UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Sistemas Diferenciales y Simetrías.

Autor: Lcdo. Luis Moreno
Tutor: Dr. Angel Mastromartino

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Mayo, 2013

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Sistemas Diferenciales y Simetrías.

Autor: Lcdo. Luis Moreno
Tutor: Dr. Angel Mastromartino

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la ilustre
Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”
como requisito final para optar al grado de
Magister Scientiarum - Mención Matemática.

BARQUISIMETO, VENEZUELA
Mayo, 2013

Dedicado a Dios, a mis padres
y a todos mis seres queridos.

Agradecimientos.

Quiero agradecer primeramente a Dios por estar siempre a mi lado tanto en las buenas como en las malas.

A mis padres por darme su apoyo incondicional.

A mi tutor, el Dr. Ángel Mastromartino por brindarme sus conocimientos y guiarme por el camino de la investigación para lograr completar este trabajo.

A Yves Noguier por su incomparable ayuda.

A mis hermanos por apoyarme y motivarme a seguir avanzando.

A Andrea Martínez, una gran persona que siempre estuvo apoyándome desde donde estuviese. (menor que tres).

A todos mis seres queridos y a todas las personas que de alguna u otra forma han influido en mi vida para cumplir mis metas.

Gracias a todos y que Dios los bendiga hoy, mañana y siempre.

Sistemas Diferenciales y Simetrías.

RESUMEN

Sea $F(x, u, u^{(1)}, \cdots, u^{(n)}) = 0$ una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Al hacer los cambios de variables $p_1 = u^{(1)}, \cdots, p_n = u^{(n)}$, se obtiene la ecuación $F(x, u, p_1, \cdots, p_n) = 0$. Desde el punto de vista geométrico, esta ecuación la podemos interpretar como una hipersuperficie $\mathcal{E}$ en el espacio $\mathbb{R}^{n+2}$. Sobre este espacio, asociaremos un sistema diferencial $n+1$-dimensional que denotaremos por $\mathcal{D}$. Este sistema diferencial es conocido como *la distribución de Cartan*, que es la estructura geométrica que distingue de una manera natural, la clase de curvas correspondientes a las soluciones de la ecuación diferencial dada.

De este modo, las soluciones de una ecuación diferencial, pueden ser interpretadas como curvas integrales de la distribución $\mathcal{D}$ que pertenecen a la hipersuperficie $\mathcal{E}$ y que se se proyectan en el eje x sin degeneración.

Investigaremos las condiciones necesarias y suficientes, desde el punto de vista geométrico para que el sistema de ecuaciones tenga solución. Mostraremos que la teoría geométrica de las simetrías, hace posible entender y generalizar el procedimiento estándar de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. Mostraremos también, como extender estos resultados al caso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden, interpretando tales sistemas como variedades inmersas en la variedad de *jet* de orden 1.

CONTENIDO

Capítulo 1

Introducción

En 1895, el matemático noruego Sophus Lie $(1842 - 1899)$ hace un aporte muy importante a las matemáticas en el área de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, con la contribución de nuevas líneas de estudio bajo el enfoque de algebra y de geometría diferencial.

Esta investigación está dedicado a la teoría geométrica de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de orden 1.

Empezaremos estudiando las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden desde el punto de vista geométrico. Veremos que dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, $F(x, u, u') = 0$, tomando $M = \mathbb{R}^3$, podemos asociar una distribución 2-dimensional $\mathcal{D}$, de codimension 1 diferenciable, o una 1-forma diferencial llamada *distribución de Cartan*, que resulta ser la estructura geométrica la cual distingue de una manera natural, la clase de curvas correspondientes a las soluciones de la ecuación diferencial dada.

Así, las soluciones de una ecuación diferencial $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$, pueden ser interpretadas como curvas integrales de $\mathcal{D}$, que pertenecen a $\mathcal{E}$ y que se proyectan en el eje x, sin degeneración.

Investigaremos las condiciones necesarias y suficientes, desde el punto de vista geométrico, para que el sistema de ecuaciones, tenga soluciones. Mostraremos, que la teoría geométrica de las simetrías, hace posible entender y generalizar el procedimiento estándar de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias.

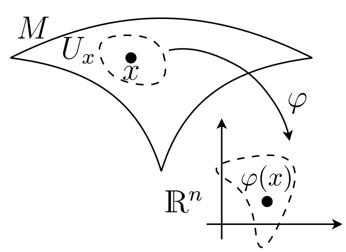
Seguidamente, por analogía con el caso de orden 1, abordaremos la teoría geométrica de integrabilidad de ecuaciones diferenciales de orden superior y la teoría de simetría de distribuciones, relativa a tales ecuaciones. Mostraremos, como extender los resultados sobre integrabilidad de soluciones, de un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior, al caso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden, definidas sobre una variedad diferenciable M. Para tal efecto, interpretaremos tales sistemas como variedades inmersas en la variedad de jet de orden 1. En este lenguaje, daremos las condiciones de integrabilidad y analizaremos algunas de las simetrías de la distribución.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Variedades Diferenciables

Definición 2.1 Una *variedad topológica n-dimensional* M (M^n) es un espacio topológico Hausdorff (i.e. separado o T_2), segundo numerable (i.e. con una base topológica numerable de conjuntos abiertos) y localmente euclideo (i.e. para cada $x \in M$, existe un subconjunto abierto U_x conteniendo a x homeomorfo a un subconjunto abierto del espacio euclideo $\mathbb{R}^n$).



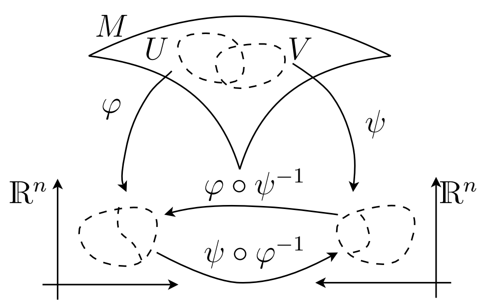
Definición 2.2 Si $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es uno de los homeomorfismos de la definición 2.1 siendo U un abierto conexo, φ recibe el nombre de *homeomorfismo coordenado*, U *abierto coordenado*, al par (U, φ) se le denomina *sistema coordenado* o *carta local*, cada aplicación continua $x_i = \pi^i \circ \varphi : U \subset M \to \mathbb{R}$ se denomina *función coordenada* y

a la n-tupla $(x_1, ..., x_n)$ se dice que es el *sistema de funciones coordenadas asociado a la carta* (U, φ).

Definición 2.3 Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas de una variedad topológica M^n. Diremos que las cartas están $C^k - relacionadas$ si $U \cap V = \emptyset$ ó si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces las funciones

1. $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$
2. $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$

son de clase C^k.



Estas funciones son llamadas *cambios de coordenadas*.

Definición 2.4 Un *atlas* para un espacio topológico M es una colección de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M tal que

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Definición 2.5 Un atlas $\mathcal{A}$ de una variedad topológica se dice que es *de clase* C^k si cualquier par de cartas de $\mathcal{A}$ están C^k-relacionadas.

Definición 2.6 Una *estructura diferenciable* de clase C^k sobre una variedad topológica M es un atlas maximal (i.e. ésta atlas no puede estar contenida propiamente en otro atlas).

PROPOSICIÓN 2.1 *Si $\mathcal{A}$ es un atlas de clase C^k de un a variedad topológica M, entonces existe un único atlas maximal $\mathcal{A}'$ de clase C^k que contiene a $\mathcal{A}$*

Demostración. Ver [J].

DEFINICIÓN 2.7 Una *variedad diferenciable* de clase C^k y dimensión n es un par $(M, \mathcal{A})$ donde M es una variedad topológica de dimensión n y $\mathcal{A}$ es una estructura diferenciable de clase C^k sobre M.

EJEMPLO 2.1 Para $M = \mathbb{R}^n$, tomamos la carta $(\mathbb{R}^n, I)$ donde I es la función identidad. Luego $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, I)\}$ es un atlas de clase C^∞, ya que posee sólo una carta y el cambio de coordenadas es trivial. Sea $\mathcal{U}$ el atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}$, luego $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$ es una variedad diferenciable de clase C^∞.

En virtud de la proposición (2.1), para determinar una estructura diferenciable de una variedad, basta presentar un atlas, no necesariamente maximal que esté contenido en la estructura diferenciable.

EJEMPLO 2.2 Sea M un conjunto no vacío y N^n una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión n. Si $f : M \to N$ es una función biyectiva, entonces M tiene una estructura diferenciable de la misma clase y dimensión que N.

Basta considerar sobre sobre M la topología

$$\mathcal{T} = \{V \subset M / f(V) \text{ es abierto en N}\}$$

la cual hace a f un homeomorfismo y a M Hausdorff y 2^{do} numerable. Luego, un atlas

$$\mathcal{A} = \{(f^{-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ f)\}_{\alpha \in A}$$

para M, donde $\mathcal{B} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es un atlas para N^n.

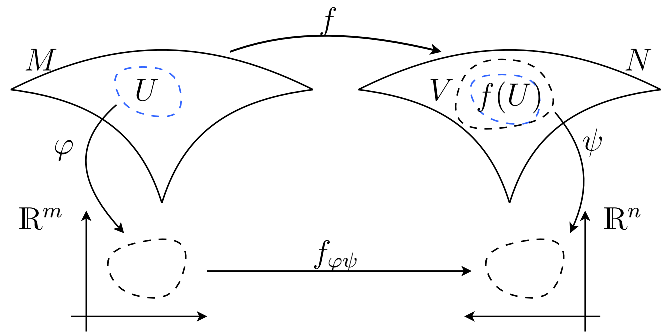
2.2. Funciones Diferenciables

DEFINICIÓN 2.8 Sean M^m y N^n dos variedades diferenciables de clase C^k y $r \leqslant k$. Diremos que la función $f : M \to N$ es diferenciable de clase C^r en un punto p, si existen

(U, φ) una carta de M alrededor de p y (V, ψ) una carta de N alrededor de $f(p)$, tales que $f(U) \subset V$ y la función representativa

$$f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

es diferenciable de clase C^r en el punto $\varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.



Observación 2.1 En esta definición es fundamental el hecho de que la diferenciabilidad de f es independiente de la representación de f.

Definición 2.9 La función $f : M \to N$ es de clase C^r si f es de clase C^r en todo punto de M.

Por otra parte, si $f : D \subset M \to N$ y D es abierto, diremos que $f : D \to N$ es de clase C^r si y solo si f es de clase C^r considerando a D con la estructura de variedad abierta. En el caso de D un subconjunto cualquiera de M, diremos que $f : D \to N$ es de clase C^r si y solo si f puede extenderse a una función de clase C^r sobre una vecindad abierta de D.

Definición 2.10 Sean M y N dos variedades diferenciables de clase C^k, y $0 \leqslant r \leqslant k$. La función $f : M \to N$ es un *difeomorfismo* de clase C^r si f es biyectiva y si f y f^{-1} son de clase C^r. En este caso M y N son difeomorfas.

Definición 2.11 Un *grupo de Lie* es un grupo G que además es una variedad diferenciable, tal que las siguientes funciones son diferenciables

$$\begin{array}{rcl} 1) G \times G \to G & \qquad & 2) G \to G \\ (a, b) \longmapsto ab & \qquad & a \longmapsto a^{-1} \end{array}$$

EJEMPLO 2.3 $\mathbb{R}^n$ con la operación adición y el grupo lineal general $GL(n,\mathbb{R})$ con la operación de multiplicación de matrices, es un grupo de Lie.

2.3. Espacio Tangente

Sea $p \in M$ y denotemos por $C^\infty(p)$ el conjunto formado por todas las funciones reales, de clase C^∞ cuyos dominios son vecindades abiertas del punto p. Sobre $C^\infty(p)$ definimos la relación de equivalencia $f \sim g \Leftrightarrow$ existe una vecindad U de p, tal que $f|_U = g|_U$. Con la adición y multiplicación de escalares por funciones usuales se induce sobre $\frac{C^\infty(p)}{\sim}$ sus operaciones correspondientes, las cuales hacen de $\frac{C^\infty(p)}{\sim}$ un algebra sobre $\mathbb{R}$, llamada Algebra de los Gérmenes de Funciones Diferenciables en el punto p.

Denotaremos por $C^\infty(p)$ a $\frac{C^\infty(p)}{\sim}$ y por f a $[f] \in \frac{C^\infty(p)}{\sim}$ para simplificar la notación.

Análogamente definimos $C^\infty(U)$ y $C^\infty(M)$ donde $U \subset M$.

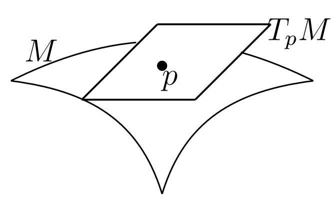
DEFINICIÓN 2.12 Un Vector Tangente a M en el punto p es una función $\upsilon : \frac{C^\infty(p)}{\sim} \to \mathbb{R}$ que cumple $\forall [f],[g] \in \frac{C^\infty(p)}{\sim}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} 1)\ \upsilon([f]+\lambda[g]) = \upsilon([f]) + \lambda\upsilon([g]) & \text{(Linealidad)} \\ 2)\ \upsilon([f][g]) = [g](p)\upsilon([f]) + [f](p)\upsilon([g]) & \text{(Derivación).} \end{array}$$

Denotaremos por T_pM el espacio lineal de vectores tangentes a M en p, el cual es llamado *espacio tangente* a M en p. Observemos que si definimos

$$(\upsilon+\omega)([f]) = \upsilon([f]) + \omega([f])$$
$$(\lambda\upsilon)([f]) = \lambda(\upsilon([f]))$$

$\forall \upsilon, \omega \in T_pM$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, entonces T_pM es un espacio vectorial real.



