UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

"Un enfoque de la Teoría Espectral Local dirigido hacia los Operadores que no verifiquen la Propiedad de Extensión Univaluada (SVEP)"

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Sharon A. Haro S.

como requisito final
para obtener el título de Licenciado
en Ciencias Matemáticas
Área de Conocimiento: Análisis Funcional.
Tutor: MSc. Elvis C. Aponte

Barquisimeto, Venezuela. Junio de 2014

Universidad Centroccidental
"Lisandro Alvarado"
Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

ACTA
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

Los suscritos miembros del Jurado designado por el Jefe del Departamento de Matemáticas del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", para examinar y dictar el veredicto sobre el Trabajo Especial de Grado titulado:

"Un enfoque de la Teoría Espectral Local dirigido hacia los Operadores que no verifiquen la Propiedad de Extensión Univaluada (SVEP)"

presentado por el ciudadano Br. Sharon A. Haro S. titular de la Cédula de Identidad No. 17.035.812, con el propósito de cumplir con el requisito académico final para el otorgamiento del título de Licenciado en Ciencias Matemáticas.

Luego de realizada la Defensa y en los términos que imponen los Lineamientos para el Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, se procedió a discutirlo con el interesado habiéndose emitido el veredicto que a continuación se expresa:

[1] ____________________

Con una calificación de ____________________ puntos.

En fe de lo expuesto firmamos la presente Acta en la Ciudad de Barquisimeto a los _____ días del mes de ____________________ de __________.

TUTOR	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA
PRINCIPAL	FIRMA

OBSERVACIONES:

____

____

____

[1] Aprobado ó Reprobado

A Dios, a mis Padres, y en especial a mi hijo Luis Aarón

Agradecimientos.

Quiero primeramente agradecer a mi Dios Todopoderoso por permitirme la vida. Enormemente a mi madre Vegni Suárez por ser ella quien me enseño las grandes cosas de este mundo, por su apoyo incondicional, por ser la mejor del mundo y el mejor ejemplo de mi vida.
A mi papá Harold Haro por apoyarme en cada instante, por estar pendiente de mis logros y ser comprensible en los momentos de apremio de mi vida y mi carrera
A mis Hermanos y Hermanas, Angel, Zoe, Marimar y Junior por estar siempre apoyándome.
A mi razón de ser, de superación, de vivir mi tesoro Luis Aarón Yovera Haro por ser lo que más amo, por sus travesuras y por ser siempre mi motivo de mejorar y crecer cada día.
A mi esposo José Yovera, por su gran apoyo.
A mis profesores, por ser ellos quienes aportaron sus conocimientos en mi formación académica.
A mi tutor MSc. Elvis Aponte por sus aportes y sabios consejos.
A el Profesor Mario Rodriguez por ser una persona ejemplar dentro y fuera del aula de clase.
A mis amigas y amigos María E, Veronica, Xiomara ,Victor, Erica y Maria Celeste por ser únicos.
A nuestra Alma Mater la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado por permitir grandes momentos de mi vida universitaria en sus instalaciones.
Y a todos aquellos que de una u otra forma aportaron su granito de arena para poder culminar este trabajo dándome su ayuda moral e incondicional.
A todos ustedes mi más grande agradecimiento!!!!!

Resumen

Sea X un Espacio de Banach Complejo Infinito Dimensional y $T : X \to X$ un operador lineal acotado, consideramos las relaciones de la Propiedad de Extensión Univaluada (SVEP) para T con algunas cantidades asociadas a T las cuales juegan un papel importante en la Teoría de Fredholm. Este trabajo se basa en encontrar qué tipo de condiciones tienen los operadores que no poseen la Propiedad de Extensión Univaluada (SVEP), se estudiará la propiedad SVEP dando una versión local de la misma, emplearemos los conceptos básicos de la Teoría Espectral Local para establecer condiciones que garanticen o no la SVEP en un punto λ_0. Para ello, establecemos algunas propiedades que serán desarrolladas a lo largo del trabajo.

