Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Maestría en Ciencias.

ESTRUCTURA ERGÓDICA DE TRANSFORMACIONES DEL INTERVALO.

Autor: Lcdo. Marco Antonio Noguera Alvarenga

Tutor Académico: Dr. Sergio Muñoz.

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Barquisimeto, Venezuela

Diciembre, 2012.

Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Maestría en Ciencias.

ESTRUCTURA ERGÓDICA DE TRANSFORMACIONES DEL INTERVALO.

Autor: Lcdo. Marco Antonio Noguera Alvarenga
Tutor Académico: Dr. Sergio Muñoz.

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Presentado ante la Ilustre
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
como requisito final para optar al grado de
Magister Scientiarum - Mención Matemáticas

Barquisimeto, Venezuela
Diciembre, 2012.

Índice general

A mi esposa, *Yaddy*.

Resumen

Se estudian transformaciones monótonas a trozos, dos veces diferenciables del intervalo $[0,1]$ con puntos fijos indiferentes, lo cual ocasiona la presencia de medidas invariantes infinitas. Solo se requiere que la primera imagen de la partición fundamental sea finita. Con esto se muestra, que en el intervalo se encuentran un número finito de componentes abiertas, con respeto a las cuales la transformación es conservativa y ergódica.

Capítulo 1

Introducción y Preliminares

El presente trabajo constituye un estudio parcial sobre la estructura ergódica de transformaciones del intervalo con ciertas características importantes, entre las cuales podemos mencionar la presencia de puntos fijos indiferentes, lo cual conlleva a la perdida de uniformidad de la taza de expansión de las transformaciones, y aún en este caso se pueden dar resultados sobre la estructura de las piezas ergódicas invariantes que se obtienen en estos sistemas, este resultado fue obtenido por R. Zweimüller en [14] como parte de su estudio sobre tranformaciones expansivas no-markovianas del intervalo con puntos fijos indiferentes.

Consideraremos funciones dos veces diferenciables T sobre el intervalo $[0, 1]$ con puntos fijos indiferentes, lo cual ocasiona la presencia medidas invariantes infinitas. En este contexto se deja de lado uniformidad de la expansividad de T, sólo requeriremos que la primera imagen de la partición fundamental sea finita, con esto se puede demostrar que en el intervalo se obtiene un número finito de componentes ergódicas las cuales se pueden descomponer en una partición cuyos elementos son cíclicamente permutadas bajo acción de T.

Las transformaciones con puntos fijos indiferentes son de interés en las áreas de trabajo matemático relacionado con la teoría ergódica infinita. Entre los trabajos que preceden a estos resultados podemos mencionar [3],[9] y [11], entre muchos más, en cuyos trabajos se abordan transformaciones del intervalo que presentaban puntos fijos indiferentes pero sin desprenderse del entorno de transformaciones markovianas. Por lo cual los resultados aquí presentados constituyen un avance hacia la generalización del estudio de la estructura ergódica de las transformaciones del intervalo.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presentaran las definiciones y proposiciones básicas para el contexto del trabajo, acompañado por el enunciado, sin demostración, del teorema principal el cual llamaremos *Teorema de Estructura Ergódica*. En el capítulo 3 se hará una exposición detallada sobre la estructura de transformaciones que presentan condiciones de expansividad uniforme. Finalmente en el capítulo 4 se hará un desarrollo detallado de la demostración del *Teorema de Estructura Ergódica*.

En lo que resta de este capítulo estableceremos unas nociones generales de la teoría ergódica, la demostración de los resultados expuestos en esta sección se pueden encontrar en [1], [6] y [13].

Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{B}(X)$ la σ-álgebra de Borel sobre X, la cual es la σ-álgebra más pequeña que contiene todos los subconjuntos abiertos de X. Supongamos que $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ es un espacio de medida.

Definición 1.1 *Sea* $T : X \longrightarrow X$ *una transformación sobre un espacio de medida* $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$*, diremos que:*

1. *T es* ***medible*** *si* $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$*, para todo* $A \in \mathcal{B}(X)$*.*

2. *T es* ***no-singular*** *si cumple que* $\mu(T^{-1}(A)) = 0$ *si, y solo si,* $\mu(A) = 0$*, para* $A \in \mathcal{B}(X)$*.*

3. *T* ***preserva la medida*** μ *ó* μ *es* $T-$*invariante si* $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$*, para todo* $A \in \mathcal{B}(X)$*.*

Definición 1.2 *Un conjunto $W \in \mathcal{B}(X)$ es llamado un* ***conjunto errante*** *de T, o simplemente* ***errante****, si los conjuntos que conforman la colección $\{T^{-n}(W)\}_{n=0}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos.*

Observación 1.1 *Diremos que una propiedad P aplicable a elementos de un espacio de medida $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ vale en casi todo punto ó μ-casi todo punto, lo cual escribiremos c.t.p ó μ-c.t.p, si el conjunto de elementos en el que P deja de cumplirse tiene medida cero. También denotaremos $A = B$ (mod μ) con $A, B \in \mathcal{B}(X)$ para indicar que $\mu(A \triangle B) = 0$ ($\triangle$: diferencia simétrica).*

Proposición 1.1 ***Teorema de recurrencia de Halmos.*** *Sea $T : X \longrightarrow X$ una transformación medible y no-singular. Suponga que $A \in \mathcal{B}(X)$ es tal que $\mu(A) > 0$, entonces $\mu(A \cap W) = 0$ para todo W errante si, y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_B \circ T^n = \infty$ c.t.p $x \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)_+ \cap A$, donde χ_B es la función característica de B y $\mathcal{B}(X)_+ \cap A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}(X), \mu(B) > 0\}$.*

Definición 1.3 *La* ***parte disipativa*** *de una transformación T es la unión de todos sus conjuntos errantes, lo cual denotaremos por $\mathfrak{D}(T)$. Se dice que T es* ***totalmente disipativa*** *si $\mathfrak{D}(T) = X$ (mod μ).*

Definición 1.4 *El conjunto $\mathfrak{C}(T) := X \setminus \mathfrak{D}(T)$ es llamado la* ***parte conservativa*** *de T. Se dice que T es* ***conservativa*** *si $\mathfrak{C}(T) = X$ (mod μ).*

Proposición 1.2 *Suponga que T es una transformación preservando medida de un espacio de medida σ−finito $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$. Si existe $A \in \mathcal{B}(X)$, con $0 < \mu(A) < \infty$ tal que*

$$X = \cup_{n=0}^{\infty} T^{-n} A \quad (\mathrm{mod} \quad \mu),$$

entonces T es conservativa.

Definición 1.5 *Sea* λ *una medida distinta de* μ*, definida sobre la colección de conjuntos* $\mathcal{B}(X)$*, diremos que* λ *es absolutamente continua con respecto a* μ*, lo cual denotaremos por,* $\lambda \ll \mu$*, si para cualquier* $A \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* $\mu(A) = 0$*, se tiene que* $\lambda(A) = 0$*. Por otro lado, llamaremos densidad a una función integrable, digamos* h*, definida en* X*, tal que para cualquier* $A \in \mathcal{B}(X)$*,* $\int_A h d\mu$ *es una medida de* A *sobre* $\mathcal{B}(X)$*. La densidad* h *induce una medida, la cual resulta ser absolutamente continua con respecto a* μ*, además decimos que* h *es una densidad invariante para la transformación* T *si la medida inducida por* h *resulta ser* $T-$*invariante.*

El teorema de recurrencia de Halmos nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 1.6 ***Transformación inducida.*** *Sea* $T : X \longrightarrow X$ *una transformación conservativa y* $A \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* $\mu(A) > 0$*. La función* ***tiempo retorno*** $\varphi_A : A \longrightarrow \{1, 2, \ldots\}$*, se define por*

$$\varphi_A(x) = \text{mín}\{n \geqslant 1 : T^n x \in A\}$$

Por el teorema de recurrencia de Halmos φ_A *está definida* μ*-c.t.p* $x \in A$*. De aquí, la transformación inducida por* T *sobre el conjunto* A *se define como*

$$T_A : A \longrightarrow A;$$
$$T_A(x) = T^{(\varphi_A(x))}(x), \text{ c.t.p } x \in A.$$

Ahora bién, las medidas $\mu|_A$ y $\mu|_A \circ T_A^{-1}$ donde $\mu|_A \circ T_A^{-1}(B) = \mu|_A (T_A^{-1}(B))$ para todo $B \in \{C \cap A : C \in \mathcal{B}(X)\}$, son medidas bién definidas y además $\mu|_A \circ T_A^{-1} \ll \mu|_A$, siempre que T es conservativa.

Por otro lado, la transformación inducida $T_A : A \longrightarrow A$ hereda todas las propiedades ergódicas de T, como lo establecen en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.3 *Sea* $T : X \longrightarrow X$ *una transformación conservativa y no-singular, entonces la transformación inducida* T_A *es también una transformación conservativa y no-singular de* $(A, \mathcal{B}(X) \cap A, \mu|_A)$*.*

Definición 1.7 *Se dice que* $T : X \longrightarrow X$ *es* ***ergódica*** *con respecto a la medida* μ, *si todo conjunto medible* A *invariante por* T, *esto es,* $T^{-1}(A) = A$, *tiene medida nula o medida total, es decir,* $\mu(A) = 0$ *o* $\mu(A^c) = 0$.

Proposición 1.4 *Sea* $T : X \longrightarrow X$ *una transformación preservando medida de un espacio de medida finito* $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) T *es ergódica.*

(ii) Los únicos miembros B *de* $\mathcal{B}(X)$ *con* $\mu(T^{-1}B \triangle B) = 0$ *son aquellos para los cuales* $\mu(B) = 0$ *o* $\mu(B^c) = 0$.

(iii) Para cualquier $A \in \mathcal{B}(X)$ *con* $\mu(A) > 0$ *tenemos que* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A) = \mu(X)$, *o equivalentemente* $\mu\Big(X \backslash (\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A)\Big) = 0$.

(iv) Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{B}(X)$ *con* $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ *existe* $n > 0$ *con* $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$.

Proposición 1.5 *Sea* T *una transformación no singular, entonces* T *es ergódica y conservativa si, y sólo si,* $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_A \circ T^n = \infty$ *casi todo punto, para todo* $A \in \mathcal{B}_+$.

Proposición 1.6 *Sea* $T : X \longrightarrow X$ *una transformación conservativa, no-singular y para cualquier* $A \in \mathcal{B}(X)_+ = \{B \in \mathcal{B}(X) : \mu(B) > 0\}$, *entonces*

1. *Si* T *es ergódica, se cumple que* T_A *es ergódica.*

2. *Si* T_A *es ergódica y* $X = \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$ *(mod* μ*), entonces* T *es ergódica.*

Definición 1.8 σ*-**Álgebra Invariante y Exactitud**. Sea* T *una transformación no-singular de* $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$. *La* σ*-**álgebra cola** de* T *es*

$$\mathcal{B}(X)_\infty := \cap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(\mathcal{B}(X)).$$

La transformación T *es llamada* ***exacta*** *si* $\mathcal{B}(X)_\infty = \{\varnothing, X\}$ *(mod* μ*).*

Note que si denotamos por $\mathfrak{I}(T) = \{A \in \mathcal{B}(X) : T^{-1}(A) = A\}$, tenemos que, $\mathfrak{I}(T) \subset \mathcal{B}(X)_\infty$ (mod μ), lo cual implica que cualquier transformación exacta es también ergódica.

Definición 1.9 ***Transformación de Markov.*** *Una transformación* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es de* ***Markov*** *si existe una colección finita o numerable* I_k *de intervalos disjuntos tales que*

a) T *está definida sobre* $\cup I_k$ *y* $[0,1] \setminus \cup I_k$ *tiene medida cero.*

b) $T|_{I_k}$ *es estrictamente monótona y se extiende a una función* C^2 *sobre* $\bar{I_k}$*, para cada* k*.*

c) Si $T(I_k) \cap I_j \neq \emptyset$*, entonces* $T(I_k) \supset I_j$*, y*

d) existe un entero R *tal que* $\cup_{n=1}^{R} T^n(I_k) \supset I_j$ *para cualquier* k *y* j*.*

Capítulo 2

Definiciones y Teorema Principal

En el presente capítulo presentaremos definiciones y notaciones que serán usadas en el resto del trabajo como herramientas esenciales para el desarrollo de los resultados principales, se darán definiciones de transformaciones que llamaremos *función-AFU* y *función-AFN* y de puntos fijos indiferentes, tal como se hace en [14]. Posteriormente se enunciara el *Teorema de Estructura Ergódica*, cuya demostración se dará en detalle en el capítulo 4 luego de haber estudiado los requerimientos necesarios para su realización.

2.1. Función-AFU, Función-AFN y Puntos Fijos Indiferentes

Para comenzar, fijemos algunas definiciones, en lo sucesivo, λ denotará la medida de Lebesgue y $\mathcal{B}$ será la $\sigma-$álgebra de Borel de subconjuntos de $[0,1]$. Para cualquier intervalo I y para cualquier punto $x \in cl(I)$, consideraremos una I- vecindad de x como el conjunto de la forma $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap I$. El soporte de una función $h : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ lo denotaremos por $\{h > 0\} = \{x/h(x) > 0\}$.

