mu\| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{3.2}$$

para todo $v \in H$.

En consecuencia para todo $v \in H$ (utilizando (3.1) y (3.2)),

$$\begin{aligned} |f(v)-g(v)| &= |f(v)-g(v)+(f_\lambda)^\mu(v)-(f_\lambda)^\mu(v)| \\ &\leq |f(v)-(f_\lambda)^\mu|+|(f_\lambda)^\mu-g(v)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Veamos por último que $lip(g) < lip(f)+\epsilon$:

Recordemos que $lip(g) = \sup_{v\in H}\|dg(v)\|$; además usando la proposición 2.3 y por (3.2) se puede verificar que $\|dg(v)\| \leq lip(f)+\epsilon$, de donde se obtiene el resultado deseado. $\square$

3.2. Aproximación de Funciones Lipschitz en Variedad Riemanniana Separable

Definición 3.1. *Una partición de la unidad sobre un conjunto M subordinada a una familia de conjuntos abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de M es una familia de funciones $\psi_\alpha\colon M \to [0,1]$ que satisface lo siguiente:*

(1) $sop(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$, para cada α.

(2) La familia $\{sop(\psi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ es localmente finita

(3) Para cada punto $x \in M$, tenemos que $\sum \psi_\alpha = 1$.

Teorema 3.4. *Sea M una variedad Riemanniana separable, sea $f\colon M \to \mathbb{R}$ una función lipschitz, sea $\epsilon\colon M \to (0,+\infty)$ una función continua, y $r > 0$. Entonces existe una función $g\colon M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $|f(p)-g(p)| \leq \epsilon(p)$ para todo $p \in M$, y $lip(g) \leq lip(f)+r$.*

Demostración. Denotaremos por $K = lip(f)$; sin perdida de generalidad podemos suponer que $\epsilon(p) \leq \frac{r}{2}$ para todo $p \in M$. Además fijemos un numero real positivo $\epsilon'(p) = \epsilon'$ suficientemente pequeño tal que

$$(K(1+\epsilon'))(1+\epsilon') < K+\frac{r}{2} \tag{3.3}$$

Por otra parte, para cada $p \in M$, se toma $\delta_p^1 > 0$, suficientemente pequeño tal que la función exponencial $\exp_p\colon B(0_p, 3\delta_p^1) \to T_pM$ sea un difeomorfismo $(1+\epsilon')$-bilipschitz de clase C^∞ de la bola $B(0_p, 3\delta_p^1)$ sobre la bola $B(p, 3\delta_p^1)$.

En virtud de la continuidad de f, y ϵ en p, existe un δ_p^2 de manera tal que $|f(p)-f(q)| < \dfrac{\epsilon(p)}{2}$ para todo $q \in B(p, 3\delta_p^2)$, y existe δ_p^2 tal que $|\epsilon(p)-\epsilon(q)| < \dfrac{\epsilon(p)}{2}$, para todo $q \in B(p, 3\delta_p^3)$ de esto último se sigue que $\epsilon(q) > \dfrac{\epsilon(p)}{2}$ para todo $q \in B(p, 3\delta_p^3)$.

Por lo antes expuesto podemos tomar $\delta_p = \text{mín}\{\delta_p^1, \delta_p^2, \delta_p^3\}$, y así se cumple que

1. $\exp_p \colon B(0_p, 3\delta_p) \subset T_pM \to B(p, 3\delta_p)$ es un difeomorfismo bilipschitz de clase C^∞.

2. $|f(p)-f(q)| < \dfrac{\epsilon(p)}{2}$ para todo $q \in B(p, 3\delta_p)$.

3. $\epsilon(q) > \dfrac{\epsilon(p)}{2}$ para todo $q \in B(p, 3\delta_p)$.

En virtud de la separabilidad de M existe un subconjunto $D = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso y numerable de M, así consideremos a $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(p_n, \delta_n)$, donde denotamos $\delta_n = \delta_{p_n}$ y $\epsilon_n = \epsilon(p_n)$ con δ_n tales que se satisfacen 1.,2.,3 para cada p_n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos una función $f_n \colon B(0_{p_n}, 3\delta_{p_n}) \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(v) = f(exp_{p_n}(v))$$

la cual es $K(1+\epsilon')$-lipschitz. Podemos extender a f_n a todo $T_{p_n}M$ definiendo

$$\hat{f}_n(v) = \inf_{w\in B(0_{p_n}, 3\delta_{p_n})} \{f_n(w) + k(1+\epsilon')\|v-w\|_{p_n}\}.$$

