UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Medidas Invariantes en Transformaciones no Uniformemente Expansoras del Intervalo.

Autor: Lcdo. Manuel Carrera
Tutor: Dr. Sergio Muñóz (UCLA)

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Noviembre, 2012

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Medidas Invariantes en Transformaciones no Uniformemente Expansoras del Intervalo.

Autor: Lcdo. Manuel Carrera
Tutor: Dr. Sergio Muñóz (UCLA)

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
como requisito final para optar al grado de
Magister Scientiarum - Mención Matemáticas.

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Noviembre, 2012

CONTENIDO

Dedicatoria.

En memoria de Vicente Carrera, mi padre.

Si tú amas sin suscitar amor, es decir, si tu amor como tal no produce amor, si mediante una expresión vital de persona amante no logras hacer de tí una persona amada, entonces tu amor es impotente, desgraciado. (Karmela Lozada)

Agradecimientos.

A mi madre, por tener la palabra precisa y la sonrisa perfecta en mis momentos de desgano.

A mi novia Gissel. LLegaste en el momento indicado, gracias por tu paciencia, cariño y colaboración prestada cuando culminaba esta tesis. Te quiero en exageración.

A mis excelentisimos amigos: Jesús, Maria L, Luis F, Dexy, Jorge M, Marco, Alexander y Luigui, por toda la compañia brindada durante mis estudios de maestría.

A mi tutor, Dr. Sergio Muñóz por su ayuda y palabras de estímulo.

A Miyedis, Elenita y a la siempre recordada Karmela Lozada, por tantos momentos divertidos vividos en las oficinas de posgrado.

A los doctores Wilmer Colmenárez y Neptalí Romero, por los conocimientos transmitidos en sus excelentes clases.

Capítulo 1

Introducción

En general, un sistema dinámico consiste de un ambiente con estados iniciales, junto a una ley que indica el paso de un estado a otro. De forma más precisa, si consideramos $T : X \to X$, una función continua, dicha función se interpreta como la ley de evolución del sistema; y los elementos $x \in X$, los estados iniciales del sistema. La dinámica de un sistema, es el comportamiento futuro (pasado) de los estados iniciales luego que la ley es aplicada muchas veces. Por ejemplo, dotando al conjunto X de una métrica, entender la dinámica del sistema (X, T), se refiere a entender las propiedades asintóticas de las órbitas $O(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$; para un conjunto significante de estados iniciales $x \in X$.

La Teoría Ergódica, en términos sencillos, es el estudio de medidas invariantes de sistemas dinámicos (por medida invariante entiéndase una función $\mu : \mathbb{B} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathbb{B}$, siendo $\mathbb{B}$ una σ- álgebra definida en X). Para el caso de sistemas dinámicos unidimensionales ($X = \mathbb{R}$), trabajos realizados en [R]; nos proporcionan tres condiciones suficientes para que una transformación en el intervalo, admita una medida invariante, finita, ergódica y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Dichas condiciones son: una condición de Markov, una condición de distorsión limitada y una condición de expansión.

Iguales resultados son obtenidos en [AD], donde la hipótesis de distorsión limitada es presentada de forma más simple; obteniéndose así, una versión final de lo que se conoce como el Teorema del folklore o Teorema de Adler. El enunciado de éste Teorema es el siguiente.

Teorema 1.1 *Sea $f : I \to I$ una función de Markov, $M = \sup_{I_k} \sup_{y,z \in I_k} \left| \frac{f''(z)}{f'(y)^2} \right| < \infty$ y $\lambda_n = \inf_x |(f^n)'(x)| > 1$ para algún n, entonces f admite una medida finita $d\mu = p(x)dx$, invariante, ergódica y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, donde $p(x)$ es una función medible positiva, acotada lejos de cero y de infinito.*

El presente trabajo, siguiendo [B], muestra que cuando las condiciones sobre la expansividad de las transformaciones fallan de cierta manera, la conclusión del Teorema del Folklore se sigue cumpliendo; obteniendo así, una mayor generalización de dicho teorema y unificando una mayor cantidad de ejemplos.

Dividimos, el siguiente trabajo, en tres capítulos. En el capítulo 2 se establecen definiciones básicas, así como el contexto general para el entendimiento del capítulo siguiente. En el capítulo 3 enunciaremos el teorema principal de este trabajo, mostraremos algunos ejemplos ilustrativo y haremos su demostración. Por último, construiremos la medida invariante, ergódica y absolutamente continua equivalente a la medida de Lebesgue.

Capítulo 2

Preliminares

Consideremos una función $h : I \to I$, con $I = [a, b]$, medible en un espacio de probabilidad $(I, \mathbb{B}, \mu)$; donde, $\mathbb{B}$ es la σ- álgebra de Borel definida en I y μ una medida definida en $\mathbb{B}$. Denotaremos por λ la medida de Lebesgue en I.

Definición 2.1 Diremos que la medida μ es *h-invariante* (o simplemente invariante) si, $\mu(h^{-1}(B)) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathbb{B}$.

Definición 2.2 Diremos que la función h es *μ-ergódica* (o simplemente ergódica) si, $h^{-1}(B) = B,\ B \in \mathbb{B} \implies \mu(B) = 0$; o bien, $\mu(B^c) = 0$.

Definición 2.3 Diremos que μ *es absolutamente continua* (respecto a la medida de Lebesgue) si, $\lambda(B) = 0,\ B \in \mathbb{B} \implies \mu(B) = 0$.

A continuación presentaremos la definición de transformación de Markov, la cual será hipótesis fundamental en el presente trabajo.

Definición 2.4 Una transformación $f : I \to I$ es llamada una *transformación de Markov*, si existe una familia finita o numerable $\{I_k\}$ de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos, tal que:

i) f está definida en $\cup \mathrm{I}_k$ y el conjunto en $I \setminus \cup I_k$ tiene medida (de Lebesgue) cero.

ii) $f|_{I_k}$ es estrictamente monótona y se extiende a una función C^2 en $\overline{I_k}$ para cada k.

iii) Si $f(I_k) \cap I_j \neq \emptyset$, entonces $f(I_k) \supset I_j$ para todo k y j.

iv) Existe un entero R tal que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{R} f^n(I_k) \supset I_j$ para todo k y j.

