



UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "*Lisandro Alvarado*"

DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UN MODELO AUTORREGRESIVO VECTORIAL
PARA LA MODELIZACIÓN DE
LA INFLACIÓN EN VENEZUELA

por

Br. Karla Andreína Carrero Vera

Director:

Prof. Abelardo Monsalve-Cobis

Barquisimeto, 2012

Un Modelo Autorregresivo Vectorial para la Modelización de la Inflación en Venezuela

Por

Karla Andreína Carrero Vera

*Proyecto presentado para el Trabajo Especial de Grado
enmarcado en el área de Probabilidad y Estadística, del
Programa de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas*

Decanato de Ciencias y Tecnología
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado",
Barquisimeto, Estado Lara, Venezuela.

Director: Prof. Abelardo Monsalve-Cobis

2014

Resumen

Un Modelo Autorregresivo Vectorial para la Modelización de la Inflación en Venezuela

Karla A. Carrero Vera

*Decanato de Ciencias y Tecnología
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado",
Barquisimeto, Estado Lara, Venezuela.*

2014

Una de las principales metas de los Bancos Centrales es la modelización de las series macroeconómicas motivado a la gran necesidad de predecir el comportamiento de las mismas en un futuro próximo.

En la economía financiera, disciplina que se encarga del estudio y caracterización de las series estadísticas en el contexto económico y financiero, la metodología VAR (modelos autorregresivos vectoriales) estructural se utiliza para caracterizar de manera óptima los desequilibrios de la economía de un estado.

Los vectores autorregresivos denotados por *VAR*, en sus siglas en inglés (Vectorial Autorregresive) son vistos como una estrategia econométrica en el análisis de series de tiempo, y resulta muy útil para describir y resumir datos macroeconómicos. Permite además, hacer pronósticos y cuantificar lo conocido y lo desconocido acerca de la verdadera estructura de la economía. Por otro lado, sugiere caminos a los tomadores de decisiones en materia de política económica con el objetivo de realizar pronósticos sobre un conjunto de variables.

La importancia de una modelización *VAR* también reside en el tipo de información que se obtiene del sistema de ecuaciones que se estima. Por ejemplo, a partir de las funciones impulso-respuesta se puede analizar el signo, la intensidad y la persistencia que cada una de las innovaciones estocásticas tienen sobre las variables asociadas al modelo.

En éste trabajo aplicaremos la metodología *VAR* a partir de la escogencia de un conjunto de series asociadas al fenómeno en estudio, en el que cada una de ellas actúa, dentro del sistema multivariado, como variable endógena y como variable explicativa. En este sentido, se generan en base al modelo estimado un conjunto de interacciones dinámicas de interés. El objetivo es, caracterizar la inflación a partir de series macroeconómicas (indicadores) que influyen en los desequilibrios de la economía, como lo son, el producto interno bruto y la tasa natural de desempleo.

Agradecimientos

Primeramente me gustaría agradecer a ti Dios por bendecirme para llegar hasta donde he llegado, porque hizo realidad este sueño anhelado.

A mis padres por haberme apoyado en todos los sentidos para poder estudiar la carrera lejos de mi casa, por su dedicación y entera confianza.

A la UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO por darme la oportunidad de estudiar y ser un profesional.

A mi director de tesis, Dr. Abelardo Monsalve por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en mí que pueda terminar mis estudios con éxito.

También me gustaría agradecer a mis profesores durante toda mi carrera profesional porque todos han aportado con un granito de arena a mi formación, y en especial a mis profes Profr. Mario Rodríguez. Dr. Nicolas Arias. Prof. Yurancy Ereú por sus consejos y su enseñanza.

De igual manera agradecer a mi co-tutor de Tesis de Grado, Dr. Pedro Harmath por su visión crítica en muchos aspectos, por su rectitud en su profesión como docente y por sus consejos, que ayudan a formarte como investigador.

A todos mis compañeros de estudio con quienes he compartido estos últimos años en especial a Ricardo Hernández por su valiosa colaboración, Evelyn Arenas, Génesis Sequera, Jesica Viscaya, Iliana Vargas, Lulimar Suarez y a Celismar Roa mis amigas.

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que me encantaría agradecerles su amistad, consejos, apoyo, ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar donde estén, quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado y por todas sus bendiciones.

Para ellos y a todos aquellos a quienes haya podido olvidar mil:

Gracias y que Dios los bendiga.

Índice general

Resumen	II
Agradecimientos	IV
Índice general	VI
1 Preliminares	1
1.1 Introducción	1
1.2 Estacionaridad de una serie de tiempo	2
1.3 Modelos Lineales de Series de Tiempo	4
1.3.1 Modelos AR	5
1.3.2 Modelos de promedios móviles (MA)	6
1.3.3 Modelos ARMA	6
1.3.4 Procesos Integrados	7
1.4 Test de raíz unitaria	8
1.5 Series de tiempo Multivariadas	10
1.5.1 Estacionariedad Débil	10
1.5.2 Matrices de correlación cruzada	11
1.5.3 Dependencia lineal	13
2 Modelos Autorregresivos Vectoriales	16
2.1 Modelo Autorregresivo Vectorial (VAR)	17
2.1.1 VAR Estructural	18
2.1.2 Condición De Estacionariedad y Momentos De Un VAR(1) . . .	19
2.1.3 El Modelo VAR(p)	20

2.1.4	Identificación de un VAR	22
2.1.5	Estimación	24
2.1.6	Pronóstico	24
2.1.7	Función de impulso respuesta	25
3	Análisis Empírico	27
3.1	DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES	28
3.1.1	Inflación	28
3.1.2	Producto Interno Bruto	29
3.1.3	Tasa de Desempleo	30
3.2	Información estadística	30
3.3	Análisis univariante de las series	31
3.3.1	Análisis univariante de la serie Inflación(INF)	31
3.3.2	Análisis univariante de la serie Producto Interno Bruto Real (PIB)	32
3.3.3	Análisis univariante de la serie Tasa de desempleo(TD)	33
3.3.4	Análisis univariante de la serie Precios de Realización del Pe- tróleo(PRP)	34
3.3.5	Análisis de Integración (pruebas ADF)	40
3.4	Estimación VAR Estandar	41
3.4.1	Especificación del modelo VAR(p)	41
3.4.2	Significación estadística del modelo estimado	42
3.4.3	Análisis multivariado de los residuos	43
3.4.4	Representación matricial del modelo estimado	47
3.4.5	Síntesis de las relaciones dinámicas obtenidas en el modelo VAR estándar	52
3.5	Estimación del model VAR Estructural	53
3.5.1	Resultados	54
3.5.2	Análisis de Impulso Respuesta en el sistema	55
3.5.3	Descomposición de la varianza	56
I	Apéndice	58
A	Nociones básicas de Cointegración	59

A.0.4 Cointegración	59
A.1 VAR Cointegrado	60
A.1.1 Test de cointegración	62
A.2 Estimación del modelo VECM	63
Bibliografía	65

1

Preliminares

1.1 Introducción

Un aspecto importante de las ciencias sociales, económicas, políticas, entre otras, es realizar pronósticos con un cierto grado de precisión. En la toma de decisiones, al menos implícitamente, se debe tener alguna idea del comportamiento futuro de ciertos fenómenos de interés.

Se pueden realizar pronósticos a partir de información cualitativa o cuantitativa, a este último tipo pertenecen las series de tiempo que se las puede definir como un conjunto de observaciones y_1, y_2, \dots, y_n de una variable en particular, registrada secuencialmente en el tiempo, ordenados cronológicamente y registradas ya sea de forma horaria, diaria, semanal, mensual, trimestral, semestral o anual. Esta información por lo general es bastante limitada y es a partir de ella que se pretende, mediante un modelo estadístico, conseguir previsiones con un grado de incertidumbre controlable. Por este motivo es importante usar métodos de pronósticos que tengan en cuenta todas las fuentes de información disponibles.

De esta manera, contamos con un nuevo tipo de inferencia estadística que se hace acerca del futuro de alguna variable (series de tiempo univariadas) o compuesto de variables que estén relacionadas, en cuyo caso, puede ser beneficioso utilizar modelos de varias variables (series de tiempo multivariadas).

Son innumerables las aplicaciones que se pueden citar en distintas áreas del conocimiento. En estadística, son un tema de amplio interés con diversas aplicaciones prácticas. Dentro del marco económico, las series de tiempo han adquirido una importancia relevante como herramienta para el estudio de la economía de los países y regiones, aplicándose igualmente el análisis de la actividad empresarial o de las ramas de la industria.

El campo de la economía donde estamos continuamente expuestos a diario a cotizaciones bursátiles o a las cifras mensuales de desempleo, entre muchos otros indicadores, es una fuente inagotable de series de tiempo. Son muchas las variables que se presentan usualmente como series de tiempo en macroeconomía. Podemos citar como ejemplos de series de tiempo al producto nacional (interior) bruto, a la tasa de desocupación (desempleo), etc.

El objetivo de este capítulo es discutir las teorías básicas del análisis de series de tiempo. Para ello destacaremos los conceptos de estacionaridad, introduciremos algunos modelos econométricos simples para el análisis de una variable e introduciremos las principales características que se definen a partir de series de tiempo multivariadas. Es importante resaltar que este capítulo no abunda en detalles teóricos, los conceptos desarrollados a través de este trabajo serán tratados de manera breve, es decir, sin profundizar en las teorías económicas subyacentes, pero haciendo énfasis en aquellos que consideremos relevantes para las aplicaciones financieras.

1.2 Estacionaridad de una serie de tiempo

Para algunos autores tales como Box y Jenkins (1976), esta propiedad supone requerir al proceso un estado particular de "equilibrio estadístico". La base del análisis de series de tiempo es la estacionaridad, por ello es importante formalizar dicho concepto.

Estacionariedad estricta

Una serie de tiempo $y_t = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ se denomina estrictamente estacionaria, si su distribución conjunta de probabilidad es idéntica a la distribución de $y_t = (y_{1+h}, y_{2+h}, \dots, y_{k+h})$, donde h es una variación arbitraria en el eje del tiempo. En otras palabras, la estacionariedad estricta implica invariancia de la distribución de probabilidad ante valores igualmente separados.

La definición estricta es demasiado rigurosa como para que realmente pueda comprobarse en la práctica. Además, no siempre se podrá establecer con precisión por completo, la estructura de la distribución de probabilidad, por lo que con frecuencia, suele considerarse una versión de estacionariedad más débil. Dicha versión conocida con el nombre de estacionariedad de segundo orden o débil.

Estacionariedad Débil

Una serie de tiempo $y_t = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, se define como estacionaria en el sentido débil, cuando $E(y_t^2) < \infty$ para cada t , y

- $E(y_t) = \mu_y$, independiente de t ,
- $Cov(y_t, y_{t-s}) = \gamma_s$, la cual es independiente de t para cada s .

En otras palabras, una serie de tiempo es débilmente estacionaria cuando los momentos de primer y segundo orden de dicho proceso son invariantes en el tiempo, sin importar el instante el cual se midan. Esta propiedad implica que en el gráfico de la serie de datos, estos deberían fluctuar respecto de la variable índice, en este caso el tiempo, con variaciones constantes alrededor de un valor fijo. Por lo tanto, cualquier shock que sufra dicho proceso en cualquier momento de tiempo, no tendrá efectos permanentes y solo se alejará temporalmente de su equilibrio.

Que una serie no sea estacionario en media, quiere decir que la esperanza matemática de la variable del proceso cambia con el tiempo, y por lo tanto habría que estimar un número infinito de parámetros, lo mismo ocurriría con la varianza. Esta es una de las razones importantes para pretender que una serie de datos con el que se va a efectuar el trabajo empírico sea estacionaria.

1.3 Modelos Lineales de Series de Tiempo

Durante el desarrollo de la econometría, se han desarrollado diferentes métodos que buscarán dotar a los investigadores de herramientas para poder realizar estimaciones acerca de los valores de futuros de las variables bajo análisis.

A finales de la década de los setenta, Box y Jenkins desarrollaron una nueva técnica de predicción denominada *modelos lineales de series de tiempo*. Estos modelos explican la evolución presente y futura de una variable, capturando la relación lineal entre el valor en un instante dado denotado por y_t y la información disponible hasta el instante t , utilizando exclusivamente el comportamiento histórico de la variable en cuestión. Estos modelos antes de tratar de realizar un análisis económico, se concentra en las propiedades probabilísticas de las series de tiempo.

Estos modelos proporcionan un enfoque natural que permite analizar la dinámica de series de tiempo financieras, y la información disponible hasta el instante t . Dicha información puede contener los valores históricos del activo y un conjunto de variables que describen el entorno económico en el cual se determina el precio del activo en cuestión.

Antes de describir cada uno de los modelos es necesario explicar el comportamiento del elemento básico de los modelos de series de tiempo: El ruido blanco.

Una serie de tiempo $\{\varepsilon_t\}$ es llamada ruido blanco, denotado como $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, si

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma^2, \quad y \quad Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0, \quad \forall s > 0.$$

siendo WN las siglas en ingles de ruido blanco.

El ruido blanco se define por las propiedades de sus dos primeros momentos solamente. Sirve como un componente básico en la definición de procesos de series de tiempo lineales más complejos y refleja la información que no es directamente observable. Por esta razón, en la literatura de series de tiempo se le llama a menudo, proceso de innovación.

1.3.1 Modelos AR

Un modelo autorregresivo de orden p , denotado comúnmente por $AR(p)$, es definido como

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1.1)$$

donde p es un entero positivo y ε_t es un proceso de ruido blanco. Si la serie y_t es generada por este modelo, se dice que la serie es un proceso $AR(p)$.

Este tipo de modelo se basa en la relación lineal del proceso con su propio pasado. En la literatura del análisis de series de tiempo, una parte de las series de tiempo económicas y financieras suelen ser caracterizadas por los modelos autorregresivos, en particular, por aquellos cuyo valor pasado inmediato (y_{t-1}), es estadísticamente significativo en la predicción de y_t , es decir, por un $AR(1)$. Entre los principales ejemplos de las finanzas que tenemos son: la valoración de precios y de dividendos, las tasas reales de cambio, tasas de interés y los diferenciales de tipos de interés.

A continuación, se introduce el operador de retardos z , con el propósito de establecer una notación simplificada del modelo $VAR(p)$. El operador z actúa de la siguiente manera

$$zy_t \equiv y_{t-1}, \quad \text{en general} \quad z^p y_t \equiv y_{t-p}.$$

Esto permite escribir los modelos autorregresivos de una manera concisa. Usando esta notación, el modelo $AR(p)$ se puede escribir bien en su forma reducida

$$\phi_p(z)y_t = \varepsilon_t,$$

donde

$$\phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p,$$

el cual recibe el nombre de Polinomio Característico.

Una de las propiedades más importantes de una serie de tiempo es la estacionariedad. Para que un proceso $AR(p)$ sea estacionario, la condición necesaria y suficiente, es que las raíces del polinomio característico estén fuera del círculo unitario.

1.3.2 Modelos de promedios móviles (MA)

Un proceso de media móvil de orden q denotado por $MA(q)$, es definido como sigue

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (1.2)$$

donde ε_t es un ruido blanco.

Los modelos MA siempre son débilmente estacionarios, puesto que se definen como una combinación lineal de una sucesión de ruido blanco, donde los primeros dos momentos son invariantes respecto del tiempo.

Usando el operador de retardos, el modelo $MA(q)$ se puede escribir como:

$$y_t = (1 - \theta_1 z - \cdots - \theta_q z^q) \varepsilon_t = \theta_q(z) \varepsilon_t,$$

siendo $\theta_q(z)$ el polinomio característico.

Condición de invertibilidad

Otra de las propiedades deseables de una serie de tiempo es la invertibilidad. Un proceso $\{y_t\}$ se dice que es invertible si es posible reconstruir el valor de la innovación ε_t únicamente a partir de observaciones pasadas de y_t . La condición necesaria y suficiente para que el proceso $MA(q)$ sea invertible es que las raíces del polinomio característico $\theta_q(z)$ estén fuera del círculo unitario. La importancia de la invertibilidad de un proceso MA radica en que para hacer predicciones, es necesario contar con una estructura autorregresiva.

1.3.3 Modelos ARMA

No es frecuente encontrar modelos que sean puramente AR o MA. Muchas series presentan ambas estructuras. Este tipo de modelos que expresan las variaciones de una serie temporal como una función términos autorregresivos (valores pasados de la variable) y términos de medias móviles (errores contemporáneos y pasados), son conocidos con el nombre de *proceso autorregresivo de medias móviles* y denotado por ARMA y se definen de la siguiente manera:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (1.3)$$

donde ε_t es un proceso de ruido blanco, p, q son enteros positivos, (p, q) es llamado el orden del modelo.

