Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado
Decanato de Ciencias y Tecnologías
Departamento de Matemática

Constantes $BD^s(G)$ y $BD_s(G)$ y relaciones entre ellas

Dra. Isabel Cristina Márquez de Mastromartino

Trabajo de Ascenso presentado para optar a la categoria de Titular
en el escalafón del Personal Docente y de Investigación

Barquisimeto - Venezuela
Junio 2010

Constantes $BD^s(G)$ y $BD_s(G)$ y relaciones entre ellas

Dra. Isabel Márquez de M.

Dedicatoria

A Jehová

y

a mis más grandes amores,

Isabel Teresa,   Angel,   Angel Daniel   y   Daniela Isabel.

Agradecimiento

El día que clamé, me respondiste;
Me fortaleciste con vigor en mí alma.
Salmos 138:3

A Dios eternamente gracias.

El amor nunca deja de ser; pero las profecias se acabáran y cesarán las lenguas, y la ciencia acabará. Y ahora permanecen la fe, la esperanza y el amor, estos tres; pero el mayor de ellos es el amor.
1 Corintios: 8 y 13.

A mi madre, esposo, hijo e hija.

Los amo.

A mis compañeros de investigación, en especial al Dr. Oscar Ordaz.

A la UCV y a la UCLA.

A todos,

GRACIAS

Notaciones

$\lvert A \rvert$	cardinalidad de un conjunto A
G	grupo abeliano finito de orden n
$\lvert G \rvert$	orden de grupo abeliano G
$S : A \subset \{1, 2, \ldots, k\} \to G$	secuencia de longitud k en G
$S = g_1 g_2 \ldots g_k$	secuencia de longitud k en G
$\lvert S \rvert$	longitud de secuencia S
$k - \text{secuencia}$	secuencia de longitud k
$\mathbb{Z}_n$	grupo ciclico $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ sobre la adición módulo n
$D(G)$	constante de Davenport
$BD(G)$	constante de Davenport baricéntrica
$BD^s(G)$	constante de Davenport baricéntrica restringida
$BD_s(G)$	constante de Davenport baricéntrica generalizada

Resumen

Sea G un grupo abeliano finito. La **constante de Davenport baricéntrica restringida** $BD^s(G)$ es el menor entero q tal que toda secuencia en G de longitud q contiene una $k-$subsecuencia baricéntrica con $k \leq q$.

La **constante de Davenport baricéntrica generalizada** $BD_s(G)$ es el menor entero t tal que toda secuencia en G de longitud t contiene $s-$subsecuencias baricéntricas disjuntas. Para $s = 1$, esta constante es la **constante de Davenport baricéntrica** $BD(G)$, la cual definimos como el menor entero r tal que toda $r-$secuencia contiene una subsecuencia baricéntrica.

El objetivo principal de este trabajo es presentar relaciones entre las constantes $BD^s(G)$, $BD_s(G)$ y $BD(G)$. Estas constantes estan relacionadas con la constante de Davenport $D(G)$, la cual está definida como el entero m tal que toda $m-$secuencia contiene una subsecuencia de suma cero.

Daremos algunos valores o cotas de $BD^s(G)$ y $BD_s(G)$.

Palabras claves: secuencia baricéntrica, secuencia de suma-cero, constante de Davenport, constante de Davenport baricéntrica, constante de Davenport baricéntrica restringida, constante de Davenport baricéntrica generalizada.

Contenido

Capítulo 1

Motivación y Antecedentes

Sean G un grupo abeliano finito y $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ un conjunto finito con $k \geq 2$. Una **secuencia** S **en** G es una aplicación $S : A \to G$, denotada también por $S = g_1 g_2 \ldots g_k$, donde los g_i no son necesariamente distintos.

S **es una secuencia baricéntrica** si existe $a \in A$ tal que

$$\sum_A S = |A| \, S(a) .$$

El elemento $S(a)$ de S lo denominaremos **baricéntro**.

Es decir, una secuencia en G es baricéntrica si contiene un elemento el cual es el promedio de sus términos. La condición $k \geq 2$ evita considerar el caso trivial cuando $A = \{a\}$, dado que en este caso es evidente que

$$\sum_A S = |A| \, S(a) .$$

Cuando $|A| = k$ diremos que S es una $k-$**secuencia baricéntrica** y cuando S es inyectiva diremos que S es un $k-$**conjunto baricéntrico.**

En el caso $|A| > |G|$ se tiene que S no es inyectiva, luego existen $a, b \in A, a \neq b$, tal que $S(a) = S(b)$, por lo tanto, $S(a) + S(b) = 2S(a)$. En consecuencia $S(a), S(b)$ es una $2-$secuencia baricéntrica. Así, S contiene una subsecuencia baricéntrica, cuando $|A| > |G|$.

Analogamente, la condición $|A| > (k-1)|G|$, contiene una $k-$subsecuencia baricéntrica.

Una $k-$secuencia no vacia $S = g_1, g_2, \cdots, g_k$, en un grupo abeliano finito G, es de suma-cero si

$$\sum_{i=1}^{k} g_i = 0.$$

Una secuencia de suma-cero que no contiene subsecuencias propias de suma-cero, es llamada secuencia suma-cero minimal.

Notemos que una $k-$secuencia baricéntrica es de suma-cero si k es un múltiplo del orden del grupo donde esta definida.

Las investigaciones acerca de los problemas de suma-cero se inician en el año 1961 con un resultado de Erdős, Ginzburg y Ziv: en un grupo abeliano de orden n, toda $(2n-1)-$secuencia contiene una $n-$secuencia de suma-cero [11].

En 1966 [5] Davenport plantea el problema de determinar el menor entero positivo d, tal que toda $d-$secuencia contenga una subsecuencia de suma-cero, dando origen a la constante de Davenport $D(G)$.

El resultado de Erdös, Ginzburg y Ziv y la introducción de la constante de Davenport, dan origen a la teoría de suma-cero.

Una $k-$secuencia es baricéntrica con baricentro g_j, con $1 \leq j \leq k$, si y sólo si $g_1 + g_2 + \cdots + (1-k)g_j + \cdots + g_k = 0$. Es decir, una secuencia baricéntrica es también una secuencia con peso de suma-cero.

En 1994 Ordaz introduce la constante de Olson $O(G)$: menor entero positivo t tal que todo conjunto de cardinalidad t, contiene un subconjunto de suma-cero. Esta constante es estudiada en [8, 3, 13, 28, 15]. Es claro que $O(G) \leq D(G)$.