La familia $\{I_k\}$ es llamada una partición de Markov asociada a f.

A lo largo de éste y los posteriores capítulos, supondremos lo siguiente:

(1) $f : I \to I$, con $I = [0, 1]$, denotará una función de Markov e $\{I_k\}_{k=1}^{d}$ la partición de Markov asociada a f.

(2) Denotando por $I_k = (a_k, b_k)$, donde $a_1 = 0,\ b_d = 1$ y $b_k = a_{k+1}$ para cada $k \in \{1, \ldots, d-1\}$, obtenemos que los intervalos asociados a la partición de Markov, mencionados anteriormente, quedan expresados de la siguiente manera:

$I_1 = (a_1, b_1), I_2 = (a_2, b_2), \ldots, I_d = (a_d, b_d)$.

(3) Si x no está en ningún $I_k,\ 1 \leqslant k \leqslant d$, entonces ó $x = 0$, ó $x = 1$; o bien x es un extremo final de algún I_k e inicial para I_{k+1} con $k \in \{1 \ldots d-1\}$. En este sentido podemos imaginar a x como dos puntos distintos: $x^+,\ x_-$, y en consecuencia, $f(x^+) := \lim\limits_{z \to x^+} f(z)$ y $f(x^-) := \lim\limits_{z \to x^-} f(z)$. Dichos límites existen por la segunda condición en la definición de transformación de Markov.

(4) Teniendo presente los comentarios del item anterior, denotaremos por S al conjunto de todos los puntos extremos de los intervalos de la partición de Markov; esto es, $S = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_d, b_d\}$, y debido a la tercera condición en la definición de Markov, tiene sentido definir la función $f : S \to S$. Así, cuando buscamos $f(x)$, con $x \in S$, estamos pensando en límites laterales: $f(x^+),\ f(x^-)$. Claro está, para $k = 1$ y $k = d$ la imagen $f(0) = f(a_1)$ lo pensaríamos como $f(a_1^+)$ y $f(1) = f(b_d)$; como, $f(b_d^-)$. El conjunto S es llamado *conjunto singular* y los puntos $x \in S$ son llamados *puntos singulares*.

DEFINICIÓN 2.5 Un *punto periódico*, de período $k \geqslant 1$, de f es cualquier punto $x \in I$, tal que $f^k(x) = x$ y que para cada $0 \leqslant i, j \leqslant k-1$ con $i \neq j$ vale $f^i(x) \neq f^j(x)$.

DEFINICIÓN 2.6 Un punto x es *eventualmente periódico*, de período n, si x no es periódico, pero existe $m > 0$ tal que $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ para todo $i \geqslant m$. Esto es, $f^i(x)$ es periódico para $i \geqslant m$.

En el contexto de transformaciones de Markov, y debido a que el conjunto singular S es finito e invariante por f, todo punto $p \in S$ es periódico o eventualmente periódico.

El párrafo anterior justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.7 El *peso* $H(p)$ con $p \in S$, es el entero más pequeño $n \geqslant 0$ de manera que $f^n(p)$ es periódico.

Así, en nuestro contexto, cuando el peso $H(p) = 0$ el punto $p \in S$ es periódico, mientras que si $H(p) > 0$ el punto $p \in S$ es eventualmente periódico.

DEFINICIÓN 2.8 Una función $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ se dice *no plana* en x_0, si existe $r > 1$ tal que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$ y $f \in C^{r+1}$ en $[x_0, x_1]$.

LEMA 2.1 *Supongamos que* $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *es no plana cerca de* x_0*, entonces para* $U = (x_0, x_0 + \varepsilon)$*, con* ε *pequeño, se cumple que:*

$$A(U) = \inf_{x \in U} \left| \frac{f'(x)(x - x_0)}{f(x) - f(x_0)} \right| > 0 \quad y \quad \sup_{x \in U} \left| \frac{f''(x)(f(x) - f(x_0))}{f'(x)^2} \right| < \infty$$

Demostración. Ver [B] y para mayores detalles revisar [P]. ∎

DEFINICIÓN 2.9 Sea $f : [x_0, x_1] \to [x_0, x_2]$. Diremos que el punto x_0 es una *fuente regular* para f si, $f(x_0) = x_0$ y $f'(x_0) \geqslant 1$. En el caso $f'(x_0) = 1$ pedimos que $f'(x)$ decresca estrictamente a 1 cuando $x \to x_0$. El punto x_0 es llamado una *fuente regular periódica*, de período $k \geqslant 2$, si x_0 es fuente regular para f^k.

La demostración de la siguiente proposición está contenida en [P].

Proposición 2.1 *Sea x_0 una fuente regular para f. Entonces existe un intervalo abierto $V = (x_0, x_0+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, de manera que si $x \in V$ y $x \neq x_0$, existe $k = k(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \notin V$.*

Esta última proposición le otorga validez a la siguiente notación.

Sea $U = (x_0, x_0+\varepsilon)$ con x_0 una fuente regular y $x \in U$. Denotaremos por:

$$m_U(x) = \text{ínf}\{m > 0 : \ f^m(x) \notin U\}.$$

Lema 2.2 *Sea x_0 un punto fuente regular para f y $U = (x_0, x_0+\varepsilon)$, con ε suficientemente pequeño, entonces existe una constante $B(U) > 0$ de manera que*

$$(f^{m_U(x)})'(x) > \frac{B(U)}{|x - x_0|} \quad \textit{para todo} \quad x \in U.$$

Demostración. Ver [B] y para mayores detalles revisar [P]. ■

La siguiente definición, que involucra los dos lemas anteriores, jugará un rol importante en el enunciado de nuestro teorema principal.

Definición 2.10 Un *intervalo regular* $U = U_p$, para un punto singular p con $H(p) > 0$, es un intervalo que satisface las condiciones del Lema 2.1. En este caso $x_0 = p$ *y* $U = (x_0, x_0+\varepsilon)$; o bien $U = (x_0-\varepsilon, x_0)$, dependiendo si $p = a_k$ *o* $p = b_k$. Un *intervalo regular* $U = U_p$ para un punto singular p con $H(p) = 0$, y teniendo período r, es un intervalo tal que $f^r|_U$ es una función continua y $(f^r)' > 1$ en $\overline{U_p}\backslash\{p\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}(f^{-r})^k(x) = p$ para $x \in U$ y tal que el lema 2.2 se cumple para U_p. Aquí $x_0 = p$, f^r es usada en lugar de f y $U = (x_0, x_0+\varepsilon)$; o bien, $U = (x_0-\varepsilon, x_0)$.