ÍNDICE

Introducción

La Teoría de Operadores es bastante amplia y tratada, además guarda una relación con la Propiedad de Extensión Univaluada, también conocida como la SVEP, por su siglas en ingles (Singled Valued Extension Property), cabe mencionar que la presente investigación tiene como finalidad verificar qué clases de operadores no poseen la SVEP, es bien conocido que ha sido N. Dunford en [7] y [8] el primero que introduce la Propiedad de Extensión Univaluada, la que en 1967 es tratada más metódicamente por N. Dunford y T. Schwartz. En la Teoría Espectral la SVEP, es una de las propiedades más importantes puesto que gran variedad de operadores la verifican, como esta indicado en las monografías de Laursen y Newmann [13]. La relación de la SVEP con la Teoría de Fredholm ha sido estudiada por Aiena en [1], también se estudia tal relación en [13], el desarrollo de las principales definiciones que acá emplearemos tales como Hiperrango e Hipernúcleo así como también la definición del Ascent y el Descent de un operador, pueden ser encontradas en el libro de H. Heuser [11]. Los operadores que no poseen la SVEP están fuera del contexto de una general y unificante Teoría Espectral como la observada en [4], es por ello que toma interés hacer el estudio para obtener condiciones bajo las cuales se garantice que un operador tenga o no la SVEP en un punto $\lambda \in \mathbb{C}$.

Se desarrollará la Teoría de Riesz-Schauder para hacer el estudio general de las cantidades asociadas con la Teoría de Fredholm y conjuntamente se hace el desarrollo de los conceptos básicos de la Teoría Espectral Local.

El Capítulo I consta de la teoría preliminar, la cual se basa en conceptos básicos que permiten profundizar las proposiciones y teoremas mas importantes, estas se pueden encontrar en cualquier libro de Álgebra y Análisis Funcional.

En el Capítulo II se podrá encontrar la definición de la Propiedad de Extension Univaluada (SVEP), así de lo referente a la Teoría Espectral Local, donde se definirá el Resolvente Local, el Espectro Local, el Subespacio Espectral Local, que posteriormente se conectaran con la Teoría de Riesz-Schauder para establecer los resultados que de alguna manera permitan indicar cuales operadores no poseen la SVEP.

En el Capítulo III se estudiará la Teoría de Riesz-Schauder, definiremos el Ascent, Descent, Operadores con Ascent infinito, Operadores con Deficiencia Finita, el cual permitirá identificar cuales operadores no poseen la SVEP en un punto $\lambda \in \mathbb{C}$.

En el Capítulo IV se observará que la Teoría de Fredholm esta desarrollada en base a las longitudes de las cadenas del operador T, así pues, la Teoría de Fredholm tiene relación con la SVEP en un punto, es por ello que definiremos un operador que la cumpla y muy particularmente, estudiaremos ciertas condiciones bajo las cuales un operador T no verifica la SVEP en un punto, para ello definiremos a los Operadores de Semi-Fredholm, el espectro de Weyl y Browder así como los Operadores Semi-regulares.

Capítulo 1

Teoría Preliminar.

En este capítulo se indicará todas las definiciones, proposiciones, lemas y teoremas que servirán de base y soporte a cada una de las propiedades que se encontrarán a lo largo del trabajo, cabe destacar que solo se enunciaran los mismos más no se normalizará su demostración indicando dónde se puede evidenciar el desarrollo de la misma.

Definición 1.1 (**Norma**)**.** Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Una norma sobre X es la función $\|\cdot\|$ de X en los reales no negativos, que tiene las siguientes propiedades:

1. Para cualquier x en X, $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. Para cualquier $x \in X$ y α en $\mathbb{C}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
3. Para $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Desigualdad Triangular)

Un **Espacio Normado** es un par $(X, \|\cdot\|)$ donde X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\|\cdot\|$ es una norma sobre X.

