UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

SOBRE EL PROBLEMA DE CONTORNO QUE INDUCE LA DISCRETIZACIÓN DE LAS FLUCTUACIONES GRAVITACIONALES DEL ESCENARIO RANDALL-SUNDRUM

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO POR
Br: RAFAEL A. CHAVEZ L.

COMO REQUISITO FINAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ÁREA DE CONOCIMIENTO: ECUACIONES DIFERENCIALES - ANÁLISIS FUNCIONAL

TUTOR: DR. ROMMEL GUERRERO
CO-TUTOR: DR. EBNER PINEDA

Barquisimeto -Venezuela

Octubre 2013

Universidad Centroocidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento De Matemática del Decanato De Ciencias y Tecnología de la Universidad Central "Lisandro Alvarado"para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo especial de grado titulado :

"Sobre el problema de contorno
que induce la discretización de las fluctuaciones gravitacionales
del escenario Randall-Sundrum"

presentado por el ciudadano Br. (RAFAEL CHAVEZ) titular de la Cédula de Identidad No. (19.591.714), con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la defensa y en los términos que impone los lineamentos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

____

con una calificaión de __________ puntos
En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los __________ días del mes de __________ de __________

TUTOR	*FIRMA*
PRINCIPAL	*FIRMA*
PRINCIPAL	*FIRMA*

OBSERVACIONES:

____

Aprobado ó Reprobado

Agradecimientos

Al creador por darme lo que él crea necesario en mi vida, mi abuelo quien fue mi luz y primer guía, mi abuela por ser más que una segunda madre en mi vida y gracias a ambos por compartir el final de su tiempo conmigo, mi padre por enseñarme todo y más de lo que sabe de la vida, mi madre por que a pesar de todo siempre estas para mi cuando siempre te necesesite, mi familia por ser el motor de apoyo de mi vida.

A la UCLA por ser mi segunda casa siempre estaré eternamente agradecido por abrirme las puertas al conocimiento.

A Isabel por ponerme los pies sobre la tierra y mostrarme una vez mas que todo lo que brilla no es oro (pies en tierra y mirando al cielo).

A mis compañeros por ayudarme en todas y cada una de las etapas, también a los conocidos que compartieron materia conmigo por ayudarme a ver las cosas diferente.

A Shaday por ser uno de los más grandes compañeros y colegas éxitos en tu vida gracias por todo lo enseñado aun cuando diferimos en muchas cosas siempre fue bueno escuchar tu punto de vista.

A mi tutor Rommel Guerrero quien fue un guía mentor y apoyo en todo lo académico, por mostrarme el camino de la ciencia.

Al profesor Ebner Pineda que fue de gran ayuda en la elaboración de este proyecto un pilar en mi formación a el gracias por compartir mucho de su conocimiento.

Al personal de la biblioteca por su aporte, ayuda y dedicación a compartir su sabiduría

RESUMEN

En este trabajo se considera el problema de autovalores de segundo orden no homogéneo con condiciones de borde requerido para obtener el espectro de gravitones del escenario Randall-Sundrum II. Se encontró que para cada autovalor existen dos soluciones: clásica y la distribucional; y que para el caso particular donde la no-homogeneidad corresponde a una delta de Dirac la condición de solubilidad del sistema es equivalente a que la solución clásica se anule en el soporte de la delta. La demostracion de la equivalencia referida conllevo a revisar el Teorema Alternativo de Fredholm. Una prueba de este Teorema también se presenta

Índice general

Introducción

En el escenario Randall-Sundrum II [1] nuestro Universo es concebido como una hipersuperficie cuatro-dimensional inmersa en un espacio tiempo de alta dimensionalidad. El espectro de las fluctuaciones gravitacionales asociadas a este escenario, en las coordenadas adecuadas, sigue una ecuación de autovalores tipo Schödringer donde el modo cero se encuentra localizado alrededor de la hipersuperficie en correspondencia con un potencial Newtoniano y los modos masivos se propagan libremente por toda la estructura de alta dimensionalidad.

La ecuación de autovalores a la que hacemos referencia corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con condiciones de borde en el infinito, donde la no-homogeneidad es proporcional a una delta de Dirac con soporte sobre la hypersuperficie cuatro-dimensional. Ahora bien, tomando en cuenta que un problema de contorno no necesariamente tiene solución y de tenerla la unicidad podría no estar garantizada, a menos que las condiciones de solubilidad correspondientes sean satisfechas; es nuestro propósito analizar la existencia y unicidad del problema de autovalores en cuestión, determinando cuál es la condición de solubilidad asociada a la ecuación diferencial de interés.

Mostraremos que para cada autovalor de la ecuación de Schödringer existen dos soluciones: la clásica y la distribucional, y que la condición de solubilidad para el caso donde la no-homogeneidad corresponde a una delta es equivalente a que la solución clásica se anule en el soporte de la delta. La necesidad de esa condición se puede probar de manera sencilla - ver [2] - , la suficiencia es mucho más elaborada y se requiere del Teorema Alternativo de Fredholm para tal fin.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. Ya que manejaremos el concepto de solución clásica y solución distribucional a una ecuación diferencial, en el Capítulo 1 se presenta una breve revisón de la Teoría de Distribuciones, haciendo enfásis en las ecuaciones diferenciales desde el punto de vista distribucional. En el Capítulo 2 abordaremos el problema de contorno unidimensional indicando cuales son las condiciones que se deben cumplir para garantizar la existencia y unicidad de la solución correspondiente. En el Capítulo 3 se enunciará y probará el Teorema Alternativo de Fredholm de forma particular -apelando a un espacio de Hilbert finito dimensional - y luego de forma general - en un espacio cualquiera. Finalmente en el Capítulo 4 plantearemos el problemas de autovalores indicado arriba y determinaremos el espectro de autofunciones.

Capítulo 1

Elementos de teoría de distribuciones

1.1. Funciones de prueba

Definición 1.1 Una función prueba $\phi(x) = \phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sobre $\mathbb{R}^n$ es una función infinitamente diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$ y que es idénticamente nula fuera de un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$.

El espacio de todas las funciones de prueba sobre $\mathbb{R}^n$ las denotaremos por D. A K se le denomina el soporte de ϕ. A D se le conoce también como el espacio de las funciones infinitamente derivable con soporte compacto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 1.1 En $\mathbb{R}^n$, la función definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ exp(-\frac{1}{1-x^2}) & \text{si} \quad |x| < 1, \end{cases}$$

es una función de prueba. El soporte de $\phi(x)$ es $|x| \leq 1$.

1.2. Distribuciones

Definición 1.2 Diremos que f es una funcional lineal sobre D si existe una regla que asigna a cada $\phi(x) \in D$ un número real que denotaremos por $\langle f, \phi \rangle$[1], tal que

$$\langle f, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 \rangle = \alpha_1 \langle f, \phi_1 \rangle + \alpha_2 \langle f, \phi_2 \rangle,$$

con α_1 y α_2 reales.

Definición 1.3 Diremos que T es un funcional lineal continuo sobre el espacio vectorial D, si $\langle T, \phi_j \rangle$ converge a $\langle T, \phi \rangle$ siempre que $\{\phi_j\}$ converja a ϕ en el sentido usual de convergencia de funciones definidas en D. Denominaremos distribuciones a los funcionales lineales continuos sobre D y denotaremos por D' al espacio de las distribuciones.

El espacio de las distribuciones D' es también un espacio vectorial.

Definición 1.4 El soporte de una distribución T es el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual T se anula.

[1]la notación $\langle , \rangle$ en este capitulo se entenderá como la acción del funcional sobre la función prueba

Veamos algunos ejemplos de distribuciones.

Ejemplo 1.2 Sea $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones localmente integrables sobre $\mathbb{R}^n$, esto es, integrables sobre todo dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^n$. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces f define a la distribución $f : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ a través de

$$\phi(x) \to \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x)\phi(x), \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)$$

y hacemos la identificación

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x)\phi(x).$$

Decimos que la distribución así definida es regular.

Ejemplo 1.3 (Delta de Dirac)

1. En $\mathbb{R}$, la distribución $\delta_{(0)}$ es la distribución definida por

$$\langle \delta_{(0)}, \phi \rangle = \phi(0), \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}). \tag{1.1}$$

   El Soporte de $\delta_{(0)}$ es el punto 0 de $\mathbb{R}$. Con frecuencia se escribe $\delta_{(0)} = \delta(x)$.

2. La distribución de Dirac. $\delta_{(a)}$ con soporte en el punto a de $\mathbb{R}^n$, definida por

$$\langle \delta_{(a)}, \phi \rangle = \phi(a), \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

Vamos a demostrar a continuación que $\delta_{(0)}$ es un tipo de distribución que denominaremos singular, en contraposición a la ya definida distribuciones regulares. Supongamos por absurdo que δ fuese regular entonces debe existir una función $f(x)$ localmente integrable tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x)\phi(x) = \phi(0), \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Considérese la función de prueba dada por

$$\phi_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad |x| \geq a \\ exp(\frac{a^2}{|x|^2 - a^2}), & \text{si} \quad |x| < a \end{cases}$$

donde

$$\phi_a(0) = \frac{1}{e},$$

$$|\phi_a(x)| \leq \frac{1}{e}.$$

Se tiene

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x)\phi_a(x) \right| = \left| \int_{|x|<a} d^n x f(x) exp\left(\frac{a^2}{|x|^2 - a^2} \right) \right| \leq \frac{1}{e} \int_{|x|<a} d^n x |f(x)|.$$

Si $f(x)$ es localmente integrable entonces $\lim_{a \to 0} \int_{|x|<a} d^n x |f(x)| = 0$. Se sigue entonces que

$$\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x)\phi(x) = 0,$$

lo que contradice a (1.3).

1.3. Derivada de distribuciones

Definición 1.5 $\forall T \in D'$, la distribución $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ viene dada por

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi(x)\rangle_x = -\langle T, \frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)\rangle_x, \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{1.4}$$

1.4. Ecuaciones diferenciales en distribuciones

1.4.1. La ecuación diferencial $u' = f$ en $\mathbb{R}$

Consideremos primero la ecuación homogénea

$$u' = 0. \tag{1.5}$$

Donde prima significa derivada con respecto a x. Considérese como una ecuación diferencia distribucional sobre la recta real. Por definición esto significa que estamos buscando una distribución u tal que

$$\langle u, \phi' \rangle = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{1.6}$$

La ecuación (1.6) nos dice que la acción de u es 0 sobre cualquier función prueba que sea la derivada de alguna función de prueba. Por supuesto no toda función prueba tiene esta propiedad. Por ejemplo, la función de pruebas (1.1) no es la derivada de una función prueba. En efecto cualquier antiderivada $F(x)$ de (1.1) tendrá $F(\infty) \neq F(-\infty)$.

Sea $M \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$ constituido por los elementos que corresponden a la derivada de elemento de $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Entonces se tiene los siguientes lemas.

Lema 1.1 Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Entonces $\phi \in M$ si y solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi dx = 0. \tag{1.7}$$

Prueba.

a) Si $\phi \in M$, entonces $\phi = \chi'$, donde χ pertenece a $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Se deduce que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \chi]_{\infty}^{\infty} = 0$, tal que (1.7) es satisfecha.

b) Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, y sea $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 0$. Definimos $\chi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(s)ds$; entonces χ es infinitamente diferenciable y χ se anula fuera de un intervalo acotado por (1.7). Por tanto χ es una función de prueba; donde $\chi' = \phi$, χ también pertenece a M.

Lema 1.2 Sea $\phi_0(x)$ una función de prueba fija (pero arbitraria) tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)dx = 1$. Entonces para cada $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ hay una única constate a y un único elemento ψ en M tal que

$$\phi(x) = a\phi_0 + \psi(x). \tag{1.8}$$

Prueba.
Seleccionemos $a = \langle 1, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx$, definamos $\psi = \phi - a\phi_0$ tal que (1.8) es satisfecha. De la definición de ψ, podemos ver que esta es una función de prueba y que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi dx = 0$. Por tanto $\psi \in M$. La prueba de la unicidad. Supongamos que existe otro elemento en M

digamos γ definida por $\gamma = \phi - a\phi_0$ como a es única, ϕ_0 esta fija y además $\int_{-\infty}^{\infty} \gamma = 0$ así se obtiene que $\gamma = \psi$.

Ahora estamos listos para resolver (1.5). Si u es cualquier distribución, entonces de (1.8)

$$\langle u, \phi \rangle = a\langle u, \phi_0 \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \phi dx = \langle c, \phi \rangle,$$

donde c es una constante $\langle u, \phi_0 \rangle$. Por tanto hemos demostrado que solo una distribución constante puede dar solución a (1.5).