Capítulo 3

Teorema Principal

A continuación enunciaremos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3.1 *Supongamos que $f : I \to I$ es una función de Markov la cual no es plana en puntos $p \in S$ con $H(p) > 0$, y todos los puntos $p \in S$ con $H(p) = 0$ son fuentes regulares periódicas. Supongamos un intervalo regular $U_p,\ p \in S$, tal que:*

a) $f(U_p) \subset U_{f(p)}$ *cuando* $H(p) > 0,\ p \in S$.

b) $long(U_p) < A(U_p)A(U_{f(p)}) \cdots A(U_{f^{H(p)-1}p})B(U_{f^{H(p)}p})$, *cuando* $H(p) > 0,\ p \in S$.

Además supongamos que:

c) $\lambda_N^* = \inf\{\max_{1 \leqslant n \leqslant N} |(f^n)'(x)| \ :\ x \notin \bigcup_{p \in S} \overline{U}_p\} > 1$ *para algún* $N > 1$.

Entonces f admite una medida invariante μ ergódica y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. La medida μ es finita si y solo si todos los puntos periódicos en S son expansores.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación del teorema anterior. En el primero, se debilita la hipótesis de expansividad de la manera más simple; es decir, en el caso que la derivada de la función alcance el valor de 1. En el segundo ejemplo, se pierde la expansividad de una manera más drástica al considerar un punto crítico.

Ejemplo 3.1. En [AW] se muestra que la transformación de Boole: $f(x) = x - \frac{1}{x}$ es ergódica. Utilizando argumentos de compactificación (ver [S] y para mayor explicación revisar [N]), el cambio de variable $u = \arctan x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nos conduce a la siguiente función auxiliar $\widetilde{f}(u) = \arctan(\tan u - \frac{1}{\tan u})$. En este caso $S = \{\frac{-\pi}{2}, 0^-, 0^+, \frac{\pi}{2}\}$. Ahora bien, realizando algunos cálculos obtenemos lo siguiente

$$\widetilde{f}'(u) \quad = \quad \frac{1}{\sin^4 u - \cos^2 u \sin^2 u + \cos^4 u} = \frac{1}{3\sin^4 u - 3\sin^2 u + 1}.$$

Es claro que $\widetilde{f}'(u) > 1$ para $u \notin S$, además los puntos fuentes regulares en S son $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{-\pi}{2}$, ambos con pendiente igual a 1. Por lo tanto $\widetilde{f}$ (y en consecuencia f) admite una medida invariante equivalente a la medida de Lebesgue.

Ejemplo 3.2. Consideremos la función cuadrática $f(x) = 4x(1-x)$ en $[0,1]$. Dicha función no es uniformemente expansora, puesto que el punto $\frac{1}{2}$ es un punto crítico. Sin embargo, la función f satisface las hipótesis del teorema principal (Teorema 3.1). En primer lugar $S = \{0, \frac{1}{2}^-, \frac{1}{2}^+, 1\}$ cuyo único punto fijo (y por tanto periódico) es el 0. El resto de los puntos son eventualmente periódicos. Considerando los intervalos regulares como sigue:

$$U_0 = [0, \frac{1}{4}], \quad U_{\frac{1}{2}^-} = [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}], \quad U_{\frac{1}{2}^+} = [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}], \quad U_1 = [\frac{15}{16}, 1],$$

entonces $f(U_{\frac{1}{2}^-}) \subset U_1,\ f(U_{\frac{1}{2}^+}) \subset U_1,\ f(U_1) \subset U_0$; comprobándose así, la condición a). Por otra parte, las constantes que aparecen en el lema 2.1 y en el lema 2.2, están dadas por:

$$A(U_{\frac{1}{2}}) \geqslant 2, \quad A(U_1) \geqslant \frac{13}{16}, \quad B(U_0) \geqslant 0{,}09.$$

En consecuencia la condición b) también se satisface. Por último, $(f^2)'(x) > 1$ para todo $x \notin \bigcup_{p \in S} \overline{U}_p$ y por tanto $\lambda_2^* > 1$. En conclusión, la función cuadrática f admite una medida invariante absolutamente continua respecto a Lebesgue.

3.1. Demostración del Teorema Principal

En lo que sigue, f satisface las hipótesis del Teorema 3.1. Para $K \subset [a,b]$ y $x \in K$ definimos la función $n_K : K \to \mathbb{N}$ por $n_K(x) = \text{mín}\{n > 0 \ : \ f^n(x) \in K\}$, y $f_K : K \to K$ dada por $f_K(x) = f^{n_K(x)}x$. La transformación f_K es conocida como la transformación inducida por f.

De manera general, la estrategia para la demostración del teorema principal (Teorema 3.1) es la siguiente: Construir el mencionado conjunto K y definir sobre él, la función inducida f_K; luego, probar que dicha función inducida satisface las hipótesis del Teorema del Folklore. Una vez logrado estos objetivos, contruir (a partir de la medida obtenida para la inducida), la medida invariante para la función f.