Nota 2.0. En la práctica trataremos los vectores tangentes como operaciones sobre funciones más que sobre sus gérmenes. Si f es una función diferenciable definida sobre una vecindad de p, y $\upsilon \in T_pM$, definimos

$$\upsilon(f) = \upsilon([f]).$$

Así $\upsilon(f) = \upsilon(g)$ siempre y cuando f y g coincidan en una vecindad de p y claramente se preservan las operaciones definidas sobre T_pM.

Consideremos una carta (U, φ) de M^m alrededor del punto p con funciones coordenadas $x^1, ..., x^m$ y f una función de clase C^∞ definida en una vecindad V de p. La función $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es diferenciable y por tanto existen las derivadas parciales $D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)),\ i = 1, ..., m$, lo cual se cumple para todo elemento de $C^\infty(p)$. Así, para $i = 1, ..., m$ podemos definir las siguientes funciones

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R} \qquad \text{dada por} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Es fácil demostrar que éstas funciones son vectores tangentes de M en p.

Teorema 2.1 *Si (U, φ) es una carta de M^m alrededor del punto p, entonces*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\}$$

es una base para T_pM.

Demostración. Ver [J].

Proposición 2.2 $dim(T_pM) = dim(M^m)$

Demostración. Ver [J].

2.4. Derivada de una Función

Sean M y N dos variedades diferenciables y $\varphi : M \to N$ una función diferenciable. Notemos que si $p \in M$ y $f \in C^\infty(\varphi(p))$, entonces tenemos que $f \circ \varphi \in C^\infty(p)$. De esta forma podemos definir la siguiente función.

$$\begin{aligned} d\varphi_p : T_pM &\longrightarrow T_{\varphi(p)}N \\ \upsilon &\longmapsto d\varphi_p(\upsilon) \end{aligned}$$

donde $d\varphi_p(\upsilon)$ es la función

$$\begin{aligned} d\varphi_p(\upsilon) : C^\infty(\varphi(p)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto d\varphi_p(\upsilon)(f) = \upsilon(f \circ \varphi) \end{aligned}$$

A la función $d\varphi_p$ la llamaremos la derivada de φ en el punto p (o *Push Forward*). Es fácil ver que ésta función definida de esa forma es una aplicación lineal. De manera análoga tenemos la aplicación dual llamada *Pullback*

$$\begin{aligned} \delta\varphi_p : T_{\varphi(p)}N^* &\longrightarrow T_pM^* \\ \omega &\longmapsto \delta\varphi_p(\omega) \end{aligned}$$

donde $\delta\varphi_p(\omega)$ es la función

$$\begin{aligned} \delta\varphi_p(\omega) : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \upsilon &\longmapsto \delta\varphi_p(\omega)(\upsilon) = \omega(d\varphi_p(\upsilon)) \end{aligned}$$

Donde $T_{\varphi(p)}N^*$ y T_pM^* son los espacios duales de $T_{\varphi(p)}N$ y T_pM respectivamente.

Observación 2.2 Para simplificar la notación, utilizaremos φ_* para la derivada y φ^* para la aplicación dual.

Observación 2.3 Si $(U, x_1, ..., x_m)$ es un sistema coordenado de M alrededor de p, en virtud del teorema (2.1) tenemos que $\{dx^i\}_{i=1}^m$ es una base de T_pM^* dual a $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^m$

2.5. Fibrado Tangente y Fibrado Cotangente

En esta sección definiremos dos conjuntos muy importantes sobre las variedades junto con sus propiedades y estructura diferencial.

Sean M una variedad diferenciable de clase C^∞ con estructura $\mathcal{A}$. Sean los conjuntos

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM, \qquad T^*M = \bigcup_{p\in M} T_pM^*$$

con las proyecciones naturales

$$\begin{array}{lll} \pi : TM \to M, & \pi(\upsilon) = p, & \text{si } \upsilon \in T_pM \\ \pi^* : TM^* \to M, & \pi^*(\tau) = p, & \text{si } \tau \in T_pM^* \end{array}$$

Sea $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con coordenadas $x_1, x_2, ..., x_m$. Definimos

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2m} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{\varphi}^* : \pi^{*-1}(U) \to \mathbb{R}^{2m}$$

Dadas por

$$\widetilde{\varphi}(\upsilon) = (x_1(\pi(\upsilon)), ..., x_m(\pi(\upsilon)), dx^1(\upsilon), ..., dx^m(\upsilon)) \quad \text{y}$$
$$\widetilde{\varphi}^*(\tau) = (x_1(\pi^*(\tau)), ..., x_m(\pi^*(\tau)), \tau(\frac{\partial}{\partial x_1}), ..., \tau(\frac{\partial}{\partial x_m}))$$

Para toda $\upsilon \in \pi^{-1}(U)$ y $\tau \in \pi^{*-1}(U)$. Notemos que $\widetilde{\varphi}$ y $\widetilde{\varphi}^*$ son ambas aplicaciones inyectivas en un abierto de $\mathbb{R}^{2m}$.

Ahora, para TM tenemos lo siguiente (análogamente para TM^*)

1. Si (U, φ) y $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, entonces $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ es C^∞

2. La colección $\{\widetilde{\varphi}^{-1}(W) : W$ es abierto en $\mathbb{R}^{2m}, (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ forman una base para la topología sobre TM, lo cual lo hace un espacio localmente euclídeo $2m$-dimensional y segundo numerable.

3. Sea $\widetilde{\mathcal{A}}$ la colección maximal que contiene

$$\{(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}), (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

Entonces $\widetilde{\mathcal{A}}$ es una estructura diferenciable en TM.

TM y TM^* con estas estructuras diferenciables son llamadas *Fibrado Tangente* y *Fibrado Cotangente* respectivamente. Algunas veces será conveniente escribir los puntos de TM como pares (p, υ) donde $p \in M$ y $\upsilon \in T_pM$ (Similarmente para TM^*).

Si $\psi : M \to N$ es una aplicación de clase C^∞, entonces la diferencial de ψ define una aplicación entre los fibrados tangentes

$$d\psi : TM \to TN$$

donde $d\psi(p, v) = d\psi_p(v)$, $v \in T_pM$ y $p \in M$. Es fácil ver que esta aplicación es de clase C^∞.

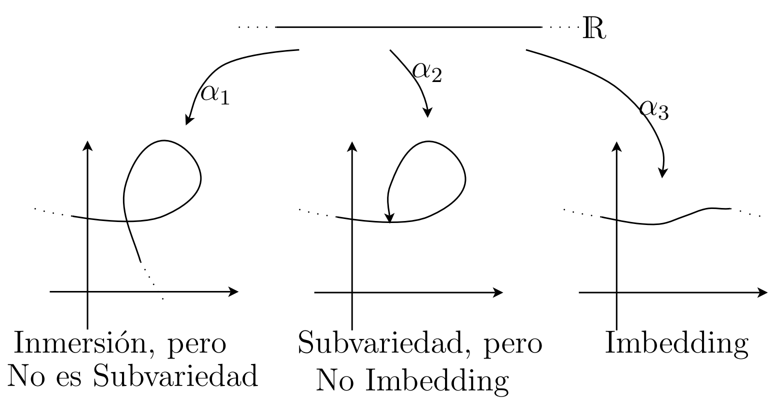
2.6. Subvariedades

Definición 2.13 Sea $\varphi : M \to N$ de clase C^∞.

1. φ es una *Inmersión* si $d\varphi_p$ es no singular para cada $p \in M$.

2. El par (M, φ) es una *Subvariedad de N* si φ es una inmersión inyectiva.

3. φ es un *Imbedding* si φ es una inmersión inyectiva la cual también es un homeomorfismo en su imágen, esto es, φ es abierta en $\varphi(M)$ con la topología relativa.



Supongamos que (U, φ) es un sistema coordenado sobre M con funciones coordenadas $x_1, x_2, ..., x_m$ y $c \in \mathbb{N}$ con $0 \leqslant c \leqslant m$. Sea $a \in \varphi(U)$, y sea

$$S = \{q \in U / x_i(q) = a_i, i = c + 1, ..., m\}.$$

El subespacio S de M junto con el sistema

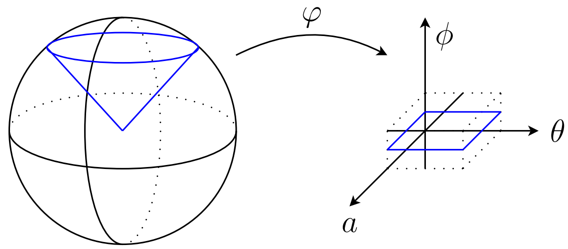
$$\{x_j|_S : j = 1, ..., c\}$$

forman una variedad la cual es subvariedad de M llamada SLICE (tajada) del sistema de coordenadas $(U\varphi)$.

Ejemplo 2.4 Consideremos en $\mathbb{R}^3$ a $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ con carta $\varphi : M \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(acos(\theta)sen(\phi), asen(\theta)sen(\phi), acos(\phi)) = (a, \theta, \phi)$$

Un slice para (M, φ) es $S = \{q \in M/z(q) = \phi_{ctte}\}$.



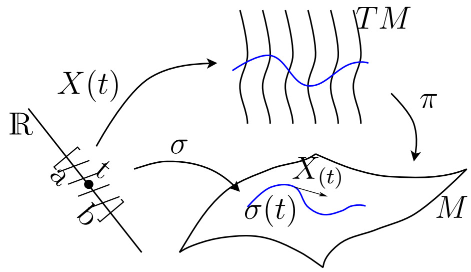
Teorema 2.2 *Supongamos que $\psi : M^m \to N^n$ es C^∞, que $q \in N$ y $P = \psi^{-1}(\{q\})$ es no vacío y que $d\psi : T_pM \to T_{\psi(p)}N$ es sobreyectiva para todo $p \in P$. Entonces P tiene una única estructura de variedad tal que (P, i) es una subvariedad de M, donde i es la aplicación inclusión. Más aún, $i : P \to M$ es un imbedding, y la dimensión de P es $m - n$.*

Demostración. Ver [J].

2.7. Campos Vectoriales

En el capítulo anterior hemos introducido el concepto de vector tangente a una variedad M en un punto p, esto es, un elemento X_p de T_pM. Ahora vamos a extender este concepto.

Definición 2.14 Un *campo vectorial* X a lo largo de una curva $\sigma : [a, b] \to M$ es una aplicación $X : [a, b] \to TM$ la cual levanta a σ en TM, esto es, $\pi \circ X = \sigma$.



Definición 2.15 Un campo vectorial X es llamado *campo vectorial suave* (C^∞) a lo Largo de σ si la aplicación $X : [a, b] \to TM$ es C^∞.

Observación 2.4 Un campo vectorial X sobre un conjunto abierto U en M es un levantamiento de U en TM, esto es, una aplicación $X : U \to TM$ tal que $\pi \circ X = I_U$. Para este campo ser suave, significa que $X \in C^\infty(U, TM)$. El conjunto de los campos vectoriales suaves sobre U forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y un modulo sobre el anillo $C^\infty(U)$ de funciones C^∞ sobre U.

Si X es un campo vectorial sobre U y $p \in U$, entonces $X(p)$ (a menudo denotado por X_p) es un elemento de T_pM. Si $f \in C^\infty(U)$, entonces $X(f)$ (denotado también por Xf) es la función sobre U la cual evaluada en p es $X_p(f)$.

Si $(U, x_1, ..., x_m)$ es un sistema de coordenadas locales de M, para cada punto $p \in U$, X puede ser escrito como

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \qquad \text{y} \qquad X(f)(p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

donde a_i y λ_i son funciones definidas en U. Diremos que X_p es de clase C^∞ si $a_i \in C^\infty$.

Xf es llamada *la derivada de f por el campo vectorial X*. Cualquier campo vectorial X, cumple:

1. $X(af + bg) = aX(f) + bX(g) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(M)$
2. $X(fg) = X(f)g + fX(g)$

En general, una aplicación $C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ satisfaciendo estas condiciones, es llamada *una algebra de derivación* $C^{\infty}(M)$ *sobre* $\mathbb{R}$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre M. $\mathfrak{X}(M)$ con las operaciones $(X+Y)_p = X_p + Y_p$ y $(aX)_p = aX_p$ para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $a \in \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, más aún, cuando $f \in C^{\infty}(M)$, $Xf \in \mathfrak{X}(M)$ es definida por $(fX)_p = f(p)X_p$, entonces $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura de modulo no solo sobre $\mathbb{R}$, sino también sobre $C^{\infty}(M)$.

2.7.1. Corchete de Lie

Una consecuencia interesante de la interpretación discutida en la sección anterior es que nos permite considerar las derivaciones iteradas, esto es, Si X y Y son dos campos de vectores diferenciables y f es una función diferenciable, entonces $X(Y(f))$ y $Y(X(f))$ son funciones diferenciables. Sin embargo, este tipo de operaciones no conduce en general a nuevos campos de vectores diferenciables, ya que envuelven derivadas de orden superior a la primera. No obstante, la diferencia de ambas iteraciones si produce a un nuevo campo de vectores.

Proposición 2.3 *Sean X y Y dos campos de vectores diferenciables sobre M. Entonces existe un único campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que*

$$Z(f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

para toda función $f \in C^{\infty}$.

Demostración. Ver [F].

Definición 2.16 El campo vectorial definido en la proposición (2.3) es llamado *Corchete de Lie de X y Y* y se denota por

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

donde $p \in M$ y $f \in C^{\infty}(M)$.