En los años 1995 y 1996 Hamidoune [19, 20], inicia el estudio de las secuencias de suma cero con peso, con el siguiente resultado:

Sean G un grupo abeliano de orden n, $D(G)$ la constante de Davenport y k un entero positivo. Sea $x_0, x_1, \ldots, x_m$ una secuencia de elementos de G tal que x_0 es el elemento que más se repite en la secuencia. Sea $\{w_i : 1 \leq i \leq k\}$ una familia de enteros primos relativos con n entonces se tiene la siguiente generalización del teorema de Erdös, Ginzburgy y Ziv:

- Para $m \geq n + k - 1$, existe una permutación σ de $[1, m]$ tal que

$$\sum_{1 \leq i \leq k} w_i x_{\sigma(i)} = \left(\sum_{1 \leq i \leq k} w_i \right) x_0.$$

- Para $k \geq n - 1$ y $m \geq k +\ D(G) - 1$, existe $K \subset [1, m]\,, |K| = k$ tal que

$$\sum_{i \in K} x_i = k x_0.$$

Observe que en este teorema se habla de $k-$subsecuencia digamos S, cuya suma es igual a kx_0 donde x_0 no necesariamente pertenece a S. En la definición de

$k-$subsecuencia baricéntrica, el elemento x_0 debe pertenecer a la $k-$subsecuencia.

Los trabajos de Hamidoune [24, 25] sobre secuencias de suma cero con peso fueron la inspiración, para introducir las secuencias baricéntricas [10] y la constante de Davenport baricéntrica.

El estudio de las secuencias baricéntricas se inicia en el año 1995 , en un seminario de Combinatoria realizado en el Laboratorio LaTecS, del Centro ISYS de la Universidad Central de Venezuela.

Los problemas de suma-cero han recibido mucha atención, dado que las respuestas a algunos de estos problemas, se obtienen en ámbitos clásicos como la combinatoria, álgebra y geometría, entre otros.

En lo expuesto a continuación, podemos observar la relación que existe entre la teoría de factorización y los problemas de suma-cero.

Hemos dicho que una secuencia $S = g_1 g_2 \ldots g_k$, en G grupo abeliano finito, sus términos no necesariamente son distintos, por lo tanto, puede expresarse como sigue:

$$S = \prod_{g \in G} g^{v_g(S)},$$

donde $v_g(S) \in \mathbb{N}_0, \quad$ para todo $\quad g \in G$ es el número de veces que aparece g en S. Llamaremos a $v_g(S)$ la **multiplicidad de g en S** y diremos que S contiene a g si $v_g(S) > 0$.

Sea $\mathfrak{F}(G)$ el conjunto formado por las secuencias en G. La concatenación de los elementos de $\mathfrak{F}(G)$, es una operación binaria sobre $\mathfrak{F}(G)$, es decir, dadas

$$S_1 = \prod_{g \in G} g^{v_g(S_1)}, \quad S_2 = \prod_{g \in G} g^{v_g(S_2)} \in \mathfrak{F}(G),$$

el producto

$$S_1 S_2 = \prod_{g \in G} g^{(v_g(S_1) + v_g(S_2))},$$

esta en $\mathfrak{F}(G)$.

El elemento neutro de $\mathfrak{F}(G)$ es la **secuencia vacía**, es decir, la secuencia

$$\prod_{g \in G} g^{v_g(S)}$$

donde $\mathrm{v}_g(S) = 0 \quad$ para todo $g \in G$.

Por lo tanto, $\mathfrak{F}(G)$ es un monoide libre con base G.

Llamaremos $\mathfrak{B}(G)$ el conjunto formado por todas las secuencias cero en G y por $\mathfrak{A}(G)$ el conjunto formado por las secuencias cero minimales de $\mathfrak{B}(G)$. Entonces $\mathfrak{B}(G) \subset \mathfrak{F}$ es un submonoide de $\mathfrak{F}$ (también llamado monoide bloque sobre G). En consecuencia, los elementos de $\mathfrak{A}(G)$ es el conjunto formado por los átomos o elementos irreducibles de $\mathfrak{B}(G)$ y las secuencias cero minimales de G.

Las técnicas utilizadas para obtener resultados, problemas y conjeturas sobre la teoría de suma-cero y teoría baricéntrica se encuentra en [3], [14] y [27]. Más información sobre la teoría de suma-cero se encuentra en [1, 2, 4, 13, 19, 20, 21, 22, 24, 26] y sobre la teoría baricéntrica en [6, 8, 18, 25].

En [7] la constante generalizada de Davenport $D_s(G)$ y la constante restringida de $D^s(G)$ están definidas como $BD_s(G)$ y $BD^s(G)$, donde los términos " subsecuencias baricéntricas " y " subsecuencias $k-$baricéntricas ", son reemplazados por " subsecuencias de suma cero " y " $k-$subsecuencias de suma-cero". También en [7], estas constantes dan nuevas cotas para la constante de Davenport, para grupos de rango tres de tipo: $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_{nm} \oplus \mathbb{Z}_{nmq}$ para $n = 2, 3$.

Los resultados de este trabajo han sido objeto de:

- C. Delorme, I. Márquez, O. Ordaz and A. Ortuño. Existence condition for barycentric sequences. *Discrete Math.* **281**(2004)163–172.
- C. Delorme, I. Márquez, O. Ordaz and D. Quiroz. Maximum line-free set geometry in $\mathbb{Z}_3^d$. Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 2(2007), pp. 253-263.
- L. González, I. Márquez, O. Ordaz and D. Quiroz. Constrained and generalized barycentric Davenport constant. Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 1(2007), pp. 11-21.

Este trabajo, además del resumen, capítulo 1: motivación y antecedentes y conclusiones, esta formado también por:

- El segundo capítulo, consta de resultados de la constante de Davenport baricéntrica.
- El tercer capítulo, consta de resultados de la constante de Davenport baricéntrica restringida.
- El cuarto capítulo, consta de resultados de la constante de Davenport baricéntrica generalizada.

Capítulo 2

Constante $BD(G)$

El objetivo principal de este capítulo es dar un resumen de los resultados que hemos obtenido de la constante de Davenport baricéntrica, con la finalidad de establecer relaciones entre esta constante y las constantes de Davenport baricéntrica restringida y la de Davenport baricéntrica generalizada. Comenzaremos por definir las secuencias baricéntricas. La existencia de la constante de Davenport baricéntrica, así como también los valores que hemos obtenido de esta constante, dependen de la constante de Davenport, en consecuencia nos vemos obligados a presentar la definición de la constante Davenport e incluso algunos de los resultados obtenidos.

§ 2.1. Secuencias de suma cero y secuencias baricéntricas

Definición 2.1.1. Sean G un grupo abeliano de orden n y $A = \{1, 2, \dots, k\}$ un conjunto finito. Una secuencia es una función $S : A \to G$, denotada también por $S = g_1 g_2 \dots g_k$, donde los g_i no son necesariamente distintos.

Diremos que S es:

- **suma cero** si
$$\sum_{1 \leq i \leq k} g_i = 0.$$
- **baricéntrica** si
existe g en S tal que
$$\sum_{1 \leq i \leq k} g_i = |S|g.$$
El elemento g de S lo denominaremos baricéntro.

Denotaremos por $|S|$ la longitud de la secuencia S y por $|G|$, el orden de G.