Este es el enfoque clásico del modelado de series de tiempo y está basado en el hecho de un modelo general para cualquier serie estacionaria no determinística.

Usando el operador de retardos el modelo puede ser escrito como

$$\phi_p(z)y_t = \theta_q(z)\varepsilon_t,$$

donde

$\phi_p(z) = 1 - \phi_1z - \phi_2z^2 - \dots - \phi_pz^p$ y $\theta_q(z) = 1 - \theta_1z + \theta_2z^2 + \dots + \theta_qz^q$ son los polinomios característicos de la parte autorregresiva y de la parte de media móvil, respectivamente.

1.3.4 Procesos Integrados

La mayor parte de las series de tiempo, en particular las series de tiempo económicas son ciertamente no estacionarias, en particular, tienden a presentar variaciones en sus niveles respecto del tiempo. En otras palabras, presentan una tendencia creciente a lo largo del tiempo (tendencia determinística) o una clara inclinación a permanecer durante largos periodos por encima o por debajo de su media (tendencia estocástica). Esta última se debe al problema de raíces unitarias.

La falta de consideración de estos dos fenómenos, puede llevar al investigador a caer en errores tanto en las propiedades de los estimadores como en el proceso de inferencia, y en el peligro de aceptar relaciones de tipo espúreas. Es por ello que se le debe aplicar algunas transformaciones a la serie para volverla estacionaria. Una de las soluciones más simples y de mayor difusión, consiste en tomar la primera diferencia, obteniéndose entonces

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}.$$

Si este cambio en la serie tiene una representación estacionaria, diremos que $\{y_t\}$ es un proceso integrado de orden uno y se denota $\{y_t\} \sim I(1)$, ya que tuvo que ser diferenciada una vez para volverla estacionaria.

Un caso particular de series no-estacionarios, conocido ampliamente en el análisis de series de tiempo, es el paseo aleatorio

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde ε_t es una serie de tiempo estacionaria. Claramente, la primera diferencia de $\{y_t\}$ es estacionaria

$$\Delta y_t = \varepsilon_t.$$

Generalizando, diremos que un proceso es integrado de orden $d > 0$ y lo representaremos por $\{y_t\} \sim I(1)$, cuando al diferenciar d veces se obtiene un proceso estacionario. En la práctica, la mayoría de las series no estacionarias son de orden $d \leq 3$.

1.4 Test de raíz unitaria

Un asunto muy importante es saber si la serie presenta raíces unitarias. Para esto contamos con algunas pruebas estadísticas que permiten verificar el orden de integración de una serie temporal a través de la posible existencia de raíces unitarias. En este trabajo presentaremos las pruebas de Dickey - Fuller GLS(ERS) y el Dicky Fuller Aumentado (ADF).

Los test para comprobar la presencia de raíces unitarias parten de la hipótesis nula de un proceso AR(1) que contiene una raíz característica igual a 1. De este modo se verifica que el parámetro ϕ_1 de una autorregresión del tipo:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

sea igual a uno ($H_0 : \phi_1 = 1$) contra la hipótesis alternativa $H_o : \phi_1 < 1$.

Se trata del bien conocido problemas de encontrar raíces unitarias. Una estadística de prueba conveniente es la prueba t de la estimación por mínimos cuadrados de ϕ_1 , bajo la hipótesis nula . Para la ecuación uno, el método por mínimos cuadrados está dado por

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{i=1}^T p_{t-1} p_t}{\sum_{i=1}^T p_{t-1}^2}, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^T (p_t - \hat{\phi}_1 p_{t-1})^2}{T-1},$$

donde $p_0 = 0$ y T es el tamaño de la muestra. La relación t es

$$DF \equiv t_{ratio} = \frac{\hat{\phi}_1}{std(\hat{\phi}_1)} = \frac{\sum_{i=1}^T p_{t-1} \varepsilon}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^T p_{t-1}^2}},$$

que se conoce comúnmente como la prueba de Dickey -Fuller (DF).

Para muchas series de tiempo financieras, los modelos ARIMA(p,d,q) pueden ser más apropiados. Sin embargo, en la literatura econométrica, los modelos AR(p) son usados a menudo. Denotando la serie por y_t , para verificar la existencia de raíz unitaria en un proceso AR(p), uno puede realizar el siguiente test $H_0 : \beta = 1$ vs. $H_a : \beta < 1$ usando la regresión

$$y_t = c_t + \beta y_{t-1} + \sum_{i=1}^n \phi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1.4)$$

donde c_t es una función determinística en el tiempo t y, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ es la serie diferenciada de y_t . En la práctica, c_t puede ser cero, o una constante $c_t = \omega_0 + \omega_1 t$.

La razón t de $\hat{\beta} - 1$,

$$ADF - test = \frac{\hat{\beta} - 1}{std(\hat{\beta})},$$

donde $\hat{\beta}$ denota la estimación por mínimos cuadrados de β , es el bien conocido test de raíz unitaria de Dicky Fuller Aumentado. Tengamos en cuenta que debido a la primera diferenciación, la regresión anterior es equivalente a un modelo AR(p) con función determinística c_t , además, puede ser escrita como

$$\Delta y_t = c_t + \beta_c \Delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^n \phi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1.5)$$

donde $\beta_c = \beta - 1$. Uno puede contrastar la hipótesis equivalente $H_0 : \beta_c = 0$ contra la hipótesis alternativa $H_a : \beta_c < 0$.

Al contrastar la posible existencia de una raíz unitaria, se debe escoger uno de los modelos como representación más adecuada de la variable en estudio, tal selección

se hace tras un examen de la serie temporal correspondiente, que nos sugiera si hay evidencia de una posible tendencia, etc.

La decisión se basa en la siguiente regla, si el valor observado del estadístico de contraste t-student excede a los valores críticos de la tabla de Dickey-Fuller, se concluye que la serie posee al menos una raíz unitaria y por lo tanto no es estacionaria, por el contrario si el valor observado del estadístico es menor a los de la tabla, se dice que la serie no posee ninguna raíz unitaria y por lo tanto es estacionaria.

1.5 Series de tiempo Multivariadas

Las series de tiempo de muchos ejemplos empíricos, consisten en las observaciones a través del tiempo de varias variables que están relacionadas. Tal es el caso de los mercados financieros, que en la actualidad, son más dependientes entre sí que nunca y hay que considerarlos conjuntamente para entender mejor la estructura dinámica de las finanzas globales. Por ejemplo, el estudio de las series de producto bruto y demanda global (suma de consumo, inversiones y exportaciones). Cuando interesa describir las relaciones entre variables de varias series de tiempo, se deben introducir modelos de series de tiempo multivariadas, pues estos reflejan la importancia de "la influencia de otras variables observables que se conoce o se sospecha que están relacionados con la variable de interés" (Kling y Bessler, 1985).

En primer lugar introduciremos las principales características que se definen a partir de series de tiempo multivariadas, pero antes, debemos definir lo que es una serie temporal multivariada.

Una serie temporal multivariada se compone de varias series de tiempo denominadas componentes. Diremos que una serie multivariada $\{\mathbf{y}_t\}$ es de dimensión k , si $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{kt})'$, donde y_{it} es una serie temporal univariada para cada $i = 1, \dots, k$.

1.5.1 Estacionariedad Débil

Consideremos una serie de tiempo de dimensión k , esto es $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{kt})'$. Esta es estacionaria si su primer y segundo momento son invariantes en el tiempo.

En particular, el vector media y la matriz de covarianza de una serie multivariada débilmente estacionaria, son constantes a lo largo tiempo.

Para una serie estacionaria multivariada \mathbf{y}_t , se define el vector media y la matriz de covarianzas como

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{y}_t), \quad \boldsymbol{\Gamma}_0 = E[(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})'], \quad (1.6)$$

donde la expectativa se toma elemento por elemento de la distribución conjunta de \mathbf{y}_t . La media $\boldsymbol{\mu}$ es un vector de dimensión k que consiste en las expectativas no condicionales de las componentes de \mathbf{y}_t . La matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Gamma}_0$ es una matriz de orden $k \times k$. Escribiremos $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)'$ y $\boldsymbol{\Gamma}_0 = [\Gamma_{ij}(0)]$ cuando necesitemos sus elementos. Así que los elementos de $\boldsymbol{\Gamma}_0$ en la diagonal y fuera de la diagonal estará dados por

$$\Gamma_{ii}(0) = \text{var}(y_{it}) \quad \text{y} \quad \Gamma_{ij}(0) = \text{Cov}(y_{it}, y_{jt}).$$

1.5.2 Matrices de correlación cruzada

Sea \mathbf{D} una matriz diagonal de orden $k \times k$ formada por las desviaciones estándares de y_{it} para $i = 1, 2, \dots, k$. En otras palabras, $D_{ii} = \sqrt{\Gamma_{ii}(0)}$ y $D_{ij}(0) = 0$ para cada $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Se define la matriz de correlación cruzada del retardo $l = 0$ de $\{\mathbf{y}_t\}$ como

$$\boldsymbol{\rho}_0 \equiv [\rho_{ij}(0)] = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_0 \mathbf{D}^{-1}. \quad (1.7)$$

Para ser mas específicos, el elemento ij -ésimo de $\boldsymbol{\rho}_0$ es

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{\text{Cov}(y_{it}, y_{jt})}{\text{std}(y_{ii})\text{std}(y_{jj})},$$

el cual es el coeficiente de correlación entre y_{it} y y_{jt}

En el análisis de series de tiempo multivariante, el coeficiente de correlación es conocido como un coeficiente de correlación concurrente o contemporáneo debido a que es la correlación entre dos series en el tiempo t . Es fácil ver que

- $\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0)$

- $|\rho_{ij}(0)| < 1$
- $\rho_{ii}(0) = 1$

De esta manera, $\rho(0)$ es una matriz simétrica con unos en la diagonal.

Ahora bien, un tema importante en el análisis multivariante de series de tiempo son las relaciones principales entre los retardos de las series componentes. Para este fin, las matrices de correlación cruzada son usadas para medir la fuerza de la dependencia lineal entre las series de tiempo.

Se define la matriz covarianza cruzada para el retardo l como

$$\Gamma_l \equiv [\Gamma_{ij}(l)] = E[(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_{t-l} - \boldsymbol{\mu})'], \quad (1.8)$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es el vector media de \mathbf{y}_t . El elemento ij -ésimo de Γ_l es la covarianza entre \mathbf{y}_{it} y $\mathbf{y}_{j,t-l}$, esto es

$$\Gamma_{ij}(l) = Cov(y_{it}, y_{j,t-l})$$

Para una serie de tiempo débilmente estacionaria, la matriz covarianza cruzada para el retardo l es una función del retardo l y no del tiempo t .

Consideremos nuevamente a la matriz diagonal D que consiste en las desviaciones estándares de las series individuales y_{it} . A continuación, se define la matriz de correlación cruzada para el correspondiente retardo l como

$$\boldsymbol{\rho}_l \equiv [\rho_{ij}(l)] = \mathbf{D}^{-1} \Gamma_l \mathbf{D}^{-1}. \quad (1.9)$$

Así, por la definición, el elemento ij de ρ_k esta dado por

$$\rho_{ij}(l) = \frac{\Gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} \quad (1.10)$$

el cual es el coeficiente de correlación entre y_{it} y $y_{j,t-l}$. Cuando $l > 0$, este coeficiente mide la dependencia lineal entre y_{it} y $y_{j,t-l}$ que se produjo antes del tiempo t . En consecuencia, si $\rho_{ij}(k) \neq 0$ y $l > 0$, diremos que la serie y_{it} no depende linealmente de $y_{j,t-l}$. Podemos notar de la ecuación anterior que el elemento de la diagonal $\rho_{ii}(l)$ es simplemente el coeficiente de autocorrelación de y_{it} .

Basándonos en esta discusión, podemos obtener algunas propiedades de la matriz de correlación cruzada cuando $l > 0$. Primero, en general, $\rho_{ij}(k) \neq \rho_{ji}(k)$ pues los dos coeficientes de correlación miden distintas relaciones lineales entre y_{it} y y_{jt} . De esta manera, Γ_l y ρ_l en general, no son simétricas.

1.5.3 Dependencia lineal

Considerando conjuntamente las matrices de correlaciones cruzadas $\{\rho_l | l = 0, 1, 2, \dots\}$ de un vector de series de tiempo débilmente estacionario, contienen la siguiente información

- Los elementos en la diagonal $\{\rho_{ii}(l) | l = 0, 1, 2, \dots\}$ son la función de autocorrelación de y_{it}
- Los elementos fuera de la diagonal $\rho_{ij}(0)$ miden la relación lineal concurrente entre y_{it} y y_{jt} .
- Para $l > 0$, el elemento fuera de la diagonal $\rho_{ij}(l)$ mide la dependencia lineal de y_{it} en el valor pasado $y_{j,t-l}$

De esta manera, si $\rho_{ij}(l) = 0 \forall l > 0$, entonces y_{it} no depende linealmente de ningún valor pasado $y_{j,t-l}$ de la serie y_{jt}

En general, las relaciones lineales entre dos series y_{it} y y_{jt} se pueden resumir de la manera siguiente:

- y_{it} y y_{jt} no están relacionadas linealmente si $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(l) = 0$ para cada $l \geq 0$
- y_{it} y y_{jt} están relacionadas concurrentemente si $\rho_{ij}(0) \neq 0$
- No hay relación entre los retardos de y_{it} y y_{jt} si $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(l) = 0 \forall l > 0$. En este caso, diremos que las dos series están desacopladas.
- Existe una relación en una dirección de y_{it} a y_{jt} si $\rho_{ij}(l) = 0 \forall l > 0$ pero $\rho_{ij}(r) \neq 0$ para algún $r > 0$. En este caso y_{it} no depende de ningún valor pasado de y_{jt} pero y_{jt} depende de algún valor pasado de y_{it} .

- Existe una relación de retroalimentación entre y_{it} y y_{jt} si $\rho_{ij}(l) \neq 0$ para algún $l > 0$ y $\rho_{ij}(r) \neq 0$ para algún $r > 0$.

Las condiciones mencionadas anteriormente son condiciones suficientes. Un enfoque más informativo para estudiar la relación entre la serie de tiempo es la construcción de un modelo multivariado para la serie porque un modelo especificado correctamente considera simultáneamente las series y las correlaciones cruzadas entre las series.

Matrices de correlaciones cruzadas muestral

Dada una serie de tiempo $\{\mathbf{y}_t\}_1^T$ la matriz de covarianzas cruzada Γ puede ser estimada por:

$$\hat{\Gamma}_l = \frac{1}{T} \sum_{t=l+1}^T (\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_{t-l} - \bar{\mathbf{y}}), \quad l \geq 0, \quad (1.11)$$

donde $\bar{\mathbf{y}}$ es el vector de medias muestral. La matriz de correlación cruzada ρ_l es estimada por

$$\hat{\rho}_l = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\Gamma}_l \hat{\mathbf{D}}^{-1}, \quad l \geq 0, \quad (1.12)$$

donde $\hat{\mathbf{D}}$ es la matriz diagonal de orden $k \times k$ de las desviaciones estándar de la muestra de las series componentes.

La experiencia empírica indica que es bastante difícil absorber muchas correlaciones cuando la dimensión k es mayor que tres. Es por que se usa la matriz de correlación cruzada simplificada definida por Tiao y Box (1981), la cual consiste de tres símbolos "+", "-z", donde cada uno significa lo siguiente:

1. El signo (+) significa que el coeficiente de correlación correspondiente es mayor o igual a $2/\sqrt{T}$.
2. El signo (-) significa que el coeficiente de correlación correspondiente es menor o igual a $-2/\sqrt{T}$.
3. El signo (.) significa que el coeficiente de correlación correspondiente esta entre $2/\sqrt{T}$ y $-2/\sqrt{T}$.

Siendo $\frac{1}{\sqrt{T}}$ el valor crítico al 5% de la corrección muestral bajo la asunción que y_t es un ruido blanco.

Test de Portmanteau Multivariante

Para una serie de tiempo multivariante, el estadístico utilizado para probar que no hay autocorrelación ni correlaciones cruzadas en el vector de la serie y_t es el estadístico de Portmanteau. La hipótesis nula es $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_k = \mathbf{0}$, y la hipótesis alternativa es $H_a : \rho_i \neq \mathbf{0}$ para algún $i = 1, \dots, k$.