El Corchete de Lie tiene las siguientes propiedades:

Proposición 2.4 *Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(M)$, entonces*

1. *$[X, Y]$ es realmente un vectorial diferenciable sobre M.*
2. *$[X, Y] = -[Y, X]$. (Antisimetría)*
3. *$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$. ($\mathbb{R}$ − Linealidad)*
4. *$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.*
5. *$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$. (Identidad de Jacobi)*

Demostración. Ver [F].

Un espacio vectorial con la operación de corchete $[\cdot, \cdot]$ satisfaciendo las condiciones (3) y (5) de la proposición (2.4) es un *Algebra de Lie*. Así, $\mathfrak{X}(M)$ es un Algebra de Lie sobre $\mathbb{R}$

Definición 2.17 Sea N una subvariedad de M y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que X es tangente a N si $X_p \in T_pN$ para todo $p \in N$

Proposición 2.5 *Sea N una subvariedad de M.*

1. *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo de vectores tangentes a N, entonces su restricción a N es un campo de vectores diferenciables sobre N.*
2. *Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es otro campo de vectores tangente a N, entonces $[X, Y]|_N = [X|_N, Y|_N]$.*

Demostración. Ver [F].

2.7.2. Curvas Integrales

En el estudio de los campos de vectores hemos interpretado éstos de dos formas distintas. En primer lugar hemos visto los campos como aplicaciones (diferenciables) de la variedad en su fibrado tangente y, en segundo lugar, hemos visto que podían considerarse como derivaciones en el álgebra de las funciones diferenciables. En esta sección se interpretan los campos de vectores como ecuaciones diferenciales sobre la variedad.

Definición 2.18 Sea X un campo vectorial suave sobre M. Una curva σ sobre M es un *Curva Integral de* X si el vector velocidad $\dot{\sigma}(t) \in T_{\sigma(t)}M$ coincide con el valor de X en cada punto, es decir,

$$\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$$

para cada $t \in Dom(\sigma)$.

En base a esta definición, nos planteamos la siguiente interrogante. Si X es un campo vectorial C^∞ sobre M y $p \in M$, ¿Existirá una curva integral de X a través de p?, y si existe ¿Es única?. Para esto, veamos lo siguiente.

Consideremos X un campo vectorial C^∞ sobre M y $p \in M$. Una curva $\gamma : (a,b) \to M$ es una curva integral de X si y solo si

$$\dot{\gamma}(t) = d\gamma\left(\left.\frac{d}{dr}\right|_t\right) = X(\gamma(t)), \qquad t \in (a,b).$$

Ahora, supongamos que $0 \in (a,b)$ con $\gamma(0) = p$ y sea (U,φ) una carta con funciones coordenadas $x_1, ..., x_m$ alrededor del punto p.

Luego

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

donde $f_i \in C^\infty(U)$, más aún, para cada t tal que $\gamma(t) \in U$ se tiene

$$d\gamma\left(\left.\frac{d}{dr}\right|_t\right) = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{d(x_i \circ \gamma)}{dr}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)} \tag{2.2}$$

Así, por (2.1) y (2.2), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} \left.\frac{d(x_i \circ \gamma)}{dr}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{m} f_i(\gamma(t)) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)}.$$

Luego, γ es una curva integral de X sobre $\gamma^{-1}(U)$ si y solo si

$$\left.\frac{d\gamma_i}{dr}\right|_t = f_i \circ \varphi^{-1}(\gamma_1(t), ..., \gamma_m(t)), \qquad i = 1, ...m, \qquad t \in \gamma^{-1}(U)$$

donde $\gamma_i = x_i \circ \gamma$. Las ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para el cual, el teorema de existencia y unicidad de soluciones es válido. Ese teorema trasladado a la terminología de variedades es de la forma:

Definición 2.19 Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos la transformación X_t con dominio $\mathfrak{D}_t = \{p \in M / t \in (a_p, b_p)\}$, por $X_t(p) = \gamma_p(t)$

Teorema 2.3 *Sea X un campo vectorial C^∞ sobre una variedad diferenciable M. Para cada $p \in M$ existe un a_p y b_p en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y una curva diferenciable*

$$\gamma_p : (a_p, b_p) \to M$$

tal que:
(a) $0 \in (a_p, b_p)$ y $\gamma_p(0) = p$.
(b) γ_p es una curva integral de X.
(c) Si $\mu : (c, d) \to M$ es una curva satisfaciendo las condiciones anteriores, entonces $(c, d) \subset (a_p, b_p)$ y $\mu = \gamma_p|_{(c,d)}$.
(d) Para cada $p \in M$, existe una vecindad abierta V de p y un $\varepsilon > 0$ tal que la aplicación $(t, p) \mapsto X_t(p)$ es definida y es C^∞ de $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ en M.
(e) $\mathfrak{D}_t$ es abierto para cada $t > 0$.
(f) $\bigcup_{t>0} \mathfrak{D}_t = M$.
(g) $X_t : \mathfrak{D}_t \to \mathfrak{D}_{-t}$ es un difeomorfismo con inversa X_{-t}.
(h) Sean s y t números reales. Entonces el dominio de $X_t \circ X_s$ está contenido en $\mathfrak{D}_{t+s}$ (Pero generalmente no son iguales). Sin embargo, el dominio de $X_t \circ X_s$ es $\mathfrak{D}_{t+s}$ en el caso en que t y s tengan el mismo signo. Más aún, sobre el dominio de $X_t \circ X_s$ tenemos que

$$X_t \circ X_s = X_{t+s}$$

Demostración. Ver [F].

Definición 2.20 Un campo vectorial diferenciable X sobre M es *completo*, si $\mathfrak{D}_t = M$ para todo t (esto es, el dominio de γ_p es $\mathbb{R}$ para todo $p \in M$). En este caso las transformaciones X_t forman un grupo de transformaciones de M parametrizadas por los números reales llamado el *grupo* 1-*parámetro* de X.

Observación 2.5 Si X no es completo, las transformaciones X_t no forman un grupo ya que sus dominios dependen de t. En este caso, nos referiremos a la colección de transformaciones X_t como el grupo 1-parámetro local de X.

Capítulo 3

Formas Diferenciables

El objeto de este capítulo es definir *campos de formas alternadas* sobre variedades diferenciables.

Un *Campo de Vectores* en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación v que a cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ le asocia un único elemento $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$; el cual puede ser escrito de la forma

$$v_p = a_1(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p + a_2(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p + a_3(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_p$$

Este campo vectorial se dice diferenciable cuando sus funciones $a_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ son diferenciables.

Para cada espacio tangente $T_p\mathbb{R}^3$, consideramos su espacio dual $T_p\mathbb{R}^{3^*}$, que en virtud del teorema (2.1) el conjunto $\{(dx_i)_p, 1 \leqslant i \leqslant 3\}$ forma una base para este espacio. Ahora

Definición 3.1 Un *campo de formas lineales* o *forma exterior* de grado 1 en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación w que a cada $p \in \mathbb{R}^3$ asocia un único $w(p) \in T_p\mathbb{R}^{3^*}$; w puede ser escrito de la forma

$$w(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

o

$$w = \sum_{i=1}^{3} a_i dx_i$$

donde a_i son funciones definidas en $\mathbb{R}^3$ y tomando valores en $\mathbb{R}$. Si las a_i son continuas, w en llamada *forma exterior continua*, si las a_i son funciones diferenciables, w en llamada una *forma diferencial* de grado 1.

Sea $\bigwedge^2 T_p\mathbb{R}^{3^*}$ el conjunto de las aplicaciones $\varphi : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilineales y alternantes. Con las operaciones usuales de funciones, este conjunto se torna un espacio vectorial.

Si φ_1 y φ_2 son formas lineales de grado 1, podemos obtener un elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ en $\bigwedge^2 T_p\mathbb{R}^{3^*}$ definido de la siguiente forma

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix}.$$

El elemento $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \bigwedge^2 T_p\mathbb{R}^{3^*}$ será denotado por $(dx_i \wedge dx_j)_p$ y el conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j)_p, 1 \leqslant i < j \leqslant 3\}$ forma una base para $\bigwedge^2 T_p\mathbb{R}^{3^*}$. Además

$$\begin{aligned} (dx_i \wedge dx_j)_p &= -(dx_j \wedge dx_i)_p \\ (dx_i \wedge dx_i)_p &= 0 \end{aligned}$$

Definición 3.2 Un *campo de formas bilineales alternante* o *forma exterior* de grado 2 en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación w que a cada $p \in \mathbb{R}^3$ asocia un único $w(p) \in \bigwedge^2 T_p\mathbb{R}^{3^*}$; w puede ser escrito de la forma

$$w = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

donde a_{ij} son funciones definidas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Si las a_{ij} son funciones diferenciables, w en llamada una *forma diferencial* de grado 2.

Pasaremos ahora a generalizar la noción de formas diferenciales a $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.1 *El conjunto* $B = \{(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p\}$, $i_1 < \cdots < i_k$, *donde* $i_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *forma una base para* $\bigwedge^k T_p\mathbb{R}^{n^*}$.

Demostración. Veamos primero que B es linealmente independiente. Consideremos la siguiente ecuación

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1<\cdots<i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}=0, i_l\in\{1,2,\cdots n\}$$

la cual aplicaremos a $(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}})$, $j_1<j_2<\cdots<j_k$ y $j_s\in\{1,2,\cdots,n\}$, obtenemos que

$$a_{j_1<\cdots<j_k}=\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1<\cdots<i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}) \tag{3.1}$$

y por lo anterior, tenemos que $a_{j_1<\cdots<j_k}=0$ para todo $j_1,\cdots,j_k$.

Veamos que B es generador. Sea $f\in\bigwedge^k T_p\mathbb{R}^{n*}$ y consideremos la k-forma

$$g=\sum_{i_1<\cdots<i_k} f(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Si g es aplicado a $(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}})$, por (3.1) tendremos que

$$g(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}})=f(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}})$$

para todo $i_1,\cdots,i_k$ y por ser $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^n$ una base de $T_p\mathbb{R}^n$ tenemos que $f=g$. Haciendo $a_{i_1<\cdots<i_k}=f(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{i_k}})$ tenemos que f puede ser escrita como

$$f=\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1<\cdots<i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Definición 3.3 Una *k-forma exterior* en $\mathbb{R}^n$ $(k\geqslant 1)$ es una aplicación w que a cada $p\in\mathbb{R}^n$ asocia un único $w(p)\in\bigwedge^k T_p\mathbb{R}^{n*}$; Por la proposición (3.1) w puede ser escrito de la forma

$$w(p)=\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1<\cdots<i_k}(p)(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})_p, \qquad i_l\in\{1,2,\cdots,n\}$$

donde $a_{i_1<\cdots<i_k}$ son funciones definidas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Si las $a_{i_1<\cdots<i_k}$ son funciones diferenciables, w en llamada una *k-forma diferencial*.

Para simplificar la notación, indicaremos por I a la k-tupla $(i_1, \cdots, i_k)$, $i_1 < \cdots < i_k$ y $i_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ quedando w de la siguiente manera

$$w = \sum_I a_I dx_I.$$

Acordaremos que una *0-forma* en $\mathbb{R}^n$ es una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1 En $\mathbb{R}^3$ tenemos los siguientes tipos de formas exteriores (donde a_i, a_{ij}, a_{ijk}, etc, son funciones en $\mathbb{R}^3$).

$$\begin{array}{lcl} 0-formas & \cdot & \text{funciones en } \mathbb{R}^3 \\ 1-formas & \cdot & a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 \\ 2-formas & \cdot & a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3 \\ 3-formas & \cdot & a_{123}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{array}$$

De ahora en adelante, sólo hablaremos de formas diferenciales.

Definición 3.4 Sean w, θ k-formas tal que $w = \sum_I a_I dx_I$ y $\theta = \sum_I b_I dx_I$ y sea φ una s-forma tal que $\varphi = \sum_J c_J dx_J$, donde $I = (i_1, \cdots, i_k)$, $i_1 < \cdots < i_k$ y $J = (j_1, \cdots, j_s)$, $j_1 < \cdots < j_s$. Definimos:
La *suma* de k-formas

$$w + \theta = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$$

es una k-forma.
El *producto exterior* de una k-forma con una s-forma

$$w \wedge \varphi = \sum_{I,J} a_I c_J dx_I \wedge dx_J$$

es una $(k+s)$-forma.

Proposición 3.2 *Si w es una k-forma, θ es una s-forma y φ es una r-forma, entonces:*

$a)$ $(w \wedge \Theta) \wedge \varphi = w \wedge (\Theta \wedge \varphi)$;

$b)$ $w \wedge \Theta = (-1)^{ks} \Theta \wedge w$;

$c)$ $w \wedge (\Theta + \varphi) = w \wedge \Theta + w \wedge \varphi, \qquad$ *cuando* $r = s$.

Observación 3.1 Aunque $dx_i \wedge dx_i = 0$, puede ocurrir que para alguna forma diferencial w se puede cumplir $w \wedge w \neq 0$. Por ejemplo, si $w = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4$, entonces

$$w \wedge w = 2x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Veamos un ejemplo que es muy importante para nuestro trabajo.

Ejemplo 3.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. La aplicación lineal $df_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ induce una transformación lineal

$$f_p^* : \bigwedge^k T_{f(p)}\mathbb{R}^{m*} \to \bigwedge^k T_p\mathbb{R}^{n*}$$

que para cada $w \in \bigwedge^k T_{f(p)}\mathbb{R}^{m*}$ asocia un $f_p^*(w)$, definida de la siguiente manera

$$f_p^*(w)(v_1, \cdots, v_k) = w(df_p(v_1), \cdots, df_p(v_k)), \qquad v_1, \cdots, v_k \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Haciendo variar el punto p en $\mathbb{R}^n$, obtenemos una aplicación f^* que lleva k-formas de $\mathbb{R}^m$ en k-formas de $\mathbb{R}^n$. Esta aplicación en el capitulo anterior fue llamada *Pullback*

Convendremos que

$$f^*(g) = g \circ f, \qquad \text{si } g \text{ es una 0-forma}$$

Veamos algunas propiedades de f^*.