Siguiendo ahora con la ecuación no-homogénea

$$u' = f, \tag{1.9}$$

donde f es una distribución arbitraria dada. Por definición una distribución u satisface (1.9) si y solo si

$$\langle u, \phi' \rangle = -\langle f, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Para encontrar la solución general a (1.9) usaremos la descomposición (1.8) escribiendo

$$\langle u, \phi \rangle = a\langle u, \phi_0 \rangle + \langle u, \psi\prime \rangle,$$

donde $\psi \in M$, diremos que $\psi = \chi'$, $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$. La expresión explícita para χ en términos de ϕ es

$$\chi = \int_{-\infty}^{x} \psi(s) ds = \int_{-\infty}^{x} \phi(s) ds - \langle 1, \phi \rangle \int_{-\infty}^{x} \phi_0(s) ds,$$

donde u es solución de (1.9),

$$\langle u, \psi \rangle = \langle u, \chi' \rangle = -\langle f, \chi \rangle,$$

y por tanto

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle \langle 1, \phi \rangle - \langle f, \chi \rangle.$$

Así pues, existe una distribución u_p tal que

$$\langle u_p, \phi \rangle = -\langle f, \chi \rangle. \tag{1.10}$$

En efecto χ es una función de prueba que depende linealmente de ϕ, tal que (1.10) define un funcional lineal en el espacio de las funciones prueba $\phi(x)$. Si $\{\phi_m\}$ es una secuencia nula en $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, también lo es $\{\psi_m\}$ y $\{\chi_m\}$; por tanto el funcional definido por (1.10) es continuo, en otras palabras, una distribución. Así toda solución de (1.9) es de la forma

$$\langle u, \phi \rangle = c\langle 1, \phi \rangle + \langle u_p \phi \rangle,$$

y es fácil verificar que toda distribución de esta forma es en efecto una solución.

1.4.2. La fórmula de Green y la identidad de Lagrange

Consideremos el operador diferencial de orden 2 dado por

$$L = a_2(x)D^2 + a_1 D(x) + a_0(x), \tag{1.11}$$

donde $D = d/dx$ y los coeficientes $a_k \in C^2(\mathbb{R})$. Partiendo de

$$\int_a^b vLudx = \int_a^b (va_2u'' + va_1u' + va_0u)dx, \tag{1.12}$$

donde u, v son funciones arbitrarias en $C^2(\mathbb{R})$, integramos por partes, la diferenciación es traslada a v. De manera que se tiene

$$\int_a^b vLudx - \int_a^b uL^*vdx = J(u,v)]_a^b, \tag{1.13}$$

donde el operador L^*, conocido formalmente como el adjunto de L, esta dado por

$$L^* = a_2D^2 + (2a_2' - a_1)D + (a_2'' - a_1' + a_0), \tag{1.14}$$

y la forma bilineal J, la conjunción de u y v, es

$$J(u,v) = a_2(vu' - uv') + (a_1 - a_2')uv. \tag{1.15}$$

Ya que (1.13) es válida para cualquier límite superior b, entonces haciendo $b = x$ obtenemos

$$vLu - uL^*v = \frac{d}{dx}J(u,v), \tag{1.16}$$

esta última ecuación es conocida como la identidad de Lagrange. La integral (1.13) es llamada la fórmula de Green.

Si el operador L y L^* coinciden, diremos formalmente que L es autoadjunto; en nuestro caso de un operador diferencial de segundo orden, L es autoadjunto si y solo si

$$a_2' = a_1, \quad \text{tal que} \quad Lu = D(a_2Du) + a_0u. \tag{1.17}$$

Para un operador autoadjunto (que satisface (1.17)), tenemos las siguientes simplificaciones

$$J(u,v) = a_2(vu' - uv'), \tag{1.18}$$

$$vLu - uLv = \frac{d}{dx}J(u,v), \tag{1.19}$$

$$\int_a^b (vLu - uLv)dx = J(u,v)]_a^b. \tag{1.20}$$

Por supuesto si L no satisface (1.17), usaremos las otras fórmulas las que involucran L^* la generalización a operadores diferenciables de orden p pude ser consultada en [2].

1.4.3. La soluciones clásica, débil y distribucional

Consideremos a la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{du}{dx} = f(x), \quad \text{en el intervalo } \Omega \quad a < x < b. \tag{1.21}$$

Si $f(x)$ es una función continua, podemos definir la noción de solución en el sentido clásico: $u(x)$ es una solución clásica si esta tiene una derivada continua la cual satisface (1.21) punto a punto en Ω. Denotando las funciones de prueba clásicas con soporte en Ω por $C_0^\infty(\Omega)$, encontramos que, para cualquier solución clásica de (1.21),

$$\int_\Omega f\phi dx = -\int_\Omega u\frac{d\phi}{dx}dx, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.22}$$

el resultados se obtiene luego de integrar por parte y hacer uso del echo de que $\phi \equiv 0$ en una vecindad acotada. El segundo termino de (1.22) tiene sentido incluso si f y u son solamente localmente integrable. Esto conduce a la definición de una solución débil de (1.21). Si f es localmente integrable, una función u localmente integrable es una solución débil de (1.21) si y solo si esta satisface (1.22) para cada ϕ en $C_0^\infty(\Omega)$. Si u es una solución débil de (1.21), también diremos que $du/dx = f$ en el sentido débil.

La ecuación (1.21) también puede ser interpretada distribucionalmente. Si f es una distribución, diremos que una distribución u es una solución de (1.21) si y solo si

$$-\langle u, \frac{d\phi}{dx}\rangle = \langle f, \phi\rangle, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.23}$$

Note que el lado izquierdo es la definición de la distribución u'. Si f es una distribución generada por una función localmente integrable y si estamos buscando una solución u que sea una función, (1.23) se reduce a (1.22), que es, el concepto de una solución débil. Consulte [2] para la extensión de estos conceptos a operadores de orden p.

Considere la ecuación diferencial

$$Lu = f, \quad x \in \Omega, \tag{1.24}$$

donde f es una distribución dada. Lo que necesitamos es que la distribución Lu y f coincidan en Ω.

Definición 1.6 Una distribución u es una solución de (1.24) en Ω si

$$\langle u, L^*\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.25}$$

Definición 1.7 Sea f localmente integrable. Una función localmente integrable u la cual satisface (1.25) se dice que es una solución débil de (1.24) en Ω.

Observación 1.1 Si $f(x)$ es una función continua, podemos dar una interpretación clásica a (1.24). La función $u(x)$ es una solución clásica de (1.24) si esta en $C^p(\Omega)$, la clase de funciones con derivadas continuas hasta el orden p y estas satisfacen (1.24) en todo punto de Ω. Donde funciones pueden también ser interpretadas como una distribución, nos gustaría compara las dos nociones de solución: solución débil y solución clásica.

Teorema 1.1 Sea $f(x)$ continua en Ω. Entonces:

a) Una solución clásica de (1.24) en Ω es también una solución débil.

b) Cualquier solución débil en Ω que tenga p derivadas continuas es una solución clásica.

Prueba.
(a) Sea u una solución clásica en Ω y sea ϕ una función prueba con soporte en Ω. Entoneces

$$\langle u, L^{*}\phi\rangle = \int_{\Omega} uL^{*}\phi dx,$$

puede ser integrada por la formula de Green. El soporte de ϕ esta en Ω, ϕ se anula en una vecindad de Γ tal que ϕ y todas si derivadas se anulan en Γ. Esto garantiza que $J(u,\phi) = 0$ en Γ, y por tanto

$$\langle u, L^{*}\phi\rangle = \int_{\Omega} \phi Ludx.$$

Donde $Lu = f$ en todo punto de Ω, obteniendo

$$\langle u, L^{*}\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle \quad \forall\phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

(b) Supongamos $\langle u, L^{*}\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle$ para ϕ con soporte en Ω. Ya que u tiene derivadas continuas hasta el orden p, podemos usar la fórmula de Green en Ω. Otra vez obteniendo $J = 0$ en Γ, tal que

$$0 = \int_{\Omega} \phi q dx \quad \forall\phi \in C_0^{\infty}(\Omega), \tag{1.26}$$

donde q es la función continua $Lu - f$. Mostraremos que (1.26) implica que $q \equiv 0$ en Ω. Supongamos por absurdo que $q(x_0) \neq 0$ con $x_0 \in \Omega$. Sin perdida de generalidad supongamos que $q(x_0) > 0$. Donde q es continua, podemos encontrar una bola centrada en x_0, totalmente contenida en Ω, tal que $q > 0$ en la bola. También podemos construir una función de prueba ϕ positiva en la bola y cero fuera de ella. Para esta ϕ tendríamos $\int_{\Omega} \phi q dx > 0$, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto $q = Lu - f = 0$ para todo punto en Ω, y u es una solución clásica de (1.24) en Ω.

1.4.4. La solución fundamental

Consideremos la ecuación diferencial el conjunto $\mathbb{R}^n$, esto es $\Omega = \mathbb{R}^n$. Un método poderoso para estudiar tales ecuaciones es basado en la solución fundamenta.

Definición 1.8 Una solución fundamental par L con una singularidad en ξ es una solución de la ecuación

$$Lu = \delta_{\xi}(x) = \delta(x - \xi), \tag{1.27}$$

donde ξ es considerado como un parámetro.

Observación 1.2

1. La ecuación (1.27) es interpretada en el sentido de las distribuciones. una solución de (1.27) es denotada por $E(x,\xi)$. Esta es una distribución en x en función del parámetro ξ. A menudo (pero no siempre) E corresponde a una función localmente integrable en x. E satisface (1.27) si y solos si
$$\langle E, L^*\phi\rangle = \phi(\xi) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.28}$$

2. La ecuación (1.27) usualmente tiene muchas soluciones diferentes una de las otras para una solución de la ecuación homogénea. Para problemas donde $\mathbb{R}^n$ puede ser interpretado como un espacio geométrico isotropico a menudo podemos seleccionar una solución apelando a la simetría y su comportamiento en infinito.

3. Si L tiene coeficientes constantes, es suficiente encontrar la solución fundamental en 0, esto es, $E(x,0)$ y entonces trasladarla para obtener la solución el punto ξ;
$$E(x,\xi) = E(x-\xi,0).$$
La solución fundamental $E(x,0)$ también la denotada por $E(x)$.

Capítulo 2

El problema de contorno unidimensional

Este Capítulo está soportado en las referencias [2, 3]

2.1. Ecuaciones diferenciales clásicas

Considere la ecuación diferencial $Lu(x) = f(x)$ definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. En general, L es un operador lineal de orden p, u una función en $C^{p-1}(\mathbb{R})$ y $f(x)$ es la no-homogeneidad de la ecuación. Podemos expresar a L de la siguiente forma

$$L = a_p(x)\frac{d^p}{dx^p} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0, \tag{2.1}$$

donde los coeficientes $a_k(x)$ son continuos en un intervalo cerrado $\bar{I}$, y el coeficiente $a_p(x) \neq 0\ \forall x \in \bar{I}$. (Las singularidades estarán identificadas con aquellos puntos x_0 donde $a_p(x_0) = 0 \in \bar{I}$).

Suponiendo que $f(x)$ es continua a trozos en $\bar{I}$, $u(x)$ será una solución clásica del problema si posee $p-1$ derivadas continuas y si adicionalmente, la derivada de orden p es continua a trozo en $\bar{I}$, de tal manera que la ecuación es satisfecha en todo punto del intervalo cerrado.

Sabemos que $Lu(x) = f(x)$ admite una solución general que involucra p constantes arbitrarias. Así pues, si imponemos p condiciones adicionales, generalmente conocidas como condiciones de borde, uno podría espera una solución específica al problema; en particular, esto está garantizado cuando se indica el valor de u y sus $p-1$ derivadas en un punto $x_0 \in \bar{I}$.

Teorema 2.1 Sea el operador diferencial (2.1) tal que $a_p \neq 0$ en $\bar{I}$; sea x_0 un punto fijo en $\bar{I}$; sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ números reales; y sea $f(x)$ continua a trozos en $\bar{I}$. El problema de valores iniciales (PVI)

$$Lu = f, \quad x \in \bar{I}; \quad u(x_0) = \gamma_1, u'(x_0) = \gamma_2, \ldots, u^{p-1}(x_0) = \gamma_p \tag{2.2}$$

tiene una y solo una solución clásica.

Observación 2.1

1. Nos referiremos a (2.2) como el PVI con dato $\{f(x);\gamma_1,\dots,\gamma_p\}_{x_0}$.
2. La única solución al PVI completamente homogéneo, es decir con datos $\{0;0,\dots,0\}$, es la trivial $u(x)=0$.

2.1.1. Dependencia lineal y Wronskiano

Diremos que un conjunto de funciones son linealmente dependientes sobre I si existe p constantes $c_1,\dots,c_p$, no todas nulas, tal que

$$c_1u_1(x)+\cdots+c_pu_p(x)=0 \quad texten \quad I. \tag{2.3}$$

Por tanto, un conjunto de p funciones es linealmente dependiente si cualquiera de ellas puede ser expresada como una combinación lineal de las otras. Un conjunto de p funciones es linealmente independiente sobre I si (2.3) únicamente se satisface en el caso $c_1=\cdots=c_p=0$.

Sea $u_1,\dots,u_p$ en $C^{p-1}(\mathbb{R})$. El Wronskiano de $u_1,\dots,u_p$ es una función de x definida por el determinante $p\times p$ de las $u_1,\dots,u_p$ funciones y sus $p-1$ derivadas, esto es

$$W(u_1,\dots,u_p;x)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_p \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_p' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(p-1)} & u_2^{(p-1)} & \cdots & u_p^{(p-1)} \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

En particular, el Wronskiano de u_1 y u_2 es

$$W(u_1,u_2;x)=u_1(x)u_2'-u_1'(x)u_2(x). \tag{2.5}$$

Si $u_1,\dots,u_p$ son dependientes en I, entonces el Wronskiano es idénticamente nulo en I. El recíproco no es cierto.