Definición 1.2 (**Transformación Lineal**)**.** Sean X, Y espacios vectoriales y una aplicación $T : X \to Y$, diremos que T es una Transformación Lineal si se cumple

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \tag{1.1}$$

para cualquier $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

En la definición anterior, si Y es subespacio de X, y cumple con (1.1) diremos entonces que la aplicación T es un **Operador Lineal**.

Si además $Y = \mathbb{K}$, diremos entonces que la aplicación T es un **Funcional Lineal**.

Definición 1.3. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial normado X, diremos que T es un **Operador Lineal Acotado** si existe un escalar k, tal que para todo $x \in X$

$$\| T(x) \| \leq k \| x \|.$$

Definición 1.4. Sean G y H semigrupos. Una función $f : G \to H$ es un **Homomorfismo** si cumple que:

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Si además:

(i) f es inyectiva, diremos entonces que es un **Monomorfismo.**

(ii) f es sobreyectiva, diremos entonces que es un **Epimorfismo.**

(iii) f es biyectiva, diremos entonces que es un **Isomorfismo.**

Un homomorfismo $f : G \to G$ se le llama **Endomorfismo** y un isomorfismo $f : G \to G$ se le conoce como un **Automorfismo.**

Definición 1.5 (**Imagen y Núcleo**)**.** Sean X, Y espacios vectoriales y $T : X \to Y$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales X, Y, llamaremos Imagen de T al conjunto

$$T(X) = \{Tx : x \in X\}$$

y, llamaremos el Núcleo de T al conjunto

$$ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\}.$$

Claramente $T(X)$ es subespacio de Y y $ker(T)$ es subespacio de X.

Definición 1.6 (**Operador de Rango Finito**)**.** Los Operadores Lineales con espacio imagen de dimensión finita son llamados operadores de dimensión finita o también operadores de rango finito.

Definición 1.7 (**Subespacio T-invariante**)**.** Dado un operador lineal $T : X \to X$ se dice que un subespacio W de X es un subespacio invariante frente a T (o T-invariante) si para todo vector $w \in W$ se cumple que $T(w) \in W$.

Definición 1.8 (**Espacios Vectoriales Completos**)**.** Un espacio vectorial normado V es completo si y solo si cada sucesión de Cauchy en V converge.

Definición 1.9 (**Espacio de Banach**)**.** Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, se denomina un espacio de Banach si es completo con respecto a la topología inducida por la norma.

Definición 1.10. Sean X, Y espacios de Banach, denotaremos por $L(X,Y)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales acotados de X en Y. En el caso de que $X = Y$ entonces se denotara por $L(X)$.

Definición 1.11. Si $T \in L(X,Y)$, definimos la norma de T por

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Definición 1.12 (**Dual**)**.** Llamaremos **Dual** topológico ó simplemente el dual de X al espacio vectorial normado cuyos elementos son los funcionales lineales acotados actuando del espacio de Banach X en $\mathbb{C}$. A tal espacio lo denotaremos por X^*, esto es, $X^* := L(X, \mathbb{C})$.

Si $T \in L(X,Y)$ denotamos por T^* al dual del operador T, definido como sigue

$$\begin{cases} T^* : Y^* \to X^*, \quad f \to T^*(f). \\ \qquad \text{donde} \\ T^*(f) : X \to \mathbb{C}, \quad x \to (T^*(f))(x) := f(T(x)). \end{cases}$$

Así, $T^* \in L(Y^*, X^*)$.

Observación 1.1. Sea $T \in L(X)$ entonces

$$T(X) \textit{ es cerrado} \Leftrightarrow T^*(X^*) \textit{ es cerrado.}$$

Demostración. (Ver [2]). □

A continuación una importante definición que nos ayudará para ver cuando un operador tiene rango cerrado o no.