Proposición 3.3 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y sean w, w_1, w_2 formas en $\mathbb{R}^m$ y g una 0-forma. Entonces*

a) $f^*(w_1 + w_2) = f^*(w_1) + f^*(w_2)$
b) $f^*(gw) = f^*(g) f^*(w)$
c) $f^*(w_1 \wedge w_2) = f^*(w_1) \wedge f^*(w_2)$
d) $(f \circ g)^* w = g^*(f^* w)$

Vamos a mostrar que la operación f^* es equivalente a una sustitución de variables.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable que a cada $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ asocia una $(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ de forma

$$\begin{cases} y_1 & = & f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots & = & \vdots \\ y_m & = & f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{3.2}$$

Si $w = \sum_I a_I dy_I$ es una k-forma en $\mathbb{R}^m$, Usando la proposición anterior, tenemos que

$$f^*w = \sum_I f^*(a_I) f^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dy_{i_k}).$$

Por otra parte,

$$f^*(dy_i)(v) = dy_i(df(v)) = d(y_i \circ f)(v) = df_i(v).$$

Así

$$f^*w = \sum_I a_I(f(x_1, \cdots, x_n))(df_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (df_{i_k}).$$

donde las f_i y df_i son funciones de $(x_1, \cdots, x_n)$. En conclusión, aplicar f^* a w, es equivalente a sustituir en w las variables y_i junto con sus diferenciales dy_i por las funciones de x_k y dx_k obtenidas de (3.2).

Observación 3.2 Es conveniente resaltar que las definiciones y propiedades anteriores son válidas si nos restringimos a un subconjunto U abierto de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.3 Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la aplicación dada por $f(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta)$ donde $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, y sea la 1-forma $w = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Luego $f^*w = d\theta$.

Definición 3.5 Si $w = \sum_I a_I dx_I$ es una k-forma, definimos la *diferencial exterior* de w como la siguiente $(k+1)$-forma

$$dw = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

Veamos algunas propiedades de la derivada exterior.

PROPOSICIÓN 3.4 *Sean w_1, w_2 k-formas, w una s-forma y f una función diferenciable. Entonces*

$$\begin{array}{ll} a) & d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2 \\ b) & d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2 \\ c) & d(dw) = d^2 w = 0 \\ d) & d(f^* w) = f^*(dw) \end{array}$$

El item (d) nos dice que la aplicación d es independiente de las variables escogidas para representar a w.

Ahora extenderemos nuestros conceptos y propiedades al estudio sobre variedades.

DEFINICIÓN 3.6 Sea M una variedad de dimensión n y de clase C^∞ con $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una atlas para esta. Una *k-forma* sobre M es una familia $\{w_\alpha\}$ de k-formas w_α sobre abiertos $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ tal que para α y β arbitrarios con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, w_α y w_β se transforman el uno al otro por el cambio de coordenadas.

Generalizaremos esta definición desde el punto de vista de independencia de las coordenadas, es decir.

DEFINICIÓN 3.7 Sea M una variedad C^∞. Diremos que w es una *k-forma* sobre M si esta asigna $w_p \in \bigwedge^k T_pM^*$ para cada punto $p \in M$ y w_p es de clase C^∞ con respecto de p.

Como $w_p \in \bigwedge^k T_pM^*$ tenemos que

$$w_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$$

y en virtud del teorema (2.1), w_p se puede escribir como

$$w_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{3.3}$$

La expresión (3.3) es llamada la *expresión local de la k-forma* sobre M. Cuando las $f_{i_1 < \cdots < i_k}$ son diferenciables, diremos que la k-forma es diferenciable. De esta manera ambas definiciones están relacionadas.

Usando la terminología de fibrados, podemos definir

$$\bigwedge^k TM^* = \bigcup_{p\in M} \bigwedge^k T_pM^*.$$

El cual también es un fibrado. Notemos que $\bigwedge^1 T_pM^* = T_pM^*$. En estos términos, las k-formas sobre M no son nada mas que secciones de $\bigwedge^k TM^*$ de clase C^∞

Otro punto de vista de las formas diferenciables es el siguiente.

Sea w una k-forma sobre M. Entonces el valor de w_p de w en cada punto p determina una forma alternante $T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$ de grado k. Sobre la colección de todos los p, w induce una aplicación multilineal alternante

$$w : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \tag{3.4}$$

Recordando que $\mathfrak{X}(M)$ no solo es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, sino que también es un módulo sobre $C^\infty(M)$. Entonces el significado de (3.4) siendo multilineal, es que también es lineal con respecto a la multiplicación de campos vectoriales por funciones. Mas precisamente

$$w(X_1, \cdots, fX_i + g\widehat{X}_i, \cdots, X_k) = fw(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_k) + gw(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_k).$$

Vemos que cualquier aplicación de la forma (3.4) con esas dos propiedades definen una forma diferencial.

Observación 3.3 Todas las propiedades anteriores definidas para k-formas sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ son válidas para k-formas sobre M.

Caracterizaremos la diferencial exterior sin el uso de la expresión local.

Teorema 3.1 *Sea M una variedad C^∞ y $w \in \bigwedge^k TM^*$. Entonces, para campos arbitrarios $X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos*

$$\begin{aligned} dw(X_1, \cdots, X_{k+1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(w(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{k+1})) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([X_i, X_j], \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j \cdots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

Aquí el símbolo $\widehat{X}_i$ significa que X_i es omitido.

Particularmente, el caso más utilizado es cuando $k = 1$ y nos queda de la siguiente manera

$$dw(X,Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X,Y])$$

Definición 3.8 Llamaremos *derivada de Lie* en relación con el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ al operador lineal $L_X : \bigwedge^k TM^* \to \bigwedge^k TM^*$ dado por

$$L_X(w)(X_1, \cdots, X_k) = Xw(X_1, \cdots, X_k) - \sum_{i=1}^{k} w(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_k).$$

$L_X w$ es una forma diferencial.

La definición anterior es netamente algebraica. no es claro su significado geométrico, pero esto lo resolveremos más adelante.

Veamos algunas de las propiedades de la derivada de Lie.

Proposición 3.5

$$\begin{array}{rl} i) & L_X(w \wedge \theta) = L_X(w) \wedge \theta + w \wedge L_X(\theta), \qquad w \in \bigwedge^k TM^*, \theta \in \bigwedge^l TM^* \\ ii) & L_X dw = dL_X w, \qquad w \in \bigwedge^k TM^* \\ iii) & L_X Y - L_Y X = L_{[X,Y]}, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \end{array}$$

Para dar una definición geométrica de la derivada de Lie utilizaremos el grupo 1-paramétrico $\{\varphi_t\}$ de transformaciones locales de M generadas por X.

Supongamos que $X \in \mathfrak{X}(M)$. Podemos considerar X como una asignación de una dirección $X_p \in T_pM$ en cada punto $p \in M$. Si $f \in C^\infty(M)$ podemos derivar a f en la dirección de X. Esto no es más Xf. Ya que una función es un caso particular de formas diferenciales (el caso de formas de grado 0), esto será natural para tratar de diferenciar también a una forma diferencial general w en la dirección de X.

Primero, la relación entre la diferencial Xf de una función $f \in C^\infty(M)$ por X y el grupo 1-paramétrico de transformaciones locales. El resultado es

$$(Xf)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_t^* f)(p) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t} = X_p f.$$

Lo próximo es, el corchete de Lie $[X,Y]$ de campos vectoriales puede ser considerado como la derivada de Lie de Y por X (es decir L_XY), esto es

$$[X,Y] = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t})_*Y - Y}{t}.$$

De esta manera, la derivada de Lie para formas diferenciales está dada en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.6 *Sean X un campo vectorial sobre una variedad M de clase C^∞ y $\{\varphi_t\}$ el grupo 1-paramétrico de transformaciones locales de M generadas por X. Entonces para una k-forma $w \in \bigwedge^k TM$ arbitraria, tenemos que*

$$L_Xw = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*w - w}{t}$$

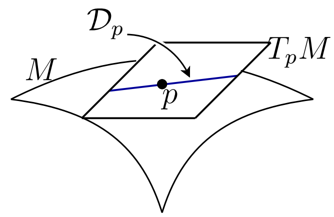
3.1. Distribuciones o Sistemas Diferenciales

Sea M una variedad C^∞. Dado un campo vectorial X sobre M, a través de cada punto p en M es determinada una curva integral. Las curvas integrales maximales no se cruzan entre si y cubren a todo M. Entonces en el caso donde dos campos vectoriales sobre M son dados, ¿Cómo hacer? es posible construir, por así decir, superficies integrales mediante su integración. ¿Cómo sería el caso con 3, 4 o más campos vectoriales?. Cuando consideramos estas interrogantes, surge naturalmente la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.9 Sea M una variedad C^∞. Una *distribución* o *sistema diferencial* $\mathcal{D}$ de dimensión r sobre M es una asignación de un subespacio r-dimensional $\mathcal{D}_p$ de T_pM en cada punto $p \in M$ tal que $\mathcal{D}_p$ es de clase C^∞ con respecto a p.

Aquí $\mathcal{D}_p$ se dice de clase C^∞ con respecto a p si existen $X_1, \cdots, X_r$ campos vectoriales definidos en una vecindad del punto p (por supuesto de clase C^∞) tal que $\{X_1, \cdots, X_r\}$ sea una base para $\mathcal{D}_p$ en todo punto q de la vecindad.

EJEMPLO 3.4 Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, sin singularidades, definimos $\mathcal{D}_p = [X_p]$ para todo $p \in M$. La distribución $\mathcal{D}$ es de dimensión 1 y es llamado *campo de direcciones.*



Ejemplo 3.5 Si consideramos a $\mathcal{D}_p = T_pM$, para cada $p \in M$, obviamente $\mathcal{D}$ es diferenciable y su dimensión es igual a la de la variedad.

Ejemplo 3.6 Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Consideremos la ecuación diferencial

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

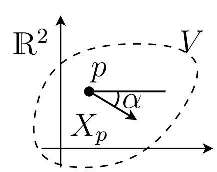
donde $P, Q \in C^\infty(V)$, no nulas simultáneamente sobre V. Definimos la siguiente aplicación

$$p \mapsto \mathcal{D}_p$$

donde $\mathcal{D}_p$ es la recta que pasa por el punto p con pendiente igual a $\tan\alpha = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

$\mathcal{D}$ define una distribución 1-dimensional sobre V. Una base para $\mathcal{D}_p$ está determinada por el campo $X = Q(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - P(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$, el cual es de clase C^∞

Recíprocamente, si para todo $p \in V$ se asigna una recta que varía diferenciablemente, esto es, dar una ecuación diferencial del tipo $\frac{dy}{dx} = f(x)$, con $f \in C^\infty(V)$, se obtiene $f(x, y)dx - dy = 0$.



Ejemplo 3.7 Sea $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Definimos la siguiente aplicación

$$p \mapsto \mathcal{D}_p$$

donde $\mathcal{D}_p$ es el plano que pasa por p y es perpendicular a la recta que pasa por 0 y p.

$\mathcal{D}$ es una distribución 2-dimensional sobre M.

Veamos que es de clase C^∞

Sea $p = (x, y, z) \in M$, supongamos que $x \neq 0$ ($p \notin$ PlanoYZ). Sea $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ vector director de la recta que pasa por p y por el origen.

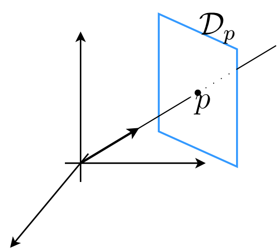
$$\begin{aligned} X_1 &= (y, -x, 0) &= y\tfrac{\partial}{\partial x} - x\tfrac{\partial}{\partial y} \\ X_2 &= (z, 0, -x) &= z\tfrac{\partial}{\partial x} - x\tfrac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Son vectores L.I. y ortogonales a $\overrightarrow{v}$ y por tanto forman una base local para $\mathcal{D}$ en $M - PlanoYZ$.

Si $x = 0$, $p = (0, y, z) \neq 0$, tomamos $\overrightarrow{u} = (0, y, z)$ y vemos que los vectores

$$\begin{aligned} X_1 &= a\tfrac{\partial}{\partial x} \\ X_2 &= -z\tfrac{\partial}{\partial y} + y\tfrac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Son vectores L.I. y ortogonales a $\overrightarrow{u}$ y por tanto forman una base local para $\mathcal{D}$ en M. Luego, $\mathcal{D}$ es de clase C^∞ sobre M.



Ejemplo 3.8 Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Consideremos la ecuación diferencial

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$$

donde $P, Q, R \in C^\infty(V)$, no nulas simultáneamente sobre V. Definimos la siguiente aplicación

$p \mapsto \mathcal{D}_p =$ Plano perpendicular al vector definido por $\overrightarrow{v} = (P, Q, R)$ que pasa por el punto p.

$\mathcal{D}$ es un sistema diferencial 2-dimensional y de clase C^∞. El ejemplo anterior es de este tipo con $M = \mathbb{R}^3 - \{\oslash\}$ y su ecuación diferencial correspondiente es $xdx + ydy + zdz = 0$.

Definición 3.10 Una subvariedad N^s de M^n es llamada *variedad integral de* $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}_p \subset T_pN$ para cada punto $p \in N$. Si existe una variedad integral en cada punto de M, se dice que $\mathcal{D}$ es *completamente integrable.*

EJEMPLO 3.9 De los ejemplos anteriores tenemos:

En el ejemplo (3.5), haciendo $N = M$, N es una variedad integral con dimensión $s = n$.