Definición 2.1 *Diremos que una transformación* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es monóto-*

na por partes si existe una colección ξ *(*$\#\xi > 1$*, no necesariamente finita) de subintervalos abiertos disjuntos dos a dos no vacíos (llamados cilindros de orden 1), con* $\lambda(\cup_{Z\in\xi} Z) = 1$ *y tal que* $T|_Z$ *es continua y estrictamente monótona para cada* $Z \in \xi$*.*

La notación ξ_n *se usa para designar la familia de cilindros de orden* n*, esto es, la colección de conjuntos no vacíos de la forma* $Z = \cap_{i=0}^{n-1} T^{-i} Z_i$ *con* $Z_i \in \xi_1 = \xi$*, y sobre cada* $Z \in \xi_n$*, tomaremos* $f_Z := (T^n|_Z)^{-1}$*.*

Si además asumimos que $T|_Z$ *es dos veces diferenciable, para cada* $Z \in \xi$*, y satisface las siguientes condiciones:*

(A) ***Condición de Adler:*** $\dfrac{T''}{(T')^2}$ *es acotado sobre* $\cup_{Z\in\xi} Z$*,*

y también satisface,

(F) ***Condición de Rango Finito:*** $T(\xi) = \{T(Z) : Z \in \xi\}$ *es finito.*

Si además T *cumple con:*

(U) ***Condición de Expansividad Uniforme*** *es decir* $|T'| \geqslant \tau > 1$ *sobre* $\cup_{Z\in\xi} Z$*,*

entonces llamaremos a T *una* ***función-AFU****.*

El principal interés radica sobre aquellas transformación para las cuales las condiciones anteriores pueden ser violadas por un número finito de puntos.

Definición 2.2 *Sea* $T : Z \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una transformación diferenciable,* $x_Z \in cl(Z)$ *es llamado un punto fijo indiferente de* T*, si*

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x_Z \\ x\in Z}} Tx = x_Z \qquad y \qquad T'x_Z := \lim_{\substack{x \longrightarrow x_Z \\ x\in Z}} T'x = 1$$

Definición 2.3 *Consideremos transformaciones* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *monótona por partes que satisfacen las condiciones* (A) *y* (F)*, para las cuales existen una colección finita de conjuntos* $\zeta \subset \xi$ *tal que para cada* $Z \in \zeta$ *tiene un punto fijo indiferente* x_Z *en uno de sus puntos finales.*

Las transformaciones T *son uniformemente expansivas fuera de cualquier* Z*-vecindad de* $\{x_Z : Z \in \zeta\}$*, esto es, considerando* $A_\varepsilon := [0,1] \setminus \cup_{Z\in\zeta} ((x_Z - \varepsilon, x_Z + \varepsilon) \cap Z)$*, tenemos que*

$$| T' | \geqslant \rho(\varepsilon) > 1 \textit{ sobre } A_\varepsilon \textit{ para cada } \varepsilon > 0.$$

Sea $x \in [0,1]$ *cualquiera,* x *es una* ***fuente regular*** *de* T *en una* $x-$*vecindad* V_x*, si* T' *decrece sobre* $(0,x) \cap V_x$*, y crece sobre* $(x,1) \cap V_x$*.*

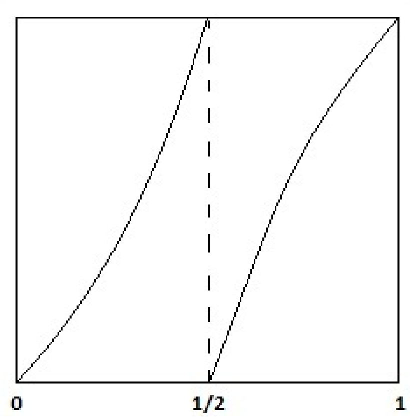
En particularmente, cada x_Z*, con* $Z \in \zeta$ *es tomado como* ***fuente regular****.*

En este contexto, T es en general No uniformemente expansiva, en tal caso diremos que T *es una* ***función-AFN****.*

Observación 2.1 *En este trabajo se habla de "expansivo" para referir a "expansor".*

Ejemplo 1. En este ejemplo mostraremos una función AFN, que preserva la medida de Lebesgue. Sea T sobre $[0,1]$, dada por

$$T(x) := \begin{cases} 1 - \sqrt{1-2x} & \text{si} \quad x \in (0, \frac{1}{2}), \\ \sqrt{2x-1} & \text{si} \quad x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$



Denotemos $T_1 : (0, \frac{1}{2}) \longrightarrow [0, 1]$, y $T_2 : (\frac{1}{2}, 1) \longrightarrow [0, 1]$, cada una de las cuales es estrictamente monótona sobre su dominio y diferenciable. Sus respectivas funciones inversas son:

$$T_1^{-1} : [0, 1] \longrightarrow (0, \tfrac{1}{2}) \text{ dada por } T_1^{-1}(x) = \tfrac{1-(1-x)^2}{2},$$
$$T_2^{-1} : [0, 1] \longrightarrow (\tfrac{1}{2}, 1) \text{ dada por } T_2^{-1}(x) = \tfrac{x^2+1}{2}.$$

Veamos que preserva la medida de Lebesgue en el intervalo $[0, 1]$. Tomemos un intervalo cualquiera $(a, b) \subset [0, 1]$, $a \neq b$. Luego,

$$\begin{aligned} T^{-1}(a, b) &= T_1^{-1}(a, b) \cup T_2^{-1}(a, b) \\ &= \Big(\frac{1-(1-a)^2}{2}, \frac{1-(1-b)^2}{2}\Big) \cup \Big(\frac{a^2+1}{2}, \frac{b^2+1}{2}\Big) \end{aligned}$$

Ahora calculemos la medida de la imagen de (a, b) por T^{-1}

$$\begin{aligned} \lambda(T^{-1}(a, b)) &= \frac{1-(1-b)^2}{2} - \frac{1-(1-a)^2}{2} + \frac{b^2+1}{2} - \frac{a^2+1}{2} \\ &= \frac{1-1+2b-b^2-1+1-2a+a^2+b^2+1-a^2-1}{2} \\ &= \frac{2b-2a}{2} \\ &= b-a \\ &= \lambda(a, b). \end{aligned}$$

Vemos por tanto, que T preserva la medida de Lebesgue.

Ahora observemos otras características. Calculemos la derivada de cada una de las ramas de la función T.

$$T_1'x = \frac{2}{2\sqrt{1-2x}},$$
$$T_2'x = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}.$$

Y tenemos que, $T_1(0) = 0$, $T_1'(0) = 1$, y $T_2(1) = 1$, $T_2'(1) = 1$.

Por lo tanto, tenemos que los puntos 0 y 1, son puntos fijos indiferentes de la transformación T, siendo así, una función AFN.

Observación 2.2 *Requerimos que* x_Z *sea un punto final de los conjuntos* $Z \in \zeta$ *solo por conveniencia con respecto a la notación. Si esta condición no se satisface, simplemente dividimos el intervalo* Z *en el punto* x_Z *en dos intervalos en los cuales se sigue cumpliendo la monotonía de la transformación.*

Como en ningún momento se exige que ζ *sea distinto de vacío entonces una función-AFU es en particular una función-AFN, por lo que los resultados obtenidos para las funciones AFN son aplicables para las funciones AFU.*

2.2. Teorema de Estructura Ergódica (Enunciado)

El propósito de este trabajo es mostrar que la estructura básica ergódica de las transformaciones del tipo no uniformemente expansoras, función-AFN, la cual es en cierto sentido, muy similar a las del tipo uniformemente expansoras, función-AFU, con la única diferencia de que los puntos x_Z, con $Z \in \zeta$, que son los puntos fijos con derivada 1, ocasionan la pérdida sobre el control de las tazas de expansividad de las transformaciones y además produce una medida invariante, pero infinita. Solo nos restringiremos al estudio de la estructura ergódica, sin entrar en detalles con respecto a la naturaleza de la medida invariante obtenida.

Teorema 2.1 ***Teorema de Estructura Ergódica de*** T. *Para cualquier transformación monótona por partes* $T : ([0,1], \mathcal{B}, \lambda) \longrightarrow ([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ *siendo una función-AFN, se cumple:*

1. *Existe un número finito de conjuntos abiertos* $X_1, \ldots, X_m$ *disjuntos dos a dos tales que* $T(X_i) = X_i$ *y* $T\,|_{X_i}$ *es conservativa y ergódica con respecto a* λ, *para* $i \in \{1, \ldots, m\}$.

2. *λ-casi todo punto $x \in [0,1] \setminus \cup_{i=1}^{m} X_i$ es eventualmente mapeado por acción de T dentro de una de las componentes ergódicas. En otras palabras, para λ-casi todo punto $x \in [0,1] \setminus \cup_{i=1}^{m} X_i$, existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $T^n(x) \in X_i$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

3. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe una partición finita $X_i = X_i(1) \cup \cdots \cup X_i(l(i))$, cuyos miembros son cíclicamente permutados por T, esto es, $T(X_i(1)) = X_i(2)$, $T(X_i(2)) = X_i(3), \ldots, T(X_i(l(i)-1)) = X_i(l(i))$ y $T(X_i(l(i))) = X_i(1)$.*

A continuación, y para cerrar el capítulo, presentaremos un teorema que muestra una de las estructuras obtenidas para funciones AFN sobre sus componentes ergódicas.

Teorema 2.2 ***Ergodicidad implica exactitud.*** *Si T es una función-AFN y X es una componente ergódica de medida invariante infinita, entonces $T|_X$ es exacta.*

Demostración. Por el Teorema de Estructura Ergódica tenemos una partición finita $X = X(1) \cup X(2) \cup \ldots \cup X(l)$, cuyos miembros son cíclicamente permutados por T. Como la componente ergódica es de medida invariante infinita, existe un $Z \in \zeta$ para el cual X contiene una Z-vecindad de un punto x_Z y como cada $X(j)$ es una unión finita de intervalos abiertos, existe un j_0 para el cual $X(j_0)$ contiene una Z-vecindad U_Z de x_Z. Pero entonces tendríamos que por ser x_Z un punto fijo extremo, $U_Z \subset T(U_Z) \subseteq T(X(j_0))$, pero esto solo sería posible si la partición del conjunto X fuera unitaria, esto es, $l = 1$. Lo cual indica que $T|_X$ es exacta. ■

Capítulo 3

Estructura de las Funciones AFU

Durante el estudio de la estructura de las funciones AFN, T, nos valdremos de una transformación auxiliar $S = \tilde{T}$, en el sentido que se define en [9] la cual, en este contexto, resultará ser una función AFU con una partición fundamental infinita, aún cuando la partición para la función-AFN de la cual proviene sea finita. Con este propósito en mente nos dedicaremos a estudiar algunos hechos sobre las funciones AFU del intervalo.

Un hecho importante, expresado en el epílogo del artículo [3], es que para cualquier función monótona a trozos S que satisface la condición de Adler, esta condición se cumple también con cualquier iterado S^n. En tal caso las correspondientes cotas crecen con n, e incluso pueden tender a infinito. Adicionalmente, si S es uniformemente expansora, entonces existe una cota para todos los iterados y S además tiene distorsión limitada, es decir, existe $R > 0$ talque para cualquier $n \geqslant 1$, $Z \in \xi$ y $A \in \mathcal{B}$,

$$\frac{\lambda(S^n(Z \cap A))}{\lambda(S^n Z)} = r_Z \cdot \frac{\lambda(Z \cap A)}{\lambda(Z)}, \qquad \text{con } r_Z \in (R, R^{-1}).$$

Ahora comencemos con el estudio de la estructura de funciones AFU, el cual lo realizaremos analizando una serie de lemas.

Lema 3.1 *Si S es una función monótona a trozos con $S\xi$ finito, entonces $S^n\xi_n$ es finito para todo $n \geqslant 1$.*

Demostración. Comencemos por definir la colección $\mathcal{Z}_n := \{S^{n-1}W \cap V : W \in \xi_{n-1}, V \in \xi_1\}$, y probemos por inducción, usando la igualdad $S^n\xi_n = S\mathcal{Z}_n$ para todo $n \geqslant 1$, que $S^n\xi_n$ es finito.

Verifiquemos que la última igualdad es correcta. Tomemos un conjunto cualquiera $Z \in \mathcal{Z}_n$ para cualquier $n \geqslant 1$. Por definición de $\mathcal{Z}_n$ existen $W \in \xi_{n-1}$ y $V \in \xi_1$ tales que $Z = S^{n-1}W \cap V$. Luego, $SZ = S(S^{n-1}W \cap V) = S^nW \cap SV = S^n(W \cap S^{-n+1}V)$, donde $W \cap S^{-n+1}V \in \xi_n$. Así, $S^n\xi_n \supset S\mathcal{Z}_n$. Y por un proceso análogo probamos que $S^n\xi_n \subset S\mathcal{Z}_n$. En resumen tenemos que se cumple la igualdad $S^n\xi_n = S\mathcal{Z}_n$, para cualquier $n \geqslant 1$.

Tenemos por hipótesis que $S\xi = S\mathcal{Z}_1$ es finito. Veamos que $S^2\xi_2 = S\mathcal{Z}_2$ es finito también. Sabemos que el conjunto ξ no es necesariamente finito, supongamos sin pérdida de generalidad que la colección ξ contiene una cantidad infinita de elementos, aún en este caso la colección $S\xi = \{SZ : Z \in \xi\}$ si es finita por hipótesis, la colección $\mathcal{Z}_2 := \{SW \cap V : W \in \xi_1, V \in \xi_1\}$ consiste de elementos que están contenidos en elementos de la colección ξ. Para cualquier $Z \in \mathcal{Z}_2$ se tiene que existen $W, V \in \xi_1$ tales que $SZ = S(SW \cap V) = S(SW) \cap SV$ y como la colección $S\xi = \{SZ : Z \in \xi\}$ es finita , entonces existe solo una cantidad finita de conjuntos SZ para cualquier $Z \in \mathcal{Z}_2$. Así, $S\mathcal{Z}_2$ es una colección finita. Y como $S^n\xi_n = S\mathcal{Z}_n$ para cualquier $n \geqslant 1$, tenemos que $S^2\xi_2$ es finito.