Si suponemos la existencia de K, el siguiente resultado es válido

Lema 3.1 *Si $S \cap \overline{K} = \emptyset$, existe $M > 1$, $\lambda > 1$ de manera que $|(f_K^M)'(x)| > \lambda$, siempre que $(f_K^M)(x) = (f_K)^M(x)$ esté definida.*

Demostración. Ver [B], y para mayores detalles revisar [P]. ■

El siguiente Lema nos ayudará en la construcción del mencionado conjunto

Lema 3.2 *Sea V un intervalo abierto pequeño con fuente periódica $p \in S$ como punto extremo, entonces V contiene puntos del conjunto $\widetilde{S} = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}S$.*

Demostración. Ver [B], y para mayores detalles revisar [P]. ■

3.1.1. Construción del Conjunto K

Denotemos por s al número de órbitas periódicas en S. Sean $r_1, r_2, \ldots, r_s$ sus períodos; y escojamos puntos $p_1, p_2, \ldots, p_s$ en cada una de dichas órbitas. Por el Lema 3.2, se pueden encontrar puntos $y_i \in \widetilde{S} \cap U_{p_i}$ arbitrariamente cerca de p_i. Fijemos $y_i \in \widetilde{S} \cap U_{p_i}$, y denotemos:

$$\begin{aligned} Z(f^k(p_i)) &= f^{k-r_i}(y_i) \in U_{f^k p_i} \quad \text{para} \quad 0 \leqslant k < r_i \\ Z(p) &= f^{-H(p)} Z(f^{H(p)}p) \in U_p \quad \text{para} \quad p \in S, H(p) > 0 \end{aligned}$$

Luego, definamos

$$W_p = (Z(p), p] \quad \text{(o bien } \ W_p = [p, Z(p))) \text{ para } p \in S.$$

Sea $j(i)$ el mayor entero $j > 0$ de manera que $f^j y_i \notin S$; y sea

$$T = \{f^t(y_i) \ : 0 \leqslant t \leqslant j(i),\ 0 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Entonces S, T y $Z = \{Z(p) \ : p \in S\}$ son disjuntos dos a dos; además podemos suponer, sin perder generalidad que $T \cap \cup_{p \in S} W_p = \emptyset$ usando $f^{-Mr_i} y_i$, para M grande, en lugar de los y_i de ser necesario.

El conjunto $S' = S \cup T \cup Z$ determina una partición, $\{J_1, J_2, \ldots, J_t\}$, del intervalo $[0, 1]$.

Afirmación 3.1 f es una función de Markov respecto a la colección $\{J_1, J_2, \ldots, J_t\}$.

Demostración. Sea $y \in f(S')$. Entonces existe $x \in S'$ de manera que $y = f(x)$. Como $x \in S' = S \cup T \cup Z$ consideremos los siguientes casos:

Si $x \in S$, por ser S invariante, entonces $f(x) \in S$; y por lo tanto $f(x) \in S'$. Si $x \in T$, entonces $f(x) \in S$ ó $f(x) \in T$, en ambos casos $f(x) \in S'$. Si $x \in Z$, entonces $f(x) \in Z$ ó $f(x) \in T$, en consecuencia $f(x) \in S'$. En conclusión $f(S') \subset S'$.

Usando este último hecho, y por ser f una función de Markov respecto a $\{I_1, \ldots, I_d\}$, se cumple que f está definida en $\cup_{j=1}^{t} J_j$ y el conjunto $I \backslash \cup_{j=1}^{t} J_i$ tiene medida (de Lebesgue) cero. Es claro que f es estrictamente monótona en cada J_i y se extiende a una función C^2 en $\overline{J_i}$. asimismo si $f(J_k) \cap J_i \neq \emptyset$, entonces $f(J_k) \supset J_i$.

Por último, existe $Q = j(i) + 1$ de manera que $f^Q(S') \subset S$ y en consecuencia $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{R+Q} f^n(J_k) \supset J_j$ donde R es el número que aparece en la última condición de la definición de Markov para lo colección $\{I_1, \ldots, I_d\}$. ■

Los intervalos W_p $p \in S$ son algunos de los J_j, como lo son los intervalos $V_i = (y_i, z(p_i)]$. Ahora bien, denotando por $q_i = f^{r_i-1}p_i$, se tiene que $f(W_{q_i}) = V_i \cup W_{p_i}$ y $f(W_p) = W_{fp}$ para $p \in S - \{q_1, \ldots, q_s\}$.

El conjunto K deseado es el siguiente:

$$K = [a,b] \backslash \bigcup_{p \in S} W_p.$$

Observemos que K es la unión de ciertos J_j.

Afirmación 3.2 Todo punto $x \in K$, regresa infinitas veces a K a excepción de una cantidad finita.

Demostración. Observemos en primer lugar que los puntos $f^k(y_i)$, con $y_i \in K, k \geqslant 0$ no regresan a K; puesto que para $M > 0$, M grande, $f^{kM}y_i \in S$ y S es invariante. Ahora bien, tomemos $z \in K$ que no se encuentre en la órbita de un y_i, $0 \leqslant i \leqslant s$ y supongamos que $f^m(z) \notin K$, para algún $m > 0$. Entonces $f^m(z) \in W_p$.

Sea W_{p_i} con p_i periódico de período r_i. En este caso $f^{r_i-1}(f^m z) \in W_{q_i}$ donde $q_i = f^{r_i-1}p_i$, pero por lo expresado anteriormente $f(W_{q_i}) = V_i \cup W_{p_i}$; y en consecuencia, $z_1 = f^{r_i}(f^m z) \in V_i \cup W_{p_i}$. Luego si $z_1 \in V_i$, entonces dicho punto esta en K. Supongamos que $f^n(z_1) \in W_{f^k p_i}$ para $k \in \{0 \ldots r_i - 1\}$ y $n \geqslant 0$. Entonces obtenemos r_i sucesiones monótonas dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&x_n^1 = f^{nr_i}(z_1) \in W_{pi},\\
&x_n^2 = f^{nr_i+1}(z_1) \in W_{f(p_i)},\\
&\vdots\\
&x_n^{r_i} = f^{nr_i+(r_i-1)}(z_1) \in W_{f^{r_i-1}p_i}.
\end{aligned}$$

tales que:

$$x_n^1 \to L_1, \quad x_n^2 \to L_2 \;\ldots\; x_n^{r_i} \to L_{r_i}$$

cuando $n \to \infty$ y $L_i \notin K$ para todo $i \in \{1 \dots r_i\}$. Pero por la continuidad de f tenemos que:

$$\begin{aligned}
x_n^2 &= f(x_n^1) \to f(L_1), \\
x_n^3 &= f(x_n^2) \to f(L_2), \\
&\vdots \\
x_n^1 &= f(x_n^{r_i}) \to f(L_{r_i}).
\end{aligned}$$

Y por la unicidad de los límites

$$f(L_1) = L_2, \quad f(L_2) = L_3 \dots \quad f(L_{r_i}) = L_1$$

y en consecuencia $f^{r_i}(L_1) = L_1$ lo cual es una contradicción; puesto que los únicos puntos periódicos se encuentran en S. En consecuencia todo punto $z \in K$, que no está en las órbitas de los y_i, retornan siempre al conjunto K. ■

La afirmación anterior garantiza retornos en el conjunto K y por lo tanto, tiene sentido definir la función inducida f_K.