Es decir, una secuencia en G es baricéntrica si contiene un elemento el cual es el promedio de sus términos. La condición $|A| \geq 2$ evita considerar el caso trivial cuando $A = \{a\}$, dado que en este caso es evidente que

$$\sum_{A} S = |A|\, S(a)\,.$$

Cuando $|A| = k$ diremos que S es una $k-$secuencia baricéntrica y cuando S es inyectiva diremos que S es un $k-$conjunto baricéntrico.

Denotaremos por $\sigma(S)$ la suma de los elementos de S.

Observación 2.1. Sea G un grupo abeliano finito. Si S es una secuencia tal que $|S| = k|G|$, para algún $k \in \mathbb{Z}^{+}$, S es suma cero, y por lo tanto, es baricéntrica dado que $\sigma(S) = 0 = a|S|$, para cualquier g en S.

Ejemplo 2.1. En $\mathbb{Z}_4$ la secuencia $S = 2310121$ es baricéntrica dado que $2+3+1+0+1+2+0 = 1 = 7 \cdot 3$.

Observación 2.2. Sea G un grupo abeliano finito. Si S es una secuencia tal que $|S| > |G|$, o simplemente no es inyectiva, contiene 2 elementos a, b, tal que $a = b$, por lo tanto, $a + b = 2a$. Así, S contiene una $2-$subsecuencia baricéntrica cuando $|S| > |G|$, o no es inyectiva.

Proposición 2.1.1. *Sea G un grupo abeliano finito. Una secuencia S en G contiene una $2-$secuencia baricéntrica si y sólo si S tiene 2 elementos iguales.*

Demostración: Supongamos que S contiene una $2-$subsecuencia baricéntrica ab con $a \neq b$, luego $a + b = 2a$, por lo que $b = a$. Contradicción. Reciprocamente, por la Observación 2.2 si S contiene 2 elementos iguales entonces S contiene una $2-$subsecuencia baricéntrica. Por lo tanto, se tiene la proposición. $\square$

§ 2.2. Constante de Davenport

2.2.1. Definición de la constante de Davenport

Definición 2.2.1. Sea G un grupo abeliano finito. La **constante de Davenport** $D(G)$ es el menor entero t, tal que toda secuencia en G de longitud t contiene una subsecuencia de suma cero.

2.2.2. Existencia de la constante de Davenport

El lema siguiente, denominado por P. Erdös lema prehistórico, muestra que $D(G) \leq |G|$ y de esta manera queda demostrada la existencia de $D(G)$.

Lema 2.2.1. *[12] Sea G un grupo de orden n y sea $S = g_1 g_{2 \ldots} g_n$ una $n-$secuencia de elementos de G. Entonces existe una subsecuencia no vacía de S de suma cero.*

2.2.3. Resultados de la constante de Davenport

Lema 2.2.2. *$D(\mathbb{Z}_n) = n$, para todo n.*

En [8] presentamos más resultados de la constante de Davenport.

§ 2.3. Constante de Davenport baricéntrica

2.3.1. Definición de la constante de Davenport baricéntrica

Definición 2.3.1. Sea G un grupo abeliano finito. La **constante de Davenport baricéntrica** $BD(G)$ es el menor entero t, tal que toda secuencia en G de longitud t contiene una subsecuencia baricéntrica.

Definición 2.3.2. Sea G un grupo abeliano finito. La **constante de Davenport baricéntrica** $BD(G)$ es el menor entero positivo t tal que toda $t-$secuencia en G contiene una subsecuencia baricéntrica de longitud ≥ 2.

Si S no es inyectiva, entonces existe una subsecuencia $2-$baricéntrica. En el caso de ser inyectiva, si $|G| \neq 1$, usando pares de distintos elementos se prueba que $BD(G) \geq 3$.

En consecuencia, tenemos la siguiente definición alternativa de $BD(G)$:

Definición 2.3.3. Sea G un grupo abeliano finito. $BD(G)$ es el menor entero positivo d tal que todo $D \subset G$, con $|D| = d$ contiene una subsecuencia baricéntrica B con $|B| \geq 3$.

2.3.2. Existencia de la constante de Davenport baricéntrica

El siguiente teorema nos da la existencia de la constante de Davenport baricéntrica.

Teorema 2.3.1. *[8] Sea G un grupo abeliano de orden n. Entonces $BD(G) \leq D(G) + 1$.*

En consecuencia, por Lema 2.2.1, $BD(G) \leq n + 1$.

2.3.3. Resultados de la constante de Davenport baricéntrica

En el corolario y teorema siguientes, damos varios de los resultados de $BD(G)$ que hemos obtenido, algunos de ellos los utilizaremos para hallar valores o cotas de las constantes de Davenport baricéntrica restringida y Davenport baricéntrica generalizada:

Corolario 2.3.1. *[8]*

i. $BD(\mathbb{Z}_2) = 3$.

ii. $BD(\mathbb{Z}_2^s) = s + 2$, *para* $s \geq 1$.

iii. $BD(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = 7$.

iv. $BD(\mathbb{Z}_3) = 3$.

v. $BD(\mathbb{Z}_4) = 3$

v. $BD(\mathbb{Z}_5) = 3$.

vi. $BD(\mathbb{Z}_7) = 4$.

vii. $BD(\mathbb{Z}_{11}) = 5$.

A continuación daremos generalizaciones de resultados de la constante de Davenport baricéntrica:

Teorema 2.3.2. *[8, 28] $BD(\mathbb{Z}_2^t) = t + 2$ para $t \geq 1$.*

Teorema 2.3.3. *[8] Para $t \geq 2$ tenemos $2t + 1 \leq BD(\mathbb{Z}_3^t) \leq 2t + 2$. Más aún, $BD(\mathbb{Z}_3^t) = 2t + 1$, para $1 \leq t \leq 5$.*

El resultado $BD(\mathbb{Z}_3^3) = 7$ fue obtenido en [28].

§ 2.4. Máxima cardinalidad de conjuntos sin líneas en $\mathbb{Z}_3^s$, $s = 2, 3, 4$.

Consideraremos a p como un número primo y $\mathbb{Z}_p^s$ como un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_p$. Denotaremos por $\{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$ la base canónica de $\mathbb{Z}_p^s$, es decir, e_i, es la s-upla con entrada 1 en la posición i y 0 en las otras posiciones.

Observación 2.3. Los subespacios vectoriales de dimensión 1 están definidos como las líneas de $\mathbb{Z}_3^s$. Más aún, un $3-$subconjunto en $\mathbb{Z}_3^s$ es baricéntrico si y sólo si es una línea de $\mathbb{Z}_3^s$ o equivalentemente sus elementos suman 0.

Definición 2.4.1. [9] Sea $\mathbb{Z}_3^s$ el subespacio vectorial de dimensión s sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. Sean $a, b \in \mathbb{Z}_3^s$. Definimos el punto medio de a, b denotado por $m(a, b)$ por $2a+2b$ y por $b - a$ el vector v tal que el trasladado de a por v es b.