Ahora supongamos que $S^n\xi_n = S\mathcal{Z}_n$ es finito (hipótesis inductiva). Veamos que $S^{n+1}\xi_{n+1}$ es finito. Por definición $S^{n+1}\xi_{n+1} = S\mathcal{Z}_{n+1}$ donde $\mathcal{Z}_{n+1} := \{S^nW \cap V : W \in \xi_n, V \in \xi_1\}$, por hipótesis inductiva el conjunto $S^n\xi_n = \{S^nZ : Z \in \xi_n\}$ es finito, sabemos que la colección $\mathcal{Z}_{n+1} := \{S^nW \cap V : W \in \xi_n, V \in \xi_1\}$ está conformada por conjuntos los cuales a su vez están contenidos en elementos de la colección ξ_1. Para cualquier $Z \in \mathcal{Z}_{n+1}$ se tiene que existe $W \in \xi_n$ y $V \in \xi_1$ tales que $SZ = S(SW \cap V) =$

$S(SW) \cap SV$ y como las colecciones $S^n\xi_n = \{SZ : Z \in \xi_n\}$ y $S\xi = \{SZ : Z \in \xi\}$ son finitas, entonces existe sólo una cantidad finita de conjuntos SZ para cualquier $Z \in \mathcal{Z}_{n+1}$. Y como $S^{n+1}\xi_{n+1} = S\mathcal{Z}_{n+1}$ para cualquier $n \geqslant 1$, tenemos que $S^{n+1}\xi_{n+1}$ es finito.

De esta manera, podemos concluir que, para cualquier $n \geqslant 1$, el conjunto $S^n\xi_n$ es un conjunto finito. ■

Antes de proceder con el siguiente lema necesitamos colocar la siguiente definición.

Definición 3.1 *Un cilindro* $Z = \cap_{i=0}^{n-1} S^{-i} Z_i$ *con* $(Z_i \in \xi_1)$ *de rango* n *es llamado un cilindro* ξ*−total si, y sólo si,* $S^{n-1}Z = Z_{n-1}$. *Esto equivale a que,* $S^n Z = SZ_{n-1} \in S\xi$.

Observación 3.1 *Si S es una transformación de Markov, entonces todos los cilindros de cualquier orden son* ξ*−totales. Esto se verifica por la condición c) de la definición de transformación de Markov.*

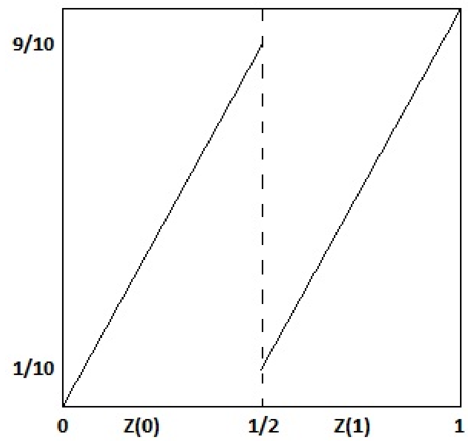
Ejemplo 2. Veamos este ejemplo para ilustrar los cilindros totales y los no totales en una misma transformación. Sea $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$T(x) := \begin{cases} \frac{9}{5}x & \text{si} \quad x \in Z(0) = (0, \frac{1}{2}), \\ \frac{9}{5}x - \frac{4}{5} & \text{si} \quad x \in Z(1) = (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

En este caso, la primera partición está dada por $\xi = \{Z(0), Z(1)\}$, y los cilindros de orden 2 son $\xi_2 = \{Z(j,k) : Z(j,k) = Z(k) \cap T^{-1}(Z(j)); j,k \in \{0,1\}\}$. Los cilindros totales de orden 2 son $Z(0,0)$ y $Z(1,1)$, y los no totales de orden 2 son $Z(1,0)$ y $Z(0,1)$, ya que

$$T(Z(1,0)) \neq Z(1),$$

$$T(Z(0,1)) \neq Z(0).$$



Lema 3.2 *Si S es una función monótona a trozos, diferenciable en cada $Z \in \xi$ y satisfaciendo que* $\inf \mid S' \mid > 2$*, entonces λ-casi todo punto $x \in [0,1]$ está contenido en una cantidad infinita de cilindros $\xi-$totales.*

Demostración. Para demostrar este lema veamos que podemos cubrir al intervalo $[0,1]$ por cilindros $\xi-$totales. Para este propósito verifiquemos la siguiente afirmación: Para cualquier $n \geqslant 1$ y $\varepsilon > 0$, existe algún $m > n$ tal que el conjunto $E(n,m)$ de puntos contenidos en algún cilindro $\xi-$total de rango $r \in \{n, \dots, m-1\}$ cubre $[0,1]$ excepto un conjunto de medida de Lebesgue menor que ε.

Esto nos lleva a que casi todo punto $x \in [0,1]$ está contenido en algún cilindro $\xi-$total. De ahora en adelante, $\xi_r(x)$ denotará el cilindro de rango r conteniendo el punto x, y las relaciones entre los conjuntos serán $(\text{mod } \lambda)$.

Para $n \geqslant 1$, definamos $\mathcal{R}_n = \{Z \in \xi_n : Z \text{ es no } \xi-\text{total}\}$ y $R_n := \cup \mathcal{R}_n = \{x \in [0,1] : \xi_n(x) \text{ es no } \xi-\text{total}\}$. Sabemos por definición que $E(n, n+1) = \{x \in [0,1] : \xi_n(x) \text{ es } \xi-\text{total}\}$, y de lo cual tenemos que $E(n, n+1)^c = \{x \in [0,1] : \xi_n(x) \text{ es no } \xi-\text{total}\} = \cup \mathcal{R}_n = R_n$. Ahora fijemos $n \geqslant 1$. Como $E(n, n+k+1)^c = \{x \in [0,1] : \xi_r(x) \text{ es no } \xi-\text{total para } n \leqslant r \leqslant n+k\}$ y como $E(n, n+1) \subset E(n, n+k+1)$ entonces $E(n, n+k+1)^c \subset E(n, n+1)^c$ para cualquier $k \geqslant 0$ y por tanto solo consideraremos R_n ya que este contiene todos los $E(n, n+k+1)^c$ para cualquier

$k \geqslant 0$. Ahora, escogeremos una colección $\mathcal{R}'_n \subseteq \mathcal{R}_n$ de manera que $\lambda(R_n \backslash R'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ donde $R'_n := \cup \mathcal{R}'_n$ y de ahora en adelante nos concentraremos R'_n.

Para $k \geqslant 1$ definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_{n+k} &:= \left\{ Z' = Z \cap S^{-(n+k+1)} W \neq \varnothing : Z \in \mathcal{R}'_{n+k-1}, W \in \xi \quad y \quad Z' \quad no \quad \xi-total \right\} \\ &\subseteq \mathcal{R}'_{n+k-1} \cap \xi_{n+k}. \end{aligned}$$

Definimos $R'_j := \cup \mathcal{R}'_j$.

Tenemos que,

$$\begin{aligned} Z' &= Z \cap S^{-(n+k-1)} W, \qquad \text{con} \quad Z \in \mathcal{R}'_{n+k-1} \quad y \quad W \in \xi \\ &= \left(\cap_{i=0}^{n+k-2} S^{-i}(Z_i) \right) \cap S^{-(n+k-1)} W, \qquad Z \in \xi_{n+k-1} \\ &= \cap_{i=0}^{n+k-1} S^{-i}(Z_i), \qquad Z = \cap_{i=0}^{n+k-2} S^{-i}(Z_i) \end{aligned}$$

Así que $Z' \in \xi_{n+k}$. Por lo cual tenemos que $\mathcal{R}'_{n+k}$ es la familia de aquellos subcilindros Z' de rango $n+k$ de los cilindros $Z \in \mathcal{R}'_{n+k-1}$ los cuales serán cilindros no ξ–totales. Entonces $R'_{n+k} = \{x \in R'_{n+k-1} : \xi_{n+k}(x) \ es \ no \ \xi - total \ \}$. Esto es, si $x \in R'_{n+k}$, existe $\xi_{n+k}(x)$ el cual es no ξ–total. En particular $R'_{n+k} \subseteq R'_{n+k-1}$, para cualquier $k \geqslant 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R'_{n+k} &= \cap_{j=0}^{k} R'_{n+j} = \left\{ x \in R'_n : \xi_r(x) \quad no - \xi - total \quad para \quad n \leqslant r \leqslant n+k \right\} \\ &= R'_n \cap E(n, n+k+1)^c \end{aligned}$$

Recordemos que $R_n = \cup \mathcal{R}_n = \{x \in [0,1] : \xi_n(x) \quad no - \xi - total\} = E(n, n+1)^c$. Y además, $E(n, n+k+1)^c = \left\{ x \in [0,1] : \xi_r(x) \quad no - \xi - total \quad para \quad n \leqslant r \leqslant n+k \right\} \subseteq E(n, n+1)^c$.

Por lo cual, $E(n, n+k+1)^c \subseteq R_n$ y de esto tenemos que

$$E(n, n+k+1)^c = E(n, n+k+1)^c \cap \left((R_n \backslash R'_n) \cup R'_n \right)$$

$$\begin{aligned} &= \left[E(n,n+k+1)^c \cap (R_n \backslash R'_n)\right] \cup \left[E(n,n+k+1)^c \cap R'_n\right] \\ &= \left[E(n,n+k+1)^c \cap (R_n \backslash R'_n)\right] \cup R'_{n+k} \\ &\subseteq (R_n \backslash R'_n) \cup R'_{n+k}. \end{aligned}$$

Así, $E(n,n+k+1)^c \subseteq (R_n \backslash R'_n) \cup R'_{n+k}$.

Ahora solo queda probar que $\lambda(R'_{n+k}) < \varepsilon$ para k suficientemente grande.

Consideremos un cilindro fijo cualquiera $Z = \cap_{j=0}^{n+k-2} S^{-j} Z_j \in \mathcal{R}'_{n+k-1}$. Entre los conjuntos de la forma $S^{n+k-1} Z \cap W$ con $W \in \xi$, a lo más dos son estrictamente mas pequeños que el respectivo cilindro W. En efecto, supongamos que existe $W \in \xi$ tal que $S^{n+k-1} Z \cap W = W$. Tomemos $Z' = Z \cap S^{-(n+k-1)} W \in \mathcal{R}'_{n+k}$, dado que $Z \in \mathcal{R}'_{n+k-1}$ y $W \in \xi$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} S^{n+k-1} Z' &= S^{n+k-1} Z \cap S^{n+k-1} S^{-(n+k-1)} W \\ &= S^{n+k-1} Z \cap W. \end{aligned}$$

Lo cual indica que Z' es un cilindro ξ-total. Pero esto es una contradicción por la definición de la colección $\mathcal{R}'_{n+k}$.

Por lo tanto, en $\mathcal{R}'_{n+k}$ hay a lo más el doble de cilindros que hay en $\mathcal{R}'_{n+k-1}$, es decir, $\#\mathcal{R}'_{n+k} \leqslant 2 \cdot \#\mathcal{R}'_{n+k-1}$. Y así, tenemos que $\#\mathcal{R}'_{n+k} \leqslant 2^k \cdot \#\mathcal{R}'_n$. La longitud de un cilindro en ξ_{n+k} no excede $\sigma^{-(n+k)}$, donde $\sigma := \text{ínf} \mid S' \mid$, verifiquemos esta última afirmación, tomemos $Z \in \xi_{n+k}$, por teorema de valor medio en el cilindro Z tenemos que existe $\rho_1 \in Z$ tal que,

$$\operatorname{long}(S(Z)) = S'(\rho_1) \cdot \operatorname{long}(Z).$$

Luego, aplicando el teorema de valor medio de manera sucesiva obtenemos que

$$\operatorname{long}(S^{n+k}(Z)) = \underbrace{S'(\rho_1) \cdot \ldots \cdot S'(\rho_{n+k})}_{n+k} \cdot \operatorname{long}(Z),$$

de lo cual obtenemos

$$1 \geqslant \operatorname{long}(S^{n+k}(Z)) \geqslant \sigma^{n+k} \cdot \operatorname{long}(Z),$$

y por lo tanto,

$$\operatorname{long}(Z) \leqslant \frac{1}{\sigma^{n+k}} = \sigma^{-(n+k)}.$$

En este sentido podemos ver que, tomando $Z \in \mathcal{R}'_{n+k}$,

$$\begin{aligned}
\lambda(R'_{n+k}) &\leqslant \#\mathcal{R}'_{n+k} \cdot \operatorname{long}(Z) \\
&\leqslant 2^k \cdot \#\mathcal{R}'_n \cdot \operatorname{long}(Z) \\
&\leqslant 2^k \cdot \#\mathcal{R}'_n \cdot \sigma^{-(n+k)} \\
&= \#\mathcal{R}'_n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^k \cdot 2^n \cdot \sigma^{-n} \cdot 2^{-n} \\
&= 2^{-n} \cdot \#\mathcal{R}'_n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{n+k}.
\end{aligned}$$

Y obtenemos que, como $\sigma > 2$ entonces $2^{-n} \cdot \sharp\mathcal{R}'_n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{n+k} \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Así, para k suficientemente grande, se tiene que $\lambda(R'_{n+k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Y por lo cual, $\lambda\Big(E(n, n+k+1)^c\Big) < \varepsilon$, para k suficientemente grande.