Luego $\hat{f}_n$ es una extensión lipschitz de f_n a todo $T_{p_n}M$, la cual es acotada sobre conjuntos acotados (por ser lipschitz), pero no es acotada sobre todo $T_{p_n}M$. Sin embargo podemos modificar $\hat{f}_n$ fuera de la bola $B(0_p, 4\delta_{p_n})$ de manera tal que resulte acotada en todo $T_{p_n}M$. Para ello, sea $C = \sup\{|\hat{f}_n(v)| + 1 : v \in B(0_{p_n})\}$ y definamos

$$\tilde{f}_n(v) = \begin{cases} -C & \text{si } \hat{f}_n(v) \leq -C \\ \hat{f}_n(v) & \text{si } -C \leq \hat{f}_n(v) \leq C \\ +C & \text{si } C \leq \hat{f}_n(v) \end{cases}$$

Note que $\tilde{f}_n$ es acotada y tiene la misma constante de lipschitz de $\hat{f}_n$, la cual es menor o igual a $K(1+\epsilon')$, esto es $\tilde{f}_n$ es una extensión acotada $K(1+\epsilon')$-lipschitz de f_n a todo $T_{p_n}M$.

A continuación vamos a construir una partición de la unidad diferenciable de clase C^∞ subordinada al cubrimiento $\{B(p_n, 2\delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M, y a estimar las constantes de lipschitz de cada una de las funciones de la partición.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos una función diferenciable $\theta_n \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $\theta_n = 1$ sobre $(-\infty, \delta_n]$ y $\theta_n = 0$ sobre $[\frac{3}{2}\delta_n, +\infty)$, y definamos $\varphi_n \colon M \to [0,1]$ por

$$\varphi_n(p) = \begin{cases} \theta_n(\|\exp_{p_n}(p)\|_{p_n}) & \text{si } p \in B(p_n, 3\delta_n) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cada una de la funciones φ_n son de clase C^∞ y lipschitz, puesto que θ_n y $\exp_{p_n}$ son de clase C^∞ y lipschitz. Además para cada n se ha de notar que:

(i) $\varphi_n = 1$ sobre la bola $B(p_n, \delta_n)$ en efecto:

Sea $p \in B(p_n, \delta_n)$ luego $\exp_{p_n}^{-1}(p) \in B(0_{p_n}, \delta_n)$ de donde $\|\exp_{p_n}^{-1}(p)\|_{p_n} < \delta_n$ de aquí que $\theta(\|\exp_{p_n}(p)\|_{p_n}) = 1$, luego $\varphi_n(p) = 1$ para cada $p \in B(p_n, \delta_n)$

(ii) $\varphi_n = 0$ sobre $M \setminus B(p_n, \frac{3}{2}\delta_n)$, puesto que si $p \in M \setminus B(p_n, \frac{3}{2}\delta_n)$, entonces $p \in B(p_n, 3\delta_n) \setminus B(p_n, \frac{3}{2}\delta_n)$ ó $p \notin B(p_n, 3\delta_n)$; ahora si $p \in B(p_n, 3\delta_n) \setminus B(p_n, \frac{3}{2}\delta_n)$ entonces $\frac{3}{2}\delta_n < \|\exp_{p_n}^{-1}(p)\|_{p_n} < 3\delta_n$, así $\theta(\|\exp_{p_n}(p)\|_{p_n}) = 0$, de donde se sigue que $\varphi_n(p) = 0$. De lo contrario si $p \notin B(p_n, 3\delta_n)$ tenemos que $\varphi_n(p) = 0$, por definición.

Definamos las funciones $\psi_k \colon M \to [0,1]$ por

$$\psi_k = \varphi_k \prod_{j<k} (1 - \varphi_j)$$

con $\psi_1 = \varphi_1$; note que ψ_k es C_k-lipschitz donde

$$C_k := \sum_{j \leq k} lip(\varphi_j)$$

pues se tiene que el producto de dos funciones lipschitz es m-lipschitz, donde m igual a la suma de las respectivas constantes de lipschitz.

Ahora mostraremos que $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de la unidad diferenciable de clase C^∞ subordinada al cubrimiento $\{B(p_n, 2\delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M. Es claro que ψ_n es de clase C^∞ en M.

Note que

(1) $sop(\psi_n) \subset B(p_n, 2\delta_n)$, para cada n, en efecto, si $\varphi_n(p) = 0$ entonces $\psi_n(p) = 0$, esto es si $p \in M \setminus B(p_n, \frac{3}{2}\delta_n)$ entonces $\psi_n(p) = 0$ en consecuencia, $\psi_n(p) \neq 0$ implica que $p \in B(p_n, \frac{3}{2}\delta_n)$, por lo que $sop(\psi_n) \subset \overline{B(p_n, \frac{3}{2}\delta_n)} \subset B(p_n, 2\delta_n)$, por lo tanto $sop(\psi_n) \subset B(p_n, 2\delta_n)$.