Lema 3.3 *$f_K : K \to K$ es una función de Markov.*

Demostración. Notemos en primer lugar que f_K esta definida en $K \backslash f^{-1}S$. Para $1 \leqslant i \leqslant s$ sea $\widetilde{W_i} = \bigcup_{k=0}^{r_i-1} W_{f^k p_i}$. Entonces $f : \widetilde{W_i} \to \widetilde{W_i} \cup V_i$ es un homeomorfismo; usando la rama de f^{-1} definimos $L_{i,j} = f^{-j} V_i \cap \widetilde{W_i}$ para $j \geqslant 1$. En consecuencia para $0 \leqslant k < r_i$ tenemos

$$W_{f^k p_i} \;=\; \{f^k p_i\} \cup \bigcup \{L_{i,j} \ : j + k \equiv 0 (mod r_i)\}.$$

Puesto que f es de Markov respecto a los intervalos $\{J_1, \dots, J_t\}$, también lo es con respecto a los intervalos $\{J_{u,v} = J_u \cap f^{-1} J_v \ : 1 \leqslant u, v \leqslant t\}$. Si $J_{u,v} \neq \emptyset$ entonces $f(J_{u,v}) = J_v$. Cuando J_u es algún W_p $(p \in S)$, entonces $J_{u,v} \neq \emptyset$ para solo un v y $J_{u,v} = J_u = W_p$.

Para $p \in S$, sea $i(p)$ el entero i de manera que $f^{H(p)}p$ está en la órbita de p_i. Si $J_{u,v} \neq \emptyset$ y $J_v = W_p$ $(p \in S)$, se define $J_{u,v,j} = J_{u,v} \cap f^{-1}f^{-H(p)}L_{i(p),j}$. Estos intervalos serán no vacíos para aquellos j que son congruentes mod $r_{i(p)}$ para algún entero fijo $i(p)$. Afirmamos que f_K es de Markov usando los intervalos de la colección

$$\mathbb{J} = \{J_{u,v} : \text{ ningún } J_u \text{ ni } J_v \text{ es un } W_p\} \cup \{J_{u,v,j} : J_u \text{ no es } W_p,\ J_v \text{ es un } W_p\}.$$

En primer lugar nótese que $\mathbb{J}$ cubre a K excepto a lo más una cantidad numerable de puntos. También $n_K = 1$ en un intervalo $J_{u,v}$ del primer tipo en $\mathbb{J}$ y entonces $f_K(J_{u,v}) = f(J_{u,v}) = J_v$. En el intervalo $J_{u,v,j} \in \mathbb{J}$ uno tiene $n_K = j + 1 + H(p)$ y $f_K(J_{u,v,j}) = V_{i(p)}$.

Para cualquier $J \in \mathbb{J}$, $f_K|J = f^n|J$ con f^kJ un intervalo y $f|f^kJ$ es monótona de clase C^2 para cada $0 \leqslant k < n$. Se sigue que $f_K|J$ es monótona y C^2. Finalmente, $f_K(J)$ contiene algún J_u y así

$$\bigcup_{n=1}^{R+Q+1} f_K^n J \supset \bigcup_{m=1}^{R+Q} f^m(J_u) \cap K = K.$$

■

Lema 3.4 *Sean U un intervalo regular y x_0 un punto fuente regular para f. Existen constantes $C(U)$, $D(U)$ de manera que si $x, y \in U$ con $m_U(x) = m_U(y)$, entonces:*
$|x - x_0| \leqslant C(U)|y - x_0|$, *y*
$(f^k)'(x) \leqslant D(U)|(f^k)'(y)|$ *para* $1 \leqslant k \leqslant m_U(x)$

Demostración. Supongamos, sin perder generalidad, que x_0 es un extremo a la izquierda de U. Debido a que $m_U(x) = m_U(y)$ tenemos que ó $y < x < f(y)$, o bien $f^{-1}y < x < y$. En el primer caso tenemos que si $x_0 < t < y < x$ y debido a que $f'(x)$ decrece monótonamente a 1 conforme $x \to x_0$ entonces, $f'(t) < f'(y)$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x_0)| = \int_{x_0}^{y} f'(t)dt &\leqslant \int_{x_0}^{y} f'(y)dt \\ &\leqslant f'(y)|y - x_0| \leqslant |y - x_0| \sup_{z \in U} |f'(z)|. \end{aligned}$$

Pero x_0 es punto fijo y $f(y) > x$ por lo tanto $|x - x_0| < |f(y) - f(x_0)|$ y asi

$$|x - x_0| < |y - x_0| \sup_{z \in U} |f'(z)|$$

Para el segundo caso, siguiendo un argumento similar, obtenemos $|x_0 - x| \leqslant |y - x_0|$.

Probemos la segunda parte del Teorema.

En primer lugar supongamos que $f'(x_0) > 1$. Escojamos $\varepsilon > 0$ de manera que $\lambda = \inf_{s \in U} f'(s) > 1$ y definamos $g(x) = \log f'(x)$. Entonces $g'(s) = \dfrac{f''(s)}{f'(s)}$.

Además, por el Teorema del Valor Medio $|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{c}{\lambda}|x - y|$ para todo $x, y \in U$, donde $c = \sup_{s \in U} |f''(s)|$.