De acuerdo con lo anterior, podemos tomar una sucesión de conjuntos $E(\cdot,\cdot)^c$ de forma tal que existe una sucesión $n_k \nearrow \infty$ de enteros, de manera que, $\lambda\Big(E(n_{k-1}, n_k)^c\Big) < 2^{-k}$. En efecto, el resultado anterior se obtuvo para un n fijo, pero arbitrario.

Para $\varepsilon = 2^{-2}$, tomemos un $n_1 > 0$, por el razonamiento anterior existe $k_1 > 0$ suficientemente grande tal que,

$$\lambda\Big(E(n_1, n_1 + k_1 + 1)^c\Big) < 2^{-2}.$$

Ahora tomemos $n_2 = n_1 + k_1 + 1 > 0$ y tomemos $\varepsilon = 2^{-3}$, entonces tenemos que existe $k_2 > 0$ suficientemente grande tal que,

$$\lambda\Big(E(n_2, n_2 + k_2 + 1)^c\Big) < 2^{-3}.$$

Realizando este proceso definimos para $p \geqslant 1$, $n_p = n_{p-1} + k_{p-1} + 1 > 0$ y tomamos $\varepsilon = 2^{-p}$, para tales valores existe $k_p > 0$ suficientemente grande tal que,

$$\lambda\Big(E(n_p, n_p + k_p + 1)^c\Big) < 2^{-(p+1)}.$$

Por la construcción tenemos que $n_p < n_{p+1}$, para cualquier $p > 0$, tal que $n_p \nearrow \infty$, y para tal sucesión de enteros se tiene que

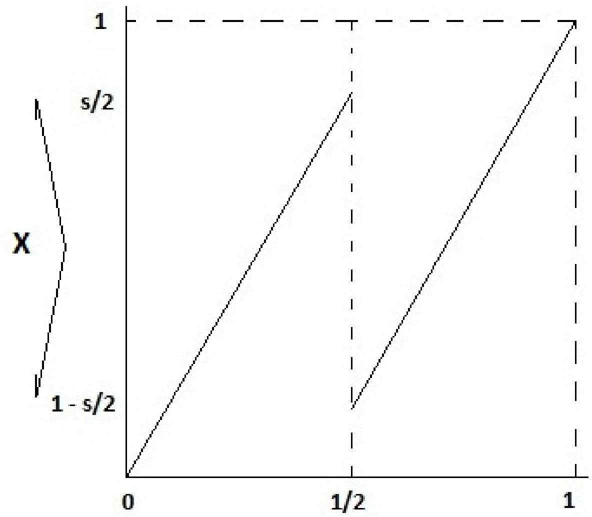
$$\lambda\Big(E(n_{p-1}, n_p)^c\Big) < 2^{-p}.$$

El lema de Borel-Cantelli establece que para la sucesión de conjuntos $\{E(n_{p-1}, n_p)^c\}_{p\geqslant 1}$, donde se satisface que la serie $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \lambda\Big(E(n_{p-1}, n_p)^c\Big) < \infty$, entonces $\lambda((E^c)^\infty) = 0$, donde $(E^c)^\infty := \cap_{n\geqslant 1} \cup_{p\geqslant n} (E^c_p) = \cap_{n\geqslant 1} \cup_{p\geqslant n} E(n_{p-1}, n_p)^c$. Luego, $((E^c)^\infty)^c$ tiene medida total, y este conjunto es $((E^c)^\infty)^c = (\cap_{n\geqslant 1} \cup_{p\geqslant n} E(n_{p-1}, n_p)^c)^c = \cup_{n\geqslant 1} \cap_{p\geqslant n} E(n_{p-1}, n_p) = E_\infty$. Por lo tanto, $\lambda-$ casi todo punto esta contenido en E_∞, y para cualquier punto x en E_∞ se tiene que x pertenece a todos salvo un números finito de los E_p. Y así, podemos concluir que, $\lambda-$casi todo $x \in [0, 1]$ yace en una cantidad infinita de conjuntos $E(n_{p-1}, n_p)$.

Y para concluir, recordemos que $E(n, m)$ es el conjunto de puntos contenidos en algún cilindro $\xi-$total de rango $r \in \{n, \dots, m-1\}$. Por lo tanto, como $\lambda-$casi todo $x \in [0, 1]$ yace en una cantidad infinita de conjuntos $E(n_{p-1}, n_p)$, entonces estos puntos yacen en una cantidad infinita de cilindros $\xi-$totales de rango $r \in \{n_{p-1}, \dots, n_p - 1\}$ respectivamente. Con lo cual concluimos la demostración del lema. ■

Algo importante es que no podemos quitar de la condición impuesta a ínf $\mid S' \mid$, ya que en tal caso perdemos la conclusión del lema 3.2, veamos un contraejemplo:

Ejemplo 3. No podemos disponer de la condición sobre ínf $\mid S' \mid$ anterior: para $s \in (1, 2)$ definimos $Sx := sx$ para $x \in (0, \frac{1}{2}) := Z_1$ y $Sx := sx - s + 1$ para $x \in (\frac{1}{2}, 1) := Z_2$.



Luego, S es una función AFU y veremos mas adelante que admite una medida invariante positiva sobre X, donde $X = (1 - \frac{s}{2}, \frac{s}{2})$. Como X es invariante por S, los cilindros contenidos en X no pueden ser totales.

En efecto, supongamos que $Z \subset X$ es un cilindro $\xi-$total de rango n, entonces $S^{n-1}Z = Z_{n-1}$, donde $Z_{n-1} \in \xi = \{Z_1, Z_2\}$. Supongamos que $S^{n-1}Z = (0, \frac{1}{2})$, pero esto no es posible ya que $(0, \frac{1}{2}) \nsubseteq X$, análogamente tampoco puede ser $S^{n-1}Z = (\frac{1}{2}, 1)$. Así, X no puede contener cilindros $\xi-$totales.

Lema 3.3 *Si* S *es una función-AFU, entonces existe una constante* $0 < \eta < 1$ *tal que para cualquier* $A \in \mathcal{B}$ *con* $\lambda(A) > 0$, *existe* $k = k(S, \eta, A) \geqslant 1$ *y* $Z = Z(S, \eta, A) \in \xi_k$ *para el cual* $\lambda(S^k(A \cap Z)) \geqslant \eta$.

Demostración. Sabemos que $| S' | \geqslant \tau > 1$, por regla de la cadena tenemos que,

$$\begin{aligned} |(S^N)'| &= | S'(S^{N-1}) \cdot S'(S^{N-2}) \cdots S'(S) \cdot S' | \\ &= | S'(S^{N-1}) | \cdot | S'(S^{N-2}) | \cdots | S'(S) | \cdot | S' | \\ &\geqslant \tau^N \end{aligned}$$

y como $\tau > 1$, para N suficientemente grande se tiene que $\tau^N > 2$, y con esto resulta $\text{ínf} \mid (S^N)') \mid > 2$, y además por el lema 3.1, S^N es una función-AFU. Por otro lado, tenemos que para cualquier $Z \in \xi_N$ existe $y \in Z$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda(S^N Z) &= (S^N)'(y) \cdot \lambda(Z) \\ &\geqslant \text{ínf} \mid (S^N)' \mid \cdot \lambda(Z) \\ &\geqslant 2 \cdot \lambda(Z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda(S^N Z) > 2 \cdot \lambda(Z) > 0$ para cualquier $Z \in \xi_N$. De esto, consideramos, $\rho := \text{ínf}\{\lambda(S^N Z) : Z \in \xi_N\} > 0$.

Ahora tomemos un conjunto $A \in \mathcal{B}$ con $\lambda(A) > 0$, casi todo punto $x \in A$ es un punto de densidad de A, esto que para casi todo $x \in A$ y para cualquier $x-$vecindad de radio r, $V_x(r)$ se tiene que el cociente $\dfrac{\lambda(A \cap V_x(r))}{\lambda(V_x(r))}$ tiende a 1 a medida que r tiende a 0, y por el lema anterior aplicado a S^N, casi todo punto de A esta contenido en un cilindro $\xi-$total.

Utilizaremos en la sucesivo la condición de distorsión limitada presentada en la pagina 13, sea $0 < R < 1$ y consideremos un cilindro $\xi-$total $Z \in \xi_{lN}$ por S^N alrededor de x de rango suficientemente alto talque $\dfrac{\lambda(Z \cap A)}{\lambda(Z)} \geqslant (2R)^{-1}$, y tenemos por distorsión limitada que para todo $n \geqslant 1$ y $A \in \mathcal{B}$,

$$\frac{\lambda(S^n(Z \cap A))}{\lambda(S^n Z)} = r_Z \cdot \frac{\lambda(Z \cap A)}{\lambda(Z)}, \qquad \text{para} \quad r_Z \in (R, R^{-1})$$

De lo cual tenemos,

$$\frac{\lambda(S^{lN}(Z \cap A))}{\lambda(S^{lN} Z)} = r_Z \cdot \frac{\lambda(Z \cap A)}{\lambda(Z)} \geqslant R \cdot \frac{1}{2R} = \frac{1}{2}.$$

Y así,

$$\lambda(S^{lN}(Z \cap A)) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \lambda(S^{lN} Z) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \lambda(S^N(S^{N(l-1)} Z)) = \frac{1}{2} \cdot S^N \tilde{Z} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \rho =: \eta > 0$$

En conclusión, $\lambda(S^{lN}(Z \cap A)) \geqslant \eta$. ■

Lema 3.4 ***(Estructura Ergódica Básica de funciones AFU)*** *Sea S una función AFU. Entonces existe un número finito de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos $X_1, \ldots, X_m$ tales que $SX_i \subseteq X_i \pmod{\lambda}$, y $S\mid_{X_i}$ es conservativo y ergódica con respecto a la medida de Lebesgue. Casi todo punto del conjunto $D := [0,1] \setminus \cup_{i=1}^{m} X_i$ es eventualmente mapeados dentro de una de esas componentes ergódicas. Cada X_i es el soporte de una única medida de probabilidad absolutamente continua invariante μ_i la cual tiene una densidad h_i de variación acotada.*

Demostración. Tenemos que S es una función-AFU, por [8] se puede garantizar la existencia de una medida invariante cuya densidad h es de variación acotada. Por el lema 3.6, el soporte de h, $M = \{h > 0\}$ es una unión finita de intervalos abiertos disjuntos dos a dos. Denotemos esto por $M = \cup_j U_j$ con $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, tenemos que $SM = M \pmod{\lambda}$, tomemos $X_{i(J)} = \cup_k U_k$ con $k \in J \subset \{1, 2, \cdots, p\}$, $i(J) \in \{1, 2, \cdots, l\}$ donde los índices en J son de manera tal que $\left(S^n U_\alpha\right) \cap U_\beta \neq \varnothing$ para algún $n \geqslant 1$ y para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$. Por esta construcción tenemos que $SX_i \subseteq X_i \pmod{\lambda}$, y además $M = \cup_i X_i$.

Ahora restrinjamos el estudio a una componente X_i arbitraria. Primeramente veamos que para cualquier abierto $U \subset X_i$ con $\lambda(U) > 0$ se tiene que existe $N \geqslant 1$ tal que $S^N U$ tiene medida total en X_i. Sabemos que $\lambda(U) < \lambda(X_i)$ y como $S^n U \subset X_i$ para todo $n \geqslant 1$, entonces $\lambda(S^n U) < \lambda(X_i)$ para cualquier $n \geqslant 1$.

Afirmamos que la sucesión $\{\lambda(S^n U)\}_{n \geqslant 1}$ es creciente. Efectivamente, sabemos que por ser S una función-AFU se tiene que $\mid S' \mid \geqslant \tau > 1$ sobre $\cup \xi$. Por teorema de valor medio tenemos que

$$\lambda(SU) = \mid S'(\delta) \mid \cdot \lambda(U) > \lambda(U)$$

Para $n = 2$, tenemos que

$$\lambda(S^2 U) \quad = \quad \lambda(S(SU))$$

$$
\begin{aligned}
&= \mid S'(S(\delta)) \parallel S'(\delta) \mid \cdot \lambda(SU) \\
&> \lambda(SU)
\end{aligned}
$$

De manera sucesiva podemos ver que la sucesión $\{\lambda(S^n U)\}_{n\geqslant 1}$ es estrictamente creciente y acotada superiormente por $\lambda(X_i)$. Por lo cual, para un $N \geqslant 1$ suficientemente grande se tiene que $\lambda\Big(X_i \setminus S^N U\Big) = 0$.

Este resultado se obtuvo para un conjunto abierto $U \subset X_i$ arbitrario, con $\lambda(U) > 0$.

Ahora tomemos un conjunto $A \subset X_i$, $S-$invariante, medible y $\lambda(A) > 0$. Por el lema 3.3, existe una constante $\eta > 0$, tal que para el conjunto A existe $k \geqslant 1$ y $Z \in \xi_k$ para el cual $\lambda\Big(S^k(A \cap Z)\Big) \geqslant \eta$. Por ser A invariante se tiene que $S^{-k}A = A$ para cualquier $k \geqslant 0$ y la restricción a Z también es invariante, esto es $S^{-k}(A \cap Z) = A \cap Z$ para $Z \in \xi_k$, de esto podemos decir que

$$S^k(A \cap Z) = S^k\Big(S^{-k}(A \cap Z)\Big) \subset A \cap Z$$

y de esta manera $\lambda(A \cap Z) \geqslant \lambda(S^k(A \cap Z)) \geqslant \eta$. De esta forma, tenemos que para cualquier conjunto A, $S-$invariante de medida positiva, se tiene que $\lambda(A) \geqslant \eta$.