(2) La familia $\{sop(\psi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente finita, en efecto, sea $p \in M$ y $k = \text{mín}\{j : p \in B(p_j, \delta_j)\}$, luego $1 - \varphi_k = 0$, pues $\varphi_k = 1$ sobre $B(p_k, \delta_k)$.

Supongamos que $sop(\psi_l) \cap B(p_k, \delta_k) \neq \emptyset$ para algún $l > k$, luego existe $x \in sop(\psi_l) \cap B(p_k, \delta_k)$, esto es $x \in sop(\psi_l)$ y $x \in B(p_k, \delta_k)$ como $x \in B(p_k, \delta_k)$, por lo antes mencionado $1 - \varphi_k(x) = 0$, pero como $k < l$ se sigue que $\psi_l(x) = 0$, así $x \in sop(\psi_l)$ y $\psi_l(x) = 0$, pero $B(p_k, \delta_k)$ es una vecindad de x tal que $B(p_k, \delta_k) \cap \{y \in M : \psi_l(y) \neq 0\} = \emptyset$, lo cual implica que $x \notin sop(\psi_l)$, lo cual contradice lo antes supuesto, por lo tanto $sop(\psi_l) \cap B(p_k, \delta_k) = \emptyset$ para todo $l > k$.

De lo antes expuesto, se tiene que para cada $p \in M$ existe una vecindad de p que intercepta a una cantidad finita de conjuntos de la familia $\{sop(\psi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que dicha familia es localmente finita.

Veamos que $\sum \psi_n(p) = 1$ para todo $p \in M$, para ello demostremos por inducción la siguiente propiedad:

$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i = 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - \varphi_i) \ \forall N \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

Es claro que $\psi_1 = 1 - (1 - \psi_1) = \psi_1$. Supongamos que (3.4) se cumple para k, veamos que se cumple para $k + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \psi_i &= \sum_{i=1}^{k} \psi_i + \psi_k \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - \varphi_i) + \varphi_{k+1} \prod_{i=1}^{k}(1 - \varphi_i) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - \varphi_i)(1 - \varphi_{k+1}) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{k+1}(1 - \varphi_i)
\end{aligned}$$

por lo tanto la propiedad (3.4) es valida para todo N.

Recordemos que $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(p_n, \delta_n)$. Sea $p \in M$, luego existe N tal que $p \in B(p_N, \delta_N)$ en consecuencia se tiene que, $1 - \varphi_N(p) = 0$ y $\psi_n(p) = 0$ para $n > N$, por tanto

$$\begin{aligned}
\sum \psi_n(p) &= \sum_{i=1}^{N} \psi_i(p) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - \varphi_i(p)) = 1.
\end{aligned}$$

Asi $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de la unidad diferenciable de clase C^∞ subordinada al cubrimiento $\{B(p_n, 2\delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M.

Como consecuencia del teorema 3.3 existe una función diferenciable $g_n\colon T_{p_n}M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que

$$\begin{aligned} |g_n(v) - \tilde{f}_n(v)| &\leq \frac{\epsilon_n}{2^{n+2}(C_n+1)} \quad \textit{para todo } v \in T_{p_n}M && (3.5) \\ y & \\ lip(g_n) &\leq lip(\tilde{f}_n) + \epsilon' \leq K(1+\epsilon') + \epsilon' && (3.6) \end{aligned}$$

Ahora bien definamos nuestra aproximación $g\colon M \to \mathbb{R}$ por

$$g(p) = \sum_n \psi_n(p) g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p)) \quad \textit{para todo } p \in M.$$

Veamos que g esta bien definida, observe que si $p \in B(p_n, 3\delta_n)$ para algún n, entonces la $\exp_{p_n}$ es un difeomorfismo de clase C^∞ de $B(0_{p_n}, 3\delta_n)$ sobre $B(p_n, 3\delta_n)$ así la expresión $\psi_n(p)g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$ esta bien definida y es diferenciable de clase C^∞ sobre $B(p_n, 3\delta_n)$. Además, si $p \notin B(p_n, 2\delta_n)$ para algún n, entonces $\psi_n(p) = 0$, pues $sop(\psi_n) \subset B(p_n, 2\delta_n)$ en consecuencia para todo $p \notin B(p_n, 3\delta_n)$ supondremos que la expresiones $\psi_n(p)g_n(\exp_{p_n}^{-1}(p))$ se anulan. Por lo tanto g esta bien definida y es diferenciable de clase C^∞ sobre M.