Teorema 2.2 Sean $u_1,\dots,u_p$ soluciones de $Lu=0$. La condición necesarias y suficiente para que las p funciones sean dependientes es que el Wronskiano se anule en algún $x_0\in I$.

Prueba.
Si $u_1,\dots,u_p$ son dependientes, es claro que $W\equiv 0$ en I y por tanto se anulan en x_0. Si $W(u_1,\dots,u_p;x_0)=0$, tenemos precisamente la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución no trivial $(c_1,\dots,c_p)$ a el conjunto de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} c_1u_1(x_0)+ \quad & c_2u_2(x_0)+ \quad \cdots + \quad c_pu_p(x_0)=0,\\ &\vdots \\ c_1u_1^{(p-1)}(x_0)+ \quad & c_2u_2^{(p-1)}(x_0)+ \quad \cdots + \quad c_pu_p^{(p-1)}(x_0)=0. \end{aligned}$$

Sean $(c_1,\dots,c_p)$ una solución no trivial a este conjunto de ecuaciones, y sea $U(x)=c_1u_1(x)+\cdots+c_pu_p(x)$. Claramente U es una solución de la ecuación diferencias homogénea satisfaciendo las condiciones iniciales $U(x_0)=U'(x_0)=\cdots=U^{(p-1)}(x_0)=0$. Por el teorema (2.1), $U\equiv 0$ y se concluye que el conjunto $(u_1(x),\dots,u_p(x))$ es dependiente.

Teorema 2.3 Sean $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_p(x)$ las respectivas soluciones al (PVI) con datos $\{0;1,0,\ldots,0\}_{x_0}$, $\{0;0,1,\ldots,0\}_{x_0}, \ldots, \{0;0,0,\ldots,1\}_{x_0}$, esto es, u_k es la solución de la ecuación homogénea con dato inicial 0 en x_0 excepto en $u^{k-1}(x_0) = 1$, entonces el conjunto $(u_1, \ldots, u_p)$ son independiente en I, y cada solución de $Lu = 0$ puede ser escrita de la forma $u = c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p$ para algunas constantes $c_1, \ldots, c_p$.

Prueba.
El Conjunto $(u_1, \ldots, u_p)$ es independiente ya que su Wronskiano es igual a 1 en x_0. Si $u(x)$ es cualquier solución de $Lu = 0$, podremos escribir $u(x) = u(x_0)u_1(x) + u'(x_0)u_2(x) + \cdots + u^{(p-1)}(x_0)u_p(x)$, lo cual es la forma deseada.

Observación 2.2 Un conjunto $(u_1, \ldots, u_p)$ de soluciones en $C^{p-1}(I)$ de la ecuación diferencial homogénea de orden p, $Lu = 0$, es una base para el espacio solución de la ecuación si y solo si su Wronskiano nunca se hace cero en I.

2.2. La ecuación no-homogénea

Observación 2.3 El principio de superposición afirma que cuando las ecuaciones que rigen un problema físico son lineales, entonces el resultado de una medida o la solución de un problema relacionado con una magnitud asociada al fenómeno, cuando están presentes los conjuntos de factores causantes A y B, puede obtenerse como la suma de los efectos de A más los efectos de B.

Sea $a_p \neq 0$ en $-\infty < x < \infty$, y sea $u_\xi(x)$ la solución de la ecuación homogénea tal que satisface las condiciones iniciales $u_\xi(\xi) = 0$, $u'_\xi(\xi) = 0, \ldots, u_\xi^{(p-2)}(\xi) = 0, u_\xi^{(p-1)}(\xi) = 1/a_p(\xi)$. Ya hemos visto (por lo menos en el caso donde los coeficientes son infinitamente diferenciable) que $E(x,\xi) = H(x-\xi)u_\xi(x)$ es la solución distribucional (fundamental) que satisface, en el sentido distribucional, $LE = \delta(x-\xi)$ con $E = 0$, $x < \xi$. Incluso si los coeficientes de L son solamente continuos, todavía se define la solución fundamental como $H(x-\xi)u_\xi(x)$. Por superposición uno puede entonces expresar la solución de

$$Lu = f,\ x > a;\ u(a) = 0, \ldots, u^{p-1}(a) = 0,$$

de la siguiente manera

$$u(x) = \int_a^\infty H(x-\xi)u_\xi(x)f(\xi)d\xi = \int_a^x u_\xi(x)f(\xi)d\xi. \tag{2.6}$$

Teorema 2.4 Si $a_p(x) \neq 0$ en $-\infty < x < \infty$, la única solución del problema de condiciones iniciales (PVI) con datos $\{f;0,\ldots,0\}_a$ es

$$u(x) = \int_a^x u_\xi(x)f(\xi)d\xi, \tag{2.7}$$

donde $u_\xi(x)$ es la solución al PVI homogéneo dado por

$$Lu = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad u(\xi) = 0, \ldots, u(\xi)^{p-2}(\xi) = 0, u^{p-1}(\xi) = \frac{1}{a_p(\xi)}. \tag{2.8}$$

Prueba.
Tenemos que $u(a)=0$ y $u'(x)=u_x(x)f(x)+\int_a^x u'_\xi(x)f(\xi)d\xi$ tal que $u'(a)=0$. Ya que $u_x(x)=\cdots=u_x^{(p-2)}=0$, se tiene que

$$\begin{aligned} u^k(x) &= u_x^{(k-1)}(x)f(x)+\int_a^x u_\xi^{(k)}(x)f(\xi)d\xi, \quad (2.9)\\ &= \int_a^x u_\xi^{(k)}(x)f(\xi)d\xi \quad k=1,2,\ldots,p-1. \quad (2.10)\end{aligned}$$

Así $u^k(a)=0$ para $k=1,2,\ldots,p-1$. También note que

$$u^p(x) = u_x^{p-1}(x)f(x)+\int_a^x u_\xi^{(p)}(x)f(\xi)d\xi=\frac{f(x)}{a_p(x)}+\int_a^x u_\xi^{(p)}(x)f(\xi)d\xi. \quad (2.11)$$

Por tanto $Lu=a_p(x)u^{(p)}+\cdots+a_0(x)u=f(x)+\int_x^x Lu_\xi(x)f(\xi)d\xi=f(x)$, debido a que $Lu_\xi=0$. Observe que no hemos utilizado el echo de que $x>a$.

Observación 2.4 La solución al problema

$$Lu=f, \quad u(a)=\gamma_1;\ldots,u^{p-1}(a)=\gamma_p, \quad (2.12)$$

puede ser escrita como

$$u(x) = \int_a^x u_\xi(x)f(\xi)d\xi+\gamma_1 u_1(x)+\ldots+\gamma_p u_p(x), \quad (2.13)$$

donde $(u_1,\ldots,u_p)$ es la base del PVI completamente homogéneo.

2.3. Problema de contorno de $2do-$orden

En el PVI para una ecuación diferencial de segundo orden, $Lu(x)=f(x)$, $a<x<b$, basta con específicar u y u' en algún punto x_0 perteneciente al intervalo para determinar las solución del problema. Cuando las condiciones son indicadas en los bordes del intervalo, esto es en los puntos a y b, el problema se denomina de valores de contorno o borde (PVB) y a diferencia del PVI, la existencia y unicidad de la solución en general no están garantizadas.

Considere el siguiente PVB

$$Lu=a_2(x)u''+a_1(x)u'+a_0u=f(x), \quad a<x<b, \quad (2.14)$$

donde los coeficiente son continuos en $a\leq x\leq b$, $a_2(x)\neq 0$ en $a\leq x\leq b$ y $f(x)$ es continua a trozos en $a\leq x\leq b$. La solución $u(x)$ debe satisfacer dos condiciones de borde

$$\begin{aligned} B_1u=\alpha_{11}u(a)+\alpha_{12}u'(a)+\beta_{11}u(b)+\beta_{12}u'(b)=\gamma_1,\\ B_2u=\alpha_{21}u(a)+\alpha_{22}u'(a)+\beta_{21}u(b)+\beta_{22}u'(b)=\gamma_2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde los coeficiente $(\alpha_{11},\alpha_{12},\beta_{11},\beta_{12})$ y $(\alpha_{21},\alpha_{22},\beta_{21},\beta_{22})$ son independientes.

B_1 y B_2 son los funcionales de borde ya que asignan a cada función suficientemente suave $u(x)$ los números γ_1 y γ_2, respectivamente. Formalmente, la ecuación diferencial (2.14) junto con las condiciones (2.15) constituyen el PVB mas general para un operador de segundo orden.

Observación 2.5

1. Consideremos a los coeficientes $a_i(x), \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ como fijos (esto es, L, B_1, B_2 fijos), estamos interesados en estudiar la dependencia de la solución con $f(x), \gamma_1, \gamma_2$. Por tanto, nos referimos a $\{f;\gamma_1,\gamma_2\}$ como los datos para el problema. Los coeficientes y los datos corresponden a funciones reales y números reales.

2. La independencia de los vectores fila $(\alpha_{11},\alpha_{12},\beta_{11},\beta_{12})$ y $(\alpha_{21},\alpha_{22},\beta_{21},\beta_{22})$ garantiza que tengamos realmente dos condiciones de borde distintas. (Si los vectores fila son dependientes, un funcional de borde sería un múltiplo del otro y las condiciones serían idénticas o inconsistentes).

3. Si $\beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$, las condiciones de borde no están mezcladas (una condición por extremo)

$$\begin{aligned} B_1 = \quad & \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = \quad \gamma_1, \\ B_2 = \quad & \beta_{21}u(b) + \beta_{22}u'(b) = \quad \gamma_2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

   Si $\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$, $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$, tenemos las condiciones iniciales $u(a) = \gamma_1$, $u'(a) = \gamma_2$.

Así podemos notar que PVB generaliza al PVI.

2.3.1. Función de Green

A continuación supongamos que el problema completamente homogéneo, es decir con datos $\{0;0,0\}$, tiene solución trivial. Bajo esta restricción, demostraremos que el problema (2.14)-(2.15) con datos $\{f;\gamma_1,\gamma_2\}$ tiene solción única y que la misma viene dada en términos de la función de Green.

La función de Green, $g(x,\xi)$, es la solución asociada al problema con datos $\{\delta(x-\xi);0,0\}$ donde ξ es un punto fijo en $a<x<b$ y que satisface las condiciones de borde $B_1g=0$ y $B_2g=0$ de tal manera que

$$\begin{array}{ll} Lg=0, \quad a<x<\xi<x<b, & B_1g=0, \quad B_2g=0 \\ \text{g continua} \quad x=\xi, & \frac{dg}{dx}|_{x=\xi+} - \frac{dg}{dx}|_{x=\xi-} = \frac{1}{a_2(\xi)}. \end{array} \tag{2.17}$$

El problema de borde (2.17) se puede reescribir en térmios de la función $\delta(x-\xi)$ de la siguiente manera

$$Lg = \delta(x-\xi), \quad a<x,\xi<b; \quad B_1g=0, \quad B_2g=0. \tag{2.18}$$

Nótese que $g(x,\xi)$ es la respuesta, bajo condiciones de borde homogéneas, a una cierta función f con una única singularidad en $x=\xi$, donde ξ es un punto fijo en $a<x<b$. Por supuesto, la función delta no es continua a trozos, de modo que este problema no cae directamente en la categoría clásica que hemos estudiamos anteriormente.

Podemos considera a $g(x,\xi)$ como una solución clásica del problema completamente homogéneo la cual, por nuestra hipótesis inicial, necesariamente nula. Por tanto (2.17) tiene a lo sumo una solución, que a continuación construiremos para diferentes casos.

Condiciones sin mezcla

La función de Green satisface las condiciones $B_1 g = \alpha_{11} g(a,\xi) + \alpha_{12} g\prime(a,\xi) = 0$ y $B_2 g = \beta_{21} g(b,\xi) + \beta_{22} g'(b,\xi) = 0$. Sea $u_1(x)$ una solución no trivial de $Lu = 0$ que satisface $Bu_1 = 0$. Tal solución debe existir. Uno puede, por ejemplo, elegir u_1 solución de $Lu = 0$ con la condiciones iniciales $u(a) = \alpha_{12}$ y $u'(a) = -\alpha_{11}$, donde α_{12} y α_{11} no son simultáneamente cero. De manera similar sea $u_2(x)$ una solución no trivial de $Lu = 0$ que satisface condiciones en $x = b$ ($B_2 u = 0$). Note que si u_1 y u_2 son independientes, ya que hemos asumido que el problema completamente homogéneo tiene solo la solución trivial. La función de Green es de la forma

$$g(x,\xi) = Au_1(x), \quad a < x < \xi; \quad g(x,\xi) = Bu_2(x), \quad xi < x < b,$$

donde A y B son constante que puden, por supuesto, depender de ξ. De la continuidad de g y la condición salto de g', ambas en $x = \xi$, se tiene

$$\begin{aligned} Au_1(\xi) - Bu_2(\xi) &= 0, \\ -Au_1'(\xi) + Bu_2'(\xi) &= \frac{1}{a_2(\xi)}. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones no homogéneo con dos incógnitas A y B a saber, tiene una y sólo una solución si y sólo si el determinante de los coeficientes no se anula. Este determinante es el Wronskiano de u_1 y u_2 evaluado en ξ. Sabemos además que u_1 y u_2 son independientes por tanto su Wronskiano no se anula en ningún lado. Así tenemos que

$$A = \frac{u_2(\xi)}{a_2(\xi) W(u_1, u_2; \xi)}, \qquad B = \frac{u_1(\xi)}{a_2(\xi) W(u_1, u_2; \xi)},$$

y la función de Green está esta dada por

$$g(x,\xi) = \frac{u_1(x_<) u_2(x_>)}{a_2(\xi) W(u_1, u_2; \xi)}, \; a < x, \xi < b, \tag{2.19}$$

donde $x_< = \min(x,\xi)$ y $x_> = \max(x,\xi)$. Por su construcción (2.19) satisface (2.17).