Podemos concluir que el número de conjuntos invariantes con medida de Lebesgue positiva, disjuntos dos a dos contenidos en la X_i es finito. Y más aún, verificaremos que un conjunto $S-$invariante, $A \subset X_i$ tal que $\lambda(A) > 0$, tiene medida de Lebesgue total en X_i.

Sea $V_n \in \{X_i \cap Z \neq \varnothing : Z \in \xi_n\}$. Para $n \geqslant 1$, $\dfrac{\lambda(V_n \cap A)}{\lambda(V_n)} \to 1$, conforme $n \to \infty$.

Por otro lado, sabemos que $V_n = (A \cap V_n) \cup (A^c \cap V_n)$ y

$$\lambda(V_n) = \lambda(A \cap V_n) + \lambda(A^c \cap V_n)$$

y luego

$$\frac{\lambda(A \cap V_n)}{\lambda(V_n)} + \frac{\lambda(A^c \cap V_n)}{\lambda(V_n)} = 1$$

de esta manera, cuando $n \to \infty$, tenemos que $\dfrac{\lambda(V_n \cap A^c)}{\lambda(V_n)} \to 0$.

Para cualquier conjunto $S-$invariante A con $\lambda(A) > 0$, existe un $n \geqslant 1$, tal que $V_n = (A \cap V_n) \cup (A^c \cap V_n)$ lo contiene totalmente. Se tiene que $S^n V_n = U \subset X_i$ para cada $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(U \setminus A)}{\lambda(U)} &\leqslant \frac{\lambda(S^n V_n \setminus S^n A)}{\lambda(S^n V_n)} \\ &\leqslant \frac{\lambda(S^n(V_n \setminus A))}{\lambda(S^n V_n)} \\ &\leqslant r_Z \cdot \frac{\lambda(V_n \setminus A)}{\lambda(V_n)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\dfrac{\lambda(V_n \setminus A)}{\lambda(V_n)} \to 0$, a medida que $n \to \infty$, entonces $\lambda(U \setminus A) = 0$.

Por la parte anterior tenemos que para $N \geqslant 1$ suficientemente grande, se tiene que $\lambda\Big(X_i \setminus S^N U\Big) = 0$. Entonces tenemos que $A \subset U$, con A invariante y de medida positiva

$$\begin{aligned} \lambda(X_i \setminus A) &= \lambda(S^N(U) \setminus S^N(A)) \\ &< \lambda(S^N(U \setminus A)) \end{aligned}$$

por lo cual, como $\lambda(U \setminus A) = 0$, resulta $\lambda(X_i \setminus A) = 0$.

Así, para $A \subset X_i$, medible, $S-$invariante, de medida de Lebesgue positiva, se verifica que A tiene medida de Lebesgue total en X_i. Y de esta manera, tenemos que $S\mid_{X_i}$ es ergódica con respecto a la medida de Lebesgue.

Tenemos una medida invariante cuya densidad es h, la denotaremos por μ, como $X_i \subset M$, entonces $\mu(X_i) > 0$. Denotemos por μ_i a la restricción de μ a X_i, dada por,

$$\mu_i(B) = \frac{\mu(B \cap X_i)}{\mu(X_i)},$$

para cualquier $B \subset X_i$, medible, la cual es invariante y de probabilidad, cuya densidad es h_i, que no es mas que la restricción de la densidad h al conjunto X_i, la cual es de variación acotada. Y como $S^N U = X_i \mod \lambda$, para cualquier abierto de medida positiva U y algún $N \geqslant 1$ suficientemente grande, entonces la medida invariante de probabilidad que se pueda definir sobre X_i, es única.

Verifiquemos que $S\mid_{X_i}$ es conservativa. Consideremos un conjunto $W \subset X_i$, medible tal que la colección $\{S^{-n}(W)\}_{n=0}^{\infty}$ es disjunta dos a dos.

Como la transformación T preserva la medida, se tiene que $\lambda(S^{-n}(W)) = \lambda(W)$ para todo $n \geqslant 1$. Por lo tanto, como la colección $\{S^{-n}(W)\}_{n=0}^{\infty}$ es disjunta dos a dos, entonces se tiene que $\lambda(W) = 0$, y ya que esto fue realizado para un conjunto W cualquiera, se tiene que $S\mid_{X_i}$ es conservativa.

Ahora bien, consideremos un subconjunto E de X tal que $(S^k E) \cap M = \varnothing$ para todo $k \geqslant 0$. En particular, esto se cumple para $E \cap Z$ para algún $Z \in \xi$ que intercepte a E. Fijemos $\lambda(M) = m$, luego el complemento tiene medida de Lebesgue a lo mas $1 - m$, por lo tanto $\lambda(E \cap Z) \leqslant 1 - m$, y más aun, $\lambda(S^k(E \cap Z)) \leqslant 1 - m$, para todo $k \geqslant 1$, pero por el teorema de valor medio, $\lambda(S^k(E \cap Z)) > \tau^k \cdot \lambda(E \cap Z)$ para todo $k \geqslant 0$ y para $\tau > 1$. Pero esto es posible solo para $E = \varnothing$. De esta manera vemos que casi todo punto de X es mapeado eventualmente en M. ■

En lo que resta fijaremos una componente ergódica $X := X_i$ de S y sean $h := h_i$ y $\mu := \mu_i$. Como h es una función continua, su soporte $X = \{h > 0\}$ es la unión de a lo mas una familia numerable de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos, esta familia la denotaremos por $\mathcal{S}$, de hecho la familia $\mathcal{S}$ puede no ser finita. Escribiremos, $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cap \xi = \{I \cap Z \neq \varnothing : I \in \mathcal{S}, Z \in \xi\}$, $\mathcal{D} := \{I \in \mathcal{S} : I \cap \partial\xi \neq \varnothing\}$ y $\mathcal{D}' := \mathcal{D} \cap \xi = \{I \cap Z \neq \varnothing : I \in \mathcal{D}, Z \in \xi\}$.

Lema 3.5 *Cada SJ', con $J' \in \mathcal{S}'$, está contenido en un único miembro de $\mathcal{S}$, el cual denotaremos por $\langle SJ' \rangle$.*

Demostración. Queremos probar que para cada SJ', con $J' \in \mathcal{S}'$, existe un único $I \in \mathcal{S}$ tal que $SJ' \subset I$. Sea $x \in J' \in \mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \xi$. Luego como $x \in J' \in \mathcal{S} \cap \xi$, entonces $h(x) > 0$. Por el lema 3 en [9], podemos escribir h con la siguiente expresión, también conocida como ecuación de Kuzmin,

$$h = \sum_{Z \in \xi} (h \circ f_Z) \cdot \mid f'_Z \mid \cdot 1_{SZ}, \qquad \text{donde, } f_Z := (S\mid_Z)^{-1},$$

luego,

$$\begin{aligned} h(Sx) &= \sum_{Z\in\xi}(h\circ f_Z(Sx))\cdot \mid f'_Z(Sx)\mid \cdot 1_{SZ}(Sx) \\ &\geqslant h(f_{Z_0}(Sx))\cdot \mid f'_{Z_0}(Sx)\mid \cdot 1_{SZ_0}(Sx). \end{aligned}$$

Si $Sx \notin SZ_0$, entonces $1_{SZ_0}(Sx) = 0$, y por lo tanto $h(Sx) > 0$. Si $Sx \in SZ_0$, tenemos que $1_{SZ_0}(Sx) = 1$, luego $h(Sx) \geqslant h(f_{Z_0}(Sx))\cdot \mid f'_{Z_0}(Sx) \mid$. En este caso, como $f'_{Z_0}(Sx) \neq 0$, solo queda por comprobar que $h(f_{Z_0}(Sx)) > 0$, en efecto,

$$\begin{aligned} h(f_{Z_0}(Sx)) &= h((S\mid_{Z_0})^{-1}(Sx)), \qquad \text{para} \quad Sx \in SZ_0, \\ &= h(S^{-1}(Sx)) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

y ya que, $x \in J' \in \mathcal{S}\cap\xi$ tenemos que, $h(f_{Z_0}(Sx)) = h(x) > 0$. Así, $h(Sx) > 0$, por lo cual, $SJ' \in \mathcal{S}$.

Ahora, sólo queda por ver que SJ' está contenido en una única componente de $\mathcal{S}$. En efecto, supongamos que existe SJ' con $J' \in \mathcal{S}'$, tal que $SJ' \subset I_1 \cap I_2$ donde I_1, I_2 están en $\mathcal{S}$, $I_1 \neq I_2$ intervalos abiertos disjuntos.

Verifiquemos que SJ' es un conjunto conexo. Sabemos que S es una función-AFU. Por definición S es monótona a trozos y $S\mid_Z$ es continua y estrictamente monótona sobre cada $Z \in \xi$, donde ξ es una colección de subintervalos abiertos disjuntos dos a dos, con $\lambda(\cup_{Z\in\xi}Z) = 1$. Tenemos que $J' \in \mathcal{S}' := \mathcal{S}\cap\xi$, luego para cada $J' \in \mathcal{S}'$, se tiene que, $J' \subset Z$ es un intervalo, para algún $Z \in \xi$, y como $S\mid_Z$ es monótona y continua, entonces $S \mid J'$ es también continua y monótona. Luego, SJ' es un intervalo. Por lo tanto, $SJ' \subset I_1$ ó $SJ' \subset I_2$.

Asi, SJ' esta contenida en una única componente de $\mathcal{S}$. ■

Lema 3.6 ***Soporte de la densidad invariante de una función AFU.*** *Sea* S *una función-AFU y sea* h *una densidad invariante semicontinua inferior para* S*. Entonces* $\{h > 0\}$ *es una unión finita de intervalos abiertos disjuntos dos a dos.*

Demostración. Consideremos la clase de conjuntos $\mathcal{G} := \{I \in \mathcal{S} : I$ contiene algún $SJ', J' \in \mathcal{D}'\}$, la cual por el lema 3.5, es no vacia. Comprobemos que $\mathcal{G}$ es en realidad un conjunto finito.

Sea $J' \in \mathcal{D}'$. El conjunto SJ' necesariamente contiene, por la continuidad de S en cada miembro de ξ, la imagen de una vecindad unilateral de algún punto $d \in \partial\xi$. En consecuencia, el intervalo $I = \langle SJ' \rangle \in \mathcal{S}$ del lema 3.5 contiene una $I-$vecindad de d', el correspondiente límite unilateral de Sx cuando x tiende a d. Y por nuestra hipótesis de rango finito, existe solo una cantidad finita de puntos del tipo d', y así existe sólo una cantidad finita de conjuntos del tipo $\langle SJ' \rangle$ con $J' \in \mathcal{D}'$, por lo cual, $\mathcal{G}$ es una colección finita.

Ahora consideremos $s := \min\{\lambda(I) : I \in \mathcal{G}\}$, $\mathcal{F} := \{I \in \mathcal{S} : \lambda(I) \geqslant s\} \supseteq \mathcal{G}$, y $F := \cup\mathcal{F} \supseteq \cup\mathcal{G}$. Pretendemos que $SF \subset F \pmod{\lambda}$. En efecto, sea $I \in \mathcal{F}$, si $I \in \mathcal{D}$, entonces (salvo por una cantidad numerable de puntos) I es una unión de conjuntos $J' \in \mathcal{D}'$, por lo tanto $SI \subseteq \cup\mathcal{G} \subseteq F \pmod{\lambda}$. Por otro lado, si $I \notin \mathcal{D}$ como S es continua, monótona y expande sobre ξ, así $\lambda(SI) > \lambda(I) \geqslant s$. Por lo tanto, $\langle SI \rangle \in \mathcal{F}$. Así, $SF \subset F \pmod{\lambda}$.

Por último mostraremos que $\mathcal{F} = \mathcal{S}$, lo cual completaría la demostración ya que $\mathcal{F}$ es finito (en efecto, sabemos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, si $\mathcal{F}$ no es finito, entonces tampoco lo es $\mathcal{S}$ y esto contradice el hecho de que estamos trabajando sobre un intervalo de longitud finita, ya que para cualquier $I \in \mathcal{F}$, $\lambda(I) \geqslant s > 0$). Para este propósito, supongamos que $\mathcal{S} \backslash \mathcal{F}$ es no vació y tomemos un elemento I_0 de longitud maximal $l < s$. Veamos que $SI_0 \subseteq F$. Efectivamente, si $I_0 \in \mathcal{D}$, entonces I_0 es una unión de conjuntos $J' \in \mathcal{D}'$, luego SI_0 contiene algún SJ' con $J' \in \mathcal{D}'$, y así $SI_0 \subseteq F$. Por otra parte, si $I_0 \notin \mathcal{D}$ como S es continua, monótona y expande sobre ξ, tenemos que $\langle SI_0 \rangle \in \mathcal{F}$.

Por lo tanto, $I_0 \subseteq S^{-1}F \backslash F \pmod{\lambda}$. Pero como μ es invariante por S y $F \subseteq S^{-1}F$, determinamos que,

$$\mu(S^{-1}F \backslash F) = \mu(S^{-1}F) - \mu(F) = \mu(F) - \mu(F) = 0.$$

Así, $\mu(I_0) = 0$, lo cual es una contradicción ya que, $I_0 \in \mathcal{S}$. Por tanto, $\mathcal{S} \backslash \mathcal{F}$ es vació. ■

Lema 3.7 ***Cota inferior para las densidades invariantes de una función-AFU.*** *Sea S una función-AFU y sea h una densidad invariante para S. Entonces existe alguna constante C tal que $0 < C^{-1} \leqslant h \leqslant C$ sobre $\{h > 0\}$.*

Demostración. La prueba de este lema la dividiremos en dos partes.