Definición 2.4.2. [9] Un $4-$subconjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ de $\mathbb{Z}_3^s$ (con $s \geq 2$) es un **paralelogramo** si estos puntos están ordenados de tal forma que una de las siguientes igualdades es cierta:

- $m(p_1, p_3) = m(p_2, p_4)$
- $p_2 - p_1 = p_3 - p_4$
- $p_4 - p_1 = p_3 - p_2$

Por lo tanto, los pares de puntos $\{p_1, p_3\}$ y $\{p_2, p_4\}$ son las diagonales y los otros pares los lados del paralelogramo.

En consecuencia $\{m(a, b), a, b\}$ forma una línea dado que

$$m(a, b) + a + b = (2a + 2b) + a + b = 0.$$

Los resultamos que presentamos a continuación los hallamos en [9], estos al igual que los ya citados, contribuyen para hallar valores o cotas de las constantes de Davenport baricéntrica restringida y Davenport baricéntrica generalizada :

Teorema 2.4.1. *[9] En $\mathbb{Z}_3^2$ un conjunto de 4 puntos es sin líneas si y sólo es un paralelogramo. Más aún el máximo número de puntos sin líneas en $\mathbb{Z}_3^2$ is 4.*

Ejemplo 2.2. Los elementos de $\mathbb{Z}_3^2$ siguientes: $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ forman un paralelogramo.

Teorema 2.4.2 ([9])**.** *La cardinalidad máxima de un conjunto sin líneas E en $\mathbb{Z}_3^3$ es 9. Más aún un conjunto de 9 puntos en $\mathbb{Z}_3^3$ es sin líneas si y sólo si esta formado, salvo un isomorfismo afín, por:* $(2, 2, 2), (2, 1, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (0, 2, 1)$, $(2, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)$.

Teorema 2.4.3 ([9, 10])**.** *El máximo conjunto sin líneas E en $\mathbb{Z}_3^4$ es 20. Por ejemplo el conjunto:* $(0, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (2, 2, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (0, 1, 2, 0), (1, 2, 2, 0)$, $(2, 1, 2, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 2), (2, 0, 2, 2), (0, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 2), (1, 0, 0, 2)$, $(0, 1, 0, 2), (1, 2, 0, 2), (2, 1, 0, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1)$, *es un conjunto sin líneas.*

Capítulo 3

Constante $BD^s(G)$

§ 3.1. Definición de la constante de Davenport baricéntrica restringida

Definición 3.1.1. Sea G un grupo abeliano finito. Definimos la **constante de Davenport baricéntrica restringida** $BD^s(G)$ como el menor entero t tal que toda secuencia en G de longitud t contiene una $k-$subsecuencia baricéntrica con $2 \leq k \leq s$.

§ 3.2. Existencia de la constante de Davenport baricéntica restringida

Establecemos la existencia de $BD^s(G)$ a través del lema siguiente:

Lema 3.2.1. *Sea G un grupo abeliano finito. Entonces*

$$BD^s(G) \leq |G| + 1, \text{ para } s \geq 2.$$

Demostración: Sea S una $(|G|+1)-$secuencia de G, entonces por Observación 2.2, S contiene una $2-$subsecuencia baricéntrica.

Así, por la mínimalidad de $BD^s(G)$,

$$BD^s(G) \leq |G| + 1. \quad \square$$

§ 3.3. Relación entre las constantes $BD(G)$ y $BD^s(G)$

En el teorema siguiente mostramos la relación de la constante de Davenport baricéntrica $BD(G)$, con la constante de Davenport baricéntrica restringida $BD^s(G)$:

Teorema 3.3.1. *Sea G un grupo abeliano finito. Entonces $BD(G) \leq BD^s(G)$.*

Demostración: Sea S una $BD^s(G)-$secuencia de G. Por Definición 3.1.1, S contiene una $k-$subsecuencia baricéntrica con $2 \leq k \leq s$, entonces por la mínimilidad de $BD(G)$, tenemos que

$$BD(G) \leq BD^s(G). \quad \square$$

§ 3.4. Resultados de la constante de Davenport restringida

En lo que sigue daremos resultados de $BD^s(G)$:

Teorema 3.4.1. *Sea G un grupo de orden n. Entonces*

$$BD^2(G) = n + 1.$$

Demostración: Por Lema 3.2.1 $BD^2(G) \leq n + 1$. Por otro lado, por Proposición 2.1.1, una secuencia constituida por n elementos distintos no contiene $2-$subsecuencias baricéntricas. Por lo tanto, $BD^2(G) \geq n + 1$. Así, tenemos el teorema.

$\square$

Teorema 3.4.2. *Sea G un grupo de orden n. Si $BD(G) \leq s$ entonces*

$$BD^s(G) = BD(G).$$

Demostración: Si $BD(G) \leq s$ entonces toda secuencia de longitud $BD(G)$ contiene una subsecuencia baricéntrica de longitud t con $t \leq BD(G) \leq s$. Luego, por la minímalidad de $BD^s(G)$,

$$BD^s(G) \leq BD(G).$$

Por otro lado, por Teorema 3.3.1 $BD(G) \leq BD^s(G)$, por lo tanto

$$BD^s(G) = BD(G).$$

$\square$

Corolario 3.4.1. *Sea G un grupo de orden n, entonces*

$$BD^{n+1}(G) = BD(G).$$

Demostración: Por Teorema 2.3.1 $BD(G) \leq n + 1$. Luego, por Teorema 3.4.2

tenemos que:

$$BD^{n+1}(G) = BD(G). \quad \square$$

Ejemplo 3.1.
$$BD^3\left(\mathbb{Z}_2\right) = 3.$$

En efecto, el orden de $\mathbb{Z}_2$, es 2, luego tenemos que $BD^{2+1}\left(\mathbb{Z}_2\right) = BD\left(\mathbb{Z}_2\right)$ y por Corolario 2.3.1 $BD(\mathbb{Z}_2) = 3$.

Corolario 3.4.2. *Sea G un grupo abeliano de orden n entonces $BD^s(G) = BD(G)$, para todo $s \geq n+1$.*

Demostración: Por Teorema 2.3.1 $BD(G) \leq n+1$ y por hipótesis, $n+1 \leq s$. Luego, $BD(G) \leq s$ por lo tanto, por Teorema 3.4.2 $BD^s(G) = BD(G)$. $\square$

Teorema 3.4.3. *Sea G un grupo de orden n. Entonces*

$$BD^{s+1}(G) \leq BD^s(G).$$

Demostración: Sea S una $BD^s\left(G\right)-$secuencia de G. Por la Definición 3.1.1, S contiene una $k-$subsecuencia baricéntrica con $k \leq s \leq s+1$. Luego S contiene una $k-$subsecuencia baricéntrica con $k \leq s+1$, por lo tanto, por la Definición 3.1.1,

$$BD^{s+1}(G) \leq BD^s(G). \quad \square$$

Corolario 3.4.3. *Sea G un grupo de orden n. Entonces*

$$BD^s(G) \leq BD^3(G), \quad \textit{para} \quad s \geq 4.$$

Demostración: Directamente del Teorema 3.4.3.