Condiciones iniciales

En este caso la función de Green corresponde a la solución fundamental discutida en el Capítulo 1, la cual viene dada por

$$g(x,\xi) = H(x - \xi) u_\xi(x), \tag{2.20}$$

donde $u_\xi(x)$ es la solución de $Lu = 0$ satisfaciendo la condiciones $u(\xi) = 0$, $u'(\xi) = 1/a_2(\xi)$. Si los coeficientes son constantes, tenemos $g(x,\xi) = H(x - \xi) u_0(x - \xi)$.

Condiciones generales de borde

Si g satisface condiciones de borde $B_1 g = B_2 g = 0$ mezcladas donde B_1 y B_2 son los funcionales de borde más generales como en (2.15), escribiremos a g como la suma de la solución distribucional $H(x-\xi)u_\xi(x)$ y una solución de la ecuación homogénea. Ya sabemos que la solución distribucional satisface (2.17) a excepción de las condiciones de borde. Sea $u_1(x)$ una solución no trivial de $Lu = 0$ satisfaciendo $B_1 u = 0$, y sea $u_2(x)$ una solución no trivial de $Lu = 0$ con $B_2 u = 0$, así se tiene

$$g(x,\xi) \quad = \quad H(x-\xi)u_\xi(x) + Au_1(x) + Bu_2(x), \quad a < x, \xi < b. \tag{2.21}$$

Imponiendo las condiciones de borde

$$0 \quad = \quad \beta_{11} u_\xi(b) + \beta_{12} u'_\xi(b) + B(B_1 u_2), \tag{2.22}$$

$$0 \quad = \quad \beta_{21} u_\xi(b) + \beta_{22} u'_\xi(b) + A(B_2 u_1), \tag{2.23}$$

a partir de lo cual podemos resolver para A y B (ya que ni $B_1 u_2$ ni $B_2 u_1$ se anulan).

La función de Green (2.21) nos permite resolver (2.14, 2.15). Comencemos con el caso condiciones de borde homogéneas, esto es, $\{f(x); 0, 0\}$. La solución al PVB

$$Lu = f, \quad a < x < b; \quad B_1 u = 0, \quad B_2 u = 0, \tag{2.24}$$

viene dada por

$$u(x) = \int_a^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi. \tag{2.25}$$

La prueba es sencilla. Primero note que u satisface las condiciones homogéneas por que g lo hace. Debido a que g puede ser escrita en la forma (2.21), donde A y B depende solo de ξ, se sigue que el lado derecho de(2.25) se reduce a

$$\int_a^x u_\xi(x) f(\xi) d\xi + \theta_1 u_1(x) + \theta_2 u_2(x), \tag{2.26}$$

donde θ_1 y θ_2 son constantes. El primer término satisface la ecuación diferencial no homogénea, el resto de los término son solución de la ecuación homogénea. Por tanto la suma satisface $Lu = f$. La unicidad se obtiene a partir de la hipótesis que el PVB con datos $\{0; 0, 0\}$ tiene como solución la trivial.

Ahora note que el problema con datos $\{0; \gamma_1, \gamma_2\}$ tiene como única solución

$$u(x) = \frac{\gamma_2}{B_2 u_1} u_1(x) + \frac{\gamma_1}{B_1 u_2} u_2(x) \tag{2.27}$$

donde u_1 es una solución no trivial de la ecuación homogénea que satisface $B_1 u_1 = 0$, y u_2 es una solución no trivial de la misma ecuación que satisface $B_2 u_2 = 0$. Por tanto, usando el principio de superposición, el problema

$$Lu = f, \;\; a < x < b; \;\; B_1 u = \gamma_1, \;\; B_2 u = \gamma 2, \tag{2.28}$$

tiene como única solución

$$u = \int_a^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi + \frac{\gamma_2}{B_2 u_1} u_1(x) + \frac{\gamma_1}{B_1 u_2} u_2(x). \tag{2.29}$$

Teorema 2.5 Si el PVB completamente homogéneo tiene como única solución la trivial, entonces el PVB con datos $\{f;\gamma_1,\gamma_2\}$ tiene una y solo una solución y esta viene dada por (2.29).

Observación 2.6 El teorema se cumple porque tenemos exactamente dos condición de borde del tipo (2.15). Si se impone una tercera condición del mismo tipo, el PVB completamente homogéneo todavía tendría sólo la solución trivial, pero entonces el problema no homogéneo por lo general no tendría solución.

2.3.2. El problema adjunto

Considere un operador diferencial de segundo orden con coeficientes en $C^2(a,b)$

$$L = a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x). \tag{2.30}$$

En este caso el operador adjunto de define formalmente de la siguiente manera

$$L^* = a_2D^2 + (2a_2' - a_1)D + (a_2'' - a_1' + a_0), \tag{2.31}$$

tal que para cualquier par de funciones u,v en $C^2(a,b)$, se tiene

$$\int_a^b (vLu - uL^*v)dx = J(u,v)]_a^b, \tag{2.32}$$

donde

$$J(u,v) = a_2(vu' - uv') + (a_1 + a_2')uv. \tag{2.33}$$

Un operador autoadjunto es tal que $L = L^*$, lo cual es equivalente a $a_2' = a_1$, tal que

$$L = L^* = D(a_2D) + a_0, \quad J = a_2(vu' - uv'), \tag{2.34}$$

conduciendo a una simplificación de (2.32).

Ahora introduciremos la noción de condiciones de borde adjunta. Dado el operador (2.30) y una función u que satisface dos condiciones de borde homogéneas $B_1u = 0$ y $B_2u = 0$, del tipo (2.15), el lado derecho de (2.32) se anula sólo si v satisface un par de condiciones. Para ser mas precisos, sea M el conjunto de las funciones $u(x)$ en $C^2(a,b)$ que satisface $B_1u = 0$ y $B_2u = 0$. M es un subespacio lineal, tal que, si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ están en M también está $\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$ para cualquier par de constantes α, β. El conjunto M^* se define como el conjunto de funciones $v(x)$ en $C^2(a,b)$ tal que $J(u,v)]_a^b = 0$ para $\forall u \in M$.

Es claro que M^* es un subespacio lineal. Las funciones de M^* pueden ser caracterizadas por dos condiciones de bordes $B_1^*v = 0$ y $B_2^*v = 0$, donde B_1^* y B_2^* son funcionales de borde del tipo (2.15) pero usualmente con coeficientes diferentes a B_1 y B_2. Aunque M^* puede ser determinada a partir de M, los funcionales de borde B_1^* y B_2^* no necesariamente pueden ser hallados a partir de B_1 y B_2 (por ejemplo, podemos intercambiar el orden de los funcionales de borde, o podríamos considerar otros equivalentes tales como$B_1^{*\prime} = B_1^* + B_2^*$ y $B_2^{*\prime} = B_1^* - B_2^*$). Esto nos lleva a la siguiente definición de un problema autoadjunto.

Definición 2.1 Diremos que el PVB (L,B_1,B_2) es auto-adjunto si $L = L^*$ y $M = M^*$ (esto es, las condiciones de borde adjuntas definida para algún conjunto de funciones que satisface $B_1u = B_2u = 0$ tal que es posible escoger B_1^* y B_2^* con $B_1^* = B_1$ y $B_2^* = B_2$).

Consideremos el siguiente PVB

$$Lg(x,\xi) = \delta(x-\xi), \quad a < x,\xi < b; \quad B_1 g = 0, \quad B_2 g = 0, \tag{2.35}$$

cuya solución se denomina la función de Green directa. Sea $g^*(x,\xi)$ la función de Green adjunta que satisface

$$L^* g^*(x,\xi) = \delta(x-\xi), \quad a < x,\xi < b, \quad B_1^* g^* = 0, \quad B_2^* g^* = 0. \tag{2.36}$$

Como es usual toda diferenciación en (2.35) y (2.36) es con respecto de la variable x. A continuación mostraremos que g y g^* están relacionadas por

$$g^*(x,\xi) = g(\xi,x). \tag{2.37}$$

Una vez establecido (2.37), no es necesario resolver (2.36). Su solución es la de (2.35) solo que con las variable cambiadas. Otra manera de decir esto es $g(x,\xi)$ satisface el problema directo en su primera variable y el adjunto en su segunda variable; por tanto $g(x,\xi)$ satisface las condiciones de borde adjuntas en la variable ξ.

Para probar (2.37) escoja $\xi = \eta$ en (2.36), multiplique (2.35) por $g^*(x,\eta)$ y (2.36) por $g(x,\xi)$, reste, e integre desde $x = a$ hasta $x = b$. Usando las propiedades de la función delta, encontramos que

$$\int_a^b [g^*(x,\eta)Lg(x,\xi) - g(x,\xi)L^* g^*(x,\eta)]\, dx = g^*(\xi,\eta) - g(\eta,\xi),$$

o, por la fórmula de Green

$$J(g^*,g)]_a^b = g^*(\xi,\eta) - g(\eta,\xi).$$

Ya que g^* satisface las condiciones de borde homogéneas adjuntas, $J(g^*,g)]_a^b = 0$. Esto prueba (2.37). Como un corolario nótese que, si (L,B_1,B_2) es autoadjuntas, entonces $g(x,\xi)$ es simétrica, esto es,

$$g(x,\xi) = g(\xi,x). \tag{2.38}$$

La anterior relación es conocida como el principio de reciprocidad: La respuesta en x causada por una fuente puntual en ξ es la misma que la respuesta en ξ debido a una fuente puntual en x.

Todo los resultados anteriores obtenidos para un operador diferencial de orden 2 pueden ser generalizados para un operador de orden p con p-condiciones de borde, ver [2]

2.4. Teoremas alternativos

Consideremos el PVB de orden p

$$Lu = f, \quad a < x < b, \quad B_1 u = \gamma_1, \ldots, B_p u = \gamma_p. \tag{2.39}$$

Para p condiciones generales, vimos que (2.39), tiene una y solo una solución si el correspondiente problema completamente homogéneo

$$Lu = 0, \quad a < x < b, \quad B_1 u = 0, \ldots, B_p u = 0, \tag{2.40}$$

sólo tiene la solución trivial. Si (2.40) no tiene como única solución la trivial, (2.39) no tiene solución a menos que los datos $\{f;\gamma_1,\ldots,\gamma_p\}$ sean de un tipo particular. Para caracterizar los datos es necesario estudiar el problema homogéneo adjunto

$$L^*v=0,\quad a<x<b,\quad B_1^*u=0,\ldots,B_p^*v=0. \tag{2.41}$$

La situación se asemeja a la que encontramos en sistemas de ecuaciones algebraicos.

2.4.1. Teoremas alternativos para sistemas de $n\times n$

Consideremos el conjunto de n ecuaciones con n incógnitas

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j=f_i,\quad i=1,\ldots,n, \tag{2.42}$$

donde $a_{11},\ldots,a_{nn}$, $f_1,\ldots,f_n$ son números reales. Estamos interesados en soluciones reales $u_1,\ldots,u_n$. Para ello es conveniente reescribir a (2.42) de la siguiente forma

$$Au=f, \tag{2.43}$$

donde A es una matriz de orden $n\times n$ con entradas a_{ij}, f y u son vectores (tal que son n-uplas de números reales). Adicionalmente a (2.43), es necesario considerar los siguiente problemas relacionados

$$Au=0,\quad \text{ecuación homogénea directa}, \tag{2.44}$$

$$A^*v=0,\quad \text{ecuación homogénea adjunta}, \tag{2.45}$$

donde la matriz A^* es la traspuesta o matriz adjunta de A.

A continuación denotemos el producto interno de u y v por $\langle u,v\rangle$ tal que $\langle u,v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_jv_j$. Diremos que u y v son ortogonales si $\langle u,v\rangle=0$.
Los siguientes resultados proviene de álgebra lineal.

1. Si (2.44) tiene solo la solución trivial, entonces también (2.45). Esto ocurre si y solo si $\det A\neq 0$ (y entonces automáticamente $\det A^*\neq 0$). En este caso (2.43) tiene una y solo una solución para cada f, la cual viene dada por $u=A^{-1}f$, donde A^{-1} es la matriz inversa de A. Esta es la situación en la que A no es singular.

2. Si (2.44) tiene solución no trivial, entonces $\det A=0$. Si el $\det A$ se anula, esto significa que hay dependencia entre las filas de la matriz A. Por tanto, no podemos espera soluciones de (2.43) a menos que las dependencias de A se reflejen en f. (Por ejemplo, si la segunda fila de A es la suma de la primera y tercera, tendremos que $f_2=f_1+f_3$ para tener esperanza de una solución.) Si hay $k(\leq n)$ soluciones independientes de (2.44), se dice que A tiene un espacio nulo k-dimensional. Resulta que A^* también tiene un espacio nulo k-dimensional, pero las soluciones de (2.45) en general serán diferente de (2.44).

Una condición necesaria para que (2.43) tenga solución es que f sea ortogonal a todas las soluciones de (2.45). Esta condición es conocida como la condición de solubilidad.