Parte 1.

Sea y un punto final de un intervalo arbitrario $I \in \mathcal{S}$. Entonces existe una $I-$vecindad W de y el cual es cubierto por algún miembro SJ' de la familia de intervalos abiertos $\{SJ' : J' \in \mathcal{S}'\}$, y por el lema 3.5 $SJ' \subseteq \langle SJ' \rangle = I$.

En este caso escribiremos,

$$(J', x) \rightsquigarrow (I, y)$$

donde x es el punto final de J' mapeado en y por continua extensión de S sobre $\bar{J}'$. Así, para cualquier par (I, y) con $I \in \mathcal{S}$, $y \in \partial I$, existe un par (J', x), con $J' \in \mathcal{S}'$, $x \in \partial J'$, tal que $(J', x) \rightsquigarrow (I, y)$.

Más aún, si en esta situación $\lim\limits_{t \to y, t \in I} h(t) = 0$, entonces también $\lim\limits_{r \to x, r \in J'} h(r) = 0$, ya que por la ecuación de Kuzmin,

$$\begin{aligned} h &= \sum_{Z \in \xi} (h \circ f_Z) \cdot \mid f'_Z \mid \cdot 1_{SZ} \\ &\Longrightarrow\ h \geqslant (h \circ f_{Z_0}) \cdot \mid f'_{Z_0} \mid \cdot 1_{SZ_0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\implies h \cdot \frac{1}{| f'_{Z_0} |} \geqslant (h \circ f_{Z_0}) \cdot 1_{SZ_0} \\
&\implies (h \circ f_{Z_0}) \cdot 1_{SZ_0} \leqslant h \cdot \frac{1}{\left| \left((S\mid_{Z_0})^{-1} \right)' \right|} \\
&\implies \left(h \circ (S\mid_{Z_0})^{-1} \right) \cdot 1_{SZ_0} \leqslant h \cdot \left| (S\mid_{Z_0})'(S\mid_{Z_0})^{-1} \right| \\
&\implies \left(h(S\mid_{Z_0})^{-1}(t) \right) \cdot 1_{SZ_0}(t) \leqslant h(t) \cdot \left| (S\mid_{Z_0})'(S\mid_{Z_0})^{-1}(t) \right| \\
&\implies h(r) \leqslant h(t) \cdot \left| S'(r) \right|.
\end{aligned}
$$

Así, si $\lim h(t) = 0$, entonces $\lim h(r) = 0$ si $t = Sr$, $r \in Z_0$.

La condición de Adler nos asegura que S' es acotada sobre cada cilindro ya que S es dos veces diferenciable sobre cada cilindro, luego S' está lejos de 0 e ∞. Además observe que como $\lim\limits_{r \to x, r \in J} h(r) = 0$ siendo h continua con límite unilateral sobre cada punto extremo de un intervalo de definición, se tiene que x es un punto final de algún intervalo de $\mathcal{S}$. Además, si definimos $\mathcal{K} := \{(I, y) : I \in \mathcal{S}, y \in \partial I, \lim\limits_{t \to y, t \in I} h(t) = 0\}$, tenemos que para $(I, y) \in \mathcal{K}$ y $(J', x) \rightsquigarrow (I, y)$, entonces $(J, x) \in \mathcal{K}$, donde J es un miembro de $\mathcal{S}$ conteniendo a J'. Extendamos la relación "$\rightsquigarrow$" sobre los conjuntos $\mathcal{K}$, de manera que, $(J, x) \rightsquigarrow (I, y)$.

Parte 2.

Para probar que $\mathcal{K}$ es vacío, supondremos lo contrario. Por la discusión previa, cada elemento de $\mathcal{K}$ tiene al menos un predecesor por la relación "$\rightsquigarrow$" en $\mathcal{K}$. Por otro lado, es claro que este puede tener al menos un sucesor. La colección $\mathcal{K}$ siendo finita por el lema 3.6, podemos concluir que la relación es biyectiva sobre $\mathcal{K}$. Por lo tanto este conjunto junto con la relación conforman "ciclos" disjuntos finitos,

$$(I_0, y_0) \rightsquigarrow (I_1, y_1) \rightsquigarrow (I_2, y_2) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow (I_n, y_n) = (I_0, y_0)$$

donde $(I_j, y_j) \in \mathcal{K}$ con $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y $n \geqslant 1$.

Ahora consideremos un ciclo fijo de este tipo. Podemos escoger una I_0-vecindad U de y_0 pequeña de manera que $S^j U$ sea una I_j-vecindad de y_j para cada $j \in$

$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Tenemos que $\lambda(U) \leqslant \alpha^{-n} \cdot \lambda(V)$, donde $\alpha > 0$, $V := S^n U \subseteq I_0$. Sin embargo, para U suficientemente pequeño afirmamos (*) que $\mu(U) = \mu(V)$, lo cual es una contradicción ya que $\lambda(V \backslash U) > 0$. Por lo tanto, lo supuesto es falso, y así $\mathcal{K}$ es en efecto vacío.

Ahora veamos como se cumple la afirmación (*). Sea $(I, y) \in \mathcal{K}$. En la parte 1 demostramos que siempre que W es una I—vecindad de y suficientemente pequeña, entonces $S^{-1}(W) \cap (\cup \mathcal{S}')$ está contenido en un único $J' \in S'$. En efecto, tomemos una I—vecindad pequeña de y, luego por la parte 1 tenemos que existe $x \in J \in S$ tal que $Sx = y$, de donde también por ser una relación biyectiva, $x = S^{-1}y$, por lo cual $S^{-1}W$ es una J—vecindad de x, y por la parte 1 como, $W \subset SJ'$, entonces $S^{-1}W \subset J'$ con $J' \in S'$.

Aplicando este argumento para cada borde de nuestro ciclo, determinamos que para U suficientemente pequeño tenemos que para $S^{-n}(V) = U$, que se cumple $S^{-n}(V) \cap (\cup \mathcal{S}') = U \cap (\cup \mathcal{S}') = U$, y así

$$
\begin{aligned}
\mu(U) &= \mu(S^{-n}(V) \cap (\cup \mathcal{S}')) \\
&= \int_{S^{-n}(V) \cap (\cup \mathcal{S}')} h(x) d\lambda x \\
&= \sum_{Z \in \mathcal{S}'} \int_{S^{-n}(V)|_Z} h(x) d\lambda x \\
&= \sum_{Z \in \mathcal{S}'} \int_{V|_Z} h(S^{-n}(w))(S^{-n}(w))' d\lambda w \\
&= \int_V \sum_{Z \in \mathcal{S}'} h(f(w))(f(w))' d\lambda w \\
&= \int_V \sum_{Z \in \xi} h(f(w))(f(w))' d\lambda w \\
&= \int_V h d\lambda \quad \text{ecuación de Kuzmin, h es invariante.} \\
&= \mu(V)
\end{aligned}
$$

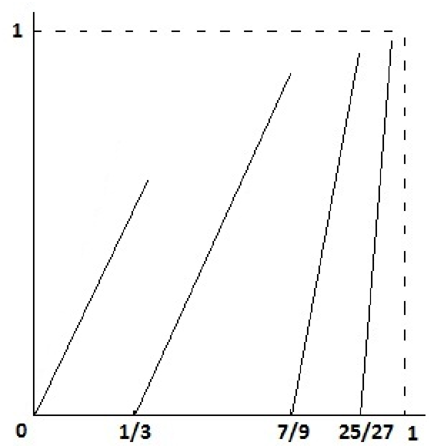
Por lo tanto, $\mu(U) = \mu(V)$, con lo cual probamos la afirmación(*).

En resumen, hemos probado que $\inf_I h > 0$ para cada I en el conjunto finito $\mathcal{S}$. Y así, la densidad invariante h es acotada inferiormente y lejos de cero. ■

No podemos dejar por fuera la condición de rango finito (F) impuesta sobre la transformación S, ya que perdemos el control de la magnitud de las densidades invariantes, veamos el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 4. (Una función de Markov afín uniformemente expansiva a trozos, con infinita ramas cuya densidad invariante es no acotada inferiormente cerca de cero.)

Sea $p_0 := 0$ y $p_n := 1 - \frac{2}{3^n}$, con $n \geqslant 1$. Definamos S la función de los cilindros $Z_n := (p_n, p_{n+1})$ afín sobre $(0, p_{n+2})$, con $n \geqslant 0$. La colección de puntos $\{p_n : n \geqslant 0\}$ es infinita, luego la colección $S\xi = \{SZ : Z \in \xi\} = \{(0, p_j) : j \geqslant 2\}$ es infinita.



Además, $\inf | S' | > 2$. Al ser S una función afín se tiene que $S'' = 0$, y por tanto se satisface la condición de Adler, como también satisface $\inf\{\lambda(SZ) : Z \in \xi\} > 0$. Por lo cual S admite una densidad de probabilidad invariante h, la cual es continua y podemos asumir que el conjunto $\{h > 0\}$ contiene algún intervalo abierto, y de acuerdo al lema 3.2, contiene al menos un cilindro ξ–total $Z \in \xi_m$. Ademas h debe ser positiva sobre $Z_1 \subseteq S^m Z = S(S^{m-1}Z) = S(Z_{m-1})$ ya que Z es ξ–total.

verifiquemos las últimas igualdades, tenemos que $S^m Z = S(Z_{m-1}) = (0, p_{m+1})$, de donde $Z_1 = (p_1, p_2) \subseteq (0, p_{m+1}) = S^m Z$, con $m \geqslant 1$. Así, $Z_1 \subseteq S^m Z$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} S^k Z_1 &= S^{k-1}(SZ_1) \\ &= S^{k-1}(0, p_3) \\ &= S^{k-1}(Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2) \\ &= S^{k-2}(Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3) \\ &= (Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup \ldots \cup Z_{k+1}) \\ &\supseteq \cup_{j=1}^{k+1} Z_j. \end{aligned}$$

Así, $S^k Z_1 \supseteq \cup_{j=1}^{k+1} Z_j$, con $k \geqslant 1$. Con lo cual concluimos que $h > 0$ sobre todo el intervalo $(0, 1)$. Por otro lado, por la ecuación de Kuzmin, para $x \in Z_{n+1}$,

$$h(x) = \sum_{k \geqslant n} h(f_{Z_k}(x)) \cdot \mid f'_{Z_k}(x) \mid \leqslant \|h\|_\infty \cdot \sum_{k \geqslant n} \mid f'_{Z_k}(x) \mid$$

Ahora veamos como podemos acotar a $f'_{Z_k}(x)$, tenemos por definición que $f : (0, p_{n+2}) \longrightarrow (p_n, p_{n+1})$, para la cual, por el teorema de valor medio existe $\beta \in (0, p_{n+2})$, tal que

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n = f'(\beta) \cdot p_{n+2} &\implies 1 - \frac{2}{3^{n+1}} - 1 + \frac{2}{3^n} = f'(\beta) \cdot (1 - \frac{2}{3^{n+2}}) \\ &\implies f'(\beta) = \frac{24}{3^{n+2} - 2} < \frac{24}{3^{n+2} - 3^{n+1}} < 4 \cdot \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Luego, volviendo a la ecuación de Kuzmin, tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k \geqslant n} h(f_{Z_k}(x)) \cdot \mid f'_{Z_k}(x) \mid \\ &\leqslant \|h\|_\infty \cdot \sum_{k \geqslant n} \mid f'_{Z_k}(x) \mid \\ &\leqslant \|h\|_\infty \cdot \mathrm{ctte} \cdot \sum_{k \geqslant n} \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $x \longrightarrow 1$ tenemos que $n \longrightarrow \infty$ y por tanto, $k \longrightarrow \infty$. Así, $\lim_{x\longrightarrow 1} h(x) = 0$, lo cual indica que h no esta acotado cerca de 0.

Observación 3.2 *Sea* T *una transformación medible sobre el espacio* $\sigma-$*finito* $(X, \mathcal{A}, \nu)$ *tal que tanto* T *y* T^{-1} *preservan conjuntos de medida cero. Si* h *es una densidad invariante para* T *y* $M := \{h > 0\}$*, entonces* $TM = M \pmod{\nu}$.

Si además T *es ergódica con respecto a* ν*, entonces* $\nu(X \setminus \cup_{n\geqslant 0} T^{-n}M) = 0$*, es decir, casi todo punto de* X *es eventualmente mapeado dentro de* M*, como en la proposición 1.4 cuya demostración esta dada en detalle en [13].*

Estudiemos ahora un lema analítico, llamado desigualdad de Thaler, cuya demostración puede encontrarse en [10], en el cual se dan los estimados por los cuales es posible aproximar la serie de las derivadas de las iteradas de una función sujeta a ciertas condiciones.

Lema 3.8 *Sea* $a, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$*,* $e_i \geqslant 0$*,* $e_1 + e_2 > 0$*,* $E := (a - e_1, a + e_2)$ *y sea* $f : E \longrightarrow E$ *una función creciente y diferenciable tal que* $| f(x) - a | < | x - a |$ *para* $x \in E \setminus \{a\}$*. Suponiendo también que* f' *es creciente sobre* $(a - e_1, a)$ *y decreciente sobre* $(a, a + e_2)$*. Entonces*

$$\frac{f^{-1}(x) - a}{f^{-1}(x) - x} \leqslant \sum_{n\geqslant 0} (f^n)'(x) \leqslant \frac{x - a}{x - f(x)}, \qquad \textit{para } x \in f(E)\setminus\{a\},$$

donde f^n *denota la* $n-$*ésima iterada de* f.