A continuación damos resultados de la constante de Davenport baricéntrica restringida:

Teorema 3.4.4.

1. $BD^3(\mathbb{Z}_2^2) = 5$.
2. $BD^3(\mathbb{Z}_2^3) = 9$.
3. $BD^s(\mathbb{Z}_2^t) = t+2$ *para todo* $s \geq t+2$ *y* $t \geq 1$.

Demostración:

1. Por Teoremas 3.4.3 y 3.4.1, $BD^3(\mathbb{Z}_2^2) = BD^{2+1}(\mathbb{Z}_2^2) \leq BD^2(\mathbb{Z}_2^2) = 5$, entonces $BD^3(\mathbb{Z}_2^2) \leq 5$. La secuencia $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$, no contiene $k-$subsecuencia baricéntrica con $k \leq 3$. Entonces $BD^3(\mathbb{Z}_2^2) \geq 5$, por lo tanto, $BD^3(\mathbb{Z}_2^2) = 5$.

2. Por Teoremas 3.4.3y 3.4.1 tenemos $BD^3(\mathbb{Z}_2^3) = BD^{2+1}(\mathbb{Z}_2^3) \leq BD^2(\mathbb{Z}_2^3) = 9$, entonces $BD^3(\mathbb{Z}_2^3) \leq 9$.

   La secuencia $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$ no contiene $k-$subsecuencia baricéntrica con $k \leq 3$. Entonces $BD^3(\mathbb{Z}_2^3) = 9$.

3. Por Teorema 2.3.2 tenemos $BD(\mathbb{Z}_2^t) = t+2 \leq s$ con $t \geq 1$, luego $BD(\mathbb{Z}_2^t) \leq s$ con $t \geq 1$. Entonces por Teorema 3.4.2 tenemos $BD^s(\mathbb{Z}_2^t) = BD(\mathbb{Z}_2^t)$ para $s \geq t+2$ y $t \geq 1$.

   En consecuencia, $BD^s(\mathbb{Z}_2^t) = t+2$ para $s \geq t+2$ y $t \geq 1$.

$\square$

Teorema 3.4.5.

1. $BD^3(\mathbb{Z}_3^2) = 5$.

2. $BD^3(\mathbb{Z}_3^3) = 10$.

3. $BD^3(\mathbb{Z}_3^4) = 21$.

4. $BD^s(\mathbb{Z}_3^t) = 2t+1$ *para* $s \geq 2t+1$ *y* $1 \leq t \leq 5$.

Demostración:

1. Por Teorema 2.4.1, la cardinalidad mínima de conjuntos con líneas en $\mathbb{Z}_3^2$ es 5. Así, se tiene que $BD^3(\mathbb{Z}_3^2) = 5$.

2. Por Teorema 2.4.2, la cardinalidad mínima de conjuntos con líneas en $\mathbb{Z}_3^3$ es 10. Así, se tiene que $BD^3(\mathbb{Z}_3^3) = 10$.

3. Por Teorema 2.4.3, la cardinalidad mínima de conjuntos con líneas en $\mathbb{Z}_3^4$ es 21. Así, se tiene que $BD^3(\mathbb{Z}_3^4) = 21$.

4. Por Teorema 2.3.3 y por hipótesis, tenemos $BD(\mathbb{Z}_3^t) = 2t+1 \leq s$ con $1 \leq t \leq 5$, luego $\mathrm{BD}(\mathrm{Z}_3^t) \leq s$ con $1 \leq t \leq 5$. Así, por Teorema 3.4.2 tenemos $BD^s(\mathbb{Z}_3^t) = BD(\mathbb{Z}_3^t) = 2t+1$ para $s \geq 2t+1$ y $1 \leq t \leq 5$.

   En consecuencia, $BD^s(\mathbb{Z}_3^t) = 2t+1$ para $s \geq 2t+1$ y $1 \leq t \leq 5$.

$\square$

Capítulo 4

Constante $BD_s(G)$

§ 4.1. Definición de constante de Davenport baricéntrica generalizada

Definición 4.1.1. Sea G un grupo abeliano finito. Definimos la **constante de Davenport baricéntrica generalizada** $BD_s(G)$ como el menor entero t tal que toda $t-$secuencia en G contiene $s-$subsecuencias baricéntricas disjuntas.

§ 4.2. Existencia de constante de Davenport baricéntrica generalizada

Establecemos la existencia de $BD_s(G)$ a través del lema siguiente:

Lema 4.2.1. *Sea G un grupo abeliano finito. Entonces*

$$BD_s(G) \leq sBD(G).$$

Demostración: Sea S una $sBD(G)-$secuencia en G, entonces S puede ser particionada en s secuencias disjuntas $S_1, \ldots, S_s$, tal que $|S_i| = BD(G)$. Luego, por la Definición 2.3.1, S_i contiene una subsecuencias baricéntrica. Por lo tanto, S contiene s subsecuencias baricéntricas disjuntas. Así, por la minimalidad de $BD_s(G)$:

$$BD_s(G) \leq sBD(G). \quad \Box$$

Lema 4.2.2. *Sea G un grupo abeliano finito. Entonces*

$$BD_s(G) \leq BD_{s+1}(G).$$

Demostración: Directamente de la definición de $BD_s(G)$. $\Box$

§ 4.3. Relación entre las constantes $BD^s(G)$ y $BD_s(G)$

En el siguiente lema mostramos la relación existente entre la constante de Davenport baricéntrica generalizada y la constante de Davenport baricéntrica restringida.

Lema 4.3.1. *Sea G un grupo abeliano finito. Si $BD^s(G) \leq BD_i(G) + s$, entonces*

$$BD_{i+1}(G) \leq BD_i(G) + s.$$

Demostración: Sea S una $(BD_i(G)+s)-$secuencia en G. Como $BD^s(G) \leq BD_i(G)+s$, entonces existe una $t-$subsecuencia baricéntrica con $t \leq s$. Por otra parte, los $BD_i(G)$ términos restantes contienen i subsecuencias baricéntricas disjuntas. Así, S contiene $i+1$ subsecuencias disjuntas.

Por lo tanto, por la la mínimalidad de $BD_{i+1}(G)$,

$$BD_{i+1}(G) \leq BD_i(G) + s. \quad \square$$

Corolario 4.3.1. *Sea G un grupo abeliano finito. Si $BD^s(G) \leq BD_i(G)+s$, entonces*

$$BD_{i+n}(G) \leq BD_i(G) + ns. \qquad (I)$$

Demostración: Directamente de Lema 4.3.1.

§ 4.4. Resultados de la constante de Davenport baricéntrica generalizada

Teorema 4.4.1. $BD_n(\mathbb{Z}_t) = 2n+1$, *para* $t = 2, 3, 4$ *y* $n \geq 1$.