La prueba estadística asume la forma

$$Q_k(m) = T^2 \sum_{l=1}^m \frac{1}{T-l} \text{tr}(\hat{\Gamma}_l' \hat{\Gamma}_0^{-1} \hat{\Gamma}_l \hat{\Gamma}_0^{-1}) \quad (1.13)$$

donde T es el tamaño de la muestra, k es la dimensión de y_t y $\text{tr}(\mathbf{A})$ es la traza de la matriz \mathbf{A} , que es la suma de los elementos de la diagonal de \mathbf{A} .

2

Modelos Autorregresivos Vectoriales

En la práctica con datos reales, a veces es necesario predecir varias series de manera "conjunta". A la hora de realizar dichas predicciones, podemos encontrarnos con que entre ellas existan relaciones mutuas de interdependencia. Una de las posibilidades es afrontarlo con modelos de ecuaciones simultáneas, cuyo enfoque es estimar un sistema de ecuaciones que refleje las relaciones de interdependencia o causalidad que pueden darse entre las variables, bien sean las que serán objeto de predicción u otras relacionadas con aquellas, pero esta opción tiene algunas dificultades. Una de estas es la de la necesidad de distinguir entre variables endógenas y variables predeterminadas. Esta distinción tiene una cierta base en la dirección de la causalidad de las variables y está inspirada en las relaciones sugeridas por la teoría económica. Lo que ocurre es que la teoría económica no siempre sugiere una especificación concreta entre variables. Además, poco nos dice de la relación dinámica de las mismas, como cuando el tiempo interviene en las ecuaciones o al incluir variables con retardos o desfasadas. Más aún, la estimación e inferencia se complica con el hecho de que las variables explicadas pueden aparecer tanto a la izquierda como a la derecha de las ecuaciones, es decir, pueden también intervenir como variables

explicativas. Además, estos modelos para ser correctamente estimados, deben superar una serie de condiciones conocidas como de identificación, que suponen en la práctica, que algunas de las variables predeterminadas no intervienen en todas las ecuaciones.

Estos inconvenientes conducen a otras alternativas en la modelización de la relación entre varias variables. Uno de estos nuevos enfoques son *los modelos autorregresivos vectoriales* VAR propuestos por Sims(1980). El objetivo fundamental de la propuesta era proporcionar una estrategia alternativa de modelización a los modelos convencionales econométricos. Esta nueva modelización permitiría especificar modelos que reflejaran, lo más fielmente posible, las regularidades empíricas e interacciones entre las variables objeto de análisis. Así nacen los modelos VAR.

La esencia de los modelos VAR es la siguiente: se propone un sistema de ecuaciones, con tantas ecuaciones como series a analizar o predecir, pero en el que no se distingue entre variables endógenas y exógenas. Así, cada variable es explicada por los retardos de sí misma (como en un modelo AR) y por los retardos de las demás variables. Se configura entonces un sistema de ecuaciones autorregresivas también llamado vector autorregresivo (VAR)

2.1 Modelo Autorregresivo Vectorial (VAR)

Sea $\mathbf{y}_t = (y_1, y_2, \dots, y_k)'$, el cual denota un vector de dimensión k de variables de series de tiempo. El modelo vectorial autorregresivo con p -retardos VAR(p) tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{y}_t = \phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (2.1)$$

donde ϕ_0 es una matriz de orden $k \times 1$, Φ_i son las matrices coeficientes $k \times k$ y ε_t es un vector de perturbaciones aleatorias (una por ecuación), cada una de las cuales cumple individualmente el supuesto de ruido blanco con matriz de covarianza Σ , la cual es de orden $k \times k$. En la aplicación, se requiere que la matriz Σ sea definida positiva; en otro caso, la dimensión de \mathbf{y}_t puede ser reducida. En la literatura, se asume a menudo que ε_t es una normal multivariada.

A manera de ejemplo, consideremos el caso en el que intervienen tres variables explicadas en función de un solo retardo, así que $k = 3$, $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})'$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t})$. El modelo VAR(1) desarrollado ecuación por ecuación es :

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \phi_{10} + \Phi_{11}y_{1t-1} + \Phi_{12}y_{2t-1} + \Phi_{13}y_{3t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} &= \phi_{20} + \Phi_{21}y_{1t-1} + \Phi_{22}y_{2t-1} + \Phi_{23}y_{3t-1} + \varepsilon_{2t} \\ y_{3t} &= \phi_{30} + \Phi_{31}y_{1t-1} + \Phi_{32}y_{2t-1} + \Phi_{33}y_{3t-1} + \varepsilon_{3t} \end{aligned}$$

donde Φ_{ij} es el ij -ésimo elemento de Φ_1 y ϕ_{i0} el i -ésimo elemento de ϕ_0 .

Así, en un modelo vectorial autorregresivo de primer orden, un VAR(1), las variables explicativas de cada ecuación son: una constante, más un retardo de cada una de las variables del modelo.

Basándonos en la primera ecuación, Φ_{12} denota la dependencia lineal de \mathbf{y}_{1t} en $\mathbf{y}_{2,t-1}$ en presencia de $\mathbf{y}_{1,t-1}$. Esto es que Φ_{12} es el efecto condicional de $\mathbf{y}_{2,t-1}$ en \mathbf{y}_{1t} dado $\mathbf{y}_{1,t-1}$

Si $\Phi_{12} = 0$, entonces \mathbf{y}_{1t} no depende de $\mathbf{y}_{2,t-1}$. Si a demás, $\Phi_{13} = 0$, el modelo muestra que \mathbf{y}_{1t} solo depende de su propio pasado. Similarmente, si $\Phi_{21} \neq 0$, entonces la segunda ecuación muestra que \mathbf{y}_{2t} no depende de $\mathbf{y}_{1,t-1}$ cuando $\mathbf{y}_{2,t-1}$ es dado.

Considerando la primera y tercera ecuación conjuntamente. Si $\Phi_{13} = 0$ y $\Phi_{31} \neq 0$, entonces existe una relación unidireccional de \mathbf{y}_{1t} a \mathbf{y}_{3t} . Si $\Phi_{13} = 0$ y $\Phi_{31} = 0$, entonces \mathbf{y}_{1t} y \mathbf{y}_{3t} están desacopladas. Si $\Phi_{13} \neq 0$ y $\Phi_{31} \neq 0$, entonces existe hay una relación de retroalimentación entre las dos series.

2.1.1 VAR Estructural

En general, las matrices coeficientes Φ_i de la ecuación 2.1 miden la dependencia dinámica de \mathbf{y}_t . La relación concurrente entre \mathbf{y}_{1t} y \mathbf{y}_{2t} es mostrada por el elemento fuera de la diagonal σ_{12} de la matriz de covarianza Σ de $\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Si $\sigma_{12} = 0$, entonces no hay relación lineal concurrente entre las dos series componentes. En la literatura econométrica, el modelo VAR de la ecuación 2.1, es llamado modelo de forma reducida porque este no muestra explícitamente la dependencia concurrente entre las

series componentes. Una expresión explícita que envuelva las relaciones concurrentes puede ser deducida para el modelo de forma reducida a través de una simple transformación lineal.

Un modelo VAR Estructural está definido como

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_t = \phi_0^* + \Phi_1^*\mathbf{y}_{t-1} + \Phi_2^*\mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \Phi_p^*\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{B}\xi_t. \quad (2.2)$$

Asumimos que ξ_t son los errores del estructural y que son un ruido blanco, además las matrices $\Phi_i^* = \mathbf{A}\Phi_i$ son las matrices coeficientes del SVAR. Premultiplicando la ecuación anterior por la inversa de \mathbf{A} :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}^{-1}\phi_0 + \mathbf{A}^{-1}\Phi_1^*\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}^{-1}\Phi_2^*\mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \mathbf{A}^{-1}\Phi_p^*\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\xi_t. \quad (2.3)$$

A su vez, podían estimarse los residuos estocásticos aleatorios, a partir de los residuos observados ε_t . Se puede notar que los residuos de la forma reducida pueden obtenerse mediante $\varepsilon_t = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\xi_t$ y su matriz de covarianzas por $\Sigma = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}$.

La identificación de un modelo SVAR, se lleva a cabo a partir de un conjunto de restricciones en las matrices \mathbf{A} y/o \mathbf{B} . Dependiendo de las restricciones impuestas, se pueden distinguir tres tipos de modelos SVAR:

- Modelo A: $\mathbf{B} = \mathbf{I}_k$ (el mínimo número de restricciones para la identificación es $k(k-1)/2$).
- Modelo B: $\mathbf{A} = \mathbf{I}_k$ (el mínimo número de restricciones para la identificación es $k(k-1)/2$).
- Model AB: Se imponen restricciones en ambas matrices (el mínimo número de restricciones para la identificación es $k^2 + k(k-1)/2$).

2.1.2 Condición De Estacionariedad y Momentos De Un VAR(1)

Un modelo VAR(1) se escribe como

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.4)$$

Asumiendo que el modelo de la ecuación 2.4 es debilmente estacionario y usando que $E(\varepsilon_t) = 0$, obtenemos que

$$E(\mathbf{y}_t) = \Phi_0 + \Phi E(\mathbf{y}_{t-1})$$

y como $E(\mathbf{y}_t)$ es invariante en el tiempo, tenemos que

$$\boldsymbol{\mu} \equiv E(\mathbf{y}_t) = (\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \Phi_0$$

siempre que la matriz $\mathbf{I} - \Phi$ sea invertible, donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden $k \times k$.

Usando $\Phi_0 = (\mathbf{I} - \Phi)\boldsymbol{\mu}$, la ecuación 2.4 puede ser escrita como

$$\hat{\mathbf{y}}_t = \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} = \Phi(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \varepsilon_t.$$

A esta ecuación la llamaremos serie de tiempo de media corregida y la denotaremos por $\hat{\mathbf{y}}_t$.

Aplicando repetidas sustituciones a la serie de tiempo de media corregida, podremos escribirla así

$$\hat{\mathbf{y}}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i \varepsilon_{t-i}.$$

Esta expresión, muestra varias características del proceso VAR(1):

- $Cov(\varepsilon_t, \mathbf{y}_{t-s}) = \mathbf{0}, \forall s > 0$;
- $Cov(\mathbf{y}_t, \varepsilon_t) = \Sigma$, la matriz de covarianzas de ε_t ;
- $\Gamma_k = \Phi_1 \Gamma_{k-1}$.

2.1.3 El Modelo VAR(p)

Usando el operador de retardos $z^i \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-i}$, podemos escribir la expresión 2.1 de la forma siguiente:

$$(\mathbf{I} - \Phi_1 z^1 - \dots - \Phi_p z^p) \mathbf{y}_t = \Phi_0 + \varepsilon_t$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden $k \times k$. Esta también se puede representar en su forma compacta.

$$\Phi(z) \mathbf{y}_t = \Phi_0 + \varepsilon_t$$

donde $\Phi(z) = \mathbf{I} - \Phi_1 z^1 - \dots - \Phi_p z^p$ es una matriz polinomial.

Si \mathbf{y}_t es débilmente estacionario, entonces se tiene

$$\mathbf{y}_t = E(\mathbf{y}_t) = (\mathbf{I} - \sum_{i=1}^p \Phi_i)^{-1} \phi_0 = [\Phi(1)]^{-1} \phi_0 \quad (2.5)$$

siempre que la inversa exista.

Sea $\hat{\mathbf{y}}_t = \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}$, el modelo VAR(p) se convierte en

$$\hat{\mathbf{y}}_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i \hat{\mathbf{y}}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (2.6)$$

Usando esta ecuación y las mismas técnicas como para el modelo VAR(1), se obtiene que

- $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{y}_{t-s}) = \mathbf{0}, \forall s > 0$;
- $Cov(\mathbf{y}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$, la matriz de covarianza de $\boldsymbol{\varepsilon}_t$;
- $\boldsymbol{\Gamma}_l = \sum_{i=1}^p \Phi_i \boldsymbol{\Gamma}_{l-i}$, para $l \geq 0$.

A la última propiedad se le llama ecuaciones de los momentos de un modelo VAR(p). En términos de las matrices de correlaciones cruzadas, las ecuaciones de los momentos se convierten en

$$\boldsymbol{\rho}_l = \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\Upsilon}_i \boldsymbol{\rho}_{l-i}, \text{ para } l \geq 0,$$

donde

$$\boldsymbol{\Upsilon}_i = \mathbf{D}^{-1/2} \Phi_i \mathbf{D}^{1/2}.$$

Un simple enfoque para el mejor entendimiento de las propiedades de un modelo VAR(p) en 2.1, es hacer uso de los resultados del modelo VAR(1). Esto puede ser logrado por transformación de un modelo VAR(p) de \mathbf{y}_t en un modelo VAR(1) de dimensión kp . Específicamente, sean $\mathbf{x}_t = (\hat{\mathbf{y}}'_{t-p+1}, \hat{\mathbf{y}}'_{t-p+2}, \dots, \hat{\mathbf{y}}'_t)'$, el cual contiene a \mathbf{y}_t como sus últimos k componentes y $\mathbf{b}_t = (0, 0, \dots, \mathbf{a}'_t)'$ dos procesos de dimensión kp . La media de \mathbf{b}_t es cero y la matriz de covarianzas de \mathbf{b}_t es una matriz de orden $kp \times kp$ con casi todos los elementos iguales a cero excepto la esquina inferior derecha, al cual es $\boldsymbol{\Sigma}$. El modelo VAR(p) para \mathbf{y}_t puede ser escrito de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_t = \Phi^* \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{b}_t \quad (2.7)$$

donde

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \\ \Phi_p & \Phi_{p-1} & \Phi_{p-2} & \Phi_{p-3} & \cdots & \Phi_1 \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{I} y $\mathbf{0}$ son la la matriz identidad y matriz nula respectivamente, ambas de orden $k \times k$. En la literatura, la matriz Φ^* es llamada la matriz acompañante de la matriz polinomial $\Phi(B)$.

Los resultados de un modelo VAR(1) mostrados anteriormente pueden ser usados para derivar las propiedades del modelo VAR(p) a través de 2.7. Por definición \mathbf{x}_t es débilmente estacionario si y solo si \mathbf{y}_t es débilmente estacionario. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente de estacionariedad débil para el modelo VAR(p) en la ecuación. 2.1 es que todos los valores propios de Φ^* en la ecuación. 2.7 sean menores que uno en módulo. Al igual que en el caso de un modelo VAR(p), se puede demostrar que la condición es equivalente a que todos los ceros del determinante $|\Phi(B)|$ estén fuera del círculo unitario.

2.1.4 Identificación de un VAR

La determinación del número óptimo de retardos debe realizarse de forma cuantitativa, ya que no existen evidencias teóricas al respecto. Esto se conoce como la determinación de orden (o especificación del orden) de los modelos VAR, y se ha estudiado ampliamente en la literatura de series de tiempo. Dos enfoques generales están disponibles para la determinación del valor de p . El primer enfoque es utilizar la función de autocorrelación parcial, y el segundo método utiliza algunos criterios de información.

Consideremos los siguientes modelos VAR consecutivos

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\vdots = \vdots \\
\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
&\vdots = \vdots
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Para la ecuación i en 2.8, podemos estimar sus parámetros por el método de mínimos cuadrados ordinarios, así tenemos que:

$$\mathbf{y}_t^{(i)} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_0^{(i)} + \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1^{(i)} \mathbf{y}_{t-1} + \hat{\boldsymbol{\Phi}}_2^{(i)} \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i^{(i)} \mathbf{y}_{t-i} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)}$$

siendo $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_k^{(i)}$ y $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_0^{(i)}$ el estimador por (MCO) de $\boldsymbol{\Phi}_k$ y $\boldsymbol{\Phi}_0$ respectivamente. Entonces la serie de los residuos es

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)} = \mathbf{y}_t^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_0^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1^{(i)} \mathbf{y}_{t-1} - \dots - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i^{(i)} \mathbf{y}_{t-i}$$

la matriz de covarianza de los residuos estimada se define como

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i = \frac{1}{T - 2i - 1} \sum_{t=i+1}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)})', \quad i \geq 0. \tag{2.9}$$

Una alternativa para seleccionar el orden p del modelo es utilizar los criterios de información disponibles para esto. El (AIC) de un modelo VAR(i) bajo la suposición de normalidad es definido como

$$AIC(i) = \ln(|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i|) + \frac{2k^2 i}{T}$$

Para un vector de series de tiempo dado, uno selecciona el VAR de p de tal forma que $AIC(p) = \min_{0 \leq i \leq p_0} AIC(i)$, donde p_0 es un entero positivo pre-especificado.