En el ejemplo (3.6), las curvas integrales de la ecuación diferencial son variedades integrales de dimensión $s = 1$.

En el ejemplo (3.7), $N =$ Las superficies esféricas de centro en el origen ($r = 2 = s$) y cualquier curva regular contenida en las superficies esféricas ($s = 1 < 2 = r$). Son variedades integrales.

En el ejemplo (3.8), $N =$ Las superficies regulares contenidas en V tal que en cada punto $p \in V$ se tenga T_pN perpendicular al vector $\overrightarrow{v} = (P(p), Q(p), R(p))$.

DEFINICIÓN 3.11 Diremos que un campo vectorial X sobre M pertenece a $\mathcal{D}$ si $X_p \in \mathcal{D}_p$ para cualquier punto $p \in M$.

PROPOSICIÓN 3.7 *Sea $\mathcal{D}$ una distribución sobre un variedad M de clase C^∞. Si $\mathcal{D}$ es completamente integrable, entonces para cualesquiera dos campos vectoriales X, Y pertenecientes a $\mathcal{D}$, el corchete $[X, Y]$ también pertenece a $\mathcal{D}$.*

Basados en esta proposición definimos lo siguiente

DEFINICIÓN 3.12 Una distribución $\mathcal{D}$ sobre una variedad C^∞ se dice *involutiva*, si el corchete $[X, Y]$ de dos campos vectoriales arbitrarios X e Y pertenecientes a $\mathcal{D}$, también pertenece a $\mathcal{D}$.

TEOREMA 3.2 (Teorema de Frobenius) *Una condición necesaria y suficiente para que una distribución $\mathcal{D}$ sobre una variedad C^∞ sea completamente integrable es que $\mathcal{D}$ sea involutiva.*

Demostración. Ver [F].

También daremos una versión de este teorema en términos de formas diferenciables.

El problema que estamos tratando es motivado por la consideración de ciertos sistemas diferenciales. En el ejemplo (3.5)vimos como la ecuación diferencial (E.D.)

$Pdx + Qdy = 0$ determinaba un sistema diferencial 1-dimensional. Notemos que esta E.D. no es mas que la 1-forma diferencial $w = Pdx + Qdy = 0$. Análogamente ocurre con el ejemplo (3.8) sobre $V \subset \mathbb{R}^3$ donde la E.D. $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ determina un sistema diferencial 2-dimensional que puede ser expresado por la 1-forma $w = Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

Esta situaciones las generalizaremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.8 *Dado una distribución $\mathcal{D}^r$ de dimensión r sobre una variedad M^n de dimensión n, existen para cada punto $p \in M$, $n-r$ formas diferenciales lineales linealmente independientes $w^1, \cdots, w^{n-r}$, definidas en una vecindad coordenada V del punto p, tal que*

$$w_q^i(X_q) = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-r) \Leftrightarrow X_q \in \mathcal{D}_q, \forall q \in V$$

Una familia de formas diferenciales lineales como en la proposición anterior es llamada una *representación local de $\mathcal{D}$* en p.

Proposición 3.9 *Sea $\mathcal{D}^r$ una distribución completamente integrable sobre una variedad M^n, y $\{w^1, \cdots, w^{n-r}\}$ una representación local en $p \in M$ de $\mathcal{D}^r$, entonces existen $(n-r)^2$ formas diferenciales lineales $\sigma_j^l, (j = 1, \cdots, n-r)$ definidas en una vecindad coordenada V del punto p, tal que*

$$dw^l = \sum_{j=1}^{n-r} w^j \wedge \sigma_j^l, \qquad (l = 1, 2, \cdots, n-r)$$

Colocaremos esta condición de una manera equivalente más conveniente.

Lema 3.1 *Dadas $n-r$ formas diferenciales lineales $w^1, \cdots, w^{n-r}$ definidas en una vecindad coordenada V de un punto en M. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *Existen $(n-r)^2$ formas σ_j^l en V tales que*

$$dw^i = \sum_{j=1}^{n-r} w^j \wedge \sigma_j^i$$

2. Para $i = 1, \cdots, n-r$

$$dw^i \wedge w^1 \wedge \cdots \wedge w^{n-r} = 0.$$

Ahora si podemos enunciar el Teorema de Frobenius en términos de formas.

Teorema 3.3 (Teorema de Frobenius) *Una distribución* $\mathcal{D}$ *definida en una variedad* M *con representación local* $w^1, \cdots, w^{n-r}$ *en una vecindad coordenada* V *de* $p \in M$*, es completamente integrable si y sólo si*

$$dw^i \wedge w^1 \wedge \cdots \wedge w^{n-r} = 0, \qquad (i = 1, \cdots, n-r).$$

Demostración. Ver [F].

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales

4.1. E.D.O. de Primer Orden

Como vimos en uno de los ejemplos del capitulo anterior, una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se pueda escribir de la forma

$$u' = f(x, u) \tag{4.1}$$

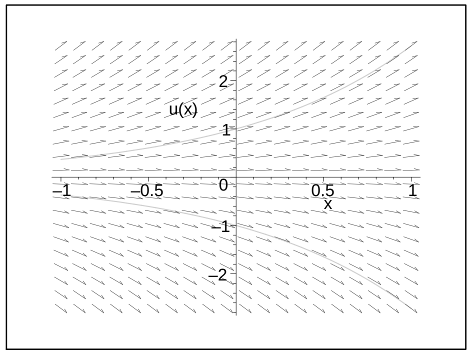
puede ser interpretada geométricamente como un campo vectorial en el plano-(x, u), es decir, en cada punto (x_0, u_0) consideramos a $(1, f(x_0, u_0))$ junto con el operador $\frac{\partial}{\partial x} + f(x_0, u_0)\frac{\partial}{\partial u}$ de derivación en la dirección de este vector. Las trayectorias de este campo son llamadas curvas integrales de (4.1), que no son más que los gráficos de las soluciones de la ecuación en estudio.

Ejemplo 4.1 Para la ecuación diferencial $u' = u$ el campo correspondiente es $X = \frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$

Ahora, interpretaremos el caso donde la ecuación diferencial es de la forma

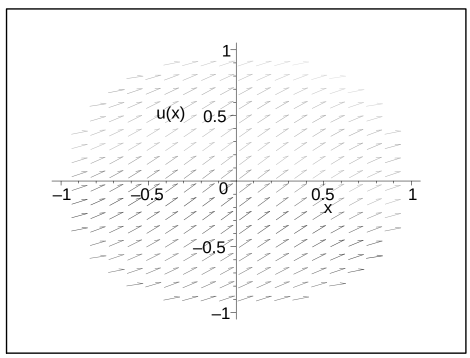
$$F(x, u, u') = 0. \tag{4.2}$$

Para utilizar el método anterior, es necesario resolver la ecuación para u', pero al hacer esto nos encontramos con algunas dificultades como: u' puede corresponder a varios



valores de x y u por (4.2). La función expresando u' en términos de x y u, aunque esté bien definida, puede que no sea diferenciable.

Ejemplo 4.2 Sea $F(x,u,u') = (u')^2 + u^2 + x^2 - 1$. Para la ecuación $F(x,u,u') = 0$ tenemos que $u' = \pm\sqrt{1 - x^2 - u^2}$. Esta función está definida en el disco $x^2 + u^2 \leqslant 1$ en donde es bi-valuada y no es diferenciable sobre la circunferencia $x^2 + u^2 = 1$.



Para superar estas dificultades, procedemos de la siguiente manera. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ con las coordenadas x, u, p y la superficie $\mathcal{E}$ dada por $F(x,u,p) = 0$. Para cada solución $u = f(x)$ de la ecuación (4.2) corresponde la curva

$$u = f(x), \quad p = u' = f'(x). \tag{4.3}$$

La coordenada x es tomada como un parámetro, es decir, la proyección de esta curva al eje x es un difeomorfismo. Más aún, las funciones u y p expresadas en términos de x

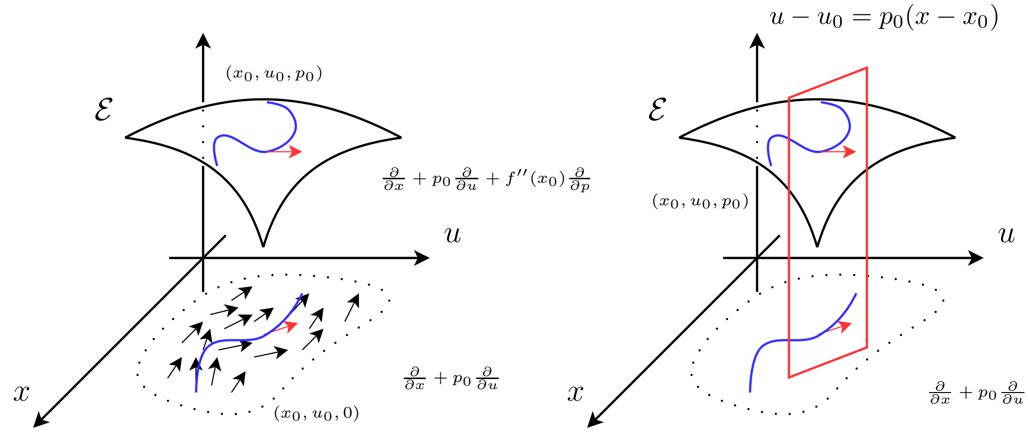
no son arbitrarias. Consecuentemente, no cualquier curva en $\mathbb{R}^3$ puede ser escrita de la forma (4.3).

Como $p = f'(x)$, el vector tangente a la curva (4.3) en el punto $a_0 = (x_0, u_0, p_0)$ toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} + p_0\frac{\partial}{\partial u} + f''(x_0)\frac{\partial}{\partial p}.$$

Este vector vive en el plano $u - u_0 = p_0(x - x_0)$ el cual es el único plano que contiene a los vectores $\frac{\partial}{\partial x} + p_0\frac{\partial}{\partial u} + f''(x_0)\frac{\partial}{\partial p}$ y $\frac{\partial}{\partial x} + p_0\frac{\partial}{\partial u}$, en otras palabras, pertenecen al Kernel de la 1-forma en el punto a dada por

$$w = du - pdx \tag{4.4}$$



Recíprocamente, una curva en $\mathbb{R}^3$ proyectada de manera difeomorfa al eje x y que es curva integral de la 1-forma w tiene la expresión (4.3).

La distribución 2-dimensional dada por la 1-forma (4.4) es la estructura geométrica que distingue de una manera natural las clases de curvas que corresponden a las soluciones de EDO de primer orden. Esta distribución es llamada *distribución de Cartan* y es denotada por $\mathcal{C}$.

Por medio de la distribución de Cartan, las soluciones de una ecuación diferencial $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ pueden ser interpretadas como curvas integrales de la distribución $\mathcal{C}$ que pertenecen a la superficie $\mathcal{E}$ y que se proyecta al eje x sin degeneración.

Utilizando el teorema (3.3) vemos que la distribución de Cartan no es completamente integrable.

En efecto. Calculemos la 2-forma dw

$$dw = d(du - pdx) = d^2u - (dp \wedge dx + pd^2x) = dx \wedge dp.$$

Consideremos la 1-forma $\gamma = adx + bdu + cdp$ y vemos que

$$\gamma \wedge w = bpdx \wedge du + cpdx \wedge dp + adx \wedge du - cdu \wedge dp.$$

Para que $\mathcal{C}$ sea completamente integrable, se debe cumplir que $dw = \gamma \wedge w$, lo cual da lugar a un sistema inconsistente.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ no es completamente integrable.

De aquí, tenemos que las variedades integrales maximales de la distribución de Cartan son 1-dimensional y por tanto, el conjunto de puntos donde el plano de la distribución de Cartan es tangente a la superficie $\mathcal{E}$ es un subconjunto cerrado nunca denso de $\mathcal{E}$. Estos puntos los llamaremos *puntos singulares.* Así, el conjunto de puntos no-singulares de la superficie $\mathcal{E}$ es abierto y denso en todas partes.

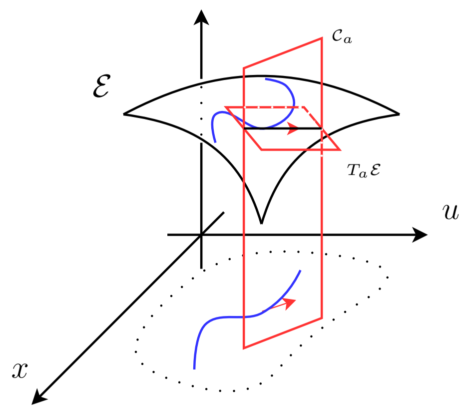
Para encontrar los puntos singulares de la ecuación (4.2), basta con analizar la condición de que el diferencial dF y la forma w son colineales en ese punto, más precisamente

$$\begin{aligned} dF \wedge w = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\tfrac{\partial F}{\partial x}dx + \tfrac{\partial F}{\partial u}du + \tfrac{\partial F}{\partial p}dp) \wedge (du - pdx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (p\tfrac{\partial F}{\partial u} + \tfrac{\partial F}{\partial x})dx \wedge du + p\tfrac{\partial F}{\partial p}dx \wedge dp + \tfrac{\partial F}{\partial x}dp \wedge du = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{\partial F}{\partial x} + p\tfrac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \tfrac{\partial F}{\partial p} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, esta condición se puede escribir como las relaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

Definición 4.1 Sea $a \in \mathcal{E}$ un punto no-singular, definimos la distribución 1-dimensional $a \mapsto \mathcal{L}_a = T_a\mathcal{E} \cap \mathcal{C}_a$, donde $T_a\mathcal{E}$ es el plano tangente a $\mathcal{E}$ en a y $\mathcal{C}_a$ es el plano determinado por la distribución de Cartan en el punto a. Esta distribución es llamada *campo de direcciones* y es denotada por $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.