Probaremos la necesidad de esta condición. Sea u una solución de (2.43) y v una solución de (2.45). Tomando el producto interno de (2.43) con v y el producto interno de (2.45) con u, y restando las ecuaciones resultantes se obtiene el siguiente resultado

$$\langle Au, v\rangle - \langle u, A^*v\rangle \quad = \quad \langle f, v\rangle. \tag{2.46}$$

Ahora $\langle Au, v\rangle = \sum_{ij} a_{ij}u_jv_i$, mientras que $\langle u, A^*v\rangle = \sum_{ij} u_ia^*_{ij}v_j$. Ya que $a^*_{ij} = a_{ji}$, tenemos que $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ y por tanto $\langle f, v\rangle = 0$

La prueba de la suficiencia es un poco mas delicada. Queremos mostrar que, si f es ortogonal a las solución de (2.45), entonces (2.44) tiene solución, es decir, $f \in R_A$ de A (R_A es el rango de A), pero esto será mostrado en el Capítulo final

Observación 2.7

1. Si $\det A \neq 0$, la condición de solubilidad es automáticamente satisfecha para cualquier f, donde la única solución de (2.45) es $v = 0$. Así (2.43) tiene solo una solución.

2. Si $\det A = 0$ y el espacio nulo de A (nulidad de A) es k-dimensional, podemos encontrar k soluciones independientes $u^1, \ldots, u^k$ de (2.44) y k soluciones independiente $v^1, \ldots, v^k$ de (2.45). Si f satisface la condición de solubilidad $\langle f, v^1\rangle = \cdots = \langle f, v^k\rangle = 0$ la solución general del problema (2.43) puede ser escrita como:

$$u^* = u + \sum_{i=1}^{k} c_i u^i, \tag{2.47}$$

donde u^* es cualquier solución particular de (2.43), y los $\{c_i\}$ son constantes arbitrarias.

2.5. Teoremas alternativos para el problemas de contorno

Primero consideremos el problema (2.39) con datos $\{f; 0, 0, \ldots, 0\}$,

$$Lu = f, \quad a < x < b; \quad B_1u = \cdots = B_pu = 0, \tag{2.48}$$

para el cual se cumple alguna de los siguientes Teoremas alternativos:

1. Si el problema homogéneo directo (2.40) tiene solo solución trivial, también el problema adjunto homogéneo (2.41) y (2.48) tiene una y solo una solución.

2. Si (2.40) tiene k soluciones independientes, (2.41) también tiene k soluciones independientes (aunque no necesariamente las mismas que (2.40)). Entonces (2.48) tiene solución si y solo si $\int_a^b fv_1dx = \int_a^b fv_2dx = \ldots = \int_a^b fv_kdx = 0$, donde $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ es un conjunto de k soluciones independientes de (2.41). Si la condición de solubilidad es satisfecha, la solución general a (2.48) es de la forma $\tilde{u} + \sum_{i=1}^{k} c_iu_i$, donde $\tilde{u}$ es una solución particular de (2.48), c_i son constantes arbitrarias, y $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ son k soluciones independientes de (2.40).

Probar la necesidad de la condición de solubilidad es relativamente sencillo. Sea u una solución de (2.48) y v una solución de (2.41). Multiplicando (2.48) por v y (2.41) por u restando en integrado de a a b se tiene

$$\int_a^b fvdx = \int_a^b (vLu - uL^*v)dx = J(u,v)]_a^b,$$

pero $J(u,v)]_a^b = 0$, donde u satisface las condiciones de bordes homogéneas y v satisface las condiciones de borde adjuntas. La suficiencia sera probada en el Capítulo siguiente.

Capítulo 3

EL teorema alternativo de Fredholm

3.1. Espacios normados

Gran parte de la teoría que en este Capítulo se desarrolla es extraída de [2] y [5], algunos de los teoremas de esta sección no serán probados, para su demostración remitimos a [5].

Definición 3.1 Sea X un conjunto no-vacío. Una métrica en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo lo siguiente:

i) $d(u,v) > 0 \quad u \neq v$,

ii) $d(u,u) = 0$,

iii) $d(u,v) = d(v,u)$,

iv) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$,

$\forall u, v, w \in X$.
En este caso diremos que el par (X,d) es un espacio métrico.

Definición 3.2 Sea (X,d) un espacio métrico. Diremos que una sucesión (u_n) en X converge a $u \in X$, o tiene limite $u \in X$, denotado $\lim u_n = u$ ó $u_n \to u$. Si dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon, u) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow d(u_n, u) < \varepsilon$.

Si no hay lugar a confusión sobre la métrica, escribiremos X en lugar de (X,d) para denotar a un espacio métrico.

Definición 3.3 Sea (u_k) una sucesión en X. Diremos que (u_k) es una sucesión de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ existe $P = P(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > P \Rightarrow d(u_n, u_m) < \varepsilon$.

Observación 3.1 Si una sucesión es convergente, entonces es de Cauchy.

Definición 3.4 Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy converge y su límite está en X.

Definición 3.5 Sea X un espacio lineal sobre el campo $\mathbb{K}$. Una norma en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, satisfaciendo:

i) $||u|| \neq 0, \quad \text{si} \quad u \neq 0,$

ii) $||\alpha u|| = |\alpha|||u||,$

iii) $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||,$

con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$.

En este caso diremos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. Todo espacio normado es un espacio métrico con la métrica definida por

$$d(u,v) = ||u-v||.$$

Definición 3.6 Un espacio normado X es de Banach, si es completo con la métrica inducida por la norma.

Definición 3.7 Sea X un espacio lineal sobre el campo $\mathbb{K}$. Un producto interno en X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ satisfaciendo:

i) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

iii) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

iv) $\langle u, u \rangle > 0 \;\; si \;\; u \neq 0$

con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u, v, w \in X$.
En este caso diremos que $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno.
Todo espacio con producto interno es un espacio normado con la norma dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Definición 3.8 Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno que es de Banach con la norma inducida por el producto interno.

Definición 3.9 Sea X un espacio con producto interno. Dos vectores $u, v \in X, u \neq v$ son ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$. Un conjunto donde cada par de vectores distintos son ortogonales es un conjunto ortogonal.
Sea $M \subseteq X$, el complemento ortogonal de M, es el conjunto $M^{\perp} = \{v \in X : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in M\}$.

Si M es cerrado en H (H espacio de Hilbert), cada vector u en H puede ser escrito como combinación lineal única de vectores de M y de $M^{\perp}$.

3.1.1. Operadores lineales y el Teorema de Hahn-Banach

Definición 3.10 Sean X y Y espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$. Un operador $T : X \to Y$ es lineal si

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$$

para todo x_1, $x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Si $T : X \to Y$ es un operador lineal entonces $T(0) = 0$

Definición 3.11 Un operador T de un espacio normado X en un espacio normado Y es acotado si existe una constante $C > 0$ tal que

$$||T(x)|| \leq C||x||, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 3.1 Sea T un operador lineal de X en Y ambos espacios normados, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) T es continua en un punto.

2) T es uniformemente continua.

2) T es acotado.

Prueba.
(1) $\Rightarrow$ (2)
Supongamos que T es continuo en un punto x_0. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(x_0)|| < \varepsilon$. Ahora sean $y, z \in X$ tal que $||y - z|| < \delta$, entonces $||(y - z + x_0) - x_0|| = \|y - z\| < \delta$ y por tanto $||T(y - z + x_0) - T(x_0)|| < \varepsilon$, pero $T(y) - T(z) = T(y - z) = T(y - z + x_0 - x_0) = T(y - z + x_0) - T(x_0)$ por linealidad, así $\|T(y) - T(z)\| < \varepsilon$. Esto es, T es uniformenete contínua.
(2) $\Rightarrow$ (3)
Supongamos por absurdo que T no es acotada. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \neq 0 \in X$ tal que $||T(x_n)|| > n||x_n||$, así por linealidad y propiedad de norma se tiene que $||T(\frac{x_n}{n||x_n||})|| > 1$. Pero esto contradice la continuidad de T en el origen, ya que $||\frac{x_n}{n||x_n||}|| \to 0$ cuando $n \to \infty$.
(3) $\Rightarrow$ (1)
el hecho que T es acotado y la linealidad implican que T es continua en el origen.

Observación 3.2 Del teorema anterior, un operador lineal T es continuo si y solo si es acotado.

Teorema 3.2 Suponga que T es un operador lineal de un espacio lineal normado X en un espacio lineal normado Y, entonces el inverso T^{-1} existe y es un operador acotado de $T(X)$ en X si y solo si existe algún $k > 0$ tal que $k||x|| \leq ||T(x)||$, para todo $x \in X$.

Observación 3.3 Sean X y Y espacios normados sobre el campo $\mathbb{K}$. Al conjunto de operadores lineales y acotados de X en Y lo denotaremos por $L(X,Y)$. $L(X,Y)$ es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Si Y es de Banach entonces $L(X,Y)$ también lo es.

Definición 3.12 Sea X es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Sabemos que $\mathbb{K}$ es un espacio normado sobre si mismo. Los elementos de $L(X,\mathbb{K})$ son llamados los funcionales lineales acotados sobre X y $L(X,\mathbb{K})$ es denotado por X^*.
X^* es un espacio de Banach llamado el dual de X.

A continuación enunciaremos los siguientes teoremas sin demostración.

Teorema 3.3 (Hahn-Banach) Suponga que X es un espacio lineal sobre $\mathbb{R}$. Sea S un subespacio de X y p una función a valores reales sobre X con las siguientes propiedades:

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
- $p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \text{si} \quad \alpha \geq 0.$

Si f es un funcional lineal sobre S (esto es un mapeo lineal de S en $\mathbb{R}$) tal que $f(s) \leq p(s)$ para todo $s \in S$, entonces existe un funcional lineal F sobre X tal que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$ y $F(s) = f(s)$, para todo $s \in S$.

Corolario 3.1 (Hahn-Banach, version espacios normados)
Sea X un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$ y Y un subespacio de X. Si $y^* \in Y^*$, entonces existe un $x^* \in X^*$ tal que $||y^*|| = ||x^*||$ y $x^*(x) = y^*(x)$ para todo $x \in Y$.

Corolario 3.2 Sea Y un subespacio de un espacio normado X sobre el campo $\mathbb{K}$. Suponga que $x \in X$ y $\inf_{y\in Y}||x-y|| = d > 0$ entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $||x^*|| = 1$, $x^*(x) = d$ y $x^*(y) = 0$, para todo $y \in Y$.

3.1.2. Operadores cerrados, adjuntos y compactos

Denotaremos por D_A al domino del operador A y H un espacio de Hilbert. También denotaremos Tx en lugar de $T(x)$.

Definición 3.13 Un operador B se dice que es una extensión del operador A si $D_B \supsetneq D_A$ y $Bu = Au$ para todo $u \in D_A$.

Definición 3.14 Sean X y Y espacios normados. Un operador $A : X \to Y$ es cerrado si y solo si dada (x_n) en D_A, con $x_n \to x \in X$ y $A(x_n) \to y \in Y$, entonces $x \in D_A$ y $y = A(x)$.

Para definir el operador adjunto de un operador lineal dado, se ha de especificar el dominio de dicho operador y sus imágenes.

Definición 3.15 Sea $A : D_A \subset H \to H$ un operador lineal y sea $u \in H$. Si para cada $v \in D_A$ se tiene

$$\langle u, Av\rangle = \langle w, v\rangle$$

para algún $w \in H$, entonces se dice que u está en el dominio del operador adjunto de A, denotado por A^* y que w es la imagen de u por dicho operador, esto es, $u \in D_{A^*}$, $w = A^*(u)$. Así, $\langle u, Av\rangle = \langle A^*u, v\rangle, \quad \forall v \in D_A, u \in D_{A^*}$.

Es fácil ver que D_{A^*} es un subespacio de H, y que el operador A^* es lineal. También $A^{**} = A$.

Definición 3.16 Diremos que un operador A es autoadjunto si $D_A = D_{A^*}$ y $A^* = A$, esto es, A es autoadjunto si $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle, \quad \forall u, v \in D_A$.

Observación 3.4 Si A es cerrado y D_A es denso en H, entonces A^* es cerrado y D_{A^*} es denso en H.

Definición 3.17 Sean X y Y espacios normados. Un operador $A : X \to Y$ es compacto si A envía conjuntos acotados en subconjuntos de Y cuya clausura es compacta.

Observación 3.5

- Si A es compacto, entonces A es continuo.
- Si $A \in L(X,Y)$ y $A(X)$ es finito dimensional, entonces A es compacto.

Teorema 3.4 Sea $A \in L(X,Y)$ donde X es infinito dimensional y A es compacto, entonces A^{-1} si existe no es acotada.

Observación 3.6 Una combinación lineal finita de operadores compactos es compacta.

Teorema 3.5 Sea $A \in L(X,Y)$, si A es compacto entonces A^* es compacto. recíprocapente si A^* es compacto y Y es completo, entonces A es compacto.