Definición 1.13 (**Módulo Minimal**). Si $T \in L(X,Y)$, el módulo minimal reducido de T es dado por

$$\gamma(T) := \inf_{x \notin \ker T} \quad \frac{\|T(x)\|}{dist(x, \ker\, T)},$$

donde $\gamma(0) = \infty$.

Observación 1.2. Si T es biyectivo, entonces $\gamma(T) = \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$.

Para ver esto sean:

$$a = \inf_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad b = \left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \right)^{-1}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} b^{-1} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \Rightarrow b^{-1} &\geq \frac{\|x\|}{\|Tx\|}; \quad \text{para todo} \quad x \neq 0; \\ \Rightarrow b \quad &\leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \quad \text{para todo} \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Así

$$b \leq \inf_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \quad \text{consecuentemente} \quad a > 0$$

y por lo tanto

$$\left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \right)^{-1} \leq \inf_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = a.$$

Por otro lado

$$a \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \quad \text{para todo} \quad x \neq 0, (T\ es\ inyectivo).$$

$$\Rightarrow \quad a^{-1} \geq \frac{\|x\|}{\|Tx\|}; \quad \text{para todo} \quad x \neq 0.$$

Así, a^{-1} es cota superior del conjunto $\left\{ \dfrac{\|x\|}{\|Tx\|}; x \neq 0 \right\}$, luego $a^{-1} \geq \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|x\|}{\|Tx\|}$, por lo que $a \leq \left(\sup_{x \neq 0} \dfrac{\|x\|}{\|Tx\|} \right)^{-1} = b$.

Por lo tanto

$$\inf_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \left(\sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|}{\|Tx\|}\right)^{-1}.$$

Como ya teníamos la desigualdad contraria se concluye que

$$\inf_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left(\sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|}{\|Tx\|}\right)^{-1}.$$

Ahora como T es inyectivo, ocurre que $dist(x, \ker\, T) = dist(x, \{0\}) = \|x\|$ y si T es sobreyectivo con $Tx = y \Leftrightarrow x = T^{-1}y$, se tiene que

$$\begin{aligned}\gamma(T) = \inf_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} &= \left(\sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|}{\|Tx\|}\right)^{-1}\\ &= \left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|T^{-1}y\|}{\|y\|}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{\|T^{-1}\|}.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.1. *La transformación lineal $T : X \to Y$ entre los espacios normados X e Y posee una inversa continua T^{-1} acotada sobre $T(X)$ si, y sólo si para una constante $k > 0$ la estimación*

$$k \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel,$$

se cumple para todo $x \in X$.

Demostración. (Ver [6]) □

Lema 1.1. *Si X, Y son espacios de Banach, entonces $T \in L(X, Y)$ tiene inversa continua si, y sólo si es inyectivo y su espacio imagen es cerrado.*

Demostración. (Ver [11]) □

Definición 1.14. (Producto Interior) Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interior en X es una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ tal que

1.- $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

2.- $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

3.- $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.

4.- $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in X$, siendo $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición 1.15. (Norma Asociada) Si $\langle, \rangle$ es un producto interior, llamaremos norma asociada a $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Definición 1.16. (Espacio de Hilbert) Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con un producto interior H cuya norma asociada es completa. Es decir, tal que H es un espacio de Banach respecto a la norma asociada.

Teorema 1.2. *Sea $T \in L(X, Y), X$ e Y espacios de Banach, entonces tenemos que:*

(i) $\gamma(T) > 0$ *si y solo si* $T(X)$ *es cerrado.*

(ii) $\gamma(T) = \gamma(T^*)$.