Proposición 4.1 *Una curva Γ es una curva integral para el campo de direcciones $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ si y solo si es una curva integral de la distribución $\mathcal{C}$ y vive en $\mathcal{E}$ (con la excepción del conjunto de puntos singulares).*

Esta proposición nos dice que que las soluciones de la ecuación $\mathcal{E}$ son las curvas integrales del campo de direcciones $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ proyectadas al eje x sin degeneración.

Observación 4.1 Las curvas integrales arbitrarias del campo de direcciones $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ que no necesariamente satisfacen la condición de no-singularidad de proyección al eje x, pueden ser interpretadas como soluciones multivaluadas de la ecuación $\mathcal{E}$.

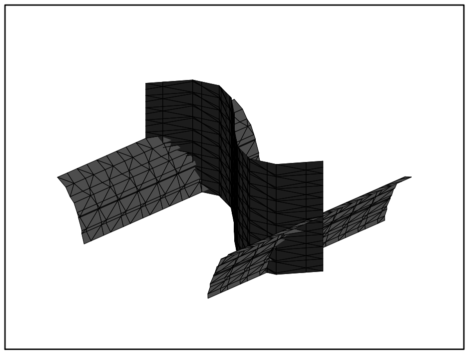
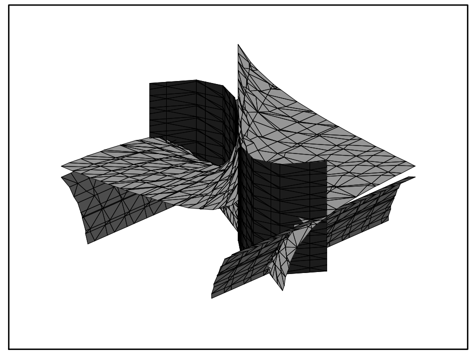
Ejemplo 4.3 Consideremos las ecuaciones

$$\begin{cases} u^3 - u + x &= 0 \\ 3u^2p - p + 1 &= 0. \end{cases}$$

Las curvas dadas por este sistema de ecuaciones viven sobre la superficie determinada por $(3x - 2u)p = u$ y son curvas integrales de la distribución de Cartan, pero estas soluciones no son de la forma (4.3). Esta curvas son soluciones multivaluadas de la ecuación diferencial $(3x - 2u)u' = u$. Más adelante mostraremos estos cálculos.

Ejemplo 4.4 Estudiemos la siguiente ecuación diferencial

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u^2 = 1.$$

Desde el punto de vista geométrico, esta ecuación representa un cilindro $\mathcal{E}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ con coordenadas x, u, p donde $p = \frac{du}{dx}$, es decir, $p^2 + u^2 = 1$. Consideremos el sistema de coordenadas (x, φ) sobre $\mathcal{E}$, donde φ esta determinado por

$$u = sen(\varphi), \qquad p = cos(\varphi).$$

Restringiendo la distribución $\mathcal{C}$ a $\mathcal{E}$ obtenemos

$$\begin{aligned} w|_{\mathcal{E}} &= w_{\mathcal{E}} = d(sen(\varphi)) - cos(\varphi)dx \\ &= cos(\varphi)d\varphi - cos(\varphi)dx = cos(\varphi)d(\varphi - x) \end{aligned}$$

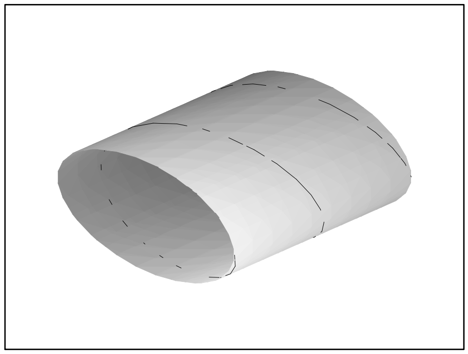
Nos interesa saber cuales son los puntos sobre la superficie donde los vectores tangentes anulan a la 1-forma w, es decir,

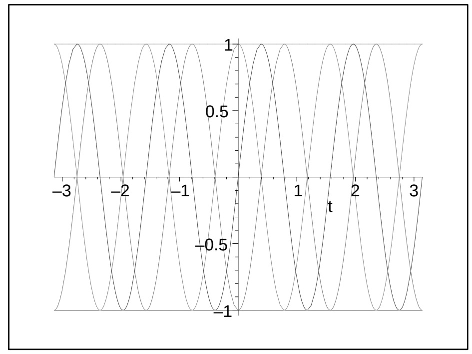
$$\begin{aligned} w_{\mathcal{E}} = 0 &\Leftrightarrow cos(\varphi)d(\varphi - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow cos(\varphi) = 0 \qquad \text{ó} \qquad d(\varphi - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi = (2k+1)\tfrac{\pi}{2} \qquad \text{ó} \qquad \varphi = x + C, \qquad k \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cuando $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ tenemos los puntos singulares de la ecuación diferencial, para la cual las soluciones singulares son $u = \pm 1$ que corresponden a las envolventes para las soluciones en los puntos no-singulares. Por otra parte, las curvas integrales de la distribución $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ son las hélices circulares $\varphi = x + C$.

Estas curvas se proyectan sin degeneración al eje x y dan lugar a las soluciones usuales. En este caso, podemos dar la solución de manera explícita colocando φ en términos de u, es decir,

$$u = sen(x + C), \qquad C \in \mathbb{R}$$





Ejemplo 4.5 Consideremos la ecuación de Clairaut

$$u - x\frac{du}{dx} = f(\frac{du}{dx}), \tag{4.5}$$

donde f es una función diferenciable. Sabemos que la solución de esta ecuación está dada por $u = cx + f(c)$, donde $c \in \mathbb{R}$. Apliquemos nuestro nuevo método a esta ecuación. La superficie determinada por (4.5) es $\mathcal{E} = \{(x, u, p)/u = xp + f(p)\}$ al hacer el cambio $p = \frac{du}{dx}$. Tomemos sobre $\mathcal{E}$ las coordenadas x, p y vemos que la 1-forma w se puede escribir como

$$\begin{aligned} w_{\mathcal{E}} &= d(xp + f(p)) - pdx \\ &= pdx + xdp + f'(p)dp - pdp \ . \\ &= (x + f'(p))dp \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, encontraremos los puntos sobre la superficie $\mathcal{E}$ donde $w_{\mathcal{E}}$ se anule, es decir,

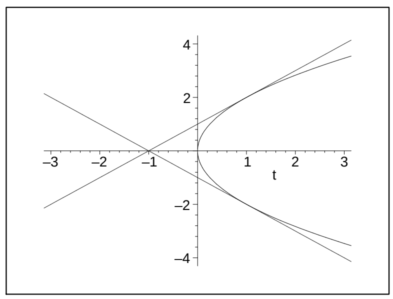
$$\begin{aligned} w_{\mathcal{E}} = 0 \ &\Leftrightarrow \ x + f'(p) = 0 \qquad \text{ó} \qquad dp = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x = -f'(p) \qquad \text{ó} \qquad p = C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cuando proyectamos las curvas determinadas por $x = -f'(p)$ al plano (x, u), estas corresponden a las soluciones singulares de (4.5), las cuales se pueden obtener de manera analítica al resolver la ecuación $x = -f'(p)$ para p y sustituyéndola en $u = xp + f(p)$.

Por ejemplo, si $f(p) = p^s$, con $s < 0$, entonces

$$\begin{aligned} f'(p) = sp^{(s-1)} \quad &\Rightarrow \quad p = \left(-\tfrac{x}{s}\right)^{\frac{1}{s-1}} \\ &\Rightarrow \quad u - x\left(-\tfrac{x}{s}\right)^{\frac{1}{s-1}} = \left(-\tfrac{x}{s}\right)^{\frac{s}{s-1}} \\ &\Rightarrow \quad u = (1-s)\left(-\tfrac{x}{s}\right)^{\frac{s}{s-1}} \end{aligned}$$

Más aún, sí $s = -1$, obtenemos soluciones singulares multivaluadas $u = \pm 2\sqrt{x}$. Las curvas integrales de la distribución $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ en los puntos no-singulares los obtenemos cuando $xp + f(p) \neq 0$ y $dp = 0$, es decir, $p = C$, con $C \in \mathbb{R}$ y así la solución esta dada por $u = xC + f(C)$. Las soluciones singulares son las envolventes de la familia 1-parámetro de soluciones no-singulares.



4.2. E.D.O. de Orden Superior

De manera análoga a la sección anterior, desarrollaremos la teoría geométrica de las E.D.O. de orden superior.

La ecuación diferencial

$$F(x, u, \frac{du}{dx}, \cdots, \frac{d^k u}{dx^k}) = 0$$

se puede interpretar como una hipersuperficie en el espacio $\mathbb{R}^{k+2}$ con coordenadas $x, u, p_1, \cdots, p_k$ definida por $F(x, u, p_1, \cdots, p_k) = 0$. Consideremos la distribución 2-

dimensional

$$\begin{aligned} w_0 &= du - p_1 dx \\ w_1 &= dp_1 - p_2 dx \\ &\vdots \\ w_{k-1} &= dp_{k-1} - p_k dx \end{aligned} \tag{4.6}$$

Cuando $k = 1$ tenemos la distribución de Cartan definida en la sección anterior. Así que también la llamaremos Distribución de Cartan y la seguiremos denotando por $\mathcal{C}$.

Si consideramos una función de la forma $u = f(x)$. El gráfico de f y sus k primeras derivadas es una curva en $\mathbb{R}^{k+2}$

$$L_f = \{(x, u, p_1, \cdots, p_k) \in \mathbb{R}^{k+2} / u = f(x), p_1 = \frac{du}{dx}, \cdots, p_k = \frac{d^k u}{dx^k}\}$$

si y solo si esta es proyectada al eje x sin degeneración y es curva integral de la distribución $\mathcal{C}$. En efecto, Las formas (4.6) restringidas a L_f se anulan, así L_f es curva integral de $\mathcal{C}$. Por otra parte, Sea Γ una curva en $\mathbb{R}^{k+2}$ la cual se puede proyectar al eje x sin degeneración, es decir, se puede escribir de la forma $\Gamma(x) = (x, a_1(x), \cdots, a_{k+1}(x))$. Por ser Γ una curva integral de $\mathcal{C}$, obtenemos que $a_i(x) = a_1^{(i-1)}(x), \quad i = 2, \cdots, k+1$, es decir, Γ es de la forma de L_f.

Como vimos anteriormente, la restricción $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ de la distribución 2-dimensional $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{R}^{k+2}$ a la hipersuperficie $\mathcal{E}$ es 1-dimensional en todos sus puntos excepto en los puntos singulares. Entonces esta distribución está generada por un campo vectorial. Describamos este campo.

Sea $Y = a\frac{\partial}{\partial x} + b_0 \frac{\partial}{\partial u} + b_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \cdots + b_k \frac{\partial}{\partial p_k}$. Como $Y \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, tenemos que $w_i(Y) = 0$, de donde obtenemos $b_i = p_{i+i} a, \quad i = 0, \cdots, k-1$.

Así

$$Y = a\left(\frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + \cdots + p_k \frac{\partial}{\partial p_{k-1}}\right) + b_k \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Por otra parte, ∇F es un vector normal a $\mathcal{E}$ en cada punto $p \in \mathcal{E}$ no singular y por tanto $\nabla F(p) \cdot Y_p = 0$.

Así, obtenemos la condición

$$a\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p_1 \frac{\partial F}{\partial u} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \cdots + p_k \frac{\partial F}{\partial p_{k-1}}\right) + b_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0,$$

la cual se puede satisfacer fácilmente haciendo

$$a = -\frac{\partial F}{\partial p_k}, \qquad b_k = \frac{\partial F}{\partial x} + p_1 \frac{\partial F}{\partial u} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \cdots + p_k \frac{\partial F}{\partial p_{k-1}}.$$

Así, nuestro campo vectorial queda de la forma

$$Y_F = -\frac{\partial F}{\partial p_k} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + \cdots + p_k \frac{\partial}{\partial p_{k-1}} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p_1 \frac{\partial F}{\partial u} + \cdots + p_k \frac{\partial F}{\partial p_{k-1}} \right) \frac{\partial}{\partial p_k}$$

Este campo vectorial es llamado *Campo Característico.*

Ejemplo 4.6 Para una E.D.O. de primer orden de la forma $F(x, u, p) = 0$, nuestro campo es de la forma

$$Y_F = -\frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial p}, \tag{4.7}$$

y si la E.D.O. se puede expresar de la forma $F(x, u, p) = f(x, u) - p$, nuestro campo es

$$Y_F = \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial p}$$

que al proyectarlo al plano x, u nos queda nuestro conocido campo

$$\frac{\partial}{\partial x} + f(x, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Notemos que las curvas integrales para este campo son determinadas por el sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x'(t) &= 1 \\ u'(t) &= f(x(t), u(t)). \end{cases}$$

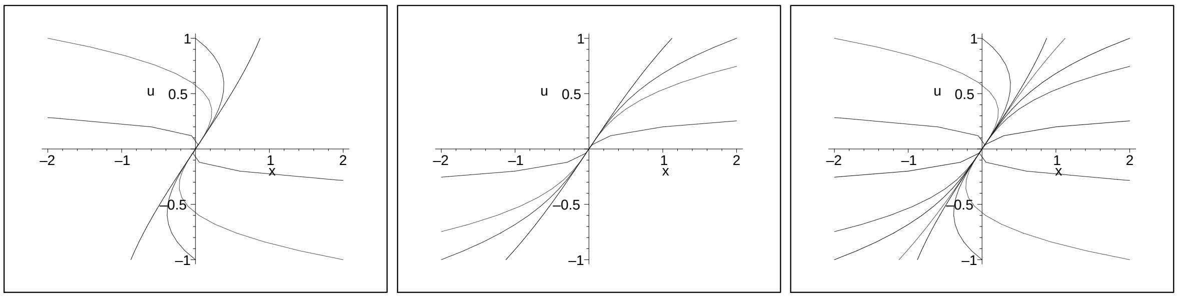
Ejemplo 4.7 Consideremos la E.D.O. $(3x - 2u)u' = u$, es decir, $F(x, u, p) = (3x - 2u)p - u$. Apliquemos la fórmula (4.7).

$$\begin{aligned} Y_F &= (2u - 3x) \left(\tfrac{\partial}{\partial x} + p \tfrac{\partial}{\partial u} \right) + (2p - p^2) \tfrac{\partial}{\partial p} \\ &= (2u - 3x) \tfrac{\partial}{\partial x} + (2u - 3x) p \tfrac{\partial}{\partial u} + (2p - p^2) \tfrac{\partial}{\partial p} \\ &= (2u - 3x) \tfrac{\partial}{\partial x} - u \tfrac{\partial}{\partial u} + (2p - p^2) \tfrac{\partial}{\partial p} \end{aligned}$$

Tomando x, u como coordenadas sobre $\mathcal{E}$, las trayectorias del campo Y_F están determinadas por el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 2u - 3x \\ u'(t) & = & -u \end{array}\right. \quad \text{cuya solución es} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} \\ u(t) & = & C_1 e^{-t}. \end{array}\right.$$

Así, la solución de la ecuación diferencial está dada por $x = u + Cu^3$, donde $C \in \mathbb{R}$ Además, en el punto singular $(0, 0, 0)$ de la ecuación, no es válido el teorema de *unicidad*



de soluciones de E.D.O.