Otros criterios de información disponibles son:

$$BIC(i) = \ln(|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i|) + \frac{k^2 i \ln(T)}{T}$$

y

$$HQ(i) = \ln(|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i|) + \frac{2k^2 i \ln[\ln(T)]}{T}.$$

2.1.5 Estimación

Para un modelo VAR especificado, se puede estimar los parámetros utilizando el métodos mínimos cuadrados ordinarios o el método ML. Los dos métodos son asintóticamente equivalentes. Bajo algunas condiciones de regularidad, las estimaciones son asintóticamente normal. Un modelo ajustado se debe revisar cuidadosamente de cualquier posible insuficiencia. El estadístico $Q_k(m)$ se puede aplicar a la serie residual para comprobar el supuesto de que no hay correlaciones seriales o cruzadas en los residuos. Para una modelo ajustado VAR(p), el estadístico $Q_k(m)$ de los residuos es asintóticamente una distribución chi-cuadrada con $k^2m - g$ grados de libertad, donde g es el número de parámetros estimados en las matrices.

2.1.6 Pronóstico

En el tratamiento de un modelo bien construido como el modelo real, se puede aplicar las mismas técnicas como en el análisis univariado para producir previsiones y desviaciones estándar de los errores de pronóstico asociados. Para un modelo VAR(p), la previsión para 1 - paso por delante en el hora de inicio es $\mathbf{y}_h(1) = \phi_0 + \sum_{n=1}^p \Phi_n \mathbf{y}_{h+1-i}$, y el error de pronóstico asociado es $e_h(1) = \varepsilon_{h+1}$. La matriz de covarianza del error de predicción es Σ . Para la previsiones a 2 - paso a delante, sustituimos \mathbf{y}_{h+1} por su pronóstico a obtener es

$$\mathbf{y}_h(2) = \phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_h(1) + \sum_{n=2}^p \Phi_n \mathbf{y}_{h+2-i}$$

y el error de pronóstico asociado es

$$e_h(2) = \varepsilon_{h+2} + \Phi_1 [\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_h(1)] = \varepsilon_{h+2} + \Phi_1 \varepsilon_{h+1}.$$

En general, si \mathbf{y}_t es débilmente estacionaria, entonces la previsión a n -pasos a delante $\mathbf{y}_h(n)$ converge a su vector media $\boldsymbol{\mu}$ cuando el horizonte de proyección n aumenta, el error de predicción para n periodos al frente viene dado por:

$$e_h(n) = \varepsilon_{t+n} + \Psi_1 \varepsilon_{t+n-1} + \cdots + \Psi_{n-1} \varepsilon_{t+1} + \Psi_n \varepsilon_t + \Psi_{n+1} \varepsilon_{t-1} + \cdots \quad (2.10)$$

y la matriz de covarianza de su error de predicción converge a la matriz de covarianza de \mathbf{y}_t , siendo Ψ las matrices coeficientes de la representación de medias móviles del modelo VAR.

El análisis del error de predicción permite observar que porcentaje de variación de una variable endógena es explicada por cada uno de los 'shock' estructurales en términos del modelo, ya sea en un corto o largo plazo. Tal descomposición representa otra de las pruebas importantes a considerar luego de haber llevado a cabo la estimación del modelo estructural.

En resumen, la construcción de un modelo VAR consta de tres pasos:

- Utilizar los criterios de información para identificar la orden.
- Estimar el modelo especificado mediante el método de mínimos cuadrados y, si es necesario, re-estimar el modelo mediante la eliminación de parámetros estadísticamente insignificantes.
- Utilizar la estadística de $Q_k(m)$ de los residuos para comprobar la adecuación de un modelo ajustado.

2.1.7 Función de impulso respuesta

Una vez estimado el modelo VAR, la principal utilización del modelo son las funciones de impulso-respuesta. Estas muestran el efecto de un cambio en los errores sobre las variables endógenas del sistema de ecuaciones. La función impulso-respuesta es un análisis gráfico que permite observar como responde una variable ante la influencia o el impacto de un *shock*, claro está basándose en un conjunto de restricciones seleccionadas de acuerdo al objetivo principal de la investigación.

Al igual que en el caso univariante, un modelo VAR(p) puede escribirse como una función lineal de las últimas innovaciones, una forma es:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \Psi_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \Psi_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \Psi_3 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-3} + \dots, \quad (2.11)$$

donde $\boldsymbol{\mu} = [\Phi(1)]^{-1} \Phi_0$ previsto que exista la inversa, las matrices coeficientes Ψ_i se pueden obtener por igualación de los coeficientes de z^i en la ecuación

$$(I - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 - \dots - \Phi_p z^p)(I + \Psi_1 z + \Psi_2 z^2 + \dots) = I$$

donde I es la matriz identidad. Esta es una representación de media móvil de \mathbf{y}_t con la matriz de coeficiente Ψ_i siendo el impacto de la innovación pasada ε_{t-i} en la observación futura \mathbf{y}_{t+i} . Por lo tanto, Ψ_i es a menudo referida como la función de respuesta de impulso de \mathbf{y}_t . Sin embargo, dado que los componentes de ε_t están a menudo correlacionados, la interpretación de los elementos en Ψ_i de la ecuación 2.11 es no es sencilla. Para facilitar la interpretación, se pueden usar las matrices A y B que se mencionaron anteriormente en la forma estructural de tal forma que $\Sigma = B^{-1}AA'(B^{-1})'$, para así transformar las innovaciones de manera que los componentes resultantes no estén correlacionados. Sea $\xi_t = B^{-1}A\varepsilon_t$. Entonces, $Cov(\xi_t) = I$, así, los elementos en ξ_t no están correlacionados. Hagamos $L = A^{-1}B$, Reescribiendo la ecuación 2.11, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu} + \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots \\ &= \boldsymbol{\mu} + LL^{-1}\varepsilon_t + \Psi_1 LL^{-1}\varepsilon_{t-1} + \Psi_2 LL^{-1}\varepsilon_{t-2} + \dots \\ &= \boldsymbol{\mu} + \Psi_0^* \xi_t + \Psi_1^* \xi_{t-1} + \Psi_2^* \xi_{t-2} + \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $\Psi_0^* = L$ y $\Psi_i^* = \Psi_i L$. Las matrices de coeficientes Ψ_i^* son llamadas función de impulso respuesta de \mathbf{y}_t con respecto a las innovaciones ortogonales b_t . Específicamente, el (i, j) -ésimo elemento de Ψ_i^* ; el cual es, $\psi_{ij}^*(l)$, es el impacto de $b_{j,t+l}$ en la observación futura $y_{i,t+l}$. En la práctica, uno puede normalizar aún más la innovación ortogonal ξ_t de tal manera que la varianza de $b_{i,t}$ es uno. Una debilidad del ortogonalización anterior es que el resultado depende del orden de los componentes de \mathbf{y}_t . En particular, $\xi_{1t} = \varepsilon_{1t}$, así, ε_{1t} no fue transformada. Los diferentes ordenamientos de los componentes de \mathbf{y}_t pueden dar lugar a diferentes funciones de impulso-respuesta. La interpretación de la función de impulso respuesta es, por lo tanto, asociado con las series innovaciones ξ_t .

3

Análisis Empírico

Este capítulo aborda el desarrollo, especificación y estimación del modelo VAR estructural, el cual será muy útil en vista que se sospecha que existe evidencia de simultaneidad entre el grupo de variables seleccionadas y que sus relaciones se transmiten a lo largo de un determinado número de períodos. Para alcanzar la estimación, existen una serie de etapas fundamentales previas. En primer lugar se definen las variables macroeconómicas que participarán en la construcción del modelo estándar, se realiza una descripción de las mismas antes de proceder a un análisis univariante para cada una de ellas, el cual representa el punto de partida para la estimación de la forma estructural.

Para la construcción de un modelo VAR, es necesario seleccionar un conjunto de series económicas, en el que cada una de ellas actúa, dentro del sistema multivariado, como variable endógena y como variable explicativa. En este sentido, se generan en base al modelo estimado un conjunto de interacciones dinámicas interesantes desde el punto de vista econométrico. Además, se busca que los datos de las variables en estudio, coincidan en cuanto a la periodicidad y período muestral con el objeto

de buscar en la práctica, a un manejo más compacto de las mismas. Posteriormente y antes de estimar el modelo, cada una de las series será analizada con el propósito de determinar si las mismas son estacionarias y se presentarán los resultados de las pruebas de raíz unitaria. Asimismo se procederá a realizar un estudio de las variables en conjunto a través la observación de las matrices de correlaciones cruzadas con el objeto de precisar las relaciones entre las variables y sus retardos. Luego se hará el análisis de cointegración de las series objeto de estudio, para así explicar cómo se llevó a cabo la estimación del modelo. Por otra parte se comentan algunos resultados obtenidos a partir de la metodología. Seguidamente, se presenta el análisis de impulso-respuesta y el pronóstico de la descomposición de la varianza del modelo estructural.

La economía venezolana ha experimentado en los últimos veinte años un proceso inflacionario continuo y persistente. Adicionalmente, en ese mismo período se observa mayor variabilidad en los precios del petróleo y significativos cambios en los factores de producción que se han reflejado en la tasa de desempleo venezolana, lo cual hace necesario contrastar la posible influencia de estas variables sobre la inflación. En este hecho se fundamentó la escogencia de las cuatro variables que hemos incluido en nuestro estudio: inflación, producto interno bruto, tasa de desempleo y los precios del petróleo, ya que consideramos que una investigación en conjunto de las mismas propiciarán resultados objetivos en cuanto a la predicción de la inflación venezolana. En lo que sigue, describiremos cada una de estas variables detalladamente.

3.1 DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES

3.1.1 Inflación

En la literatura económica, los autores tienden a definir el fenómeno en muy diversas formas, sobre todo, en función de las causas a las que le atribuyen. La inflación se define como el "fenómeno económico que se caracteriza por un incremento generalizado y permanente de los precios de los bienes y servicios presentes en el proceso económico de un país".

Al considerar los efectos de la inflación, inestabilidad de precios, debe quedar claro por qué los gobiernos utilizan esta variable como uno de los objetivos de la política económica.

El tema de los efectos de la inflación es controvertido, pues éstos son complejos y difíciles de valorar al afectar de diferente manera a distintas variables y a diversos aspectos de la realidad económica de un país. No obstante, suele existir un consenso generalizado en admitir que la inflación es un fenómeno perjudicial, ya que no sólo tiene influencia sobre la redistribución de la renta y de la riqueza entre los distintos grupos sociales e individuos, sino que también repercute política y del sistema económico. Consecuencias que exigen una atención preferente por parte de la política económica, a través de los diferentes medios que se puedan utilizar.

La mayoría de los países, tienen como objetivo principal la lucha contra el fenómeno inflacionario entre sus principales metas de políticas económicas, las cuales se han visto modificadas en los últimos años en dos sentidos. Uno es el carácter prioritario respecto a las demás políticas, y el otro se refiere a que el estudio de la inflación se ha vuelto más estructural en cuanto a políticas antiinflacionarias que deben ser manejadas de diferentes formas y, además, incluyen las necesarias reformas estructurales para ser mucho más eficaces.

Concretamente, el BCV estipula en el artículo 5 de su ley publicada en el año 2001 que " El objetivo fundamental del Banco Central de Venezuela es lograr la estabilidad de precios y preservar el valor de la moneda".

3.1.2 Producto Interno Bruto

El producto interior bruto puede definirse como el "valor de mercado de los bienes y servicios producidos en el interior de una economía durante un período de tiempo especificado". El PIB puede concebirse de tres formas distintas. En primer lugar, pueden analizarse los gastos en bienes y servicios realizados por diferentes grupos: las economías domésticas, las empresas, el Estado en todos sus ámbitos y los extranjeros. En segundo lugar, puede medirse la producción de bienes de los diferentes sectores: comercio al por mayor, y al por menor, etc. Finalmente, pueden calcularse las rentas obtenidas en la producción de bienes: la remuneración de los

asalariados, la renta procedente de alquileres, los beneficios de las sociedades anónimas, etc. Es importante destacar que la metodología del cálculo del PIB es igual a la del Producto Nacional Bruto (PNB), con la diferencia que la segunda incluye las rentas netas provenientes del exterior para su medición.

3.1.3 Tasa de Desempleo

La Organización Internacional del Trabajo (OIT) es el organismo que tiene entre sus funciones el establecimiento de las normas internacionales sobre estadísticas del trabajo. Estas normas son presentadas, discutidas y adoptadas durante las Conferencias Internacionales de Estadígrafos del Trabajo que se celebran periódicamente en Ginebra. En este sentido la OIT ubica a las personas en la categoría de desempleadas cuando éstas pertenecen a la población económicamente activa (15-65 años) y que durante el período de referencia se hallen en las siguientes situaciones:

a) "Sin empleo", es decir, que no tengan un empleo asalariado o un empleo independiente;

b) "Corrientemente disponible para trabajar", es decir disponibles para trabajar en empleo asalariado o en empleo independiente durante el período de referencia, y

c) "En busca de empleo" es decir, que habían tomado medidas concretas para buscar un empleo asalariado o un empleo independiente en un período reciente especificado. Pues bien, según la consideración de los grupos anteriores puede definirse la tasa de desempleo como "el cociente entre el número de desempleados y la población activa en un período de tiempo determinado".

3.2 Información estadística

Para el análisis empírico se han construido series temporales a partir de la información trimestral para el periodo 2005 : 1 – 2012 : 2 procedente de diversas fuentes estadísticas. El producto interno bruto real y la tasa de desocupación se obtuvo del Instituto Nacional De Estadística(INE), la inflación fue obtenida del Banco Central de Venezuela y los precios del barril del petróleo del Ministerio Del Poder Popular de Energía y Minería.

3.3 Análisis univariante de las series

Esta face consiste en hacer una evaluación histórica de cada una de las variables de forma individual, con el fin de identificar si existe o no, un comportamiento estacionario a lo largo del tiempo, para así, poder construir un modelo multivariado el cual explique de manera adecuada la dinámica existente entre las variables en estudio.

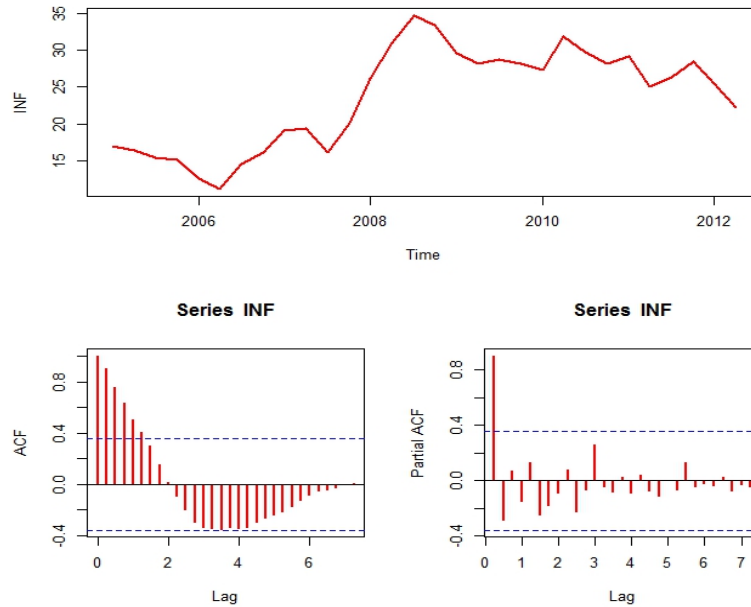
Existen varias herramientas útiles al momento de determinar la estacionariedad de una serie, entre ellas podemos mencionar: la evaluación gráfica, evaluación del correlograma muestral y la identificación del orden de integración a través del uso del test paramétrico Augmented Dickey Fuller(ADF).

A continuación se detallan cada una de las pruebas mencionadas para estas variables.

3.3.1 Análisis univariante de la serie Inflación(INF)

En el gráfico de la serie temporal de la inflación se puede notar que las observaciones no oscilan alrededor de una media constante para el período de estudio. Mas aún, exhibe una marcada tendencia al alza. Estas son características de un proceso no estacionario. Por otra parte, el correlograma de la Inflación muestra que la serie presenta un comportamiento sinusoidal la cual decae lentamente a cero, lo que conjuntamente con el comportamiento de la función de autocorrelación parcial con el valor del primer rezago cercano a 1, nos permite concluir que la serie no es estacionaria.