Demostración. (i) Si $T = 0$, es el operador nulo entonces (i) es válido. Supongamos que $T \neq 0$. Sea $\overline{X} := X/\ker\, T$ y definamos $\overline{T} : \overline{X} \to Y$, por

$$\overline{T}\overline{x} = Tx, \text{ para todo } x \in \overline{X}.$$

Si $y \in \overline{X}$ entonces $y = x + \ker\, T$ de manera que $\bar{T}(\bar{y}) = Tx$.
Sean $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \overline{X}$, ahora

$$\begin{aligned} \overline{T}(\overline{x}_1) = \overline{T}(\overline{x}_2) &\Rightarrow T(x_1) = T(x_2) \\ &\Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker\, T \\ &\Rightarrow x_1 \sim x_2 \\ &\Rightarrow \overline{x}_1 = \overline{x}_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{T}$ es inyectivo.
Recordemos que T es acotado, así existe $k > 0$, tal que $\|Tx\| \leq k\|x\|$, $\forall x \in X$.
Ahora, sean $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \overline{X}$ tal que $\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\| \leq \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|\overline{T}(\overline{x}_1) - \overline{T}(\overline{x}_2)\| &= \|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \\ &\leq k\|x_1 - x_2\| < k\delta. \end{aligned}$$

Se deduce así que $\overline{T}$ es contínuo.

Por otro lado, es fácil ver que $\overline{T}(\overline{X}) = T(X)$, por el Lema 1.1 , tenemos que $\overline{T}(\overline{X})$ es cerrado si y solo si $\overline{T}$ tiene inversa contínua y por el Teorema 1.1, esto es equivalente a que existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda\|\overline{x}\| \leq \|\overline{T}\overline{x}\|, \text{ para cada } \overline{x} \in \overline{X}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\gamma(T) &= \inf_{x\notin \ker T} \frac{\|Tx\|}{dis(x, \ker T)} = \inf_{x\notin \ker T} \frac{\|Tx\|}{\inf\limits_{y\in \ker T}\|x-y\|} \\ &= \inf_{x\notin \ker T} \frac{\|\overline{T}\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|} = \inf_{\overline{x}\neq\overline{0}} \frac{\|\overline{T}\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|} = \gamma(\overline{T}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma(T) = \gamma(\overline{T})$.

Luego se concluye que:

$$\begin{aligned}T(X) = \overline{T}(\overline{X}) \text{ es cerrado } &\Leftrightarrow \|\overline{T}\overline{x}\| \geq \lambda\|\overline{x}\|; \text{ para cada } \overline{x} \in \overline{X} \\ &\Leftrightarrow \frac{\|\overline{T}\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|} \geq \lambda > 0; \text{ para cada } \overline{x} \in \overline{X} \\ &\Leftrightarrow \inf_{\overline{x}\neq\overline{0}} \frac{\|\overline{T}\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|} > 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma(T) = \gamma(\overline{T}) > 0.\end{aligned}$$

(ii) Si $\gamma(T) = 0$ por la parte (i), se tiene que $T(X)$ no es cerrado, implicando que $T^*(X^*)$ no es cerrado por la Observación 1.1 y nuevamente por la parte (i) $\gamma(T^*) = 0$. Supóngase ahora que $\gamma(T) > 0$, entonces $T(X)$ es cerrado. Si $\overline{T}_0 : \overline{X} \to T(X)$ es definido por $\overline{T}_0\overline{x} := Tx$ para cada $\overline{x} \in \overline{X}$, procediendo como en la parte (i) se tiene que $\gamma(T) = \gamma(\overline{T}_0)$.

Definamos también, la función inclusión natural $J : T(X) \to Y$ y la proyección canónica $Q : X \to \overline{X}$, definida por $Q(x) = \overline{x}$.

Entonces, $T = J\overline{T}_0Q$, implicando que $T^* = Q^*(\overline{T}_0)^*J^*$ y como $\overline{T}_0$ es biyectivo, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\gamma(T) &= \gamma(\overline{T}_0) \\
&= \frac{1}{\|(\overline{T}_0)^{-1}\|}, && \text{por la definición de } \gamma. \\
&= \frac{1}{\|(\overline{T}_0^*)^{-1}\|}, && \text{ya que } \| T \| = \| T^* \|, \quad \text{(ver [2])}. \\
&= \gamma(\overline{T}_0^*), && \text{por la definición de } \gamma. \\
&= \gamma(T^*).
\end{aligned}
$$

□

Definición 1.17 (Álgebra). Un álgebra A es un espacio vectorial complejo dotado de un producto algebraico para el cual dados $a, b, c \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1 $(ab)c = a(bc)$ Asociatividad.