4.3. Simetrías

Definición 4.2 Un difeomorfismo $\varphi : M \to M$ es llamado una *simetría* (finita) de la distribución P, si esta preserva a la distribución, es decir, $\varphi_*(P_a) \subset P_a$ para todo $a \in M$.

Ejemplo 4.8 La distribución de Cartan sobre $\mathbb{R}^3$ dada por $w = du - pdx$ es invariante bajo traslaciones a lo largo de los ejes x y u, es decir, el difeomorfismo $\varphi(x, u, p) = (x + a, u + b, p)$ es una simetría para todo $a, b \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*(w) & = & d(u + b) - pd(x + a) \\ & = & du - pdx = w. \end{array}$$

Ejemplo 4.9 La transformación de Legendre, dada por $\psi(x, u, p) = (p, u - xp, -x)$ es una simetría de $\mathcal{C}$. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} \psi^*(w) & = & d(u - xp) - (-x)d(p) \\ & = & du - pdx - xdp + xdp = w. \end{array}$$

Observación 4.2 Denotaremos por $SymP$ al conjunto formado por todas las simetrías de la distribución P. Si $\varphi, \psi \in SymP$, entonces $\varphi \circ \psi \in SymP$, más aún, $\varphi^{-1} \in SymP$. Así, $SymP$ es una grupo con respecto a la composición.

Observación 4.3 Denotaremos por DP el $C^{\infty}(M)-$Modulo de campos vectoriales X tales que $X_a \in P_a$, para todo $a \in M$.

Ahora, supongamos que la distribución P es determinada localmente por los campos vectoriales $X_1, \cdots, X_r$. Si $\varphi \in SymP$, entonces

$$\varphi_*(X_i) = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} X_j, \qquad i = 1, \cdots, r$$

donde $\mu_{ij} \in C^{\infty}(M)$.

Expresemos esta condición en términos de formas.

Proposición 4.2 *Sean $w_1, \cdots, w_{n-r}$ las 1-formas que determinan a la distribución P con $w_i = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} dx_j$, donde $\lambda_{ij} \in C^{\infty}(M)$, entonces*

$$\varphi \in SymP \Leftrightarrow \varphi^*(w_i) = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_j$$

Demostración. Supongamos que $\varphi \in SymP$, luego

$$\begin{aligned} \varphi^*(w_i)(X_j) &= w_i(\varphi_*(X_j)) = w_i(\textstyle\sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} X_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} w_i(X_k) = 0. \end{aligned}$$

Así $\varphi^*(w_i)$ pertenece al ideal de P el cual es denotado por $\mathcal{I}(P)$. Por tanto, existen funciones $\lambda_{ij} \in C^{\infty}(M)$ tal que

$$\varphi^*(w_i) = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_j. \tag{4.8}$$

Ahora, supongamos que (4.8) se cumple, entonces

$$\begin{aligned} w_i(\varphi_*(X_j)) &= \varphi^*(w_i)(X_j) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_i(X_j) = 0. \end{aligned}$$

Así, $\varphi_*(X_j) \in PD$ y por tanto φ es una simetría.

Con estas propiedades podemos ver lo siguiente.

Sean $\varphi \in SymP$ y $w_1, \cdots, w_{n-r}$ las 1-formas que determinan a la distribución P. Supongamos que $(x_1, \cdots, x_n)$ son coordenadas locales de M. Luego, $w_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} dx_j$.

Como $\varphi \in SymP$, por la proposición anterior

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*(w_i) & = & \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_{ik} w_k \\ & = & \sum_{k,j} \lambda_{ik} w_{kj} dx_j. \end{array}$$

Por otra parte,

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*(w_i) & = & \varphi^* \left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} dx_j \right) \\ & = & \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \circ \varphi d(\varphi_j) \\ & = & \sum_{j,s} w_{ij} \circ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx_s. \end{array}$$

Luego,

$$\sum_{j,s} w_{ij} \circ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx_s = \sum_{k,j} \lambda_{ik} w_{kj} dx_j.$$

Así, obtenemos las ecuaciones no lineales de Lie

$$\sum_{j} w_{ij} \circ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \sum_{k} \lambda_{ik} w_{ks} \tag{4.9}$$

El problema de resolver (4.9) no es más fácil que el problema de encontrar variedades integrales de la distribución en consideración. Veamos esto desde otro punto de vista.

Definición 4.3 Un campo vectorial X se dice que es una *simetría infinitesimal* de la distribución P, si el flujo A_t generado por X consiste de simetrías finitas. Denotaremos por D_P el conjunto de todas las simetrías infinitesimales de la distribución P.

Teorema 4.1 *Sea P una distribución sobre M. Las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $X \in D_P$.

ii) *Si,* $X_1, \cdots, X_r$ *son campos vectoriales generando a* P*, entonces existen funciones diferenciables* μ_{ij} *tales que*

$$[X, X_i] = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} X_j$$

iii) *Si,* $w_1, \cdots, w_{n-r}$ *son 1-formas generando a* P*, entonces existen funciones diferenciables* λ_{ij} *tales que*

$$L_X(w_i) = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_j$$

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$. Sean $X \in D_P$ y A_t el flujo generado por X. Cada A_t preserva la distribución P para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, si $X_i \in PD$, entonces $(A_t)_*(X_i) \in PD$. Más precisamente, existen funciones diferenciables $\alpha_{ij}(t)$ tales que

$$(A_t)_*(X_i) = \sum_j \alpha_{ij}(t) X_j.$$

Derivando esta expresión con respecto a t en $t = 0$, tenemos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A_t)_*(X_i) = \sum_j \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_{ij}(t) X_j = -\sum_j \mu_{ij}(t) X_j$$

donde $\mu_{ij}(t) = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_{ij}(t)$.

Por otra parte

$$\begin{array}{rcl} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A_t)_*(X_i) & = & \lim_{t\to 0} \frac{(A_t)_*(X_i)-X_i}{t} \\ & = & \lim_{t\to 0} \frac{(A_{-t})_*(X_i)-X_i}{-t} = -[X, X_i] \end{array}$$

Así, obtenemos que

$$[X, X_i] = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} X_j$$

$ii) \Rightarrow iii)$. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} L_X(w_i)(X_j) & = & X(w_i(X_j)) - w_i([X, X_j]) \\ & = & -w_i(\sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} X_k) \\ & = & -\sum_{k=1}^{r} \mu_{jk} w_i(X_k) = 0. \end{array}$$

Así, obtenemos que $L_X(w_i) \in \mathcal{I}(P)$ y por tanto, existen funciones diferenciables λ_{ij} tales que

$$L_X(w_i) = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_j.$$

$iii) \Rightarrow i)$. Veamos primero que $X = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(A_t^*)$.

Sean $p \in M$ y $f \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned} X_p(f) &= \lim_{t\to 0} \tfrac{f(A_t(p))-f(p)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \tfrac{A_t^*(f)(p)-A_0^*(f)(p)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \tfrac{A_t^*-A_0^*}{t}(f)(p) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(A_t^*)(f)(p). \end{aligned}$$

Así, $X = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(A_t^*)$. Ahora

$$\begin{aligned} X(w) &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} A_t^*(w) \\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=s} A_{t-s}^*(w) \\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=s} A_{-s}^*(A_t^*(w)) \\ &= A_{-s}^*\left(\tfrac{d}{dt}\big|_{t=s} A_t^*(w)\right) \\ \Rightarrow A_s^*(X(w)) &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=s} A_t^*(w). \end{aligned}$$

Consideremos la (n-r+1)-forma dependiente del parámetro t

$$\Omega_i(t) = A_t^*(w_i) \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-r}.$$

Ya que $A_0^*(w_i) = w_i$, tenemos que $\Omega_i(0) = 0$

Afirmación 4.1 $\Omega_i(t) = 0$, para todo t.

En efecto,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\big|_{t=s}\Omega_i(t) &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=s} A_t^*(w_i) \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-r} \\ &= A_s^*(X(w_i)) \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-r} \\ &= A_s^*(\textstyle\sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} w_j) \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-r}, \qquad X(w) = L_X(w) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} A_s^*(w_j) \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-r} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij}\Omega_j(s). \end{aligned}$$

De esta manera vemos que $\Omega_i(t)$ es solución del sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt}X^i(t) = \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_{ij} X^j$$

con condiciones iniciales $X^i(0) = 0$, por tanto $\Omega_i(t) \equiv 0$.

Así, $A_t^*(w_i)$ es combinación lineal de $w_1, \cdots, w_{n-r}$ para todo t, es decir, A_t es una simetría de la distribución P.

Este teorema nos permite describir de manera local las condiciones para que un campo vectorial X sea una simetría infinitesimal de la distribución P.

Consideremos sobre M las coordenadas locales $(x_1, \cdots, x_n)$, un campo vectorial $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y las 1-formas $w_1, \cdots, w_{n-r}$ que determinan la distribución P, donde $w_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} dx_j$. Ahora,

$$\begin{array}{rcl}
L_X(w_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right) & = & X(w_i\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)) - w_i\left([X, \frac{\partial}{\partial x_s}]\right) \\
& = & \left(\sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(\sum_k w_{ki} dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)) - w_i\left([\sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_s}]\right) \\
& = & \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x_j} w_{si} - \sum_j w_i\left(X^j [\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_s}] - \frac{\partial X^j}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
& = & \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x_j} w_{si} + \sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x_s} w_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
& = & \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x_j} w_{si} + \sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x_s} \sum_k w_{ki} dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
& = & \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x_j} w_{si} + \sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x_s} w_{ij}
\end{array}$$

Por tanto,

$$L_X(w_i) = \sum_{js} \left(X^j \frac{\partial}{\partial x_j} w_{si} + \frac{\partial X^j}{\partial x_s} w_{ij} \right) dx_s.$$

Utilizando la condición (iii) del teorema anterior , la 1-forma $L_X(w_j)$ la podemos escribir como $\sum_i \lambda_{ij} w_i$, de donde obtenemos

$$\sum_j \left(X^j \frac{\partial}{\partial x_j} w_{si} + \frac{\partial X^j}{\partial x_s} w_{ij} \right) = \sum_j \lambda_{ij} w_{js} \tag{4.10}$$

el cual es llamado *sistema de ecuaciones lineales de Lie* correspondientes al sistema de ecuaciones no-lineales de Lie (4.9).

Observación 4.4 En lo sucesivo utilizaremos la palabra simetría para referirnos a las simetrías infinitesimales a menos que se indique lo contrario.

Ejemplo 4.10 Las simetrías de una distribución 1-dimensional generadas por un campo vectorial Y son los campos X tales que $[X, Y] = \lambda Y$, para alguna función λ.

Ejemplo 4.11 Supongamos que la distribución P es completamente integrable. Existe un sistema coordenado de M tal que P es dado por la base

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, X_r = \frac{\partial}{\partial x_r}.$$

Sea $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ una simetría de P, entonces

$$\begin{array}{rcl} [X, X_i] & = & \sum_{j=1}^{n} [X^j \frac{\partial}{\partial x_j}, Xi] \\ & = & -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{array}$$

Así, la condición de que $[X, X_i] \in PD$ es equivalente a que $\frac{\partial X^j}{\partial x_i} = 0, i > r \geqslant j$.

Es este caso, el campo X se puede descomponer de la siguiente manera

$$X = \sum_{i \leqslant r}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i > r}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} = X_L + X_T$$

donde X_L es la *componente longitudinal* y X_T es la *componente transversal* del campo X. En estos términos, el campo X es una simetría de la distribución completamente integrable P, si los coeficientes de la componente transversal del campo X son constantes en cada variedad integrable de dimensión máxima.