Ahora bien, sean $x, y \in U$ con $m_U(x) = m_U(y) = m$, entonces para $0 \leqslant j < k$ se tiene que $[f^j(x), f^j(y)] \subset U$. Por otra parte, $f|_U$ expande distancias en un factor λ, y las $m - j - 1$ iteradas de $[f^j(x), f^j(y)]$ están en U; y por tanto $|f^j(x) - f^j(y)| \leqslant \varepsilon \lambda^{-(m-j-1)}$. Luego

$$\begin{aligned}
|\log(f^k)'(x) - \log(f^k)'(y)| &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |g(f^j(x)) - g(f^j(y))| \\
&\leqslant \frac{c}{\lambda} \sum_{j=0}^{k-1} |(f^j(x) - f^j(y)| \\
&\leqslant \frac{c}{\lambda} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon \lambda^{-(m-j-1)} \\
&\leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda} \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{1}{\lambda})^{m-j-1} \\
&\leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda - 1}.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
|\log(f^k)'(x) - \log(f^k)'(y)| \leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda - 1} \quad &\Rightarrow \quad \frac{-c\varepsilon}{\lambda - 1} \leqslant \log(f^k)'(x) - \log(f^k)'(y) \leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda - 1} \\
&\Rightarrow \quad (f^k)'(x) \leqslant \exp(\frac{c\varepsilon}{\lambda - 1})(f^k)'(y).
\end{aligned}$$

Tomando $D(U) = \exp\left(\dfrac{c\varepsilon}{\lambda - 1}\right)$, obtenemos lo deseado.

Supongamos ahora que $f'(x_0) = 1$.

Si $y > x$, entonces para $0 \leqslant j \leqslant k$ se tiene que $f^j(y) > f^j(x)$ y en consecuencia $f'(f^j y) \geqslant f'(f^j x)$.

Luego

$$(f^k)'(y) = \prod_{j=0}^{k-1} f'(f^j y) \;\; \geqslant \;\; \prod_{j=0}^{k-1} f'(f^j)(x) = (f^k)'(x).$$

Si $y < x$, entonces $f(y) > x$ ya que $m_U(x) = m_U(y)$ y por tanto

$$\begin{aligned}
|(f^k)'(y)| = \prod_{j=0}^{k-1} f'(f^j y) \;\; &\geqslant \;\; \prod_{j=0}^{k-1} f'(f^{j-1} x) \\
&= \;\; f'(f^{-1}(x)) f'(x) \cdots f'(f^{k-2}(x)) \\
&= \;\; \frac{f'(f^{-1}(x)) f'(x) \cdots f'(f^{k-2}(x))(f^{k-1}(x))}{f'(f^{k-1}(x))} \\
&= \;\; \frac{f'(f^{-1} x) \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} f'(f^j x)}{f'(f^{k-1}(x))} \\
&= \;\; \frac{f'(f^{-1} x)(f^k)'(x)}{f'(f^{k-1}(x))}.
\end{aligned}$$

Con esto tenemos:

$$|(f^k)'(x)| \leqslant D(U)(f^k)'(y) \;\; \text{donde} \;\; D(U) = \frac{\sup\limits_{z \in U} f'(z)}{\operatorname*{ínf}\limits_{z \in U} f'(z)},$$

con lo cual termina la demostración. ∎

Lema 3.5 *Sea x_0 una fuente regular con vecindad regular U. Entonces*

$$\sup\left\{\frac{|(f^n)''(x)|}{|(f^n)'(x)|^2} \;:x\in U\; n=m_U(x)\right\}<\infty$$

Demostración. Sea $y \in U$ de manera que $m_U(y) = m_U(x) = n$. Definamos $g(x) = \log(f'(x))$ y denotemos por $d = \sup\limits_{\xi\in U}|g'(\xi)| < \infty$.

Por el Teorema del Valor Medio aplicado a g en $(x, y) \subset U$, se tiene que existe $\xi \in (x, y)$ tal que $|g(x) - g(y)| = g'(\xi)|x - y| \leqslant d|x - y|$. Ahora bien, por la regla de la cadena, propiedades del logarítmo y lo dicho anteriormente tenemos que

$$|\log(f^n)'(x) - \log(f^n)'(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} d|f^k(x) - f^k(y)|$$

.

Sea $U = [x_0, \beta]$. Entonces $x, y \in (f^{-n}\beta, f^{-(n-1)}\beta]$ y

$$\begin{aligned}
|f^k(y) - f^k(x)| &= \int_x^y |(f^k)'(t)|dt \\
&\leqslant |y - x| \sup_{t\in[x,y]} |(f^k)'(t)| \\
&\leqslant |y - x| D(U)(f^k)'(y) \\
&\leqslant D(U)|y - x| \frac{1}{f^{-n+1}\beta - f^{-n}\beta}. \int_{f^{-n}\beta}^{f^{-n+1}\beta} |(f^k)'(s)|ds \\
&\leqslant \frac{D(U)|y - x|}{f^{-n+1}\beta - f^{-n}\beta}(f^{k-n+1}\beta - f^{k-n}\beta).
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
|\log(f^n)'(x) - \log(f^n)'(y)| &\leqslant \frac{dD(U)|y - x|}{f^{-n+1}\beta - f^{-n}\beta} \sum_{k=0}^{n-1}(f^{k-n+1}\beta - f^{k-n}\beta) \\
&\leqslant \frac{dD(U)|y - x|}{f^{-n+1}\beta - f^{-n}\beta}(\beta - f^{-n}\beta).
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\beta - f^{-1}\beta = (f^{-n+1}\beta - f^{-n}\beta)(f^{n-1})'(w)$ para algún w de manera que $n_U(w) = n$. Luego, para algún $\widetilde{w}$ tal que $m_U(\widetilde{w}) = n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|(f^n)'(x) - (f^n)'(y)| &= |e^{\log(f^n)'(x)} - e^{\log(f^n)'(y)}| \\
&\leqslant |(f^n)'(\widetilde{w})||\log(f^n)'(x) - \log(f^n)'(y)| \\
&\leqslant \frac{|(f^n)'(\widetilde{w})|dD(U)|y-x|(\beta - f^{-n}\beta)}{f^{-n+1}\beta - f^{-n}\beta} \\
&\leqslant \frac{|(f^n)'(\widetilde{w})|dD(U)|y-x|(\beta - f^{-n}\beta)(f^{n-1})'w}{\beta - f^{-1}\beta}
\end{aligned}$$

Luego, del Lema 3.4 y teniendo en cuenta que $(f^{n-1})'(w) \leqslant (f^n)'(w)$, pues $f' \geqslant 1$ en U, resulta

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(f^n)'(x) - (f^n)'(y)}{x-y}\right| &\leqslant dD(U)|(f^n)'(\widetilde{w})||(f^{n-1})'w|\left(\frac{\beta - f^{-n}\beta}{\beta - f^{-1}\beta}\right) \\
&\leqslant dD(U)|(f^n)'(\widetilde{w})||(f^n)'w|\left(\frac{\beta - f^{-n}\beta}{\beta - f^{-1}\beta}\right) \\
&\leqslant K(U)(D(U))^3|(f^n)'x|^2
\end{aligned}$$

Donde $K(U) = d\left(\dfrac{\beta - f^{-n}\beta}{\beta - f^{-1}\beta}\right)$.