Teorema 3.6 Protección ortogonal Sea H un espacio de Hilbert y G un subconjunto de H cerrado y convexo. Entonces se tiene que dado x_0 en H, existe un único y_0 en G tal que

$$d = d(x_0, G) = \| x_0 - y_0 \|$$

Teorema 3.7 Si E es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H, entonces se tiene que

$$H = E \oplus E^{\perp}.$$

La demostración de estos dos Teoremas las referimos a [6]

Ahora bien sea A un operador lineal en un dominio D_A denso en H, queremos caracterizar el rango de A, para determinar que debe cumplir f para poder resolver la ecuación no-homogénea

$$Au = f, \quad u \in D_A. \tag{3.1}$$

El hecho de que $u \in D_A$ es solamente para hacer énfasis; ya está incorporado a la ecuación, ya que A se define sólo en D_A. Es conveniente estudiar al mismo tiempo la ecuación homogénea adjunta

$$A^* v = 0, \quad v \in D_{A^*}, \tag{3.2}$$

donde nuevamente el hecho que $v \in D_{A^*}$ es sólo para hacer énfasis. Note que (3.2) siempre tiene la solución $v = 0$ y tal vez otras. Si u es una solución de (3.1) y v una solución de (3.2), tenemos que, tomando producto interno

$$\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle. \tag{3.3}$$

De la definición de operador adjunto y de (3.2) se sigue que $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle = 0$, de manera que una condición necesaria para que (3.1) tenga solución es que

$$\langle f, v\rangle = 0, \quad \forall v : v \quad \text{satisface} \quad (3{,}2). \tag{3.4}$$

Es claro que la condición de solubilidad (3.4) tiene importancia solo cuando (3.2) tiene soluciones no triviales.
De manera inmediata surgen las siguientes preguntas.¿ Es (3.4) suficiente para dar solución de (3.1)?.¿ Cuantas soluciones no triviales tiene (3.2)?. Si (3.1) tiene solución, ¿ cuantas hay?.

Vamos a establecer la suficiencia de (3.4) para una clase particular de operadores, pero primero probaremos algunos resultados que caracterizan $(R_A)^{\perp}$ en vez de R_A.

Teorema 3.8 El complemento ortogonal del rango de A es el espacio nulo de A^*, esto es,

$$(R_A)^{\perp} = N_{A^*}.$$

Prueba:

a) Sea $z \in N_{A^*}$, de tal manera que $A^*z = 0$, entonces $\langle u, A^*z\rangle = 0$ esto se cumple $\forall u \in H$, por tanto, también para los u en D_A; y por definición, se tiene que $\langle Au, z\rangle = \langle u, A^*z\rangle = 0$ $\forall u \in D_A$, así $z \in (R_A)^{\perp}$.

b) Sea $z \in R_A^{\perp}$; entonces $\langle Au, z\rangle = 0 = \langle u, 0\rangle$, $\forall u \in D_A$, así por definición, $z \in D_{A^*}$ y $A^*z = 0$. Por lo tanto $z \in N_{A^*}$.

De (a) y (b), el teorema está probado.
Tomando complemento ortogonal a ambos lados del la igualdad del teorema se tiene que $(R_A)^{\perp\perp} = (N_{A^*})^{\perp}$. Pero $(R_A)^{\perp\perp} = \overline{R_A}$, así

$$\overline{R_A} = (N_{A^*})^{\perp}. \tag{3.5}$$

Esta conclusión nos dice que un elemento f es un elemento de la clausura de R_A si y solo si este es ortogonal a toda solución de (3.2), si R_A es un conjunto cerrado entonces, $R_A = \overline{R_A}$ y tenemos la siguiente condición necesaria y suficiente.

Teorema 3.9 (Solubilidad para operadores con rango cerrado).
Si A tiene rango cerrado, $Au = f$ tiene solución si y solo si f es ortogonal a toda solución de la ecuación homogénea adjunta, esto es,

$$R_A = (N_{A^*})^{\perp}. \tag{3.6}$$

Teorema 3.10 Si A es un operador cerrado y acotado lejos de cero en $N_A^{\perp} \cap D_A$ entonces el R_A es cerrado.

Prueba.
Sea $P : X \to N_A$ la proyección ortogonal de X sobre N_A sabemos que $x - P(x) \in N_A^{\perp}, \forall x \in X$. Consideremos (f_n) en R_A con $f_n \to f \in H$, hagamos $Av_n = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ y definamos $u_n =$

$v_n - Pv_n$, donde Pv_n es la proyección de v_n sobre N_A, entonces (u_n) es una sucesión en $N_A^{\perp} \cap D_A$ y $Au_n = f_n$. Por hipótesis, existe $c > 0$ tal que $c\|x\| \leq \|Ax\|, \forall x \in N_A^{\perp} \cap D_A$, así

$$\|u_n - u_m\| \leq (\frac{1}{c})\|Au_n - Au_m\| = \|f_n - f_m\|$$

por lo que, (u_n) es una sucesión de Cauchy en D_A por tanto $u_n \to u \in H$ y $Au_n \to f$, como A es un operador cerrado, tenemos que $u \in D_A$ y $Au = f$, de modo que R_A es cerrado.

Observación 3.7 La hipótesis nos dice que existe una constante $c > 0$ tal que $||Au|| \geq c||u||$ para todo $u \in N_A^{\perp} \cap D_A$. Esto significa que el operador A restringido a $N_A^{\perp} \cap D_A$ tiene una inversa acotada; en particular, si $N_A = \{0\}$, entonces A tiene una inversa acotada.

Ahora estamos en posición de probar completamente el Teorema Alternativo de Fredholm para varias clases de operadores. Lo haremos para un operador A definido en $\mathbb{R}^n$; la prueba dada no es la más simple pero es una de las más fácil de extender a operadores definidos en espacios más generales. El teorema ofrece una relación entre las siguientes ecuaciones

$$Au = 0, \quad Au = f, \quad A^*v = 0.$$

Teorema 3.11 (Alternativo de Fredholm).
Sea A un operador en $H = \mathbb{R}^n$. Entonces alguna de las siguientes se cumplen

a) $Au = 0$ tiene sólo la solución trivial, en cuyo caso $A^*v = 0$ tiene sólo la solución trivial y $Au = f$ tiene precisamente una solución, $\forall f \in H$.

b) N_A tiene dimension k, en tal caso N_{A^*} también tiene dimensión k y $Au = f$ tiene solución si y solo si f es ortogonal a N_{A^*}

Observación 3.8 Podemos profundizar un poco en la parte b). Sea $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base para N_A y sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base para N_{A^*}. Si se cumplen estas condiciones , $Au = f$ tiene muchas soluciones, todas son de la forma

$$u = \tilde{u} + c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k,$$

donde $c_1, \ldots, c_k$ son constantes arbitrarias y $\tilde{u}$ es una solución particular de $Au = f$.

Prueba del teorema:
La haremos en tres pasos.

1. Probar que $Au = f$ tiene solución si y solo si $\langle f, v \rangle = 0$ para toda solución de $A^*v = 0$, esto es, $R_A = (N_{A^*})^{\perp}$. Esto es inmediato por (3.6), ya que A tiene rango cerrado, por ser un operador lineal sobre $\mathbb{R}^n$ el cual es un espacio finito-dimensional.

2. Probar que $R_A = H$, si y solo si $N_A = \{0\}$. (Sabemos del paso 1 que $N_{A^*} = \{0\}$ es necesario y suficiente para que $R_A = H$). Así, si logramos demostrar el paso 2, también se estará probando que

$$N_A = \{0\} \Leftrightarrow N_{A^*} = \{0\}. \tag{3.7}$$

En efecto, supongamos que hemos probado el paso 2, de (3.6) se tiene que $R_A = (N_{A^*})^{\perp}$, así

$$N_A = \{0\} \Leftrightarrow R_A = H \Leftrightarrow (N_{A^*})^{\perp} = H \Leftrightarrow N_{A^*} = \{0\}$$

.

Probemos ahora el paso 2

$\Rightarrow$) Supongamos que $R_A = H$. Mostremos que $N_A = \{0\}$. Supongamos por absurdo, existe $u_1 \neq 0$ tal que $Au_1 = 0$. Como el rango es cerrado existe una preimagen, consideremos $u_2 \neq 0$ tal que $Au_2 = u_1$ y así sucesivamente $Au_3 = u_2, \ldots, Au_p = u_{p-1}, \ldots$. Por hipótesis, cada ecuación tiene solución, y $u_p \neq 0$, $A^{p-1}u_p = u_1$, $A^p u_p = 0$. Así u_p pertenece a N_{A^p}. Claramente $N_p \supsetneq N_{p-1}$, esta inclusión es estricta en el sentido de $u_p \in N_{A^p}$ pero $u_p \notin N_{A^{p-1}}$. Por tanto tenemos una sucesión infinita de espacios $N_{A^1}, N_{A^2}, \ldots$ de dimension creciente, una circunstancia que viola el hecho de que H de dimension finita. Por tanto se tiene que $N_A = \{0\}$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $N_A = \{0\}$. Mostremos que $R_A = H$. La hipótesis implica que $(N_A)^{\perp} = H$. intercambiando los roles de A y A^* en el paso 1 (lo cual es posible ya que $A^{**} = A$), tenemos que $(N_A)^{\perp} = R_{A^*} = H$. Aplicando la parte (a) para A^*, encontramos que $N_{A^*} = \{0\}$.

lo probado anteriormente ($R_A = H \Leftrightarrow N_A = \{0\}$).

3. N_A y N_{A^*} tienen la misma dimensión. Por el paso 2, sabemos que si uno de estos tiene dimension 0, el otro también. Así, solo falta considerar el caso en que las dimensiones son positivas.
Supongamos por absurdo que dim $(N_A) \neq$ dim (N_{A^*}). Sean n, m las respectivas dimensiones de N_A y N_{A^*}. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $m > n$. Escojamos bases ortonormales $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ para N_A y N_{A^*} respectivamente. Consideremos el operador proyección definido por

$$Bu = Au - \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, u \rangle v_j. \tag{3.8}$$

$$\langle Bu, v_k \rangle = \langle Au, v_k \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, u \rangle \langle v_j, v_k \rangle = \langle Au, v_k \rangle - \langle u_k, u \rangle = -\langle u_k, u \rangle$$

Entonces $\langle Bu, v_k \rangle = -\langle u_k, u \rangle$ para $k \leq n$ y $\langle Bu, v_k \rangle = 0$ para $k > n$.

Si $Bu = 0$ entonces $\langle u_k, u \rangle = 0$ para $k \leq n$ y por tanto $Au = 0 \; \forall u \in N_A$ por 3.8; así $u \in N_A \wedge \langle u, u_k \rangle = 0, \forall k \in \{1, \ldots, n\}$ así $u = 0$ por lo que $N_B = \{0\} \Rightarrow R_B = H$ por 2, existe $u \in H$ tal que $Bu = v_{n+1}$, ahora bien note que $\|v_{n+1}\|^2 = \langle Bu, v_{n+1} \rangle = \langle Au - \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, u \rangle u_j, v_{n+1} \rangle = \langle Au, v_{n+1} \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, u \rangle \langle u_j, v_{n+1} \rangle = \langle u, A^* v_{n+1} \rangle = 0$, lo cual es una contradicción.

Así $m = n$ y hemos probado el paso 3.

Finalmente, la parte a) del teorema es consecuencia del paso 2 y la parte b) es consecuencia del paso 3. Existe una extension de dicho teorema a espacios infinito dimensional la cual presentamos a continuación.

3.2. Versión general del teorema alternativo de Fredholm

Teorema 3.12 (Teorema alternativo de Fredholm)
Sea X completo y $K \in L(X,X)$ compacto, entonces $R(I-K)$ es cerrado y solo una de las siguientes proposiciones se cumple:

$dimN(I-K) = dimN(I-K^*) < \infty$ ó $R(I-K) = X$ y $N(I-K) = 0$ ó $R(I-K) \neq X$ y $N(I-K) \neq 0$ donde N denota el sub-espacio nulo, R el rango e I el operador identidad.

Demostración.
loa haremos en 4-pasos, escribiremos A en vez de $I-K$.

paso-1 En este paso probaremos que $R(A)$ es cerrado, equivalentemente $\exists\ k > 0$ tal que para todo $x \in X$, $d(x,N(A)) \leq k||A(x)||$.
Supongamos por absurdo que $R(A)$ no es cerrado, entonces
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \quad y_n \in X : d(y_n,N(A)) > n||A(y_n)||$.
Hagamos $x_n = \dfrac{y_n}{d(y_n,N(A))} \in X$, ya que $d(y_n,N(A)) > 0$. Veamos que $d(x_n,N(A)) = 1$.
En efecto,
dado $x \in X$ y $c > 0$, como $N(A)$ es un subespacio de X, es fácil ver que $d(cx,N(A)) = cd(x,N(A))$, así

$$\begin{aligned} d(x_n,N(A)) &= d(\frac{y_n}{d(y_n,N(A))},N(A)), \\ &= \frac{1}{d(y_n,N(A))}d(y_n,N(A)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Además se cumple que

$$||A(x_n)|| = \frac{||A(y_n)||}{d(y_n,N(A))} < \frac{1}{n}.$$

luego $||A(x_n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, así hemos encontrado $x_n \in X$ tal que $d(x_n,N(A)) = 1$ y $A(x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Veamos que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists w_n \in X : d(w_n,N(A)) = 1, \quad A(w_n) \to 0, \quad 1 \leq ||w_n|| \leq 2. \qquad (3.9)$$

Dado $n \in \mathbb{N}$,$1 = d(x_n,N(A)) < 1+\frac{1}{n}$ así existe $z_n \in N(A)$: $1 \leq ||x_n - z_n|| < 1+\frac{1}{n}$ hagamos $w_n = x_n - z_n$ luego $1 \leq ||w_n|| < 1+\frac{1}{n} \leq 2$ y $||A(w_n)|| = ||A(x_n) - A(z_n)|| = ||A(x_n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, ahora $||w_n - z|| = ||x_n - (z_n + z)|| \geq d(x_n,N(A))$ y $||x_n - z|| = ||w_n + z_n - z|| \geq d(w_n,N(A))$, $\forall z \in N(A)$ (ya que $N(A)$ es subespacio de X), así

$$d(w_n,N(A)) \geq d(x_n,N(A)) \qquad (3.10)$$

y

$$d(x_n,N(A)) \geq d(w_n,N(A)), \qquad (3.11)$$

de (3.10) y (3.11) se tiene que $d(w_n,N(A)) = d(x_n,N(A)) = 1$.
Ahora bien, usando el hecho que K es compacto. Sea $C = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ como C es

acotado entonces $\overline{K(C)}$ es compacto y $(K(w_n))$ es una sucesión en $\overline{K(C)}$, entonces existe $(K(w_{n_i}))$ subsucesión de $(K(w_n))$ tal que $K(w_{n_i}) \to w$.