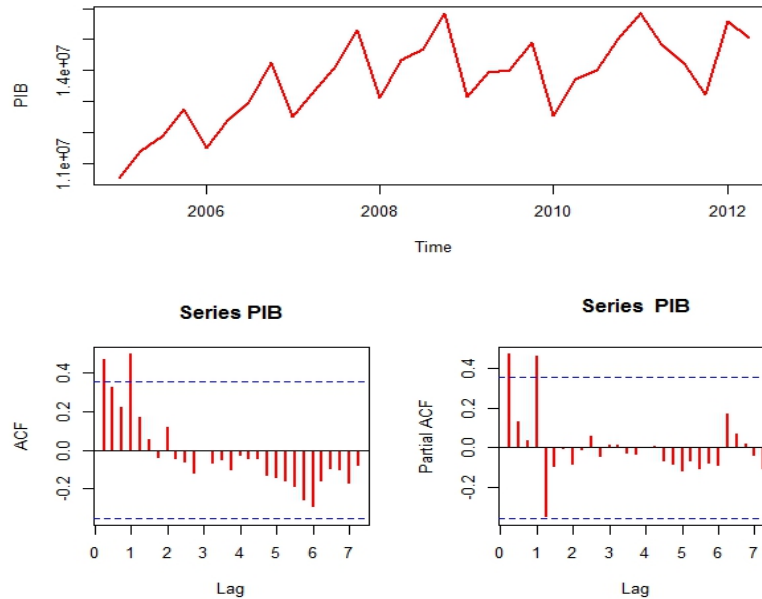
Gráfico 1.
Inflación



3.3.2 Análisis univariante de la serie Producto Interno Bruto Real (PIB)

Respecto a la evolución del Producto Interno Bruto real (PIB) que se presenta en el gráfico (2), la serie presenta un patrón marcado de estacionalidad en el primer y cuarto trimestre de cada año, también una tendencia aproximadamente lineal creciente con una leve caída en los niveles de producción nacional a partir del segundo trimestre del 2009. En términos generales, el PIB venezolano ha aumentado (en promedio) conforme ha pasado el tiempo, lo cual es beneficioso para el país.

Grafico 2.
Producto Interno Bruto

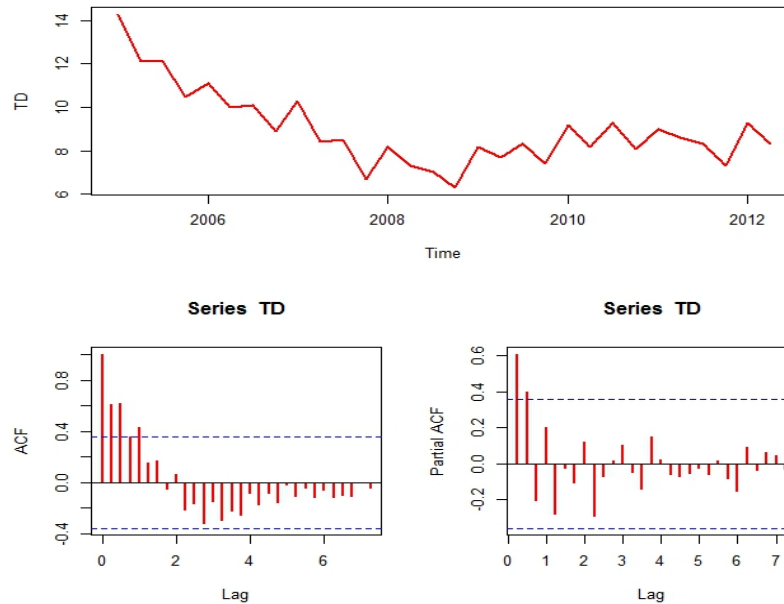


En el correlograma de la serie del PIB, la función de autocorrelación simple y la función de autocorrelación parcial permiten ratificar la no estacionariedad ya que, si bien presenta pocos valores significativamente distintos de cero en algunos períodos ambas decrecen lentamente hacia dicho valor.

3.3.3 Análisis univariante de la serie Tasa de desempleo(TD)

La tasa de desocupación, que se presenta en el gráfico (3), muestra una tendencia significativamente decreciente a lo largo del tiempo, por la serie no es estacionaria y debe ser diferenciada al menos una vez.

Grafico 3.
Tasa de Desempleo

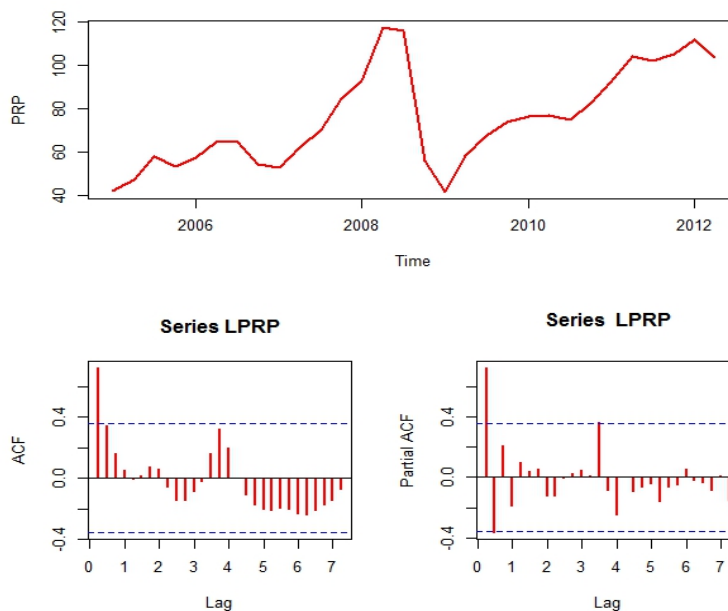


Además, si se observa el correlograma de la tasa de desocupación, se aprecia que la serie no es estacionaria, ya que la función de autocorrelación simple presenta una caída significativamente lenta y presenta valores significativamente distintos de cero con algunos retardos fuera de las bandas confidenciales.

3.3.4 Análisis univariante de la serie Precios de Realización del Petróleo (PRP)

Finalmente, los precios de realización del petróleo que se presentan en el gráfico (4), reflejan claramente una tendencia al alza, no obstante se observan algunas oscilaciones bien importantes. A mediados del año 2007 se observa un aumento considerable de los precios llegando a un tope en el segundo y el tercer trimestre del año 2008.

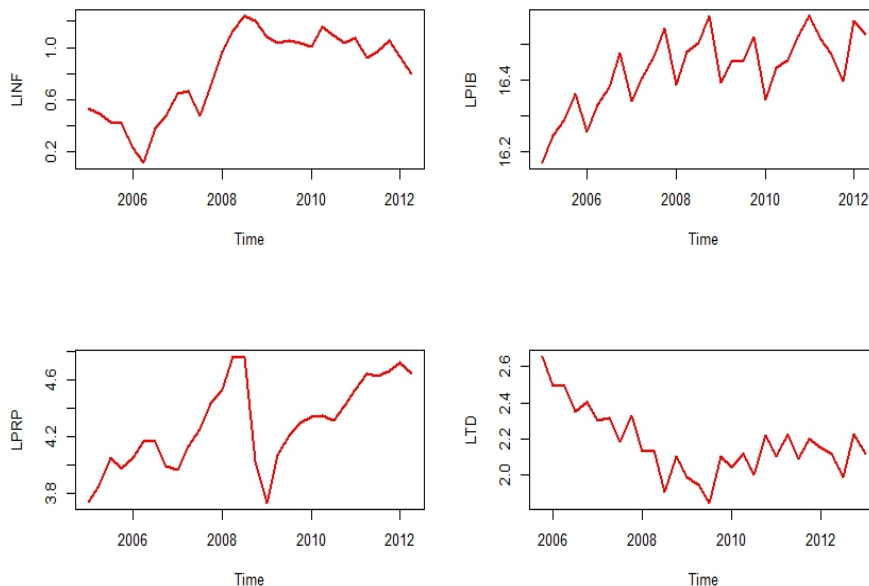
Grafico 4.
Precio de Realización del Petróleo



El correlograma de la serie PRP, al igual que el de la serie INF, presenta un comportamiento sinusoidal que decae lentamente. La función de autocorrelación parcial con el primer rezago con valor cercano a 1, permite corroborar que la serie no es estacionaria.

El análisis gráfico preliminar de las variables consideradas revelan que ninguna de ellas es estacionaria. Además, todas presentan patrones de variabilidad bastante marcados en su entorno. Esto nos indica que debemos aplicar transformación logarítmica con el fin de suavizar en cierta forma la variabilidad encontrada en algunos valores de las series originales, las cuales presentan un comportamiento aparentemente estocástico en su entorno. En el gráfico (5), se muestran las gráficas de los logaritmos de las series.

Grafico 5.
Series en logaritmos



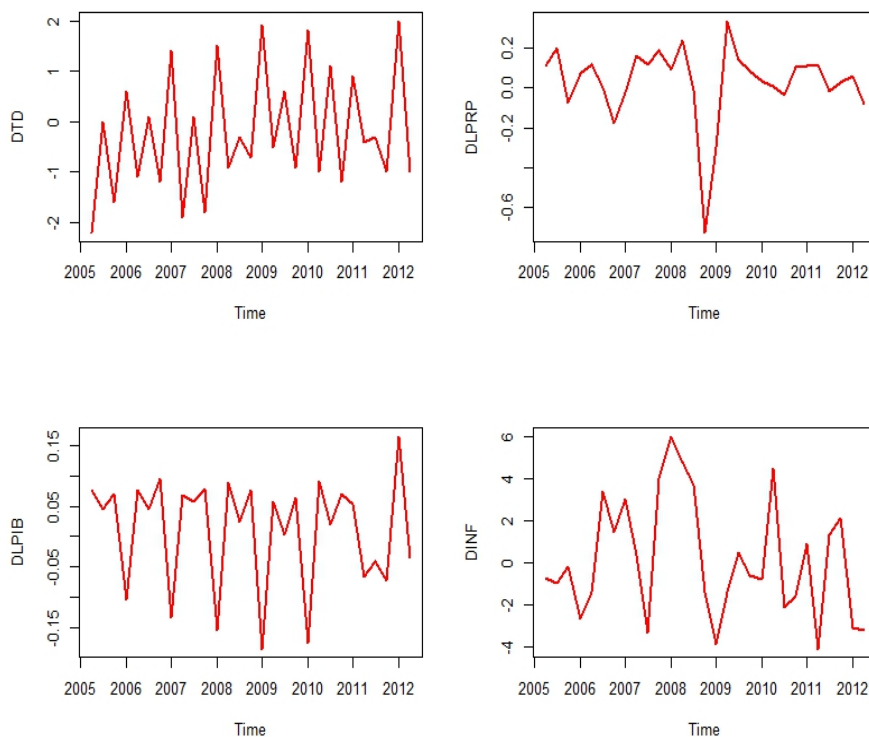
La transformación logarítmica sobre las series, aparentemente no genera ningún cambio en el comportamiento de la misma. Si observamos detenidamente ambas gráficas podemos observar que, ambas son muy similares, por lo tanto, las mismas aún no alcanzan estacionariedad tanto en media como en varianza. Sin embargo; aún y cuando dicha transformación no reduce de manera significativa la variabilidad de los datos originales, genera un cambio de escala importante sobre la serie temporal propiamente dicha. En lo que sigue, trabajaremos con las logarirmos de las series.

Basándonos en este comportamiento, podemos decir que las series no son estacionarias o que poseen por lo menos una raíz unitaria. El siguiente paso es aplicar la primera diferencia para observar el comportamiento de las series en niveles.

El gráfico (6), muestra las cuatro series en primeras diferencias. En este se observa un comportamiento que se asemeja a las series estacionarias con fluctuaciones en torno a la media. Esto nos sugiere que las series en primera diferencia bajo transformación logarítmica, alcanza estacionariedad en media, ya que al diferenciarla la serie fluctúa alrededor de su valor medio, características de que las series poseen por

lo menos una raíz unitaria. Esta apreciación fue corroborada con la aplicación de los tests de Dickey-Fuller, según lo reportado en la tabla (2) y (3).

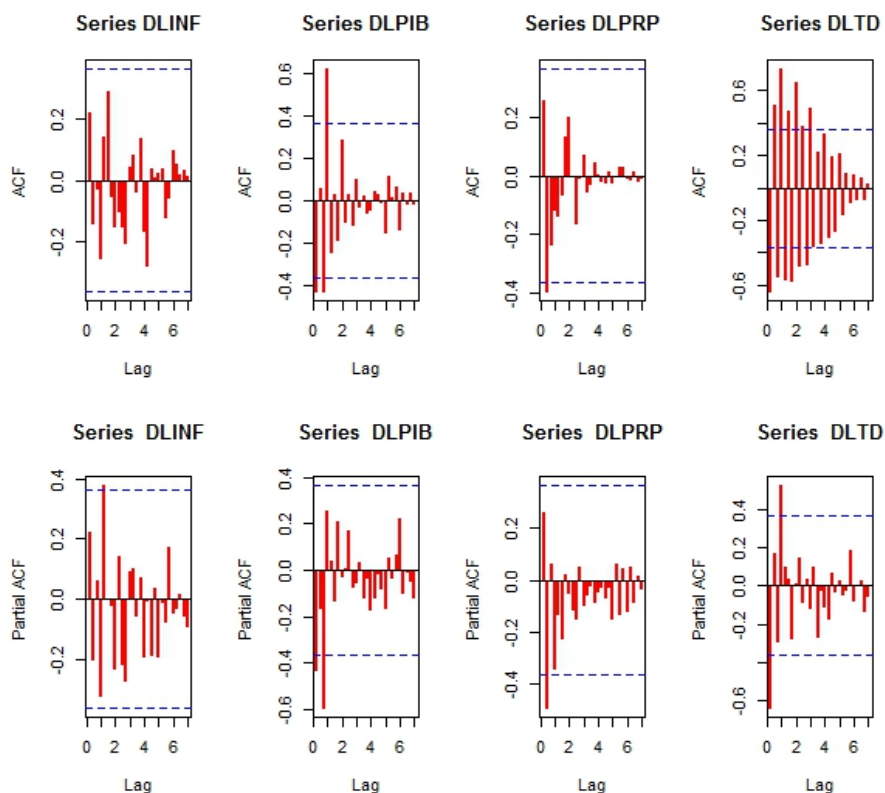
Grafico 6.
Series en primera diferencia.



Se puede apreciar en el gráfico (6), que las series en primera diferencia bajo transformación logarítmica, fluctúan sobre un determinado valor y no presentan un comportamiento creciente en el tiempo, es decir, que no existe ningún tipo de tendencia marcada en el entorno del mismo, cumpliendo así con las condiciones primordiales de estacionariedad.

Con respecto a la estacionariedad en varianza cabe destacar que, aún y cuando se han generado ciertas transformaciones sobre la serie original, hay cambios drásticos en la variación de las mismas, así, podríamos concluir que las series de las diferencias logarítmicas son estacionarias en varianza, a excepción de la inflación que no tiene un patrón de comportamiento definido a lo largo del tiempo, lo cual pudiera causar resultados espurios en el estudio multivariado.

Grafico 7.
Correlogramas de las series en primeras diferencias.



El comportamiento de las funciones de autocorrelación simple y parcial para las series en estudio bajo transformación logarítmica, permite verificar el comportamiento estacionario observado en las gráficas de las mismas, si bien presentan pocos valores significativamente distintos de cero en algunos períodos, es decir, la mayoría de los rezagos se encuentran dentro de los límites de confianza (excepto para algunos retardos) y ambas funciones decrecen a cero para las cuatro series.

La matriz de correlación concurrente de la serie y_t , la cual nos explicará como se encuentran relacionadas cada una de las variables consigo misma y con las demás variables es

$$\hat{\rho}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.58 & 0.49 & -0.67 \\ 0.58 & 1 & 0.58 & -0.78 \\ 0.49 & 0.58 & 1 & -0.52 \\ -0.67 & -0.78 & -0.52 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que las series guardan relación, puesto que ninguno de los coeficientes de la matriz de correlación es cero. Las series no presentan ni muy altas ni muy bajas correlaciones concurrentes. La correlación entre la inflación y el producto interno bruto es la más positiva que las que existen entre las demás, mientras que la correlación entre la tasa de desocupación y el producto interno bruto es la más negativa.