Tomando el límite cuando $y \to x$ obtenemos lo deseado:

$$(f^n)''(x) \leqslant K(U)(D(U))^3|(f^n)'x|^2 \implies \frac{|(f^n)''(x)|}{|(f^n)'(x)|^2} \leqslant K(U)(D(U))^3.$$

■

Lema 3.6 *La función $h = f_K : K \to K$ satisface las hipótesis del Teorema del folklore*

Demostración. En primer lugar, debido al lema 3.1, tenemos que $\inf |h(x)| > 0$. Por el lema 3.3, la función es de Markov. Además, h es C^2 en cualquier $\overline{J}$, $J \in \mathbb{J}$ y en consecuencia $\beta(J) = \sup_{y,z \in J} \left|\dfrac{h''(z)}{h'(y)}\right| < \infty$ para cualquier $J \in \mathbb{J}$. Así que solo resta mostrar que $\sup_{J \in \mathbb{J}} \beta(J) < \infty$.

Si f no es plana cerca de x_0, entonces la formula de Taylor muestra que para cualquier constante $C_2 > 0$, existe una contante C_1 de manera que, para x, y cercanos a x_0 se cumple:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant C_2 |f(y) - f(x_0)| \quad \Rightarrow \quad |x - x_0| \leqslant C_1 |y - x_0|.$$

Si $x, y \in J_{u,v,j}$, entonces por esta última igualdad junto el lema 3.4, se tiene una sucesión finita de constante $C_1, C_2, \ldots$ de tal manera que

$$|f^k(fx) - f^k(p)| \quad \leqslant \quad C_k |f^k(fy) - f^k(p)| \quad \text{para } 0 \leqslant k \leqslant H(p). \tag{3.1}$$

En el lema 2.1 probamos que $\left|\frac{f'(x)(x-x_0)}{f(x)-f(x_0)}\right|$ es acotado lejos de cero para x cercano a un punto no plano x_0 usando la formula de Taylor. El mismo argumento prueba que esta cantidad es acotada lejos de ∞; esto significa que, $|f'(x)|$ difiere de $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$ por un factor multiplicativo lejos de 0 y de ∞. Luego, del lema 3.4 y la desigualdad 3.1 muestra que

$$\left|\frac{(f^k)'(x)}{(f^k)'(y)}\right| \leqslant E \quad \text{para todo} \quad 1 \leqslant k \leqslant n_K(x), \quad x, y \in J_{u,v,j},$$

donde E es una constante que no depende de x, y, u, v, j. En consecuencia esto es una cota para $\widetilde{\beta}(J) = \sup\limits_{y \in J} \left|\dfrac{h''(y)}{h'(y)^2}\right|$.

Si $H = F \circ G$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{H''(x)(H(x) - H(x_0))}{H'(x)^2} \quad &= \quad \frac{F''(Gx)(F(Gx) - F(Gx_0))}{F'(Gx)^2} \\ &+ \quad \frac{F(Gx) - F(Gx_0)}{(Gx - Gx_0)F'(Gx)} \frac{G''(x)(Gx - Gx_0)}{(G'x)^2}. \end{aligned}$$

Para puntos cercanos a puntos no planos, el lema 2.1 nos da una cota para

$$\frac{F(Gx) - F(Gx_0)}{(Gx - Gx_0)F'(Gx)}$$

y por tanto, una cota para la expresión de la derecha de $H = F \circ G$ en términos de estos F y G.

El lema 2.1 dice que este tipo de expresiones son acotadas cerca de un punto plano y el lema 3.5 dice esto para $f^{m_U(x)}$ cerca de una fuente regular.

Todo esto se combina para tener una cota universal en

$$\left| \frac{h''(x)(h(x) - f^{j+H(p)+1}p)}{h'(x)^2} \right| \text{ para } x \in J_{u,v,j},\ J_v = W_p.$$

Como $|h(x) - f^{j+H(p)+1}(p)| \geqslant \inf_{p \in S} |z(p) - p| > 0$, obtenemos que $\widetilde{\beta}(J)$ tiene una cota uniforme para todo los $J_{u,v,j}$. Esto es suficiente cuando existe solamente una cantidad finita de $J \in \mathbb{J}$. ■

3.1.2. Construcción de la Medida Invariante

El Teorema de Adler nos da una medida $d\widetilde{\mu} = p(x)dx$ invariante y ergódica, en K, para la función inducida $h = f_K$, con $c_1 \leqslant p(x) \leqslant c_2$ para algunas constantes positivas c_1, c_2. Construyamos ahora una medida μ para la función de Markov f como sigue. Para $E \subset [a, b] \setminus K$ definamos:

$$E = \{x \in K\ : f^n x \in E \text{ para algún } 0 < n < n_K(x)\}.$$

Definición 3.1 Diremos que el conjunto E es *visitado simple* si

$$x \in E,\ f^m x \in E,\ m > 0 \;\Rightarrow\; f^k x \in K \text{ para algún } 0 < k < m.$$

Los conjuntos $L_{i,j}$ y W_p con $H(p) > 0$ son ambos visitados simples. Ahora bien, existe una única medida μ en $[0, 1]$ de manera que

$$\mu|K = \widetilde{\mu},\ \mu(E) = \widetilde{\mu}(\widetilde{E})$$

para conjuntos visitados

$$E \subset [0, 1] \setminus K \text{ y } \mu([0, 1] \setminus \cup_{n=0}^{\infty} f^n K) = 0$$

Esta medida es σ-finita, equivalente a Lebesgue, invariante y ergódica para f, y finita en cualquier conjunto visitado simple.