Demostración: Consideremos la secuencia $2n-$secuencia $S = 1 \underbrace{00\ldots0}_{(2n-1)-\text{veces}}$. Esta secuencia podemos considerarla, como una secuencia de $\mathbb{Z}_2$ ó $\mathbb{Z}_3$ ó $\mathbb{Z}_4$. El número máximo de secuencias baricéntricas disjuntas que contiene S son $n-1$ y de longitud 2. Entonces

$$BD_n(\mathbb{Z}_2) \geq 2n+1 \quad \text{para} \quad t = 2, 3, 4 \quad y \quad n \geq 1.$$

Por otra parte:

- Por Corolario 2.3.1*i*. $BD_1(\mathbb{Z}_2) = 3$ y por Teorema 3.4.1 $BD^2(\mathbb{Z}_2) = 3$ entonces,

$$BD^2(\mathbb{Z}_2) = 3 < 5 = 3 + 2 = BD_1(\mathbb{Z}_2) + 2.$$

  Luego,

$$BD^2(\mathbb{Z}_2) < BD_1(\mathbb{Z}_2) + 2.$$

  Por lo tanto, por Corolario 4.3.1,

$$BD_{1+(n-1)}(\mathbb{Z}_2) \leq BD_1(\mathbb{Z}_2) + (n-1)2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1.$$

  Así,

$$BD_n(\mathbb{Z}_2) \leq 2n + 1.$$

- Por Corolario 2.3.1*iv*. $BD_1(\mathbb{Z}_3) = 3$ y por Teorema 3.4.1 $BD^2(\mathbb{Z}_3) = 4$ entonces,

$$BD^2(\mathbb{Z}_3) = 4 < 5 = 3 + 2 = BD_1(\mathbb{Z}_3) + 2.$$

  Luego,

$$BD^2(\mathbb{Z}_3) < BD_1(\mathbb{Z}_3) + 2.$$

  Por lo tanto, por Corolario 4.3.1,

$$BD_{1+(n-1)}(\mathbb{Z}_3) \leq BD_1(\mathbb{Z}_3) + (n-1)2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1.$$

  Así,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3) \leq 2n + 1.$$

- Por Corolario 2.3.1*v*. $BD_1(\mathbb{Z}_4) = 3$ y por Teorema 3.4.1 $BD^2(\mathbb{Z}_4) = 5$ entonces

$$BD^2(\mathbb{Z}_4) = 5 = 3 + 2 = BD_1(\mathbb{Z}_4) + 2.$$

  Así,

$$BD^2(\mathbb{Z}_4) = BD_1(\mathbb{Z}_4) + 2.$$

  Por lo tanto, por Corolario4.3.1 tenemos que

$$BD_{1+(n-1)}(\mathbb{Z}_4) \leq BD_1(\mathbb{Z}_4) + (n-1)2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1.$$

  Así,

$$BD_n(\mathbb{Z}_4) \leq 2n + 1.$$

En consecuencia, queda demostrado el teorema.

$\square$

Teorema 4.4.2. $BD_n(\mathbb{Z}_2^2) = 2n + 2$, *para* $n \geq 1$.

Demostración: Por Corolario 2.3.1*ii*. $BD_1(\mathbb{Z}_2^2) = 4$ y por Teorema 3.4.1 $BD^2(\mathbb{Z}_2^2) = 5$, luego,

$$BD^2(\mathbb{Z}_2^2) = 5 < 6 = 4 + 2 = BD_1(\mathbb{Z}_2^2) + 2.$$

Luego,

$$BD^2(\mathbb{Z}_2^2) < BD_1(\mathbb{Z}_2^2) + 2.$$

Por lo tanto, por Corolario 4.3.1,

$$BD_{1+(n-1)}(\mathbb{Z}_2^2) \leq BD_1(\mathbb{Z}_2^2) + (n-1)2 = 4 + 2n - 2.$$

Entonces,

$$BD_n(\mathbb{Z}_2^2) \leq 2n + 2.$$

Por otro lado, consideremos la $(2n+1)-$secuencia

$$S = e_1, e_2, e_1 + e_2, \underbrace{0, \ldots 0,}_{(2n-2)-\text{veces}} \quad \text{en} \quad \mathbb{Z}_2^2.$$

Los primeros cuatro elementos de S, forman una $4-$subsecuencia baricéntrica con baricentro 0 y con los $2n-3$ ceros restantes se pueden formar $n-2$ subsecuencias baricéntricas disjuntas de longitud 2. Por lo tanto, S contiene a lo sumo $n-1$ subsecuencias disjuntas. Así, $BD_n(\mathbb{Z}_2^2) \geq 2n+2$. En consecuencia,

$$BD_n(\mathbb{Z}_2^2) = 2n + 2. \quad \square$$

Teorema 4.4.3. $BD_n(\mathbb{Z}_2^3) = 2n + 4$, *para* $n \geq 2$.

Demostración: Sea S una $8-$secuencia en $\mathbb{Z}_2^3$. Si S es inyectiva entonces $S = \{0, e_1, e_2, e_3, e_1+e_2, e_1+e_3, e_2+e_3, e_1+e_2+e_3\}$. Luego, S contiene dos subsecuencias baricéntricas disjuntas $S_1 = 0, e_1, e_2, e_1 + e_2$ *y* $S_2 = e_3, e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3$. Si S no es inyectiva, entonces por Proposición 2.1.1 contiene una $2-$subsecuencia baricéntrica y de los 6 elementos restantes, por Teorema 3.4.4*i*, $BD(\mathbb{Z}_2^3) = 5$, luego existe otra subsecuencia baricéntrica en S, disjunta con la primera. Por lo tanto, S contiene dos subsecuencias baricéntricas disjuntas.

Así,

$$BD_2(\mathbb{Z}_2^3) \leq 8.$$

Sea S una secuencia de longitud $2n+3$ en $\mathbb{Z}_2^3$, constituida por 8 elementos distintos y uno de ellos repetido $2n-4$ veces. Como $BD_2(\mathbb{Z}_2^3) \leq 8$, entonces los 8 elementos distintos contienen dos subsecuencias baricéntricas y de los $2n-5$ elementos restantes de S se pueden obtener $n-3$ subsecuencias baricéntricas disjuntas de longitud 2. Así, S contiene a lo sumo $n-1$ subsecuencias baricénricas disjuntas. Por lo tanto,

$$BD_n(\mathbb{Z}_2^3) \geq 2n + 4.$$

En particular,
$$BD_2(\mathbb{Z}_2^3) \geq 8.$$
Así,
$$BD_2(\mathbb{Z}_2^3) = 8.$$

Por otro lado, por Teorema 3.4.1
$$BD^2(\mathbb{Z}_2^3) = 9.$$
Entonces
$$BD^2(\mathbb{Z}_2^3) = 9 < 8 + 2 = BD_2(\mathbb{Z}_2^3) + 2.$$
Así,
$$BD^2(\mathbb{Z}_2^3) \leq BD_2(\mathbb{Z}_2^3) + 2.$$

Por lo tanto, por Corolario 4.3.1
$$BD_{2+(n-2)}(\mathbb{Z}_2^3) \leq BD_2(\mathbb{Z}_2^3) + (n-2)2 = 8 + 2n - 4 = 2n + 4.$$
Entonces,
$$BD_n(\mathbb{Z}_2^3) \leq 2n + 4.$$
En consecuencia,
$$BD_n(\mathbb{Z}_2^3) = 2n + 4, \quad \text{para} \quad n \geq 1. \quad \square$$

Teorema 4.4.4. $BD_n(\mathbb{Z}_3^2) = 2n + 3$, *para* $n \geq 2$.