La tabla siguiente muestra las matrices de autocorrelaciones y correlaciones cruzada de las cuatro series para los retardos 1, 2 y 3 de la serie multivariada $r_t = (\Delta LINF, \Delta LPIB, \Delta LPRP, \Delta LTD)'$ y las correspondientes matrices de correlaciones cruzadas simplificadas. Esto nos va a servir para examinar si los valores rezagados de una variable ayudan o no a predecir otra variable. Por ejemplo, si la tasa de desempleo no ayuda a predecir la inflación, los coeficientes correspondientes a la tasa de desempleo en la ecuación de la inflación serán un punto.

Un examen de la matriz de correlaciones cruzadas simplificadas de estos tres retardos mostradas en la tabla (1), indican que cada una de las series depende fuertemente de los dos primeros retardos de todas las series del sistema. Además, los tres primeros retardos de cada una de las variables incluidas, ayudan a predecir la inflación, la cual es la variable de nuestro interés.

Tabla 1.

	Correlaciones Cruzadas				Matrices Simplificadas			
Lag 1	0.93	0.58	0.57	-0.74	$\begin{bmatrix} + & + & + & - \\ + & + & + & - \\ . & + & + & - \\ - & - & - & + \end{bmatrix}$			
	0.53	0.49	0.57	-0.53				
	0.36	0.41	0.76	-0.40				
	-0.50	-0.50	-0.47	0.62				
Lag 2	0.81	0.66	0.55	-0.79	$\begin{bmatrix} + & + & + & - \\ + & . & + & - \\ . & + & + & - \\ - & - & - & + \end{bmatrix}$			
	0.46	0.36	0.38	-0.53				
	0.24	0.40	0.40	-0.38				
	-0.40	-0.51	-0.36	0.66				
Lag 3	0.70	0.67	0.47	-0.83	$\begin{bmatrix} + & + & + & - \\ . & . & . & - \\ . & + & . & . \\ . & . & . & + \end{bmatrix}$			
	0.34	0.26	0.27	-0.36				
	0.19	0.50	0.20	-0.34				
	-0.26	-0.32	-0.23	0.40				

3.3.5 Análisis de Integración (pruebas ADF)

Uno de los requisitos usuales de la técnica VAR es que las variables se incorporen al modelo en forma estacionaria, por ello se estudió el grado de integración de cada una de las mismas. Para ello, se llevará a cabo las pruebas de raíz unitaria mediante la aplicación de las regresiones de las pruebas de Dickey-Fuller basado en la hipótesis nula de que la variable en cuestión tiene raíz unitaria, con el fin de determinar bajo qué condiciones las series consideradas en la investigación fluctúan alrededor de un valor promedio (oscilan en un punto de gravedad y por ende hay patrones de "equilibrio serial") y poseen un comportamiento de variabilidad relativamente constante a lo largo del tiempo. Los resultados de la prueba de raíz unitaria se muestran en la tabla (2) (series en logaritmo) y (3) (series en primeras diferencias bajo transformación logarítmica), respectivamente. De acuerdo a ambos resultados, no existen evidencias concluyentes de que las series bajo transformación logarítmica sean estacionarias o $I(0)$. Por el contrario, la evidencia empírica apunta a que las primeras diferencias de las mismas son estacionarias y por tanto se concluye que estas son $I(1)$.

Tabla 2. Test de raíz unitaria.						
Series bajo transformación logarítmica: Ly_t						
Series	ADF			p-valor		
	I	II	III	I	II	III
LINF	-1.298551	-0.886911	-0.025994	0.9441	0.9865	0.6658
LPIB	-2.501959	-1.687379	1.884735	0.1265	0.7279	0.9829
LPRP	-2.790474	-4.047033	0.699708	0.0725	0.0186	0.8606
LTD	-1.746265	-2.005129	-0.334214	0.3970	0.5667	0.5546

ADF: Augmented Dickey-Fuller. Los rezagos fueron predeterminados bajo el Criterio de Información de Akaike (AIC). I: Intercepto; II: Intercepto y Tendencia; III: Sin variable exógena. Hipótesis Nula: "La serie tiene raíz unitaria". Regla de decisión: si $p > \alpha$ no se rechaza la Hipótesis Nula. $\alpha = 0,05$ para el nivel 5%.

Tabla 3. Test de raíz unitaria.
Series en primeras diferencias. : ΔLy_t

Series	ADF			p-valor		
	I	II	III	I	II	III
$\Delta LINF$	-4.574899	-5.314566	-5.425654	0.00034	0.0000	0.0000
$\Delta LPIB$	-7.938687	-8.410396	-7.308863	0.0000	0.0000	0.0000
$\Delta LPRP$	-5.267469	-5.154789	-5.258592	0.0002	0.0015	0.0000
ΔLTD	-2.078037	-1.873960	-2.314641	0.2544	0.0012	0.0127

ADF: Augmented Dickey-Fuller. Los rezagos fueron predeterminados bajo el Criterio de Información de Akaike (AIC). I: Intercepto; II: Intercepto y Tendencia; III: Sin variable exógena. Hipótesis Nula: "La serie tiene raíz unitaria". Regla de decision: si $p > \alpha$ no se rechaza la Hipótesis Nula. $\alpha = 0,05$ para el nivel 5%.

3.4 Estimación VAR Estandar

La parte empírica del trabajo comprende tres secciones. La primera consiste en la identificación de un modelo vectorial autorregresivo. Para este fin, fué necesario el análisis univariado de las series que se hizo previamente, para determinar el grado de integración de cada una y la identificación de sus componentes. En la segunda, se construye un sistema VAR estándar el cual se adecue a la dinámica existente entre las variables consideradas para la muestra en estudio desde el punto de vista estadístico y económico. La tercera, consiste en la identificación del VAR estructural a partir del modelo VAR estándar.

En base a los resultados obtenidos en la sección anterior, optaremos por trabajar en lo que sigue, con las primeras diferencias de los logaritmos de las variables que se incluyeron en este estudio.

3.4.1 Especificación del modelo VAR(p)

La elección del número óptimo de retardos es el aspecto de mayor peculiaridad en la estimación del modelo VAR. Para ello, partiremos del sistema estacionario de variables endógenas $y_t = (\Delta LINF_t, \Delta LPIB_t, \Delta LPRP_t, \Delta LTD_t)'$ y aplicaremos los criterios de información descritos en el capítulo anterior, a distintos modelos VAR.

Aquel que presente en conjunto valores óptimos de estos estadísticos para los distintos rezagos especificados, será el modelo más adecuado. En nuestro caso, realizamos la prueba considerando, desde uno hasta seis rezagos como se muestra en la tabla (4).

Tabla 4.
Criterios de información utilizados.

Rezagos	Criterios de Información		
	Akaike	Schwarz	Hannan-Quinn
1	-3.022844	-4.142332	-1.046169
2	-3.260442	-4.259588	-1.699317
3	-3.955065*	-4.933870*	-2.809491*
4	-3.424905	-3.066442	-1.354929
5	-3.624905	-3.066442	-1.354929
6	-3.034905	-3.066442	-1.354929

Los criterios Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn, conducen a un modelo VAR de orden (3). Así que, el modelo VAR(3) podría ser adecuado para el datos. Estos criterios se estimaron incluyendo una constante más una tendencia como regresor determinista.

3.4.2 Significación estadística del modelo estimado

Con el fin de medir la significancia estadística de cada una de las ecuaciones estimadas dentro del modelo VAR que, en nuestro caso son cuatro ecuaciones, contrastamos las hipótesis de las pruebas F , R^2 y R^2 ajustado. Los resultados de estos estadísticos se muestran en la tabla (5).

Tabla 5.
Vector Autorregresivo estimado.

	Estadísticos por regresión			
	$\Delta LIND_{(1)}$	$\Delta DLPIB_{(2)}$	$\Delta DLPRP_{(3)}$	$\Delta DLTD_{(4)}$
R^2	0.2551	0.7205	0.5376	0.82
R^2 ajustado	0.19518	0.54117	0.52371	0.6338
Estadístico F	0.3162	2.38	1.073	4.329
(p-valor)	(0.9753)	(0.0717)	(0.4543)	(0.0079)

Se observa que en las ecuaciones del producto, precios del petróleo y tasa de desempleo se alcanza una bondad de ajuste del 72 %, 53.7 % y 82 %; mientras que la ecuación que define a la inflación como variable independiente solo alcanza una bondad de ajuste del 25 %, lo cual indica que del porcentaje de variabilidad total menos de un 25.5 % está explicado en términos del modelo para la ecuación (1), según el valor del R^2 .

Podemos realizar un estudio más preciso de la explicación conjunta de las variables en el modelo, observamos los valores del R^2 ajustado, el cual recoge con mayor exactitud el efecto proporcionado por la estructura de los rezagos. Nuevamente, observamos que la ecuación que más se ajusta a los datos en términos del modelo total es la ecuación de la tasa de desocupación, mientras que las ecuaciones (2) y (3) ($\Delta LPIB$ y $\Delta LPRP$) están explicadas alrededor de un 53 % en términos del modelo.

Los valores del R^2 y R^2 ajustado calculados para la inflación, indican que la misma no se ajusta a los datos ya que existe demasiada variabilidad explicada en el término correspondiente al error aleatorio.

En vista que tres de las ecuaciones estimadas para las variables son significativas podemos concluir que el modelo se ajusta, en términos generales a los datos para la muestra en estudio.

3.4.3 Análisis multivariado de los residuos

El análisis de los residuos del modelo es básico para chequear si se verifican las hipótesis del modelo de regresión. Sobre ellos, se basa la mayor parte de los procedi-

mientos de verificación del mismo. Los contrastes de hipótesis están basados en las asunciones de normalidad, no correlación serial y homocedasticidad de los residuos. Por consiguiente, conviene asegurar que dichas asunciones se cumplan en cada caso.

Sin importar el orden en que se lleven a cabo las pruebas deben cumplirse cada uno de los supuestos ya que, el cumplimiento en conjunto de los mismos es una condición necesaria la cual debe cumplirse para cualquier modelo econométrico estimado, en nuestro caso del tipo estructural.

Normalidad residual

Para comprobar si en efecto se cumple o no el supuesto de que los errores están distribuidos normalmente, realizaremos el contraste de hipótesis a través del test Jarque-Bera. El valor del estadístico se calcula en base a los coeficientes de simetría (Skewness) así como el de los coeficientes de Kurtosis de las ecuaciones estimadas tal y como se muestra a continuación.

	Chi-Cuadrado	Probabilidad
Jarque Bera	22.6049	0.0791
Kurtosis	11.3417	0.05295
Skewness	11.2632	0.0623

Se observa que el valor del estadístico es significativo a un nivel de confianza del 5%. En otras palabras no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula sobre la existencia de normalidad en los residuos ya que el p valor es mayor que el nivel de significación ($0.0791 > 0.05$).

Según lo observado, concluimos que las perturbaciones aleatorias del modelo siguen una distribución normal.

Autocorrelación residual

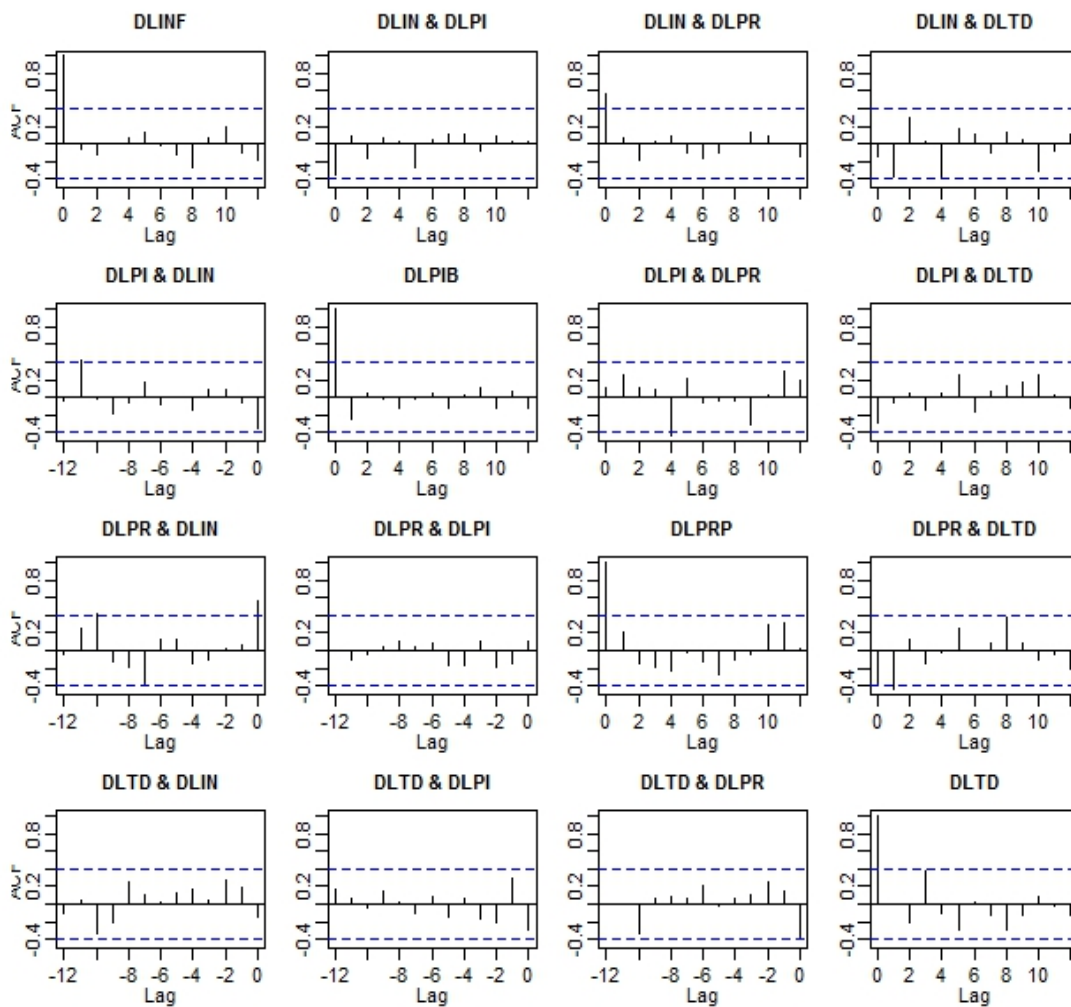
No se puede olvidar que la elección del número de retardos debe tener muy en cuenta la eliminación de autocorrelación en los residuos. A pesar que los criterios de selección utilizados examinan este importante aspecto, es una buena estrategia examinar las funciones de autocorrelación de los residuos, pues lamentablemente, es muy poco probable que pueda eliminarse la autocorrelación residual con menos de 4 retardos cuando se trabaja con datos trimestrales. Una alternativa para contrastar el supuesto de correlación serial, es el estadístico Q de Portmanteau y, puede aplicarse incluso, si actúa como variable explicativa la variable dependiente retardada tal y como ocurre en nuestro caso.

Tabla 7.	
Test de Portmanteau.	
Chi-Cuadrado	Probabilidad
172.2908	0.9663

El estadístico arrojó un p -valor mayor que 0.05. Así que bajo un nivel de confianza del 95 %, se cumple la hipótesis nula de que no existe correlación serial en los residuos. Por lo tanto, podemos concluir que los residuos de cada una de las ecuaciones estimadas son ruido blanco.

Otra alternativa para examinar si existe o no correlación serial en los residuos del modelo estimado, consiste en la observación de las gráficas de correlaciones cruzadas de los mismos. El gráfico siguiente muestra las gráficas de correlaciones cruzadas de los residuos, en el cual podemos observar que muy pocos retardos se salen de la banda de confianza, con esto y con el resultado del test de portmanteau, concluimos que los residuos no están autocorrelacionados, cumpliéndose así, otra de las hipótesis.

Grafico 8.
Correlaciones de los residuos.



Homocedasticidad residual

Por último, dentro del grupo de los tests aplicados para analizar las propiedades de los residuos, podemos contrastar la heterocedasticidad o varianza no constante del término. El test sostiene como hipótesis nula la existencia de homocedasticidad. Para comprobar si, en efecto se cumple el supuesto se realiza la prueba de heterocedasticidad residual (sin términos cruzados) la cual solo incluye los cuadrados y los niveles de los regresores.

Tabla 8.	
Test de Heterocedasticidad residual.	
Chi-Cuadrado	Probabilidad
200	1

Para nuestro modelo tenemos que no se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad en los residuos, ya que el valor de la probabilidad asociada al test es mayor al valor crítico $\alpha = 0.05$ ($p = 1 > 0.05$).

En conclusión, las pruebas sobre los residuos aplicadas al modelo VAR estándar estimado indican que los mismos cumplen con los supuestos de normalidad, no correlación serial y homocedasticidad, lo cual nos hace concluir que el modelo está bien ajustado.