Procedamos ahora a verificar que g y $lip(g)$ aproximan a f y $lip(f)$ respectivamente, como es requerido.

Sea $p \in M$ (fijo), consideremos $k = \min\{j : p \in B(p_j, \delta_j)\}$, luego $\psi_l = 0$ sobre $B(p_k, \delta_k)$ para $l > k$. Estimemos $|f - g|$. Note que como $p \in B(p_m, \delta_m)$ para $m \leq k$, justificamos la siguiente notación $v_m = \exp_{p_m}^{-1}(p) \in T_{p_m}M$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |g(p) - f(p)| &= \Big| \sum_n \psi_n(p) g_n(v_m) - f(p) \Big| \\ &= \Big| \sum_{m\leq k} \psi_m(p) g_m(v_m) - f(p) \Big| \\ &= \Big| \sum_{m\leq k} \psi_m(p) g_m(v_m) - \sum_{m\leq k} \psi_m(p) f(p) \Big| \\ &= \Big| \sum_{m\leq k} \psi_m(p) [g_m(v_m) - f(p)] \Big| \\ &= \Big| \sum_{m\leq k} \psi_m(p) [g_m(v_m) - \tilde{f}_m(v_m)] \Big| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p)|g_m(v_m)-\tilde{f}_m(v_m)| \\
&\leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p)\frac{\epsilon_m}{2^{m+2}(C_m+1)} \leq \sum_{m\leq k}\psi_m(p)\frac{\epsilon_m}{2} \\
&\leq \sum_{m\leq k} \psi_m(p)\epsilon(p) = \sum_{m}\psi_m(p)\epsilon(p) = \epsilon(p).
\end{aligned}
$$

Finalmente, veamos que $Lip(g) \leq K + r$. Como g está definida sobre una variedad Riemanniana, en virtud del lema1.3 es suficiente mostrar que g es localmente $(K+r)$-lipschitz. Tomemos $a \in M$ y consideremos $k = k(a) = \text{mín}\{j : a \in B(p_j, \delta_j)\}$, luego $\psi_l = 0$ sobre $B(p_k, \delta_k)$ para $l > k$. Sea también

$$\delta_a = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k, \delta_k - d(a, p_k)\},$$

y

$$F_{p,q} = \{m \in \{1, ..k\} : B(p_m, 2\delta_m) \cap \{p, q\} \neq \emptyset\}.$$

Note que si $p, q \in B(a, \delta_a)$, entonces:

(i) Para todo $m \in \{1, ..., k\}$, tenemos que $p \in B(p_m, 3\delta_m)$ si $q \in B(p_m, 2\delta_m)$, en efecto, pues

$$
\begin{aligned}
d(p_m, p) &\leq d(p_m, q) + d(q, p) \\
&< 2\delta_m + \delta_a \\
&< 2\delta_m + \delta_m = 3\delta_m.
\end{aligned}
$$

Simétricamente $q \in B(p_m, 3\delta_m)$ si $p \in B(p_m, 2\delta_m)$; como consecuencia para cada $m \in F_{p,q}$ tenemos que $p, q \in B(p_m, 3\delta_m)$; en particular si $m \in F_{p,q}$, entonces $v_m := \exp_{p_m}^{-1}(p)$, $w_m := \exp_{p_m}^{-1}(q)$ están bien definidos y tenemos que

$$|g_m(v_m) - g_m(w_m)| \leq (K + \frac{r}{2})d(p, q) \tag{3.7}$$

en efecto, usando (3.6)

$$
\begin{aligned}
|g_m(v_m) - g_m(w_m)| &\leq (K(1+\epsilon') + \epsilon')\|v_m - w_m\|_{p_m} \\
&= (K(1+\epsilon') + \epsilon')\|\exp_{p_m}^{-1}(p) - \exp_{p_m}(q)\|_{p_m} \\
&\leq (K(1+\epsilon') + \epsilon')(1+\epsilon')d(p, q) < (K + \frac{r}{2})d(p, q)
\end{aligned}
$$

(ii) $m \in \mathbb{N} \setminus F_{p,q}$ entonces $\psi_m(p) = 0 = \psi_m(q)$; pues el $sop(\psi_m) \subset B(p_m, 2\delta_m)$ y el $sop(\psi_l) \cap B(p_k, \delta_k) = \emptyset$, para todo $l > k$