Observación 3.3 *Como el* $x_Z, Z \in \zeta$*, son fuentes regulares unilaterales, para cada* $Z \in \zeta$*,* $f_Z : TZ \longrightarrow Z$ *satisface las condiciones del lema anterior, entonces* $\sum_{n\geqslant 0} (f^n)'(x) \leqslant \frac{x - x_Z}{x - f_Z(x)} = G(x)$*, para* $x \in Z \in \zeta$*, sobre* $\cup\xi$.

Ahora vamos a considerar la “transformación auxiliar” $\tilde{T}$, la cual es obtenida de T de la manera considerada en el siguiente lema.

Lema 3.9 ***Relación entre*** $\tilde{T}$ ***y*** T**.** *Sea* $(X, \mathcal{A})$ *un espacio de medida, sea* $T : X \longrightarrow X$ *y* $\varphi : X \longrightarrow \{1, 2, \dots\}$ *medible y consideremos la función* $\tilde{T}$ *definida por* $\tilde{T}x := T^{\varphi(x)}x$ *para* $x \in [0, 1]$. *Entonces*

1. *Cualquier conjunto* T*-invariante, es también un conjunto* $\tilde{T}$*-invariante.*

2. *Cualquier conjunto* T*-errante, es también un conjunto* $\tilde{T}$*-errante.*

3. *Si* $\tilde{\mu}$ *es una medida invariante para* $\tilde{T}$ *sobre* $\mathcal{A}$*, entonces una medida invariante por* T *se obtiene por*

$$\mu(A) := \tilde{\mu}(A) + \sum_{n \geqslant 1} \tilde{\mu}(T^{-n}A \cap \{\varphi \geqslant n + 1\}), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Construiremos la transformación auxiliar $\tilde{T}$ a partir de una función-AFN. Denotemos por T una función-AFN fija. Primero construiremos una partición refinada $\tilde{\xi}$ de $[0, 1]$ como sigue: fijemos un cilindro $Z \in \zeta$ y denotemos por $Z(1)$ el subintervalo abierto $Z \backslash T^{-1}(cl(Z))$. Para $n \geqslant 1$ definimos $Z(n) := (T\mid_Z)^{-1}(Z(n-1)) = (T\mid_Z)^{-n}(Z(1))$, donde la colección $\{Z(1), Z(2), \dots\}$ esta conformada por intervalos abiertos disjuntos dos a dos tales que $Z = \cup_{n \geqslant 1} Z(n) \mod \lambda$, por el proceso de construcción tenemos que para $n, j \geqslant 1$, $T^n Z(n + j) = Z(j)$. Ahora definimos $\tilde{\xi} := (\xi \backslash \zeta) \cup \{Z(n) : Z \in \zeta \text{ y } n \geqslant 1\}$. Definimos

$$\varphi(x) := \begin{cases} n & si \quad x \in Z(n), Z \in \zeta, n \geqslant 1, \\ 1 & \qquad en \quad otro \quad caso. \end{cases}$$

y en tal sentido sea $\tilde{T}(x) := T^{\varphi(x)}(x)$ para $x \in [0, 1]$. De ahora en adelante los objetivos asociados al sistema $(\tilde{T}, \tilde{\xi})$ serán denotados usando la notación de "tilde", es decir, $\tilde{\xi}_n = \cap_{i=0}^{n-1} \tilde{T}^{-i} \tilde{Z}_i$ con $\tilde{Z}_i \in \tilde{\xi}$, y $\tilde{f}_Z = (\tilde{T}^n\mid_Z)^{-1}$ para $Z \in \tilde{\xi}_n$. $\tilde{T}(x)$ es la transformación salto de Schweiger con respecto al conjunto $(\cup_{W \in \xi \backslash \zeta} W) \cup (\cup_{Z \in \xi} Z)$, ver [9].

A continuación enunciaremos y demostraremos el lema que nos permite darle a la transformación auxiliar $\tilde{T}$ toda la estructura ya estudiada de las funciones AFU. Con este lema concluimos el presente capítulo y con el cual terminamos el estudio de las funciones AFU, y a partir de su estructura pasaremos a estudiar la estructura ergódica de las funciones AFN demostrando el Teorema de Estructura Ergódica en el próximo capítulo.

Lema 3.10 $\tilde{T}$ *es una función-AFU.*

Demostración. La transformación $\tilde{T}$ es dos veces diferenciable sobre cada $\tilde{Z} \in \tilde{\xi}_n$. Esta es uniformemente expansiva ya que para cada $Z \in \zeta$ y $n \geqslant 1$, $\text{ínf}_{Z(n)} \mid \tilde{T}' \mid \geqslant \text{ínf}_{Z(1)} \mid T' \mid > \tau > 1$. También observe que para cada $Z \in \zeta$ todos los nuevos cilindros $Z(n)$ tienen la misma imagen $T(Z(1))$ bajo $\tilde{T}$, en efecto,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(Z(n)) &= T^n(Z(n)) \\
&= T^n(T \mid_z^{-n+1} (Z(1))) \\
&= T(Z(1))
\end{aligned}$$

así que $\tilde{T}(\tilde{\xi})$ es una familia finita.

Finalmente verifiquemos que se satisface la condición de Adler. Para ello necesitamos chequear las cotas de $\dfrac{\tilde{T}''}{(\tilde{T}')^2}$ sobre cada $\cup_{n\geqslant 1} Z(n)$.

Afirmación, sobre $\tilde{T}(Z(n)) = T(Z(1))$

$$\left|\frac{\tilde{T}''}{(\tilde{T}')^2}\right| \circ \tilde{f}_{Z(n)} = \left|\frac{\tilde{f}''_{Z(n)}}{\tilde{f}'_{Z(n)}}\right|.$$

En efecto, primero recordemos que, $Z(n) := (T\mid_Z)^{-1}(Z(n-1)) = (T\mid_Z)^{-n}(Z(1))$ para $n \geqslant 1$, y $\tilde{f}_Z = (\tilde{T}^n \mid_Z)^{-1}$ para $Z \in \tilde{\xi}_n$, y como nosotros tenemos que $Z(n) \in \tilde{\xi}$, entonces $\tilde{f}_{Z(n)} = (\tilde{T}\mid_{Z(n)})^{-1}$. En este sentido, tenemos que

$$\tilde{f}'_{Z(n)} = \frac{1}{\tilde{T}\mid'_{Z(n)} ((\tilde{T}\mid_{Z(n)})^{-1})}$$

y luego

$$\tilde{f}''_{Z(n)} = \frac{-\tilde{T}\,|''_{Z(n)}\,((\tilde{T}\,|_{Z(n)})^{-1})}{(\tilde{T}\,|'_{Z(n)}\,((\tilde{T}\,|_{Z(n)})^{-1}))^2\cdot(\tilde{T}\,|'_{Z(n)}\,((\tilde{T}\,|_{Z(n)})^{-1}))}.$$

De lo cual, obtenemos

$$\frac{\tilde{f}''_{Z(n)}}{\tilde{f}'_{Z(n)}} = \frac{\frac{-\tilde{T}|''_{Z(n)}((\tilde{T}|_{Z(n)})^{-1})}{(\tilde{T}|'_{Z(n)}((\tilde{T}|_{Z(n)})^{-1}))^2\cdot(\tilde{T}|'_{Z(n)}((\tilde{T}|_{Z(n)})^{-1}))}}{\frac{1}{\tilde{T}|'_{Z(n)}((\tilde{T}|_{Z(n)})^{-1})}}$$

aplicando técnicas algebraicas y simplificando factores nos queda

$$\frac{\tilde{f}''_{Z(n)}}{\tilde{f}'_{Z(n)}} = -\frac{(\tilde{T}\,|''_{Z(n)}\,((\tilde{T}\,|_{Z(n)})^{-1}))}{(\tilde{T}\,|'_{Z(n)}\,((\tilde{T}\,|_{Z(n)})^{-1}))^2}$$

obteniendo que,

$$\frac{\tilde{f}''_{Z(n)}}{\tilde{f}'_{Z(n)}} = -\frac{\tilde{T}\,|''_{Z(n)}}{(\tilde{T}\,|'_{Z(n)})^2}\circ((\tilde{T}\,|_{Z(n)})^{-1})$$

por lo tanto,

$$\frac{\tilde{f}''_{Z(n)}}{\tilde{f}'_{Z(n)}} = -\frac{\tilde{T}\,|''_{Z(n)}}{(\tilde{T}\,|'_{Z(n)})^2}\circ(\tilde{f}\,|_{Z(n)}).$$

Así, $\left|\frac{\tilde{T}''}{(\tilde{T}')^2}\right|\circ\tilde{f}_{Z(n)} = \left|\frac{\tilde{f}''_{Z(n)}}{\tilde{f}'_{Z(n)}}\right|$ sobre $\tilde{T}(Z(n)) = T(Z(1))$.

Por otro lado, tenemos que

$$\sup_{Z(n)}\left|\frac{\tilde{T}''}{(\tilde{T}')^2}\right| = \sup_{\tilde{T}Z(n)}\left|\frac{\tilde{T}''}{(\tilde{T}')^2}\right|\circ\tilde{f}_{Z(n)} = \sup_{T(Z(1))}\left|\frac{\tilde{f}''_{Z(n)}}{\tilde{f}'_{Z(n)}}\right|.$$

Sea $A(T)$ una cota superior para $\frac{T''}{(T')^2}$. Como $\tilde{f}_{Z(n)} = f_Z^n$ sobre $TZ(1)$, tenemos además que

$$(f_Z^n)' = (f_Z)'((f_Z)^{n-1})\cdot(f_Z)'((f_Z)^{n-2})\cdot\ldots\cdot(f_Z)'(f_Z)\cdot(f_Z)'$$

luego aplicando logaritmo en ambos miembros,

$$\ln((f_Z^n)') = \ln((f_Z)'((f_Z)^{n-1})) + \ln((f_Z)'((f_Z)^{n-2})) + \ldots + \ln((f_Z)'(f_Z)) + \ln((f_Z)')$$

derivando nos queda,

$$\frac{(f_Z^n)''}{(f_Z^n)'} = \frac{f_Z''(f_Z^{n-1})}{f_Z'(f_Z^{n-1})} \cdot (f_Z^{n-1})' + \frac{f_Z''(f_Z^{n-2})}{f_Z'(f_Z^{n-2})} \cdot (f_Z^{n-2})' + \ldots + \frac{f_Z''(f_Z)}{f_Z'(f_Z)} \cdot (f_Z)' + \frac{f_Z''}{f_Z'} \cdot (1).$$

Luego, $\dfrac{(f_Z^n)''}{(f_Z^n)'} = \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{f_Z''(f_Z^j)}{f_Z'(f_Z^j)} \cdot (f_Z^j)'$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left|\frac{(f_Z^n)''}{(f_Z^n)'}\right| &= \sum_{j=0}^{n-1} \left|\frac{f_Z''(f_Z^j)}{f_Z'(f_Z^j)}\right| \cdot (f_Z^j)' \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} A(T) \cdot (f_Z^j)' \\ &= A(T) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (f_Z^j)'. \end{aligned}$$

Y ya que, $TZ(1)$ tiene distancia positiva desde $x_Z \in Z$, entonces $\sum_{j=0}^{n-1} (f_Z^j)'$ es acotado sobre $TZ(1)$, por la observación 3.3 del lema 3.8. Por lo tanto, aseguramos la existencia de la cota superior para $\left|\dfrac{(f_Z^n)''}{(f_Z^n)'}\right|$ independiente del n. Y así, $\tilde{T}$ es una función AFU. ■

Capítulo 4

Demostración del Teorema de Estructura Ergódica

En este capítulo procederemos a demostrar el teorema central de nuestro estudio, y con esto alcanzamos el objetivo propuesto el cual era dar una descripción de la estructura ergódica de transformaciones del intervalo del tipo no uniformemente expansoras.

Demostración del Teorema de Estructura Ergódica.

Parte 1. Aplicando el lema 3.4 para $S = \tilde{T}$ y denotaremos las componentes ergódicas asi obtenidas por $\tilde{X}_j$, $j \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Sea $\tilde{Y}_j := \cup_{k \geqslant 0} S^{-k} \tilde{X}_j$, estos conjuntos son invariantes y cubren a $[0, 1]$, excepto por un conjunto de medida de Lebesgue cero. En efecto,

$$\begin{aligned} S^{-1}(\tilde{Y}_j) &= S^{-1}(\cup_{k \geqslant 0} S^{-k} \tilde{X}_j) \\ &= (\cup_{k \geqslant 0} S^{-k-1} \tilde{X}_j) \\ &= (\cup_{k \geqslant 1} S^{-k} \tilde{X}_j) \\ &= \tilde{X}_j \cup (\cup_{k \geqslant 1} S^{-k} \tilde{X}_j) \\ &= \cup_{k \geqslant 0} S^{-k} \tilde{X}_j \\ &= \tilde{Y}_j \end{aligned}$$

siendo así $\tilde{Y}_j$ invariante por S. Por otro lado, del lema 3.4 tenemos que casi todo punto del conjunto $D := [0,1] \setminus \cup_j \tilde{X}_j$ es eventualmente mapeado en alguna componente ergódica, esto implica que casi todo punto $x \in [0,1]$ está contenido en algún $\tilde{Y}_j$ con $j \in \{1,2,3,\ldots,m\}$, en efecto, sabemos que existe un $N \geqslant 0$ tal que para cualquier $n \geqslant N$, $S^n x \in \tilde{X}_j$, luego $x \in S^{-n}\tilde{X}_j \subset \tilde{Y}_j$. Así, $\cup_j \tilde{Y}_j$ cubre casi todo $[0,1]$.