Por otro lado,usando(3.9) y la continuidad de A
$A = I - K \Rightarrow I = A + K$ luego $w_{n_i} = A(w_{n_i}) + K(w_{n_i}) \to w \Rightarrow A(w_{n_i}) \to A(w) \wedge A(w_{n_i}) \to 0$
$\Rightarrow A(w) = 0 \Rightarrow w \in N(A)$.
Así
$|d(w_{n_i}, N(A)) - d(w, N(A))| \leq d(w_{n_i}, w) \Rightarrow |1 - 0| \leq d(w_{n_i}, w)$, $\forall i \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow 1 \leq d(w_{n_i}, w) \to 0, \quad i \to \infty$ contradicción.

paso-2 Probemos que $dimN(A) < \infty$ y $dimN(A^*) < \infty$.
Consideremos una sucesión $(x_n)_n$ en $N(A)$ tal que $||x_n|| \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_n = A(x_n) + K(x_n) = K(x_n)$, como K es compacto, existe (x_{n_i}) tal que $(K(x_{n_i})) = (x_{n_i})$ es convergente en $\overline{B_0 1}$ (la bola cerrada en $N(A)$ de centro 0 y radio 1), como $N(A)$ es un sub-espacio lineal normado, obtenemos que la bola unitaria cerrada es compacta, por tanto $dimN(A) < \infty$, de manera similar se prueba que $dimN(A^*) < \infty$ ya que si K es compacto, entonces K^* es compacto.

paso- 3 Probemos que $dimN(A) = 0$ si y solo si $dimN(A^*) = 0$, para evitar problemas de notación en este paso denotaremos $B = A^*$.

($\Rightarrow$) Supongamos que dim $N(A) = 0$, sabemos por el paso-1 que $R(B)$ es cerrado ya que K^* es compacto y $R(B) = N(A)^\circ = X^*$. Supongamos por absurdo que $dimN(B) > 0$, esto es, existe $x_1^* \neq \oslash \in X^*$ tal que $B(x_1^*) = 0$ como $R(B) = X^*$ existe $x_2^* \in X^*$ tal que

$$\begin{aligned} & B(x_2^*) = x_1^* \neq \oslash \Rightarrow x_2^* \neq \oslash \quad y \quad B^2(x_2^*) = B(x_1^*) = 0, \\ & \Rightarrow x_2^* \in N(B^2) \wedge x_2^* \notin N(B) \quad \Rightarrow \quad N(B) \subsetneq N(B^2), \end{aligned}$$

ahora,

$$\begin{aligned} x_2^* \in X^* = R(B) \quad & \Rightarrow \quad \exists x_3^* \in X^* : B(x_3^*) = x_2^* \neq \oslash, \\ & \Rightarrow \quad x_3^* \neq \oslash \wedge B^3(x_3^*) = B^2(B(x_3^*)) = B^2(x_2^*) = 0, \\ & \Rightarrow \quad x_3^* \in N(B^3) \wedge x_3^* \notin N(B^2). \end{aligned}$$

Así de manera recursiva, obtenemos una sucesión (x_n^*) en X^* tal que $B(x_n^*) = x_{n-1}^*$ y $x_n^* \in N(B^n) - N(B^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}$.
Esto implica que, $N(B) \subsetneq N(B^2) \subsetneq, \ldots, \subsetneq N(B^n) \subsetneq \ldots$.
Por lo que,
$N(B^n)$ es un subespacio cerrado de X^* y $x_n^* \notin N(B^{n-1})$, por el lema de Ríesz, existe $z_n \in N(B^n)$ tal que $||z_n|| = 1$ y $d(z_n, N(B^{n-1})) > \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Así $n > m \Rightarrow n - 1 \geq m$

$\Rightarrow ||K^*(z_n) - K^*(z_m)|| = ||z_n - B(z_n) - z_m + B(z_m)|| = ||z_n - [z_m + B(z_n) - B(z_m)]||$,

y como $N(B^m) \subset N(B^{n-1}) \subset N(B^n)$, $B^{n-1}(z_m + B(z_n) - B(z_m)) = B^{n-1}(z_m) + B^n(z_n) - B^n(z_m) = \oslash + \oslash - \oslash = \oslash$.

Esto es, $z_m + B(z_n) - B(z_m) \in N(B^{n-1})$ luego $||K^*(z_n) - K^*(z_m)|| \geq d(z_n, N(B^{n-1})) > \frac{1}{2}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$.
Sea $S = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, este conjunto es acotado luego $\overline{K^*(S)}$ es compacto, así existe una subsucesíon $(K^*(z_{n_i}))$ en $\overline{K^*(S)}$ convergente y en consecuencia de Cauchy lo cual es un contradicción ya que $||K^*(z_n) - K^*(z_m)|| \geq \frac{1}{2}, \forall n \neq m$ por tanto se tiene que $dimN(B) = 0$.

$\Leftarrow$ Para la demostración del recíproco referimos a [5].

paso-4 Para finalizar la Prueba, mostraremos que $dimN(A) = dimN(A^*)$.
Por el paso 2 sabemos que $dimN(A) < \infty$ y $dimN(A^*) < \infty$. Supongamos que $dimN(A) = n > 0$, por el paso 3, $dimN(A^*) = m > 0$.
Sean $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ base para $N(A)$, $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*\}$ base de $N(A^*)$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) Existe $x_0^* \in X^*$ tal que $x_0^*(x_i) = 0$ para $1 \leq i < n$ y $x_0^*(x_n) \neq 0$.

ii) Existe $x_0 \in X$ tal que $x_i^*(x_0) = 0$ para $1 \leq i < m$ y $x_m^*(x_0) \neq 0$.

iii) Si $A_1 = A - K_0$ donde $K_0(x) = x_0^*(x).x_0$, entonces $dimN(A_1) = n - 1$ y $dimN(A_1^*) = m - 1$.

En efecto

i) Sea $Y = sg\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ el subespacio generado por $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ $Y \subsetneq N(A) \subset X$, Y es cerrado en X por ser finito dimensional x_n no esta en Y entonces $d(x_n, Y) > 0$ así existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x) = 0$ para todo $x \in Y$, $||x^*|| = 1$ y $x^*(x_n) = d(x_n, Y) > 0$ (corolario de teorema de H.B) ver [5], entonces $x^*(x_i) = 0$ para todo $i = \{1, \ldots, n-1\}$,y $x^*(x_n) \neq 0$.

ii) Procedamos por inducción. Sea $P(k)$ el enunciado: existe $\{z_1, \ldots, z_k\}$ de manera que $x_i^*(z_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \quad i, j \in \{1, \ldots, k\}$
$P(1)$ es cierto, en efecto.
$x_1^* \neq 0$ ya que x_1^* esta en la base de $N(A^*)$, entonces existe $y_1 \in X$ tal que $x_1^*(y_1) \neq 0$. Sea $z_1 = \frac{y_1}{x_1^*(y_1)}$ ya que $x_1^*(y_1) \neq 0$ luego $x_1^*(z_1) = x_1^*(\frac{y_1}{x_1^*(y_1)}) = 1$.
Supongamos que $P(k)$ se cumple para $k = m - 1$(Hip.induc.)
así, para $1 \leq i \leq m - 1$ tenemos que

$$x_i^*(x - \sum_{j=1}^{m-1} x_j^*(x) z_j) = x_i^*(x) - \sum_{j=1}^{m-1} x_j^*(x).x_i^*(z_j) = x_i^*(x) - x_i^*(x)1 = 0, \quad \forall x \in X \text{ por (Hip.induc.)}$$

notemos lo siguiente.
Si $x_m^*(x - \sum_{j=1}^{m-1} x_j^*(x) z_j) = 0$, para todo $x \in X$ entonces $x_m^*(x) = \sum_{j=1}^{m-1} x_j^*(x) x_m^*(z_j)$, para todo $x \in X$, esto es $x_m^* = \sum_{j=1}^{m-1} x_m^*(z_j) x_j^*$ lo cual es una contradicción pues $\{x_1^* \ldots x_m^*\}$ es $l.i.$, por lo que existe $x \in X$ tal que $x_m^*(x - \sum_{j=1}^{m-1} x_j^*(x) z_j) \neq 0$. Sea $y_m = x - \sum_{j=1}^{m-1} x_j^*(x) z_j$, $y_m \neq \oslash$ y hagamos $z'_m = \frac{y_m}{x_m^*(y_m)}$, $z'_m \neq 0$ y además $x_m^*(z'_m) = 1$

por otro lado, para $1 \leq i \leq m-1$

$$x_i^*(z_m') = x_i^*(\frac{y_m}{x_m^*(y_m)}) = \frac{1}{x_m^*(y_m)} x_i^*(x - \sum_{j=1}^{m-1} x_j^*(x) z_j) = 0 \quad \text{(por hipótesis)}$$

haciendo $z_j' = z_j - x_m^*(z_j) z_m'$ para $1 \leq j \leq m-1$ se tiene que

$$x_m^*(z_j') \;=\; x_m^*(z_j) - x_m^*(z_j) = \emptyset, \quad \text{para todo} \quad j \in \{1, \ldots, m-1\},$$

y, $x_i^*(z_j') = x_i^*(z_j) - x_m^*(z_j) x_i^*(z_m') = x_i^*(z_j) - 0 = x_i^*(z_j)$

así, $x_i^*(z_j') = \begin{cases} 0 & j \neq i, \\ 1 & j = i. \end{cases}$

Concluimos que existe $\{z_1', \ldots, z_m'\}$ tal que

$x_i^*(z_j') = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \; i, j \in \{1, \ldots, m\}.$

Así $P(m)$ es cierto. Haciendo $x_0 = z_m'$ tenemos que $x_m^*(x_0) = 1$ y $x_i^*(x_0) = x_i^*(z_m') = 0, \quad 1 \leq i \leq m-1.$

iii) Es claro que K_0, dado por $K_0(x) = x_0^*(x) x_0, \forall x \in X$ es compacto. Sea $x \in N(A_1)$ entonces $A(x) = K_0(x) = x_0^*(x) x_0$, donde $x_0 \notin {}^\circ[N(A^*)] = R(A)$, ya que $x_m^*(x_0) \neq 0$, por *ii*).
Si $x_0^*(x) \neq 0$ entonces $A(x) = x_0^*(x) x_0$ implica que $A(\frac{x}{x_0^*(x)}) = x_0$, así $x_0 \in R(A)$ lo cual es una contradicción. Luego $x_0^*(x) = 0$ y por tanto $x \in N(A)$, esto es, $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ para algunos escalares α_j y $0 = x_0^*(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_0^*(x_j) = \alpha_n x_0^*(x_n) = \alpha_n$ por la parte *i*), así $x = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x_j$, esto significa que $dim N(A_1) = n-1$.
Probaremos finalmente que $dim N(A_1^*) = m-1$. Fijemos $x^* \in X^*$, $K_0^*(x^*)(x) = x^*(K_0(x)) = x^*(x_0^*(x) x_0) = x_0^*(x) x^*(x_0)$, $\forall x \in X \Rightarrow K_0^*(x^*) = x^*(x_0) x_0^*$, $\forall x^* \in X^*$. Sea $x^* \in N(A_1^*)$, entonces $A^*(x^*) = K_0^*(x^*) = x^*(x_0) x_0^*$ (donde K_0^* es compacto ya que K_0 es compacto). Ahora, $x_0^* \notin N(A)^\circ = R(A^*)$ ya que $x_0^*(x_n) \neq 0$ por *i*). Si $x^*(x_0) \neq 0$ entonces $A^*(\frac{x^*}{x^*(x_0)}) = x_0^*$ y esto implica que $x_0^* \in R(A^*)$ contradicción. Así, $x^*(x_0) = 0$ y esto implica que $A^*(x^*) = 0$, esto es, $x^* \in N(A^*)$, por lo que, podemos escribir $x^* = \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j^*$ para algunos escalares β_j, entonces $0 = x^*(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j^*(x_0) = \beta_m x_m^*(x_0) = \beta_m$ por la parte *ii*), esto significa que $dim N(A_1^*) = m-1$.
Ahora bien, notemos que si $n < m$ entonces $dim N(A_1) < dim N(A_1^*)$ repitiendo el proceso anterior un número finito de veces obtenemos con un operador $A_n = I - (K + K_0 +, \cdots, + K_{n-1}) = I -$ (un operador compacto) tal que $dim N(A_n) = 0$ y $dim N(A_n^*) > 0$, lo que contradice el paso-3. Si $n > m$ obtenemos una contradicción similar. Por lo que $n = m$, lo que finaliza la prueba.