Ejemplo 4.12 Determinemos las simetrías de la distribución de Cartan $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$. Recordemos que $w = du - pdx$ determina a nuestra distribución. Sea

$$X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial u} + c\frac{\partial}{\partial p} \tag{4.11}$$

una simetría de $\mathcal{C}$. Utilizando la fórmula (4.10), obtenemos

$$L_X(w) = (b_x - pa_x - c)dx + (b_u - pa_u)du + (b_p - pa_p)dp.$$

Utilizando la parte iii) del teorema (4.1), tenemos que existe una función λ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_x - pa_x - c & = & -\lambda p \\ b_u - pa_u & = & \lambda \\ b_p - pa_p & = & 0. \end{array} \right.$$

De donde podemos deducir que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & b_x + pb_u - pa_x - p^2 a_u \\ b_p & = & pa_p. \end{array} \right. \tag{4.12}$$

Este sistema nos dice que las simetrías de la distribución $\mathcal{C}$ son campos vectoriales de la forma (4.11) tales que a, b y c son funciones arbitrarias relacionadas por (4.12). Consideremos la función $f = b - pa$. Luego

$$\begin{array}{rcl} a & = & -f_p \\ b & = & f - pf_p \\ c & = & f_x + pf_u \end{array}$$

Así, una simetría infinitesimal de la distribución de Cartan en $\mathbb{R}^3$, está dada por

$$X = (-f_p)\frac{\partial}{\partial x} + (f - pf_p)\frac{\partial}{\partial u} + (f_x + pf_u)\frac{\partial}{\partial p}$$

de donde observamos que que el campo característico Y_F en (4.7) es una simetría infinitesimal de la distribución $\mathcal{C}$ ya que al tomar $f(x, u, p) = F(x, u, p) = 0$ obtenemos la misma expresión.

Definición 4.4 Sea P una distribución. Llamaremos *simetrías características* o *simetría trivial* de la distribución P y lo denotaremos por $Char(P)$, al conjunto

$$Char(P) = D_P \cap PD.$$

Las simetrías que no pertenecen a PD son llamadas *no triviales*.

4.4. E.D.P. de Primer Orden

En esta sección extenderemos el enfoque geométrico de las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus soluciones al caso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (E.D.P.) de primer orden para una función escalar.

Sean $x_1, \cdots, x_n$ las coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Una E.D.P. de primer orden para una función u tiene la forma

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \tag{4.13}$$

donde F es una función diferenciable de $2n+1$ variables.

Si hacemos los cambios de variables $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}$, la ecuación (4.13) da lugar al espacio geométrico (hipersuperficie)

$$\mathcal{E} = \{F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n = 0)\}$$

Observación 4.5 En lo sucesivo, supondremos que la diferencial

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

no es nula en cualquier subconjunto denso de la hipersuperficie $\mathcal{E}$.

Como las ecuaciones diferenciales en las aplicaciones son más frecuentes en variedades que no son $\mathbb{R}^n$, definimos un espacio en una manera de coordenadas libres para una variedad diferenciable M arbitraria.

Definición 4.5 Sea M una variedad n-dimensional. Definimos el espacio $J^0(M) = M \times \mathbb{R}$. Un punto de $J^0(M)$ es un par ordenado (x, u), donde $x \in M$ y $u \in \mathbb{R}$. Un *elemento de contacto* en el punto $\theta \in J^0(M)$ es un par (θ, L), donde $L \subset T_\theta(J^0(M))$ es un plano n-dimensional. Un elemento de contacto (θ, L) es llamado no-singular, si el plano L no contiene al vector vertical $\frac{\partial}{\partial u}$

Proposición 4.3 *El conjunto formado por todos los elementos de contacto no-singulares sobre $J^0(M)$ es una variedad diferenciable.*

Demostración. Ver [F]

Definición 4.6 La variedad de todos los elementos de contactos no-singulares sobre $J^0(M)$ es llamada *variedad de 1-jets* de funciones diferenciables sobre M y es denotado por $J^1(M)$.

Observación 4.6 Las proyecciones

$$\pi_{1,0} : J^1(M) \to J^0(M), \qquad \pi_{1,0}(\theta, L) = \theta \tag{4.14}$$

$$\pi_1 : J^1(M) \to M, \qquad \pi_1((x,u), L) = x, \qquad (x,u) \in J^0(M) \tag{4.15}$$

están bien definidas y son un fibrado vectorial. El $C^\infty(M)$-modulo de las secciones del fibrado (4.15) lo denotaremos por $\mathcal{J}^1(M)$

Consideremos una función $f \in C^\infty(M)$. El gráfico de f, denotado por $\Gamma(f)$, consiste de los puntos $b = (a, f(a))$, donde $a \in M$. Así, $\Gamma(f) \subset J^0(M)$.

Ahora, supongamos que en coordenadas locales $x_1, \cdots, x_n, u$, u tiene la forma $u = f(x_1, \cdots, x_n)$. Sean $\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta$ coordenadas sobre $T_b(J^0(M))$, donde $b = (a, f(a)), a \in M$, con respecto a las base $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial u}$. En estas coordenadas podemos escribir el plano tangente al gráfico de f como la siguiente ecuación

$$\eta = p_1\xi_1 + \cdots + p_n\xi_n \tag{4.16}$$

donde $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

De esta manera, sobre la variedad de 1-jets existen *coordenadas locales especiales* o *canónicas* $x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n$. Que significan geométricamente que: Si $\theta = (b, L_\theta) \in J^1(M)$, donde L_θ es el plano tangente al gráfico de la función $u = u(x_1, \cdots, x_n)$ en $b = (a, f(a))$, entonces el elemento de contacto (b, L_θ) tiene las coordenadas

$$\left(a_1, \cdots, a_n, f(a), \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Proposición 4.4 *$J^1(M)$ y $T^*M \times \mathbb{R}$ son difeomorfos.*

Demostración. Ver [F].

En base a esta proposición, podemos definir la proyección

$$\pi : J^1(M) \to T^*M \text{ dada por } \pi(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n) = (x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n).$$

Definición 4.7 Sea $f \in C^\infty(M)$, definimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} j_1(f) : M & \to & J^1(M) \\ a & \mapsto & (b, L_{f(a)}) \end{array}$$

la cual toma a cada punto $a \in M$ y le asigna el elemento de contacto no-singular en el punto $b = (a, f(a))$ y el plano tangente al gráfico de f en un punto. La aplicación $j_1(f)$ es llamada *1-jets de la función* f. El gráfico $N_f = j_1(f)(M) \subset J^1(M)$ es una variedad n-dimensional. En coordenadas especiales $x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n$ la variedad es dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} u & = & f(x_1, \cdots, x_n) \\ p_1 & = & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots & & \\ p_n & = & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

Observación 4.7 Al igual que en la sección anterior (el caso de E.D.O.), no cualquier subvariedad n-dimensional en $J^1(M)$ tiene la forma de N_f.

Definición 4.8 Sea $\theta = (b, L_\theta) \in J^1(M)$, $L_\theta \subset T_b(J^0(M))$. Denotaremos por $\mathcal{C}_\theta$ el conjunto de vectores en el espacio tangente $T_\theta(J^1(M)$ cuyas imágenes bajo la proyección $(\pi_{1,0})_*$ pertenecen al plano L_θ

$$\mathcal{C}_\theta = \left\{\xi \in T_\theta(J^1(M))/(\pi_{1,0})_*(\xi) \in L_\theta\right\}.$$

$\mathcal{C}_\theta$ es un hiperplano llamado *plano de Cartan* en $\theta \in J^1(M)$. La distribución $\theta \mapsto \mathcal{C}_\theta, \theta \in J^1(M)$ sobre la variedad de 1-jets es llamada *distribución de Cartan*

Proposición 4.5 *Sean $f \in C^\infty(M), a \in M, \theta = j_1(f)(a) \in N_f$. Entonces la variedad N_f es tangente a $\mathcal{C}_\theta$*

Demostración. Como $\pi_{1,0}$ proyecta a N_f en el gráfico de f. Entonces el plano tangente $T_\theta(N_f)$ es proyectado al plano tangente al gráfico de f en el punto $b = (a, f(a))$, es decir, sobre L_θ. Por lo tanto $T_(N_f) \subset \mathcal{C}_\theta$.

Esta proposición nos dice la imagen de la aplicación $j_1(f) : M \to J^1(M)$ es una variedad integral de la distribución de Cartan, en otras palabras, las fibras de (4.14)son variedades integrales de la distribución de Cartan.

Determinemos la forma diferencial que define a la distribución de Cartan.

Sea $x_1, \cdots, x_n$ las coordenadas locales especiales sobre $J^1(M)$ en la vecindad del punto θ. Ya que el plano $L_\theta \subset T_b(J^0(M))$ es dado por la ecuación (4.16), donde $\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta$ son las coordenadas en $T_b(J^0(M))$, tenemos que

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i \right) \frac{\partial}{\partial u} \in L_\theta \tag{4.17}$$

Por otra parte,

$$\begin{array}{rcl} \xi & = & \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \frac{\partial}{\partial p_i} \in T_\theta(J^1(M)) \\ \Rightarrow (\pi_{1,0})_*(\xi) & = & \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \\ & = & Z + (\eta - \sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i) \frac{\partial}{\partial u}, \qquad \text{por } (4.17) \end{array}$$

Así, $w = du - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ es la 1-forma que determina la distribución de Cartan.

Proposición 4.6 *Una subvariedad $N \subset J^1(M)$ que es proyectada sin degeneración a M, es una variedad integral maximal de la distribución de Cartan si y solo si esta es el gráfico de una función $f \in C^\infty(M)$, es decir, $N = j_1(f)(M)$.*

Demostración. Una variedad n-dimensional $N \subset J^1(M)$ que se proyecta a M sin degeneración tiene la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & f(x_1, \cdots, x_n) \\ p_1 & = & g_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots & & \\ p_n & = & g_n(x_1, \cdots, x_n). \end{array} \right.$$

Ahora, La variedad N es una variedad integral de la distribución de Cartan si y solo si $w|_N = 0$. En las coordenadas $x_1, \cdots, x_n$ sobre N, tenemos

$$\begin{array}{rcl} w|_N & = & d(f(x_1, \cdots, x_n)) - \sum_i g_i(x_1, \cdots, x_n)dx_i \\ & = & \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - g_i\right) dx_i \end{array}$$

de donde obtenemos que N es variedad integral de $\mathcal{C}$ si y solo si $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \cdots, n$, es decir, N es precisamente de la forma de $j_1(f)(M)$.

Esta proposición nos dice que la distribución de Cartan sobre $J^1(M)$ es la estructura geométrica la cual distingue las gráficas de 1-jets de todas las subvariedades n-dimensionales de $J^1(M)$.

Definición 4.9 Sea $\mathcal{E} \subset J^1(M)$ una subvariedad. La distribución de Cartan sobre $J^1(M)$ induce la distribución $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ sobre $\mathcal{E}$, donde

$$\mathcal{C}(\mathcal{E})_\theta = \mathcal{C}_\theta \cap T_\theta(\mathcal{E})$$

Esta distribución es llamada *distribución de Cartan inducida.*

Definición 4.10

1. Una subvariedad $\mathcal{E} \subset J^1(M)$ de codimensión 1 suministrada por la distribución de Cartan inducida, es llamada una *ecuación diferencial de primer orden.*
2. Una *solución generalizada* $L \subset \mathcal{E}$ de una ecuación $\mathcal{E}$ es una variedad integral maximal de n-dimensional de la distribución de Cartan sobre $\mathcal{E}$.

Ejemplo 4.13 Consideremos el sistema

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{1-cosu}{y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = & \frac{senu}{y} \end{array}$$

donde u es una función desconocida que depende de las variables x y y. El respectivo espacio de jet para este sistema es 5-dimensional con coordenadas x, y, u, p y q. Esta ecuación determina la subvariedad 3-dimensional

$$\left\{p = \frac{1 - cosu}{y}, q = \frac{senu}{y}\right\}$$

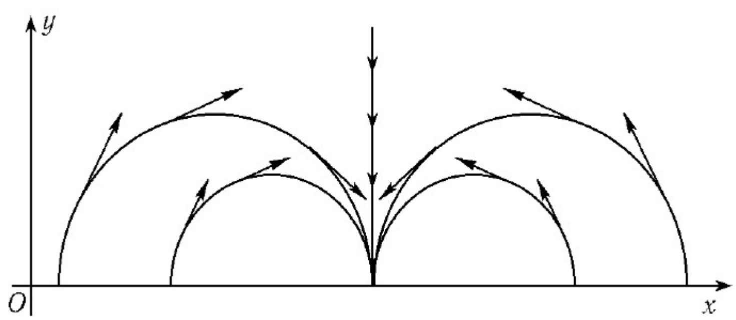
en ese espacio, y la forma de Cartan

$$du = pdx - qdy$$

restringida a la subvariedad esta dada por

$$du = \frac{1 - cosu}{y} dx - \frac{senu}{y} dy.$$

Considerando u como una función definida en el semiplano superior del planoXY y tomando valores valores de modulo 2π, nuestro sistema tiene una familia de soluciones 1-dimensional dadas por la variedad integral maximal de la distribución oriciclo.



Bibliografía

[AI] Vinogradov, A.M; Krasilshchik I.S. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations in Mathematical Physics.* Moscow Institute for Municipal Economy. Russia (1999).

[F] Warner, Frank W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer. New York, (1983).

[J] Saenz, Jorge *Variedades Diferenciales* U.C.L.A. Venezuela.

[M] Do Carmo, Manfredo P. *Formas Diferenciais E Aplicações.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, (1983).

[JL] Lee, J *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer - Verlag, (2003).

[MS] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Vol.1, second edition, Inc, Berkeley, (1970).

[YV] Villarroel, Y. *On completely Integrable Systems.* Publicationes Mathematicae, Debbrecen,(1995).

[AV] Vinogradov, A. *Geometry of nonlinear differential equations.* J.Sov.Math.17, (1981).