Finalmente, notemos que μ es finita si y solo si $\sum_j \mu(L_{i,j}) < \infty$ para cada i. Ahora $\widetilde{L}_{i,j}$ es la unión de ciertos u, v de intervalos

$$J^*_{u,v,j} = \cup\{J_{u,v,k} : k \geqslant j, k \equiv j(mod r_i)\}.$$

Si $J_v = W_p$, entonces $J^*_{u,v,j}$ es mapeado por $f^{H(p)+1}$ sobre $[f^{-j}y_i, f^\alpha p_i)$ donde $0 \leqslant \alpha < r_i$ satisface $j+\alpha \equiv 0(mod r_i)$. Puesto que $f^{H(p)+1}$ no es plana cerca de los puntos extremos q de $J_{u,v}$ con $f(q) = p$, existen constantes positivas d_1, d_2 y un entero n de manera que

$$\frac{|f^{H(p)+1}x - f^\alpha p_i|}{|x-q|^n} \in [d_1, d_2],$$

para x cercano a q. De aquí $J^*_{u,v,j}$ tiene longitud en el intervalo $|f^{-j}y_i - f^\alpha p_i|^{1/n}[d_2^{-1/n}, d_1^{-1/n}]$ y $\widetilde{\mu}(J^*_{u,v,j})$ difiere de $|f^{-j}y_i - f^\alpha p_i|^{1/n}$ por un factor en $[d_2^{-1/n}c_1, d_1^{-1/n}c_2]$. En consecuencia $\mu(L_{i,j}) = \widetilde{\mu}(\widetilde{L}_{i,j})$ es una combinación lineal $\sum_{u,v} c_{u,v}|f^{-j}y_i - f^\alpha p_i|^{1/n}$ donde $c_{u,v}$ es una función no nula y acotada lejos de cero e infinito. Aca $\sum_j \mu(L_{i,j}) < \infty$ si y solo si la fuente periódica p_i es expansora, lo cual se sigue del siguiente Lema.

Lema 3.7 *Sea x_0 una fuente regular para f, y consideremos un punto y cercano de x_0; y $n \geqslant 1$. Entonces* $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} |f^{-j}y - x_0|^{\frac{1}{n}} < \infty \Longleftrightarrow |f'(x_0)| > 1.$

Demostración. Supongamos que f es de clase C^2 cerca del punto x_0. Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces $|f'(x)| \geqslant \lambda > 1$ para x cerca de x_0 y $|f^{-k}y - x_0| \leqslant \lambda^{-k}$. El resultado se cumple puesto que $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^{-1/n})^j$ converge.

Supongamos por absurdo que $|f'(x_0)| = 1$. Considere además $n = 1$, $f'(x_0) = 1$ y $x_0 = 0$. Entonces desarrollando la formula de Taylor para f^{-1} obtenemos que $f^{-1}(x) = x + \varepsilon(x)x^2$ donde $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) < \infty$.

Sea $y_j = f^{-j}y$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{y_{j+1}}{y_j} &= \frac{f^{-1}(f^{-j}y_j)}{y_j}\\ &= \frac{f^{-1}(y_j)}{y_j}\\ &= \frac{y_j+\varepsilon(y_j)y_j^2}{y_j}\\ &= 1+\varepsilon(y_j)y_j.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}y_0\prod_{j=0}^{k-1}(1+\varepsilon(y_j)y_j) &= y_0\prod_{j=0}^{k-1}(\frac{y_{j+1}}{y_j})\\ &= y_0\frac{y_1}{y_0}\frac{y_2}{y_1}\cdots\frac{y_k}{y_{k-1}}\\ &= y_k.\end{aligned}$$

Además $y_k = f^{-k}y$. Debido a que $y_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{j\to\infty}(1+\varepsilon(y_j)y_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{j\to\infty}\varepsilon(y_j)y_j) = -1$$

en consecuencia $\sum_{j=0}^{\infty}|\varepsilon(y_j)y_j| = \infty$. Pero como $\lim_{j\to\infty}(\varepsilon(y_j)) < \infty$, entonces $\sum_{j=0}^{\infty}|y_j| = \infty$ lo cual es una contradicción. ∎

Bibliografía

[A] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory.* Mathematical surveys and monographs. Vol.50. American Mathematical Society, (1997).

[AD] R. Adler. *F-expansions revisited.* Lecture Notes in Math. 318, (1975) 1 - 5.

[AW] R. Adler and B. Weiss. *The ergodic infinite measure preserving transformation of Boole* Israel J. Math. 16 (1973), 263–278.

[B] R. Bowen. *Invariant measure for Markov maps of the interval.* Commun. Math. Phys. 69 (1978), 1 - 17.

[D] R. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical system.* Addison-Wesley , (1989).

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Cambridge University Press London - New York, 54, 1997.

[M] R. Mañé. *Introdução à Teoría Ergódica.* IMPA. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, (1986).

[N] M. Noguera. *Endomorfismo teórico numérico.* Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Licenciado en Ciencias Matemáticas. UCLA, (2009).

[R] A. Renyi. *Representations for real number and their ergodic properties.* Acta Math. Akad. Sci. Hungar. 8 (1957), 477 - 493.

[S] F. Schweiger. *Numbertheoretical endomorphisms with σ-finite invariant measure.* Israel Journal of Mathematics, Vol 21 (1975) 308 - 318.

[T] M. Thaler. *Transformations on* $[0, 1]$ *with infinite invariant measure.* Israel Journal of Mathematics, Vol 46, (1983), 67 – 96.

[P] T. Perez. *Transformaciones Inducidas Uniformemente Expansoras para una Clase de Transformaciones de Markov del Intervalo.* Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Licenciado en Ciencias Matemáticas. UCLA, (2012).

[V1] M. Viana. *Lecture notes on attractors and physical measure.* XII Escuela Latinoamericana de Matemáticas, Monografías del IMCA, (1999).

[V2] M. Viana. *Introdução à Teoría Ergódica.* Notas de curso. IMPA, Rio de Janeiro, (2001).

[W] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer. New York, (1982).