2 $a(b+c) = ab + ac$ Distributividad izquierda.

3 $(a+b)c = ac + bc$ Distributividad derecha.

4 $(\alpha a)b = \alpha(ab)$.

Definición 1.18 (Álgebra de Banach). Dado un álgebra X sobre $\mathbb{K}$, diremos que es un álgebra normada si posee una norma $\| \cdot \|$ compatible con el producto de la siguiente manera

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \|, \text{ para todo } x, y \in X.$$

Si una álgebra normada, con la métrica que genera la norma, es completa, se dirá que es un **Algebra de Banach**.

Definición 1.19 (Suma Directa). Sean F, G subespacios de un espacio vectorial V, entonces la suma $F + G$ es también un subespacio de V. Esta suma se le llama Suma Directa y la denotamos por $F \oplus G$ si $F \cap G = \{0\}$.

Además, si $F \oplus G = V$, entonces G es llamado el **Complemento Algebraico** de F en V, con esto en mente veamos las siguientes observaciones:

Observación 1.3. Todo subespacio de un espacio vectorial posee un complemento algebraico.

Observación 1.4. Dos complementos de un subespacio dado son, o ambos infinito dimensional o son de la misma dimensión finita.

Esta observación nos permite definir la codimensión.

Definición 1.20 (Codimensión). Sean F, G subespacios de V, entonces se define la codimensión de un subespacio G de V, como la dimensión de algún complemento F de G, se denota por $codim_V G$ o simplemente $codimG$ si el espacio V es fijo.

De esta definición se desprende lo siguiente

$$\begin{array}{lcll} codimG & = & \infty & \text{si} \quad dimF = \infty. \\ codimG & = & dimF & \text{si} \quad 1 \leq dimF < \infty. \\ codimG & = & 0 & \text{si} \quad G = V. \end{array}$$

Definición 1.21 (Espectro). Sea $T \in L(X)$, y sea X un Espacio de Banach. El Espectro es denotado por $\sigma(T)$ y se define como sigue

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es biyectivo}\}.$$

Definición 1.22 (Radio Espectral). Sea $T \in L(X)$, y sea X un Espacio de Banach. El Radio Espectral de T denotado por $r(T)$ es definido por

$$r(T) = \sup\{\mid \lambda \mid : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Definición 1.23 (Espectro Puntual). Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. El Espectro Puntual de T, denotado por $\sigma_p(T)$, es dado por

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un autovalor de } T\}.$$

Teorema 1.3. *Sea $T \in L(X)$, y sea X un Espacio de Banach. Entonces tenemos que*

$$\sigma(T) \neq \emptyset \ \text{ y } \ r(T) = \lim_{n\to\infty} \parallel T^n \parallel^{\frac{1}{n}} .$$

Además, $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Demostración. (Ver [11]) □

Definición 1.24. El resolvente de un endomorfismo contínuo T sobre un espacio de Banach X, es el conjunto

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ es invertible}\}.$$

Esto es, si $\sigma(T)$ es el espectro de T, entonces $\rho(T) := \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$.

Llamaremos el operador resolvente a la función definida sobre $\rho(T)$, dada por

$$R_\lambda : \lambda \to R_\lambda := (\lambda I - T)^{-1}.$$

La demostración del siguiente teorema se encuentra en el teorema 44.1 de [10].

Teorema 1.4. *Para un operador $T \in L(X), X$ un espacio de Banach, se cumple:*

a) Para $|\lambda| > \text{lím}_{n\to\infty} \parallel T^n$ tenemos que $\lambda \in \rho(T)$ y

a.1) $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$.
Para $|\lambda| > \|T\|$ se tiene además

a.2) $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^{-1}$
y en particular, R_λ tiende a 0 cuando $|\lambda| \to \infty$.