3.4.4 Representación matricial del modelo estimado

En vista que en el modelo estimado, se deben considerar el mismo número de ecuaciones como variables explicativas hallan sido incluidas en nuestro sistema VAR, el modelo se puede representar matricialmente como:

$$\begin{aligned} \Delta LINF = & c_{1,1} \Delta LINF_{t-1} + c_{1,2} \Delta LINF_{t-2} + c_{1,3} \Delta LINF_{t-3} + \\ & c_{1,4} \Delta LPIB_{t-1} + c_{1,5} \Delta LPIB_{t-2} + c_{1,6} \Delta LPIB_{t-3} + \\ & c_{1,7} \Delta LPRP_{t-1} + c_{1,8} \Delta LPRP_{t-2} + c_{1,9} \Delta LPRP_{t-3} + \\ & c_{1,10} \Delta LTD_{t-1} + c_{1,11} \Delta LTD_{t-2} + c_{1,12} \Delta LTD_{t-3} + \\ & c_{1,13} + \varepsilon_{1,t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta LPIB = & c_{2,1} \Delta LINF_{t-1} + c_{2,2} \Delta LINF_{t-2} + c_{2,3} \Delta LINF_{t-3} + \\ & c_{2,4} \Delta LPIB_{t-1} + c_{2,5} \Delta LPIB_{t-2} + c_{2,6} \Delta LPIB_{t-3} + \\ & c_{2,7} \Delta LPRP_{t-1} + c_{2,8} \Delta LPRP_{t-2} + c_{2,9} \Delta LPRP_{t-3} + \\ & c_{2,10} \Delta LTD_{t-1} + c_{2,11} \Delta LTD_{t-2} + c_{2,12} \Delta LTD_{t-3} + \\ & c_{2,13} + \varepsilon_{2,t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta LPRP = & c_{3,1} \Delta LINF_{t-1} + c_{3,2} \Delta LINF_{t-2} + c_{3,3} \Delta LINF_{t-3} + \\
& c_{3,4} \Delta LPiB_{t-1} + c_{3,5} \Delta LPiB_{t-2} + c_{3,6} \Delta LPiB_{t-3} + \\
& c_{3,7} \Delta LPRP_{t-1} + c_{3,8} \Delta LPRP_{t-2} + c_{3,9} \Delta LPRP_{t-3} + \\
& c_{3,10} \Delta LTD_{t-1} + c_{3,11} \Delta LTD_{t-2} + c_{3,12} \Delta LTD_{t-3} + \\
& c_{3,13} + \varepsilon_{3,t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta LTD = & c_{4,1} \Delta LINF_{t-1} + c_{4,2} \Delta LINF_{t-2} + c_{4,3} \Delta LINF_{t-3} + \\
& c_{4,4} \Delta LPiB_{t-1} + c_{4,5} \Delta LPiB_{t-2} + c_{4,6} \Delta LPiB_{t-3} + \\
& c_{4,7} \Delta LPRP_{t-1} + c_{4,8} \Delta LPRP_{t-2} + c_{4,9} \Delta LPRP_{t-3} + \\
& c_{4,10} \Delta LTD_{t-1} + c_{4,11} \Delta LTD_{t-2} + c_{4,12} \Delta LTD_{t-3} + \\
& c_{4,13} + \varepsilon_{4,t}
\end{aligned}$$

Cada ecuación del sistema representa la estimación de cada una de las variables en estudio en función de sus valores retardados así como el de las demás variables endógenas, y la constante. En este sentido el primer parámetro estimado $c_{1,1}$ representa el coeficiente obtenido para el primer rezago de la inflación dentro de la ecuación $\Delta DLIN F_t$ y así sucesivamente.

En la siguiente tabla, se muestran los coeficientes de cada uno de los parámetros estimados, así como el error estandar de cada uno de ellos. Para medir la significancia estadística de los parámetros del modelo, se utilizó la prueba t-student, que se calcula como cociente entre el estimador y su error estándar. Los valores de los coeficientes que estadísticamente son significativos, están encerrados en paréntesis.

Tabla 9.						
Resultados de la estimación de un modelo VAR(3) en diferencias.						
Parametros	Estimación				Error estandar	
Modelo completo						
ϕ_0	-0.003				0.005	
	-0.002				0.002	
	0.0006				0.006	
	0.006				0.002	
Φ_1	$\begin{bmatrix} 0.17 & -0.21 & 0.18 & 0.09 \\ 0 & (-0.66) & 0.13 & -0.03 \\ -0.21 & -0.13 & (0.46) & -0.03 \\ 0.06 & 0.12 & (-0.22) & (-0.66) \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} 0.28 & 0.54 & 0.23 & 0.46 \\ 0.12 & 0.23 & 0.09 & 0.19 \\ 0.32 & 0.62 & 0.26 & 0.53 \\ 0.14 & 0.27 & 0.11 & 0.23 \end{bmatrix}$	
Φ_2	$\begin{bmatrix} -0.23 & 0.13 & 0.14 & -0.06 \\ 0.07 & (-0.50) & -0.04 & -0.11 \\ 0.01 & 0.14 & -0.43 & -0.51 \\ 0.02 & 0.20 & -0.12 & -0.02 \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} 0.29 & 0.65 & 0.28 & 0.62 \\ 0.12 & 0.27 & 0.12 & 0.26 \\ 0.33 & 0.74 & 0.32 & 0.71 \\ 0.14 & 0.33 & 0.14 & 0.32 \end{bmatrix}$	
Φ_3	$\begin{bmatrix} 0.14 & -0.17 & 0.0 & -0.34 \\ 0.05 & (-0.82) & -0.02 & -0.15 \\ -0.42 & 0.85 & -0.07 & -0.01 \\ (-0.31) & 0.02 & -0.02 & -0.36 \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} 0.28 & 0.72 & 0.27 & 0.62 \\ 0.12 & 0.31 & 0.11 & 0.26 \\ 0.33 & 0.83 & 0.31 & 0.72 \\ 0.14 & 0.36 & 0.13 & 0.31 \end{bmatrix}$	

Aunque en este trabajo el objetivo es poder predecir la inflación, en la tabla siguiente se muestra el pronóstico a cuatro trimestres de cada una de las variables incluidas en este estudio.

Tabla 10.
Pronóstico de un modelo VAR(3).

Paso	1	2	3	4
Pronóstico $\Delta LINF$	0.02	-0.15	-0.03	-0.06
Error estándar	-0.28	-0.35	0.37	-0.38
Pronóstico $\Delta LPIB$	-0.03	-0.17	0.17	-0.03
Error estándar	-0.14	-0.18	0.17	-0.20
Pronóstico $\Delta LPRP$	-0.19	0.19	0.19	-0.01
Error estándar	-0.38	-0.03	-0.06	-0.50
Pronóstico ΔLTD	0.19	-0.05	0.14	-0.16
Error estándar	0.17	-0.22	0.06	-0.27

En vista de que estas son las predicciones de la serie transformada previamente bajo diferenciación logarítmica, es decir, de $\Delta Ly_t = Ly - Ly_{t-1}$, se puede recuperar la predicción de la serie original y_t a través la suma del término Ly_t y aplicando la función exponencial a ambos lados de la igualdad, mas la consideración del erro de predicción. Así, se tiene que las predicciones a 1,2,3 y 4 pasos para la inflación son:

y_{t+1}	y_{t+2}	y_{t+3}	y_{t+4}
2.26	2.23	2.19	2.15

Considerando estos resultados con los datos de la inflación para estos trimestres, se observo que las predicciones para estos trimestres son bastante buenas. Esto comprueba una vez mas la eficacia de estos modelos VAR.

A pesar que en general, cuando los criterios de selección del retardo óptimo especifican un modelo VAR(3) se deben utilizar los tres retardos, restringiremos de este modelo aquellos coeficientes que no son significativos en la predicción. La tabla (6) muestra los resultados de la estimación de los coeficientes del modelo VAR(3) restringido.

Tabla 11.
Resultados de la estimación de un modelo VAR(3) en diferencias.

Parámetros	Estimación	Error estandar
Modelo simplificado		
ϕ_0	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ 0.01 \end{bmatrix}$
Φ_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.28 & 0 \\ 0 & 0 & -0.26 & -0.72 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & 0.26 & - & - \\ - & - & 0.24 & - \\ - & - & 0.15 & 0.13 \end{bmatrix}$
Φ_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.31 & 0.51 & 0.27 & 0.33 \\ - & 0.18 & - & - \\ - & - & 0.17 & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix}$
Φ_3	$\begin{bmatrix} -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.31 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.62 & 0.23 & 0.49 & - \\ 0.12 & 0.37 & - & - \\ - & - & - & - \\ 0.28 & - & - & - \end{bmatrix}$

La tabla (12) muestra los tests de diagnóstico sobre los residuos del modelo VAR(3) restringido, en la cual se observa que los residuos:

- No son normales.
- No están correlacionados serialmente.
- Tienen varianza constante.

Tabla 12.
Tests de diagnóstico de los residuos.

	Chi-Cuadrado	Probabilidad
Normalidad	23.1076	0.003229
autocorrelación	163.5108	0.99
heterocedasticidad	210	1

Tabla 13.
Pronóstico de un modelo VAR(3) EN DIFERENCIA

Paso	1	2	3	4
Pronóstico $\Delta LINF$	-0.0314	-0.0074	-0.0017	-0.0004
Error estándar	-0.26	-0.27	-0.27	-0.26
Pronóstico $\Delta LPIB$	-0.0077	-0.0895	0.0839	0.0028
Error estándar	-0.13	-0.14	0.02	-0.15
Pronóstico $\Delta LPRP$	-0.094	0.052	0.125	0.034
Error estándar	-0.32	-0.24	-0.12	-0.34
Pronóstico ΔTD	0.0759	-0.0021	0.0213	-0.0442
Error estándar	-0.03	-0.23	-0.21	-0.27

3.4.5 Síntesis de las relaciones dinámicas obtenidas en el modelo VAR estándar

Considerando los valores significativos de los parámetros estimados para cada una de las ecuaciones podemos concluir que:

1. Para la ecuación de la inflación, es notorio el pobre poder explicativo que tienen los retardos de las demás variables, así como sus propios retardos para el período bajo estudio, es decir que la ecuación estimada para la inflación no presenta parámetros significativos, ni de la serie retardada, ni de los retardos de las demás series.
2. Para la ecuación de los precios del petróleo, se observa que ésta presenta solamente el primer retardo de su serie como parámetro significativo.
3. La ecuación de la tasa de desocupación presenta un retardo de cada variable como parámetro significativo, excepto del producto interno bruto, lo que indica que no hay ninguna relación entre la tasa de desocupación y el producto interno bruto.
4. En cuanto a la ecuación estimada para el producto interno bruto, la variable que con mayor significación la explica son sus propios rezagos, lo cuál implica que hay cierta persistencia de la serie a lo largo del tiempo.

3.5 Estimación del model VAR Estructural

En esta sección se estima un modelo VAR Estructural (SVAR), con la finalidad de explicar la dinámica de ajuste de la inflación en Venezuela, en respuesta a los shocks estructurales sobre las demás variables incluidas en este estudio. Para ello, se aplican restricciones a largo plazo de las variables.

A continuación, nos detenemos en el problema de identificación y estimación del VAR estructural, teniendo en cuenta que es una de las dificultades de fondo que se debe superar para llevar a cabo este trabajo.

Partiremos del sistema estacionario, \mathbf{y}_t , y de un vector de perturbaciones estructurales $\boldsymbol{\xi}_t$:

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \Delta LINF \\ \Delta LPIB \\ \Delta LPRP \\ \Delta LTD \end{bmatrix}; \boldsymbol{\xi}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}^{INF} \\ \boldsymbol{\xi}^{PIB} \\ \boldsymbol{\xi}^{PRP} \\ \boldsymbol{\xi}^{TD} \end{bmatrix}$$

Dado \mathbf{y}_t , un vector que contiene las variables endógenas del sistema, recordemos que un modelo SVAR en particular puede generarse partiendo de la siguiente igualdad:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}_t \quad (3.1)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ representa un vector de residuos de la forma estándar (o forma reducida), mientras que $\boldsymbol{\xi}_t$ es un vector de innovaciones estructurales no observadas. \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices de dimensión k a ser estimadas. Específicamente tenemos que \mathbf{A} es una matriz de relaciones contemporáneas entre las variables endógenas y \mathbf{B} es una matriz que permite a los shocks estructurales tener efectos sobre más de una variable endógena. Según el método de Blanchard y Quah, este supone que $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ lo que implica que no existan relaciones contemporáneas entre las variables endógenas. Dado que los choques estructurales son concebidos como variables exógenas que influyen sobre las variables endógenas del sistema según la relación $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, postmultiplicando 3.2 por \mathbf{B}^{-1} , obtenemos el siguiente resultado:

$$\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}\boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.2)$$

el desarrollo matricial 3.2 permite, de esta manera recuperar los errores estructurales del modelo.

En nuestro modelo, las restricciones (no recursivas) a imponer sobre los parámetros estructurales contemporáneos, se basan en los siguientes supuestos:

- La inflación sería afectada contemporáneamente por los cambios en el producto interno bruto y por la tasa de desempleo.
- El precio del petróleo será influenciado por sus propios retardos y por cambios en la tasa de desocupación.
- Los precios del petróleo responderían con algún retraso a los cambios en la Inflación y en la tasa de desempleo, es decir que contemporáneamente estas variables no afectarían al precio del petróleo.
- La tasa de desocupación sería afectada por cambios en sus propios retardos, en la inflación y en el producto interno bruto.

Las restricciones indicadas precedentemente podrían formalizarse como,

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{INF} \\ \epsilon^{PIB} \\ \epsilon^{PRP} \\ \epsilon^{TD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & 0 & \alpha_{1,4} \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_{2,4} \\ 0 & \alpha_{3,2} & 1 & 0 \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \xi^{INF} \\ \xi^{PIB} \\ \xi^{PRP} \\ \xi^{TD} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

De esta forma la inflación se vería influenciada contemporáneamente por el producto interno bruto, la tasa de desocupación y sus propios retardos.

La condición de orden exige que el número de restricciones impuestas, en este caso de largo plazo, deben ser iguales a $k(k-1)/2$, siendo k el número de variables del sistema. De esa forma, el número de restricciones impuestas, satisface tal condición.

3.5.1 Resultados

Con el fin de determinar la contribución de distintos shocks a las variables de interés, se analizaron las funciones de impulso respuesta y la descomposición de la varianza para cada una de las series, considerando varios trimestres.

3.5.2 Análisis de Impulso Respuesta en el sistema

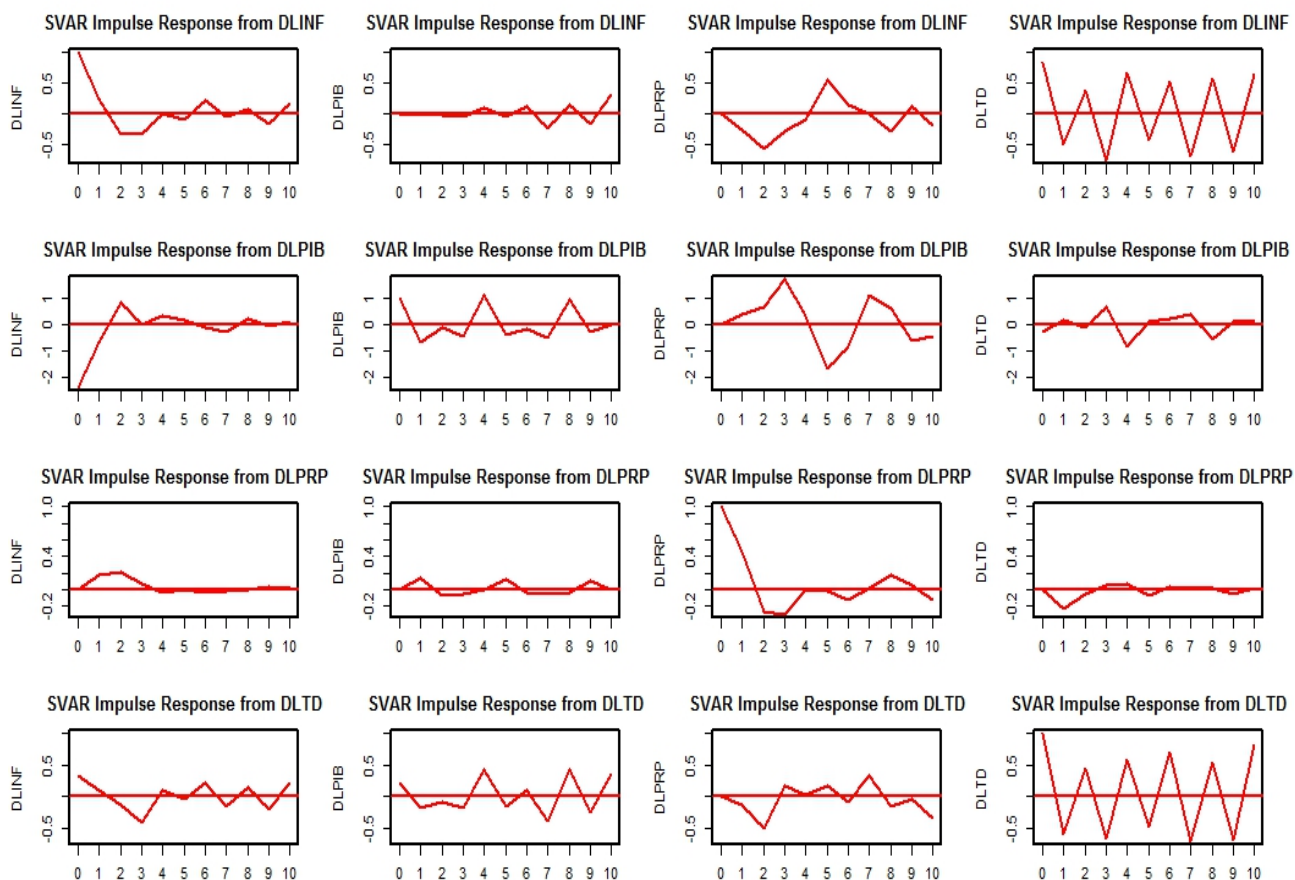
Las cuatro gráficas que se muestran posteriormente, muestran las respuestas acumuladas de cada una de las variables, frente a un shock estructural inicial en cada una de las variables del sistema.