Capítulo 4

Discretización de los modos masivos

Todos los procedimiento que se mostrarán a continuación han sido desarrollados originalmente en [4]

4.1. Ecuación tipo Schrödinger y condiciones

Consideremos la siguiente ecuación tipo Schrödinger

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2}+V_{QM}\right)\psi_m(z)=m^2\psi_m(z), \quad -z_r<z<z_r, \tag{4.1}$$

donde m es un autovalor y V_{QM} viene dado por la siguiente expresión,

$$V_{QM}=\frac{15k^2}{4(1-k|z|)^2}-3k\delta(z), \tag{4.2}$$

con k una constante arbitraria positiva. Junto al problema de auto valores (4.1) se indica las siguientes condiciones de borde en $z=z_r$

$$\psi_m(z_r^+)=\psi_m(z_r^-), \quad \frac{d}{dz}\psi_m(z_r^+)-\frac{d}{dz}\psi_m(z_r^-)=\frac{3k}{2(1+kz_r)}\psi_m(z_r). \tag{4.3}$$

para dar respuesta al PVB (4.1- 4.3) es conveniente reescribir el problema de la siguiente manera

$$Lu=ku(z_0)\delta(z-z_0), \quad a<z,z_0<b; \quad B_1u=0, \quad B_2u=0; \tag{4.4}$$

donde $u(z_0)\neq 0$, B_1 y B_2 son los funcionales de borde sin mezcla y L es un operador diferencial de segundo dado por

$$L=\frac{d}{dz}\left(a_2\frac{d}{dz}\right)+a_0. \tag{4.5}$$

Note que L es formalmente autoadjunto incluso para a_0 una función continua a trozo en $a\leq z\leq b$. Hasta qué punto pueden los resultados válido para f continua a trozo en $a<z<b$ extenderse a esta situación.

Ya que L es formalmente autoadjunto, se deduce que para cualquier par de funciones u, v dos veces diferenciables debe ocurrir que

$$vLu - uLv = -[a_2(z)W(u,v;z)]', \tag{4.6}$$

donde $W(u,v;z) = uv' - vu'$ es el Wronskiano de u y v. Sea u una solución de (4.4). Suponiendo que el problema completamente homogéneo $Lv = 0$, $B_1 v = 0 = B_2 v$ tiene solo una solución no trivial v_1, entonces

$$v_1 Lu - uLv_1 = ku(z_0)v_1(z_0)\delta(z - z_0), \tag{4.7}$$

pero como las condiciones de borde son satisfechas para u y para v_1, $W(u,v_1;a) = W(u,v_1;b) = 0$. Por tanto, el problema (4.4) es incompatible a menos que $v_1(z_0) = 0$. En efecto, si $v_1(z_0) = 0$ tenemos que para $f = ku(z_0)\delta(z - z_0)$ la condición de solubilidad

$$\int_a^b f v_1 dz = 0, \tag{4.8}$$

es satisfecha y (4.4) admite infinitas solución de la forma

$$u = \tilde{u} + c_1 v_1, \tag{4.9}$$

donde c_1 es una constante arbitraria y $\tilde{u}$ es una solución particular de (4.4).

Observación 4.1

1. En relación a (4.4) se deben resaltar dos aspectos importantes; primero, la solución al problema completamente homogéneo debe anularse en el soporte de la delta para que se satisfaga la condición de solubilidad; segundo, como era de esperar, la solución general al problema existe pero no es única.

2. Mientras que la solución al problema homogéneo es clásica, la solución particular es distribucional.

Luego de haber analizado la existencia y unicidad de las soluciones del PVB (4.4), regresemos a la forma (4.1 -4.3).

De acuerdo con (4.2), es claro que el problema exhibe simetría Z_2 y que en el soporte de la delta, $z = 0$, se debe cumplir las siguientes condiciones

$$\psi_m(0^+) = \psi_m(0^-), \tag{4.10}$$

$$\frac{d}{dz}\psi_m(0^+) - \frac{d}{dz}\psi_m(0^-) = -3k\psi_m(0), \tag{4.11}$$

requeridas para conectar la parte derecha de la solución con su parte izquierda. Técnicamente se debe considerar a ψ_m como una función por partes.

Adicionalmente, se tiene las condiciones de normalización

$$\int_{-z_r}^{z_r} \psi_{m_i}(z)^* \psi_{m_j}(z) dz = \delta_{ij}, \tag{4.12}$$

y la ortogonalidad entre las soluciones clásica y distribucional

$$\int_{-z_r}^{z_r} \psi_m^c(z)\psi_m^d(z) dz = \delta_{cd}, \tag{4.13}$$

(c y d para distinguir clásica y distribucional).

4.2. El espectro de autofunciones

4.2.1. El modo cero

Para $m^2 = 0$ es sencillo verificar que

$$\psi_0 = \sqrt{k}\,(1+k|z|)^{-3/2} \tag{4.14}$$

es la solución de la ecuación resultante, que corresponde al único estado acotado del espectro de autofunciones.

4.2.2. Modos masivos

De la ecuación (4.1), para $m^2 \neq 0$, se obtiene

$$\psi_m(z) = N_m \begin{cases} (k^{-1}-z)^{\frac{1}{2}}\left[AJ_2(m(k^{-1}-z)) + BY_2(m(k^{-1}-z))\right], & -z_r < z < 0, \\ (k^{-1}-z)^{\frac{1}{2}}\left[CJ_2(m(k^{-1}-z)) + DY_2(m(k^{-1}-z))\right], & 0 < z < z_r, \end{cases} \tag{4.15}$$

donde $J_2(x)$ y $Y_2(x)$ son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo, N_m la constante de normalización y A, B, C y D las constantes de integración. Además note que (4.15) debe cumplir con las condiciones (4.10) y (4.11). Así pues, luego de absorber una de las constantes de integración dentro de la norma, se requiere de cuatro condiciones para hallar las constantes restantes.

Para la solución clásica se tiene las condiciones (4.10), (4.11), (4.12) y (4.8) de esta última se desprende que $\psi_m^c(0) = 0$; mientras que para la solución distribucional, se tiene (4.10), (4.11), (4.12) y (4.13).

Las constantes de integración serán determinadas para z_r muy grande; determinarlas para cualquier z_r es un técnicamente muy difícil. Además, desde el punto de vista físico se desea conocer el comportamiento del espectro de autofunciones en ese límite.

4.3. La solución clásica

Considere la solución clásica del problema (4.1)

$$\psi_m^c(z) = N_m^c \begin{cases} (k^{-1}-z)^{\frac{1}{2}}\left[A_cJ_2(m(k^{-1}-z)) + B_cY_2(m(k^{-1}-z))\right], & -z_r < z < 0, \\ (k^{-1}-z)^{\frac{1}{2}}\left[C_cJ_2(m(k^{-1}-z)) + D_cY_2(m(k^{-1}-z))\right], & +z_r > z > 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

Como ya comentamos la norma, N_m^c, será determinaran por medio de la condición (4.12). Así pues,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_r(N_m^c)^2} &= \lim_{z_r\to\infty} \frac{1}{z_r}\left[\int_{-z_r}^{0} (k^{-1}-z)[A_cJ_2[m(k^{-1}-z)] + B_cY_2[m(k^{-1}-z)]]^2 dz \right. \\ &+ \left. \int_0^{z_r} (k^{-1}-z)[C_cJ_2[m(k^{-1}+z)] + D_cY_2[m(k^{-1}+z)]]^2 dz.\right] \end{aligned} \tag{4.17}$$

Usando el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel, (4.17) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_r(N_m^c)^2} &= \lim_{z_r\to\infty}\frac{2}{m\pi z_r}\left[\int_{-z_r}^{0}\left(A_c\cos\{m(k^{-1}-z)-\frac{5}{4}\pi\}+B_c\sin\{m(k^{-1}-z)-\frac{5}{4}\pi\}\right)^2 dz\right.\\ &+ \left.\int_{0}^{z_r}\left(C_c\cos\{m(k^{-1}+z)-\frac{5}{4}\pi\}+D_c\sin\{m(k^{-1}+z)-\frac{5}{4}\pi\}\right)^2 dz\right] \qquad (4.18)\end{aligned}$$

resolviendo la expresión anterior se tiene que

$$(N_m^c)^2 = \frac{\pi m}{z_r}\left[A_c^2+B_c^2+C_c^2+D_c^2\right]. \qquad (4.19)$$

Haciendo $C_c = 1$, lo cual equivale a absorber una de las constantes en la norma, encontramos que la norma queda expresada en términos de las constantes de integración restantes. Entonces a partir de las condiciones (4.10), (4.11), (4.8) y (4.12) encontramos que

$$A_c = -1 \quad \text{y} \quad B_c = -D_c = \frac{J_2[mk^{-1}]}{Y_2[mk^{-1}]}. \qquad (4.20)$$

4.4. La solución distribucional

La solución distribucional viene dada por

$$\psi_m^d(z) = N_m^d\begin{cases}(k^{-1}-z)^{\frac{1}{2}}\left[A_dJ_2(m(k^{-1}-z))+B_dY_2(m(k^{-1}-z)),\right] & -z_r<z<0,\\ (k^{-1}-z)^{\frac{1}{2}}\left[C_dJ_2(m(k^{-1}-z))+D_dY_2(m(k^{-1}-z)),\right] & +z_r>z>0,\end{cases} \qquad (4.21)$$

Procediendo de forma similar al caso anterior, la constante de normalización, N_m^d, puede ser hallada

$$(N_m^d)^2 = \frac{\pi m}{z_r}\left[A_d^2+B_d^2+C_d^2+D_d^2\right]^{-1}. \qquad (4.22)$$

De la condición (4.13) se obtiene

$$0 = \left[A_c^2+B_c^2+C_c^2+D_c^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left[A_d^2+B_d^2+C_d^2+D_d^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left[A_dA_c+B_dB_c+C_dC_c+D_dD_c\right], \qquad (4.23)$$

y ya que los dos primero términos de este producto deben ser distintos de cero, debe ocurrir que

$$\left[A_dA_c+B_dB_c+C_dC_c+D_dD_c\right]=0, \qquad (4.24)$$

donde nuevamente se ha hecho uso del comportamiento asintótico de las funciones de Bessel. Ahora, recordemos que $C_c = 1$ y en analogía tomemos a $C_d = 1$; entonces a partir de las condiciones (4.10) y (4.11) tenemos

$$A_dJ_2[mk^{-1}]+B_dY_2[mk^{-1}] = J_2[mk^{-1}]+D_dY_2[mk^{-1}], \qquad (4.25)$$

y

$$A_d J_1[mk^{-1}] + B_d Y_1[mk^{-1}] = -J_1[mk^{-1}] - D_d Y_1[mk^{-1}]. \tag{4.26}$$

Por tanto, las constantes de integración restantes vienen dadas por

$$A_d = 1, \quad B_d = D_d = -\frac{J_1[mk^{-1}]}{Y_1[mk^{-1}]}. \tag{4.27}$$

Conclusiones

Las conclusiones asociadas a este trabajo son las siguientes:

1. El problema de contorno (4.4 - 4.5) admite como solución general la combinación lineal de la solución clásica y la solución distribucional, siendo la primera una solución al problema homogéneo mientras que la segunda corresponde a una solución partícular cuando la no-homogeneidad es proporcional a una delta.

2. La condición de solubilidad (4.8) implica que la solución clásica debe anularse sobre el soporte de la delta. A pesar de que ello ocurre para el problema (4.4 - 4.5) la solución (4.9) no es única. Es decir, sólo está garantizada la existencia de la solución de (4.4 - 4.5) pero no la unicidad de la misma.

3. Tanto la solución clásica como la solución distribucional dependen cada una de cuatro constante de integración. Para determinarlas univocamente en cada caso, además de las condiciones (4.10), (4.11) y (4.12) para ambos casos, se tiene, para la solución clásica la condición de solubilidad (4.8) y para la solución distribucional la condición de ortogonalidad (4.13).

4. Para demostrar la suficiencia de la condicón (4.8) fue necesario apelar al Teorema Alternativo de Fredholm. Se presentaron dos pruebas de este Teorema: una particular donde el espacio es de Hilbert finito dimensional y una general donde el espacio es arbitrario.

Bibliografía

[1] L. Randall y R. Sundrum, *An alternative to compactification* Phys. Rev. Lett. **83** 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].

[2] Stakgolg I. *Green's functions and boundary value problems.* A Wiley-Interscince Publication . **1**(1979).

[3] Donald L.,Robert G. K.,Donald R.,Ostbeg K. *Elementary Diferential Equations.* Addison-Wesley Publising Company (1968).

[4] A. Melfo, N. Pantoja and F. Ramirez, *Breaking the Z_2 symmetry of the Randall-Sundrum scenario and the fate of the massive modes* [arXiv:1011.2524[hep-th]].

[5] Mukherjea A. y Pothoven K. *Real and Functional Analysis*Plenum Press New York and London(1978).

[6] Finol C. y Liendo V. *Notas de Análisis Funcional*(2002)