También tenemos que $\tilde{T}\mid_{\tilde{Y}_j}$ es ergódica, para cada $j \in \{1,2,\cdots,m\}$. Verifiquemos esto, sabemos que $\tilde{T}\mid_{\tilde{X}_j}$ y $\tilde{T} : \tilde{X}_j \longrightarrow \tilde{X}_j$, luego $\tilde{T}\mid_{\tilde{X}_j} = \tilde{T}_{\tilde{X}_j}$ (por la definición de la transformación inducida), y como $\tilde{Y}_j := \cup_{k \geqslant 0} S^{-k}\tilde{X}_j = \cup_{k \geqslant 0} \tilde{T}^{-k}\tilde{X}_j$, entonces por la proposición 1.6 tenemos que $\tilde{T}\mid_{\tilde{Y}_j}$es en efecto ergódica.

Por la parte 1 del lema 3.9, el intervalo $[0,1]$ se descompone en un número finito de conjuntos $T-$invariantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ cada uno de los cuales es la unión de algunos de los $\tilde{Y}_j$, de hecho consideraremos cada unión unitaria. Son finitos ya que la colección de $\{\tilde{Y}_j : j \in \{1,2,\ldots,m\}\}$ es finita. Por otro lado, también tenemos que $T\mid_{Y_i}$ es ergódica para $i \in \{1,2,\ldots,l\}$, en efecto, supongamos que $T\mid_{Y_i}$ no es ergódica, luego para cualquier conjunto A, $T\mid_{Y_i}$- invariante se tiene que este no tiene medida total ni medida nula, pero por el lema 3.9 tenemos que esos mismos conjuntos son $\tilde{T}\mid_{Y_i}$- invariante, por lo cual tenemos una contradicción ya que $\tilde{T}\mid_{Y_i}$ es ergódica, por lo tanto efectivamente $T\mid_{Y_i}$ es ergódica para $i \in \{1,2,\ldots,l\}$.

Sea ahora i fijo y tomemos $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ para la cual $\tilde{Y}_j \subseteq Y_i$. Desde ahora restringiremos nuestra atención a esas componentes fijas y omitiremos las índices i y j sin causar confusiones.

De acuerdo a la parte 3 del lema 3.9 obtenemos una medida $T-$invariante μ sobre Y a partir de $\tilde{\mu}$, donde $\tilde{\mu}$ es la medida de probabilidad $\tilde{T}-$invariante absolutamente continua sobre $\tilde{Y}$. En adelante identificaremos la densidad de μ por h, por medio de eso tenemos que $\mu \ll \lambda$. La medida μ es ergódica, en efecto, para cualquier $A \in \mathcal{B}$ y tal que $T^{-1}A = A$ entonces, $\lambda(A) = 0$ ó $\lambda(A^c) = 0$, pero como $\mu \ll \lambda$

$$\lambda(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$$

$$\lambda(A^c) = 0 \Longrightarrow \mu(A^c) = 0$$

Sea $X = X_i = \{h > 0\}$. Por la observación 3.2 aplicada sobre $T|_Y$ tenemos que $T(X) = X \pmod{\lambda}$ y casi todo punto de $D := Y\backslash X$ es eventualmente mapeado dentro de X por la segunda parte de la observación, y $T|_X$ es ergódica. Por el lema 3.6, $X = X_i = \{h > 0\}$ se puede expresar como una unión finita de intervalos abiertos disjuntos dos a dos. Esto es, $X = X_i = \hat{X}_i(1) \cup \hat{X}_i(2) \cup \cdots \cup \hat{X}_i(r(i))$.

Probemos ahora que $T|_X$ es conservativa. Sea $W \subset X$ conjunto errante cualquiera por T, esto es $\{T^{-n}W\}_{n=0}^{\infty}$ son disjuntos. Para cualquier $k \geqslant 0$, $T^{-k}W$ es errante. Por el lema 3.9 parte 2, esos conjuntos son también errantes por $\tilde{T}$. Por la construcción de μ, suponiendo que $\mu(W) > 0$, esto implica que $\tilde{\mu}(W) > 0$ para algún k, lo cual es imposible ya que $\tilde{T}$ es conservativa. Por lo tanto, $\mu(W) = 0$ para cualquier $W \subseteq X$ conjunto errante por T.

Parte 2.

Verifiquemos ahora que la $\sigma-$álgebra cola, es discreta. Asumamos que $A \in \mathcal{B}_\infty$, $A \subseteq \{h > 0\} = X$ con $\lambda(A) > 0$. Aplicamos el lema 3.3 para $S = \tilde{T}$, así obtenemos $k \geqslant 1$ y $\tilde{Z} \in \tilde{\xi}_k$ para la cual

$$\lambda(\tilde{T}^k(\tilde{Z} \cap A)) \geqslant \eta,$$

donde $\eta > 0$ no depende de A. Ahora $\tilde{T}^k|_{\tilde{Z}}$ es igual a la restricción de alguna potencia fija T^m de T a $\tilde{Z}$. Como $h \geqslant ctte > 0$ sobre X y $T^m A \subseteq X \pmod{\lambda}$, por la observación 3.2, concluimos que

$$\mu(T^m A) = \int_{T^m A} h d\lambda \geqslant ctte \cdot \int_{T^m A} d\lambda = ctte \cdot \mu(T^m A) \geqslant ctte \cdot \eta =: \eta' > 0.$$

Así que finalmente,

$$\mu(A) = \mu(T^{-m}T^m A) = \mu(T^m A) \geqslant \eta' > 0,$$

lo cual demuestra que $\mathcal{B}_\infty$ es discreto.

Esto a su vez implica el proceso de la estructura cíclica. Como tanto T y T^{-1} módulo μ preserva los átomos de $\mathcal{B}_\infty$ y T es conservativa. Como $TX = X$ (modλ), se tiene que $T(\cup_{k\in K}\hat{X}_i(k)) = \cup_{p\in K}\hat{X}_i(p)$ (inclusive, puede ser de un solo conjunto) con $K \subset \{1, 2, \cdots, r(i)\}$. Reordenando los indices tenemos que, $T(X_i(1)) = X_i(2)$, $T(X_i(2)) = X_i(3), \ldots, T(X_i(l(i) - 1)) = X_i(l(i))$ y $T(X_i(l(i))) = X_i(1)$.

Con esto terminamos la demostración de teorema de estructura ergódica.

Capítulo 5

Caracterización de funciones AFU

El capítulo a continuación tiene la finalidad de dar una caracterización adicional a las funciones AFU, las cuales en el desarrollo del capítulo 3 se le atribuyo una característica especifica, la cual no habia sido verificada, esta es el echo de que una función AFU cumpliera las condiciones del artículo [8], del autor M. Rychlik, el cual asegura que una función con ciertas propiedades admite una densidad invariantes de variación acotada, y el punto fundamental es que en el caso de las funciones AFU se cumplen dichas condiciones. Para enunciar la proposición que indica cuales son dichas propiedades necesitamos algunas definiciones previas.

Consideraremos una transformación T sobre un conjunto totalmente ordenado, un espacio X completo y ordenado para el cual existe alguna colección finita o numerable ξ de intervalos abiertos tal que $U := \cup_{Z\in\xi} Z$ es denso en X y $T\,|_Z \colon Z \longrightarrow TZ$ es un homeomorfismo con inversa f_Z para cada $Z \in \xi$. Asumimos que m es alguna medida de probabilidad sobre la $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de X con $m(U) = 1$, y que T sea no singular con respecto a m. (X, T, ξ, m) será entonces llamado un *sistema no singular monótono a trozos*. Sea $\omega_Z \in L_1(m)$, con $Z \in \xi$ determinado por $m(Z\cap T^{-1}B) = \int_B \omega_Z dm$ para $B \in \mathcal{B}$, sea $g := \sum_{Z\in\xi}(\omega_Z \circ T)\cdot 1_Z$, llamada la *función altura*, y decimos que el sistema es *uniformemente expansor* si $\|g\|_\infty < 1$.

Haremos una distinción entre las funciones genuinas sobre X (lo cual sera identificado con un asterisco, el cual será el representante de la clase) y sus casi-clases de equivalencias. Si A es un subintervalo de X, una *subdivisión* $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_r\}$ de A será un subconjunto ordenado finito. Para una función $f^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sea $V(f^*, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{r} \mid f^*(p_i) - f^*(p_{i-1}) \mid$, y define la *variación* de f^* sobre A como $V_A(f^*) := \sup\left\{V(f^*, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es una subdivisión de } A\right\}$. Si $V_A(f^*) < \infty$, entonces todos los límites uni-laterales de f^* existen. Frecuentemente se usara esto también en el caso en que $\sup_A f^* - \operatorname{ínf}_A f^* \leqslant V_A(f^*)$. Para una clase de equivalencia $f \in L_1(m)$, sea $\nu_A(f) := \operatorname{ínf}\{V_A(f^*) : f^* \text{ es una versión de } f\}$, y observe que este ínfimo es un factor conocido.

Si ξ es finito, se aplican las técnicas de variación acotada para producir los fuertes resultados del *Operador de Perron-Frobenius* $\mathbf{P}$ en cuanto $\nu_X(g) < \infty$ (equivalentemente $\sum_{Z\in\xi} \nu_Z(g) < \infty$). En [8] tales resultados son obtenidos en el caso de que ξ es numerable bajo la hipótesis de que g tiene una versión g^* con $V_X(g^*) < \infty$ el cual se anula sobre U^c. En este caso P_{g^*} es una versión de $\mathbf{P}$, donde definimos $P_{g^*}h^*(x) := \sum_{y\in T^{-1}\{x\}} g^*(y) \cdot h^*(y)$, $x \in X$. La propiedad $g^* \mid_{U^c} = 0$ permite colocar la cantidad finita de piezas de P_{g^*} juntas sin perder el control de la variación. Damos un criterio para la condición de Rychlik.

Proposición 5.1 *(Caracterizador de las funciones de Rychlik.) Un sistema* (X, T, ξ, m) *no singular, monótono par piezas y uniformemente expansor, la función altura* g *satisface la condición de Rychlik si y sólo si*

$$\sum_{Z\in\xi} \nu_Z(g) < \infty \qquad y \qquad \sum_{Z\in\xi} \frac{m(Z)}{m(TZ)} < \infty.$$

Demostración. Vea el apéndice 6 en [8].

Veamos ahora para nuestro contexto con las funciones AFU. La primera condición generaliza criterio único para ξ finito. Si $(X, m) = ([0,1], \lambda)$ y cada $T\mid_Z$ es dos veces diferenciable, esto es claramente satisfecho ya que T satisface la condición de Adler (A), por tanto, $g = \mid T' \mid^{-1}$, y así $\nu_Z(g) = \int_Z \mid g' \mid d\lambda = \int_Z \mid T''/(T')^2 \mid d\lambda$. La segunda condición es una condición de rango muy débil y es trivialmente satisfecha si por ejemplo, $\text{ínf}\{m(TZ) : Z \in \xi\} > 0$. De esta manera tenemos que:

Corolario 5.1 *Cualquier función AFU satisface las condiciones de Rychlik.*

Bibliografía

[1] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory.* Mathematical surveys and monographs. Vol.50. American Mathematical Society, 1997.

[2] R. Adler. *F-expansions revisited.*Lecture Notes in Math. 318, 1 - 5, 1975.

[3] R. Bowen. *Invariant measure for Markov maps of the interval.* Commun. Math. Phys. 69, 1 - 17, 1979.

[4] C. García. *Un teorema ergódico de segundo orden en sistemas que preservan medidas infinitas.* Trabajo de grado presentado para optar por en título de Magister Scientiarum - Manción Matemáticas. UCLA, 2009.

[5] C. Isnard. *Introdução à medida e integração.* IMPA. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2007.

[6] R. Mañé. *Introdução à Teoría Ergódica.* IMPA. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1986.

[7] A. Renyi. *Representations for real number and their ergodic properties.* Acta Math. Akad. Sci. Hungar. 8, 477 - 493, 1957.

[8] M. Rychlik. *Bounded variation and invariant measures.* Studia Math. 76, 69-80, 1983.

[9] F. Schweiger. *Numbertheoretical Endomorphisms with σ-finite invariant measure.* Israel Journal of Mathematics, Vol 21, nº 4, 308 - 318, 1975.

[10] M. Thaler. *Estimates of the invariant densities of endomorphisms wiyh indifferent fixed points.* Israel Journal of Mathematics, Vol 37, nº 4, 303 - 314, 1980.

[11] M. Thaler. *Transformations on [0, 1] with infinite invariant measure.* Israel Journal of Mathematics, Vol 46, 67 - 96, 1983.

[12] M. Viana. *Lecture notes on attractors and physical measure.* XII Escuela Latinoamericana de Matemáticas, Monografías del IMCA, 1999.

[13] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer. New York, 1982.

[14] R. Zweimüller. *Ergodic Structure and invariant densities of non-Markovian maps with indifferent fixed points.* Nonlinearity 11, 1263 - 1276, 1998.

[15] R. Zweimüller. *Ergodic properties of infinite measure preserving interval maps with indifferent fixed points.* Ergodic theory and dynamical systems. 20, 1519 - 1549, 1998.