Las cuatro gráficas en la primera columna, revela la respuesta acumulada de la serie inflación ante los cuatro *shocks* considerados. Se observa que tanto el *shock* en la inflación como en la tasa de desocupación, reducen la inflación en el largo plazo.

Los shocks en el producto interno bruto y en la tasa de desempleo también reducen la inflación en el corto, aunque en el largo plazo este efecto se diluye.

Grafico 9.

Análisis de Impulso Respuesta en el VAR Estructural



3.5.3 Descomposición de la varianza

Tabla 14.				
Error de pronóstico de la descomposición de la varianza.				
Serie $\Delta LINF$				
Período	Shock INF	Shock PIB	Shock PRP	Shock TD
1	14.765	83.671	0	1.562
2	15.253	81.245	0.408	1.583
3	14.142	83.032	0.956	1.425
4	15.144	80.239	0.842	3.562
10	15.291	78.665	0.915	5.127
Serie $\Delta LPIB$				
Período	Shock INF	Shock PIB	Shock PRP	Shock TD
1	0.023	95.362	0.763	4.931
2	0.390	93.103	1.291	5.733
3	0.009	92.298	1.391	5.645
4	0.205	91.273	1.408	6.431
10	2.676	82.359	1.096	13.866
Serie $\Delta LPRP$				
Período	Shock INF	Shock PIB	Shock PRP	Shock TD
1	0	0.102	99.124	0
2	4.326	10.458	83.816	1.350
3	14.995	12.098	51.024	11.211
4.012	39.162	4.098	0.023	56.001
10	7.486	76.086	12.027	4.08
Serie ΔLTD				
Período	Shock INF	Shock PIB	Shock PRP	Shock TD
1	39.023	4.865	0.422	56.911
2	38.922	3.451	2.633	55.142
3	38.927	4.191	1.908	55.011
4	38.002	12.637	1.993	47.738
10	37.634	17.442	0.722	44.203

Mientras que las funciones de impulso respuesta miden el comportamiento dinámico de las variables a partir de un shock estructural de un desvío estándar, el análisis del error de descomposición de la varianza permite distribuir la varianza el error de la predicción de cada variable en función de sus propios shocks y de las innovaciones en las restantes variables del sistema.

En otros términos, este análisis considera la importancia relativa de cada fluctuación aleatoria de las variables, de forma que la suma de estos porcentajes alcance a 100, tal como se muestra en la tabla (14), esto se debe a que los 'shocks' considerados no están correlacionados.

Según se observa de la tabla anterior, parece ser el caso que el shock en el producto interno bruto es la principal fuente de variación de la inflación y de sí mismo, tanto en el corto como en el largo plazo.

Los shocks en la inflación y en la tasa de desocupación, aparecen como la principal fuente de variación en la tasa de desocupación.

Por otra parte, se observa que los precios del petróleo y la tasa de desocupación resultan explicadas principalmente por sus propios shocks

I

Apéndice

A

Nociones básicas de Cointegración

A.0.4 Cointegración

La econometría de series temporales se encuentra con un problema al medir las relaciones entre aquellas variables que contienen una raíz unitaria. Este problema puede llegar a que se consideren significativas relaciones completamente espurias. El hallazgo de que la mayoría de las series cronológicas puedan contener una raíz unitaria ha estimulado el desarrollo de la teoría de análisis de series temporales no estacionarias.

Existe la creencia que ciertos pares de variables económicas no deberían divergir mucho una de otra durante mucho tiempo, al menos a largo plazo. Esto implicaría que, aunque crezcan en el tiempo t , lo hacen de una forma completamente acompañada, de forma que el error entre ambas no crece. La idea subyacente es la de cointegración, la cual permite especificar modelos que captan parte de tal relación.

Sea $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{kt})'$ un vector de series de tiempo $I(1)$, Engle y Granger (1987) señaló que una combinación lineal de estas series no estacionarias puede ser

estacionaria. Si existe un vector $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$ tal que la combinación lineal

$$\beta' \mathbf{y}_t \sim I(0)$$

se dice que las series están cointegradas.

La combinación lineal estacionaria se llama la ecuación de cointegración y puede ser interpretado como una relación de equilibrio de largo plazo entre las variables. El vector β recibe el nombre de vector de cointegración y puede haber $r < k$ vectores de cointegración linealmente independientes.

El análisis de la cointegración permite, entre otras cosas, detectar si existe la posibilidad de obtener estimaciones correctas, es decir, libres de resultados espurios de los parámetros que definen las relaciones entre dos o más series, tanto a corto como a largo plazo.

A.1 VAR Cointegrado

Al modelar varias series de tiempo no estacionarias de raíz unitaria en forma conjunta, se puede encontrarse con el caso de cointegración. Consideremos un modelo VAR(p) de una serie de tiempo \mathbf{y}_t de dimension k .

$$\mathbf{y}_t = \Phi \boldsymbol{\mu}_t + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

donde la innovación $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ es considerada un ruido blanco gaussiano y $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_1 t$ contiene los términos determinísticos (contante o una tendencia), donde $\boldsymbol{\mu}_0$ y $\boldsymbol{\mu}_1$ son vectores constantes de dimensión k . Recordemos que el modelo VAR(p) es estable si

$$\det(\mathbf{I}_n - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 - \dots - \Phi_p z^p) = 0$$

tiene todas las raíces fuera del círculo unitario complejo. En caso de tener una raíz en el círculo unitario entonces alguna o todas las variables en \mathbf{y}_t son $I(1)$. Recordemos que una serie \mathbf{y}_t está cointegrada si existe una combinación lineal entre las variables en \mathbf{y}_t que es $I(0)$.

Asumamos que \mathbf{y}_t es un proceso integrado de orden uno $I(1)$ y posiblemente cointegrado. En este caso, la representación VAR que conocemos no sería la más adecuada para el análisis, debido a que las relaciones de cointegración no son evidentes

de forma explícita. Las relaciones de cointegración se hacen evidentes si el modelo VAR(p) en niveles se transforma en el modelo vectorial de corrección de errores (VECM)

$$\Delta \mathbf{y}_t = \phi_0 \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \mathbf{y}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (\text{A.1})$$

donde $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 + \cdots + \boldsymbol{\Pi}_p - \mathbf{I}_k$ y $\boldsymbol{\Gamma}_k = -\sum_{i=k+1}^p \boldsymbol{\Pi}_i$, $k = 1, \dots, p-1$. La matriz $\boldsymbol{\Pi}$ es llamada la matriz de impacto a largo plazo y $\boldsymbol{\Gamma}_k$ la matriz de impacto de corto plazo. Se puede observar que los parámetros $\boldsymbol{\Phi}_i$ del modelo VAR se pueden recuperar por los parámetros del VECM a través de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_1 &= \boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\Pi} + \mathbf{I}_p \\ \boldsymbol{\Phi}_i &= \boldsymbol{\Gamma}_i - \boldsymbol{\Gamma}_{i-1}, \quad k = 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En el modelo de corrección de errores, $\Delta \mathbf{y}_t$ y sus retardos son $I(0)$. El término $\boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1}$ es el único que contiene variables $I(1)$ y para que $\Delta \mathbf{y}_t$ sea $I(0)$, debe suceder que, $\boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1}$ sea $I(0)$. De esta manera, $\boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1}$ debe contener las relaciones de cointegración si existen. Es por eso que dicho término es referido como el término de corrección del error, el cual es una clave muy importante en el estudio de cointegración. Es claro que si el proceso VAR tiene raíces unitarias, la matriz $\boldsymbol{\Pi}$ es singular. Si $\boldsymbol{\Pi}$ es singular, su rango será reducido, esto es que el $\text{rango}(\boldsymbol{\Pi}) = r < k$. Así que tendremos dos casos a considerar:

1. $\text{rango}(\boldsymbol{\Pi}) = 0$. Esto implica que $\boldsymbol{\Pi} = 0$ y \mathbf{y}_t es $I(1)$ y no cointegrado. El modelo de corrección de errores se reduce a un VAR($p-1$) en primeras diferencias

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

2. $0 < \text{rango}(\boldsymbol{\Pi}) = r < k$. Esto implica que \mathbf{y}_t es $I(1)$ con r vectores de cointegración linealmente independientes y $k - r$ tendencias estocásticas comunes. Así, como $\boldsymbol{\Pi}$ tiene rango r , puede ser escrito como el producto

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}'$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son matrices de orden $n \times r$ con $\text{rango}(\boldsymbol{\alpha}) = \text{rango}(\boldsymbol{\beta}) = r$.

Las filas de β' son los r vectores de cointegración y los elementos de α distribuyen el impacto de los vectores de cointegración para la evolución de $\Delta \mathbf{y}_t$. Así, el modelo de corrección del error se convierte en

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Es importante reconocer que la factorización $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}'$ no es única porque para cualquier matriz invertible $\boldsymbol{\Omega}$ de orden $k \times k$, se tiene que $\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^{-1} = \mathbf{I}$, por lo tanto tenemos que

$$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Omega})(\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Omega}^{-1})' = \boldsymbol{\alpha}^* \boldsymbol{\beta}^{*}$$

donde $\boldsymbol{\alpha}^*$ y $\boldsymbol{\beta}^*$ son de rango $n \times r$.

A.1.1 Test de cointegración

Ya especificado el término determinístico $\boldsymbol{\mu}_t$, el modelo de corrección de error cointegrado, denotado por $H(r)$, puede ser formulado con la condición que el rango de $\boldsymbol{\Pi}$ sea menor o igual a r . Esto crea un conjunto anidado de modelos

$$H(0) \subset H(r) \cdots \subset H(k)$$

donde $H(0)$ representa el modelo VAR no cointegrado con $\boldsymbol{\Pi} = 0$. Esta formulación anidada es conveniente para el desarrollo de un procedimiento secuencial para poner a prueba el número r de relaciones de cointegración.

Como el rango de la matriz de impacto a largo plazo $\boldsymbol{\Pi}$ nos da el número de relaciones de cointegración. Discutiremos el estadístico de ratio verosimilitud (LR) para determinar el rango de $\boldsymbol{\Pi}$. Este test esta basado en la estimación de los valores propios $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \cdots > \hat{\lambda}_k$ de la matriz $\boldsymbol{\Pi}$.

El estadístico Johansen's LR contrasta las siguientes hipótesis

$$H_0(r) : r = r_0 \text{ contra } H_1 : r > r_0$$

El estadístico LR , llamado es estadístico de la traza, esta dado por

$$LR_{trace}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i). \quad (A.3)$$

Si $\text{rang}(\mathbf{\Pi} = 0) = r_0$ entonces $\hat{\lambda}_{r_0+1}, \hat{\lambda}_{r_0+2}, \dots, \hat{\lambda}_{r_0+k}$ todos deben estar cerca de cero y LR_{trace} debe ser pequeño. Por el contrario, si el rango de $\mathbf{\Pi} > r_0$ entonces algún $\hat{\lambda}_{r_0+1}, \hat{\lambda}_{r_0+2}, \dots, \hat{\lambda}_{r_0+k}$ será distinto de cero (pero menor que uno) y $LR_{trace}(r_0)$ debe ser grande. La distribución asintótica nula de $LR_{trace}(r_0)$ no es chi - cuadrado, pero en lugar es una versión multivariante de la distribución de raíz unitaria Dickey -Fuller que depende de la dimensión $n - r_0$.

El procedimiento secuencial propuesto por johansen determina consistentemente el número de vectores de cointegración, primero prueba $H_0(r_0 = 0)$ frente a $H_1(r_0 > 0)$. Si la hipótesis nula no se rechaza entonces se concluye que no existen vectores de cointegración entre las k variables en \mathbf{y}_t . Si $H_0(r_0 = 0)$ se rechaza, se concluye que existe al menos un vector de cointegración y se procede a probar $H_0(r_0 = 1)$ contra $H_1(r_0 > 1)$. Si la hipótesis nula no se rechaza se concluye que hay solo un vector de cointegración. Si la hipótesis nula es rechazada entonces se concluye que hay al menos dos vectores de cointegración. El procedimiento secuencial se continua hasta que la hipótesis nula se acepte.

A.2 Estimación del modelo VECM

Debido a que los resultados del test de raíz unitaria realizados previamente indicaron que las series son integradas de primer orden, $I(1)$, será necesario realizar la prueba de cointegración de Johansen, que consiste fundamentalmente en determinar al menos una relación de equilibrio de largo plazo con las series en niveles, con el fin de discernir si debía estimarse un Modelo Vectorial de Corrección de Errores (VECM) estructural con las series en niveles, en vez de haber desarrollado la metodología VAR estructural con las series diferenciadas.

Se procede a aplicar el test de cointegración y sus resultados se plasman en la siguiente tabla.

H_o	<u>Test Estadístico</u>	<u>Valores Críticos</u>		
	p=4	10	5	1
$r = 0$	70.39	59.14	62.99	70.05
$r = 1$	39.22	39.06	42*.44	48.45*
$r = 2$	19.96	22.76	25.32	30.45
$r = 3$	5.89	10.49	12.25	16.26

Esta prueba indica solo hay una relación de cointegración entre las variables que se están estudiando en este trabajo. Por lo tanto, podemos concluir que las series cointegran. Esto implica que se deberá ajustar un Modelo de Corrección del Error con las series sin ser transformadas mediante diferenciación, pues contienen información útil.

Bibliografía

- Arango, L. and Posada, C. E. (2001). El desempleo en colombia. Technical Report-, Borradores Semanales de Economía, Banco de la República-Colombia, Colombia.
- Arango, M. M. and López, E. E. (1998). El producto potencial en colombia: una estimación bajo var estructural. Technical Report 94, Borradores Semanales de Economía, Banco de la República-Colombia, Colombia.
- Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, San Francisco, revised edition.
- Breitung, J., Brüggemann, R., and Lütkepohl, H. (2004). *Structural Vector Autoregressive Modeling and Impulse Responses*. Applied Time Series Econometrics. Cambridge.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflations. *Econometrica*, (50):987–1007.
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton Univeristy Press, New Jersey.
- Harmath, P. (2005). Desequilibrios reales en venezuela durante el período 1984-2004. Master's thesis, Escuela Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.
- Misas, M. and E., L. (2001). Desequilibrios reales en colombia. Technical Report-, Borradores Semanales de Economía, Banco de la República-Colombia, Colombia.
- Montes, M. G. (2012). Distribución y desempleo un modelo var estructural kaleckiano para colombia. Technical Report-, Colombia.

Sims, C. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica*, (48):1–48.

Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*. Jhon Wiley and Sons, New Jersey, second edition.

Zivot, E. and Wang, J. (2006). *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*. Springer Verlag, second edition.