Demostración: Sea S una $7-$secuencia en $\mathbb{Z}_3^2$. Si S no es inyectiva, por Proposición 2.1.1 S contiene una $2-$subsecuencia baricéntrica y en los 5 elementos restantes por Teorema 3.4.5i, $BD^3(\mathbb{Z}_3^2) = 5$, luego hay otra subsecuencia baricéntrica, la cual es disjunta con la primera de manera que obtenemos dos subsecuencias baricéntricas disjuntas.

Si S es inyectiva entonces, por Teorema 2.4.1, en cada 5 elementos de S existe una $3-$subsecuencia baricéntrica, es decir, una línea L en $\mathbb{Z}_3^2$. Luego, si en los 4 elementos restantes de S hay una subsecuencia baricéntrica entonces obtenemos dos subsecuencias baricéntricas disjuntas.

De lo contrario, estos 4 elementos de la secuencia forman, por Teorema 2.4.1, un paralelogramo. Por una simple inspección existen 2 lineas paralelas L_1 y L_2 que pasan respectivamente por p y q, puntos distintos del paralegramo, que interceptan a L, usando los 2 puntos restantes del paralelogramo. Las líneas L_1 y L_2 son dos $3-$conjuntos baricéntricos, contenidos en S. Así,
$$BD_2(\mathbb{Z}_3^2) \leq 7.$$

Por otro lado, la secuencia $0, e_1, e_2, 2e_1, 2e_2, e_1 + e_2$ no contiene $2-$subsecuencias baricéntricas disjuntas. Por lo tanto,

$$BD_2(\mathbb{Z}_3^2) \geq 7.$$

De esta manera, tenemos que,

$$\mathrm{BD}_2(\mathbb{Z}_3^2) = 7 = 2 \cdot 2 + 3. \tag{4.1}$$

Sea S una $9-$secuencia en $\mathbb{Z}_3^2$. Si S no es inyectiva entonces por Proposición 2.2, S contiene una $2-$subsecuencia baricéntrica y los 7 elementos restantes, por ecuación 4.4 contienen otras dos subsecuencia baricéntricas disjuntas, de tal manera que obtenemos tres subsecuencias baricéntricas disjuntas. De lo contrario la secuencia esta formada por todos los elementos de $\mathbb{Z}_3^2$ y por lo tanto, contiene tres subconjuntos baricéntricos disjuntos: $\{0, e_1, 2e_1\}, \{e_2, e_1+e_2, 2e_1+e_2\}$ y $\{2e_2, e_1+2e_2, 2e_1+2e_2\}$.

Así, tenemos que,

$$BD_3(\mathbb{Z}_3^2) \leq 9.$$

Por otro lado, la secuencia $0, e_1, e_2, 2e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2, 2e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2$ no contiene $3-$subsecuencias baricéntricas disjuntas.

Asi,

$$BD_3(\mathbb{Z}_3^2) \geq 9$$

y en consecuencia,

$$BD_3(\mathbb{Z}_3^2) = 9.$$

Luego, por Teorema 3.4.1,

$$BD^2(\mathbb{Z}_3^2) = 10 < 11 = 9 + 2 = BD_3(\mathbb{Z}_3^2) + 2.$$

Luego tenemos:

$$BD^2(\mathbb{Z}_3^2) \leq BD_3(\mathbb{Z}_3^2) + 2.$$

Por lo tanto, por el Corolario 4.3.1, tenemos:

$$BD_{3+(n-3)}(\mathbb{Z}_3^2) \leq BD_3(\mathbb{Z}_3^2) + (n-3)2 = 9 + 2n - 6 = 2n + 3.$$

Así,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^2) \leq 2n + 3.$$

Por otro lado, consideremos una secuencia S en $\mathbb{Z}_3^2$ de longitud $2n+2$, constituida por 9 elementos distintos y uno de ellos que se repite $2n-6$ veces. En los 9 elementos distintos, S contiene 3 subsecuencias baricéntricas disjuntas y en los $2n-7$ restantes podemos construir $n-4$ subsecuencias disjuntas, de longitud 2. En consecuencia S contiene a lo sumo $n-1$ subsecuencias baricéntricas disjuntas. Entonces,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^2) \geq 2n + 3.$$

Así,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^2) = 2n + 3, \quad \text{para} \quad n \geq 2. \quad \square$$

Teorema 4.4.5. *$BD_n(\mathbb{Z}_3^3) \leq 3n + 4$, para $n \geq 2$.*

Demostración: Sea S una $10-$secuencia en $\mathbb{Z}_3^3$. Si S no es inyectiva, por Observación 2.2, contiene una $2-$secuencia baricéntrica y en los 8 elementos restantes, por Teorema 2.3.3, $BD(\mathbb{Z}_3^3) = 7$, por lo tanto, S contiene otra subsecuencia baricéntrica disjunta con la primera. Por lo tanto, S contiene 2 subsecuencias baricéntricas disjuntas.

Supongamos que S es inyectiva, entonces por Teorema 4.4, en cada 10 elementos diferentes existe un $3-$subconjunto baricéntrico, en los 7 elementos restantes, por Teorema 2.3.3, $BD(\mathbb{Z}_3^3) = 7$, luego S contiene otra subsecuencia baricéntrica disjunta con la primera.

Así, S contiene 2 subsecuencias baricéntricas disjuntas. Por lo tanto,

$$BD_2(\mathbb{Z}_3^3) \leq 10.$$

Más aun como en los 9 elementos,

$$(2,2,2),(2,1,2),(1,1,2),(1,2,2),(0,2,1),(2,0,1),(1,0,1),(0,1,1),(0,0,0),$$

no existen 2 subconjuntos baricéntricos disjuntos, tenemos,

$$BD_2(\mathbb{Z}_3^3) = 10.$$

Por otro lado, por Teorema , $BD^3(\mathbb{Z}_3^3) = 10$, luego,

$$BD^3(\mathbb{Z}_3^3) = 10 < BD_2(\mathbb{Z}_3^3) + 3.$$

Por lo tanto, por Corolario 4.3.1, tenemos,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^3) = BD_{2+(n-2)}(\mathbb{Z}_3^3) \leq BD_2(\mathbb{Z}_3^3) + (n-2)3.$$

En consecuencia,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^3) \leq 10 + 3n - 6 = 3n + 4.$$

Así,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^3) \leq 3n + 4, \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

□

El resultado dado a continuación corresponde a un problema abierto de [17].