Por lo tanto para $p, q \in B(a, \delta_a)$ (usando la notación $v_m = \exp_{p_m}^{-1}(p)$, y $w_m = \exp_{p_m}^{-1}(q)$), se sigue que

- $g(p) = \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(p)$, $\; g(q) = \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(w_m)\psi_m(q)$,
- $1 = \sum_{m \in F_{p,q}} \psi_m(p) = \sum_{m \in F_{p,q}} \psi_m(q)$, y
- $|g_m(v_m) - g_m(w_m)| \leq (K + \frac{r}{2})d(p,q)$, si $m \in F_{p,q}$.

fijemos $p, q \in B(a, \delta_a)$. Puesto que $\sum_{m \in F_{p,q}} f(p)(\psi_m(q) - \psi_m(p) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
g(p) - g(q) &= \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(p) - \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(w_m)\psi_m(q) \\
&= \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(p) - \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(w_m)\psi_m(q) - \sum_{m \in F_{p,q}} f(p)(\psi_m(q) - \psi_m(p) \\
&- \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(q) + \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(q) \\
&= \Big(\sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(p) - \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(q) \Big) - \sum_{m \in F_{p,q}} f(p)(\psi_m(q) - \psi_m(p)) \\
&+ \Big(\sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)\psi_m(q) - \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(w_m)\psi_m(q) \Big) \\
&= \sum_{m \in F_{p,q}} g_m(v_m)(\psi_m(p) - \psi_m(q)) - \sum_{m \in F_{p,q}} f(p)(\psi_m(q) - \psi_m(p)) \\
&+ \sum_{m \in F_{p,q}} (g_m(v_m) - g_m(w_m))\psi_m(q) \\
&= \sum_{m \in F_{p,q}} (g_m(v_m) - \tilde{f}_m(v_m))(\psi_m(p) - \psi_m(q)) + \sum_{m \in F_{p,q}} (g_m(v_m) - g_m(w_m))\psi_m(q)
\end{aligned}$$

En consecuencia, usando (3.5) (3.7) y el hecho de que ψ_m es C_m-Lipschitz se obtiene que

$$\begin{aligned}
|g(p) - g(q)| &\leq \sum_{m \in F_{p,q}} |g_m(v_m) - \tilde{f}_m(v_m)||\psi_m(p) - \psi_m(q)| + \sum_{m \in F_{p,q}} |g_m(v_m) - g_m(w_m)|\psi_m(q) \\
&\leq \sum_{m \in F_{p,q}} \frac{\epsilon_m}{2^{m+2}(C_m + 1)} C_m d(p,q) + \sum_{m \in F_{p,q}} (K + \frac{r}{2})d(p,q)\psi_m(q) \\
&\leq \sum_{m \in F_{p,q}} \frac{\epsilon(a)}{2^{m+1}} d(p,q) + (K + \frac{r}{2})d(p,q) \\
&\leq \epsilon(a)d(p,q) + (K + \frac{r}{2})d(p,q) \leq \frac{r}{2} + (K + \frac{r}{2})d(p,q) = (K + r)d(p,q)
\end{aligned}$$

como $a \in M$ es arbitrario, esto demuestra que g es localmente $(K + r)$-lipschitz, es decir que $Lip(g) \leq Lip(f) + r$. $\square$

Referencias Bibliográficas

[1] Ferrera-J. López-Mesas F. Azagra, D. and Rangel Y. Smooth aproximation of lipschitz functions on riemannian manifolds. *J. Math.Anal.Appl*, (326):1370–1378, (2007).

[2] Manfredo Do Carmo. *Riemannian Geometry*, volume 1. Springer-Verlag, (1991).

[3] S Lang. *Differential and Riemannian Maniflods*. Springer-Verlag, (1995).

[4] S Lang. *Fundamentals of differential geometry*. (Graduate Texts in Mat- hematics 191), New York (1999).

[5] J. Lasry and P. Lions. A remark on regularization in hilbert spaces. *Israel J.Math.55(3)*, pages 257–266, (1986).

[6] Fernando López Mesas-Colomina. *Análisis no Regular en Variedades Riemannianas Y Aplicaciones a las Ecuaciones de Hamilton-Jacobi*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, (2004).

[7] N. Moulis. Aproximation de fonctions differentiables sur certains espaces de banach. *Ann.Inst. Fourier*, pages 293–345, (1971).

[8] Greene R and Wu H. C^∞ aproximations of convex,subharmonic,and plurisubharmonic functions. *Ann.Sci.Ècole Norm.Sup.*, pages 47–84, (1979).