Teorema 4.4.6. $BD_n(\mathbb{Z}_3^4) \leq 9n, \quad para \quad n \geq 2.$

Demostración: Por Teorema 3.4.4 $BD^9(\mathbb{Z}_3^4) = 9$ y por 2.3.3 $BD_1(\mathbb{Z}_3^4) = 9$.

Luego,

$BD^9(\mathbb{Z}_3^4) = 9$

Sea S una $21-$secuencia en $\mathbb{Z}_3^4$. Si S no es inyectiva, por Observación 2.2, contiene una $2-$secuencia baricéntrica y en los 19 elementos restantes existen 2 subsecuencias bariéntricas disjuntas, dado que por Teorema 2.3.3, $BD(\mathbb{Z}_3^4) = 9$, luego en cada 9 elementos de $\mathbb{Z}_3^4$ existe una subsecuencia baricéntrica. Por lo tanto, S contiene 3 subsecuencias baricéntricas disjuntas.

Supongamos que S es inyectiva, entonces por Teorema 2.4.3 en cada 21 elementos diferentes existe un $3-$subconjunto baricéntrico y en los 18 elementos restantes, por Teorema 2.3.3 $BD(\mathbb{Z}_3^4) = 9$, , hay 2 subsecuencias baricéntricas disjuntas.
Así, S contiene 3 subsecuencias baricéntricas disjuntas. Por lo tanto,

$$BD_3(\mathbb{Z}_3^4) \leq 21.$$

Así,

$$BD_3(\mathbb{Z}_3^4) \geq 21.$$

Por otro lado, por Teorema 3.4.5, $BD^9(\mathbb{Z}_3^4) = 9$, luego,

$$BD^9(\mathbb{Z}_3^4) \leq 9 + 9 = BD_1(\mathbb{Z}_3^4) + 9 + 9.$$

Así,

$$BD^9(\mathbb{Z}_3^4) \leq BD_1(\mathbb{Z}_3^4) + 9.$$

Por lo tanto, por Corolario 4.3.1, tenemos,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^4) = BD_{1+(n-1)}(\mathbb{Z}_3^4) \leq BD_1(\mathbb{Z}_3^4) + (n-1)9.$$

En consecuencia,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^3) \leq 9n.$$

Así,

$$BD_n(\mathbb{Z}_3^4) \leq 9n, \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

$\square$

Conclusiones

Las relaciones existentes entre las constantes de Davenport baricéntrica, Davenport baricéntrica restringida y Davenport baricéntrica, constituyen métodos algebraicos para el tratamiento de problemas baricéntricos y por ende de problemas de suma-cero.

Dos problemas interesantes son hallar cotas inferiores, las mejores posibles, para:

1. $BD_n(\mathbb{Z}_3^3), \quad para \quad \text{n} \geq 2.$
2. $BD_n(\mathbb{Z}_3^4), \quad para \quad \text{n} \geq 2.$

Bibliografía

[1] A. Bialostocki and P. Dierker. On zero-sum Ramsey numbers — small graphs. *Ars Combinatoria* **29A** (1990) 193–198.

[2] A. Bialostocki and P. Dierker. On the Erdős, Ginzburg and Ziv theorem and the Ramsey numbers for stars and matchings *Discrete Math.* **110** (1992)1–8.

[3] Y. Caro. Zero-sum problems: a survey. *Discrete Math.* **152** (1996) 93–113.

[4] Y. Caro. On zero-sum Ramsey numbers-stars. *Discrete Math.* **104**(1992)1–6.

[5] H. Davenport. *Proceedings of the Midwestern Conference on Group Theory and Number Theory.* Ohio State University. April 1966.

[6] C. Delorme, S. González, O. Ordaz and M.T. Varela . Barycentric sequences and barycentric Ramsey numbers stars. *Discrete Math.* **277**(2004)45–56.

[7] C. Delorme, O. Ordaz and D. Quiroz. Some remarks on Davenport constant. *Discrete Math.* **237**(2001)119–128.

[8] C. Delorme, I. Márquez, O. Ordaz and A. Ortuño. Existence condition for barycentric sequences. *Discrete Math.* **281**(2004)163–172.

[9] C. Delorme, I. Márquez, O. Ordaz and D. Quiroz. Maximum line-free set geometry in $\mathbb{Z}_3^d$. Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 2(2007), pp. 253-263.

[10] Y. Edel, C. Elsholtz, A. Geroldinger, S. Kubertin, L. Rackham. Zero-sum problem in finite abelian groups and affine caps. Preprint.

[11] P. Erdős, A. Ginzburg and A. Ziv. Theorem in the additive number theory. *Bull. Res. Council Israel* **10F** (1961) 41–43.

[12] P. Erdös and R. Graham. Old and new problems and results in combinatorial number theory. Enseign. Math. 25 (1980) 1-128.

[13] W. Gao and A. Geroldinger. On long minimal zero sequences in finite abelian groups. *Periodica Mathematica Hungarica* **38** (1999) 179–211.

[14] W. Gao and A. Geroldinger. Zero-sum problems in finite abelian groups: A survey. Expositiones Mathematicae 24 (2006),n. 337-369.

[15] W. Gao, I. Ruzza and R. Thangadurai. Olson's constant for the group $\mathbb{Z}_p \bigoplus \mathbb{Z}_p$. Journal of Combinatorial Theory, Series A. Vol. 107, Issue 1, (2004) 49–67.

[16] A. Geroldinger. On Davenport's Constant. J. Combin. Theory. Series A, Vol. 61. Num. 1, (1992) 147-152.

[17] L. González, I. Márquez, O. Ordaz and D. Quiroz. Constrined and generalized barycentric Davenport constant. Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 1(2007), pp. 11-21.

[18] S. González, L. González and O. Ordaz. Barycentric Ramsey numbers for small graphs. Preprint.

[19] Y. O. Hamidoune. On weighted sequences sums. *Combinatorics, Probability and Computing* **4**(1995) 363–367.

[20] Y. O. Hamidoune. On weighted sums in abelian groups. *Discrete Math.* **162** (1996) 127–132.

[21] Y. O. Hamidoune. Subsequence sums. *Combinatorics, Probability and Computing* **12** (2003) 413–425.

[22] Y. O. Hamidoune and D. Quiroz. On subsequence weigted products. *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005) 485–489.

[23] A. Kolliopoulos, O. Ordaz, V. Ponomarenko and D. Quiroz. Barycentric free sets. Preprint.

[24] J. E. Olson. A combinatorial problem on finite abelian groups I. *J. Number theory* **1** (1969) 195–199.

[25] O. Ordaz, M.T. Varela and F. Villarroel. Strong k-barycentric Davenport constant. Preprint.

[26] O. Ordaz and D. Quiroz. On zero free sets. To appear in Divulgaciones Matemáticas.

[27] O. Ordaz and D. Quiroz. Barycentric-sum problem: a survey. To appear in Divulgaciones Matemáticas.

[28] J. Subocz. Some values of Olsons constant. *Divulgaciones Matematicas* **8** (2000)121–128.