Teorema 1.5. *[* ***Teorema de Liouville****] Si una función es analítica sobre todo el plano complejo y está acotada, entonces la función es constante.*

Demostración. (Ver [11]) □

Teorema 1.6. *[****Teorema de la Aplicación Abierta****] Sean X, Y espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es lineal, sobreyectiva y continua, entonces para cada A abierto en X, se tiene que $T(A)$ es abierto en Y.*

Demostración. (Ver [11]) □

Proposición 1.1. *Sea A un algebra de Banach compleja, dada la Serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n, \tag{1.2}$$

una Serie de Potencia Compleja cuyo radio de convergencia esta dado por $r = \frac{1}{\text{lím sup} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$, *consideremos a* x *un elemento en* A. *Entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

converge si $r(x) < r$ *y diverge si* $r(x) > r$, *donde* $r(x) = \text{lím}_{n\to\infty} \parallel x^n \parallel^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. (Ver [11]) □

Definición 1.25. (Bounded Below) Un Operador $T \in L(X)$ se dice que es bounded below, si T es inyectivo y posee rango cerrado.

Mencionaremos ahora dos clases especiales de espectro.

El **Espectro Aproximado Puntual**, se define como

$$\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \, no\, es\, bounded\, below\},$$

y el **Espectro Sobreyectivo**, se define como

$$\sigma_s(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \, no\, es\, sobreyectivo\}.$$

Teorema 1.7. *Si* $T \in L(X)$ *entonces* $\sigma_a(T)$ *y* $\sigma_s(T)$ *son subconjuntos compactos no vacíos de* $\mathbb{C}$. *Además, ambos espectros contienen la frontera* $\partial\sigma(T)$ *de* $\sigma(T)$. *También*

$$\sigma_a(T) = \sigma_s(T^*) \text{ y } \sigma_s(T) = \sigma_a(T^*).$$

Demostración. (Ver [2]) □

Teorema 1.8. *Un funcional lineal* f *definido en el espacio vectorial normado* X, *es continuo si, y sólo si es acotado.*

Demostración. (Ver [6]) □

Proposición 1.2. *Sean* X *y* Y *dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{C}$ *y sea* X *de dimensión finita,* X *y* Y *son isomorfos si, y sólo si* $dimX = dimY$.

Demostración. (Ver [11]) □

Capítulo 2

La Propiedad de Extensión Univaluada.

La Propiedad de Extensión Univaluada (SVEP) es una propiedad que la cumplen una amplia variedad de operadores lineales acotados; la misma es introducida primeramente por Dunford en [7] y [8] y es tratada más metódicamente por N. Dunford y T. Schwartz en [9]. En este capítulo se define a la SVEP y se estudiará la Teoría Espectral Local, además establecemos algunos teoremas con el cual se caracteriza a los operadores que no verifiquen la SVEP en un punto.

1.Definición de La Propiedad de Extensión Univaluada.

Antes de iniciar con la definición de La Propiedad de Extensión Univaluada (SVEP), definimos dos conjuntos importantes.

Definición 2.1 (**Resolvente Local**). Sea $T \in L(X)$ un operador lineal acotado, el Resolvente Local de T en el punto $x \in X$, denotado como $\rho_T(x)$, es definido como la unión de todos los subconjuntos abiertos U de $\mathbb{C}$ tal que existe una función analítica $f : U \to X$ que satisface

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x, \forall \lambda \in U. \tag{2.1}$$

Definición 2.2 (**Espectro Local**). Sea $T \in L(X)$ un operador lineal acotado, el Espectro Local $\sigma_T(x)$ de T en x es dado por

$$\sigma_T(x) := \mathbb{C} \setminus \rho_T(x).$$

Definición 2.3 (**SVEP**). Sea X un espacio de Banach Complejo y $T \in L(X)$. El operador T se dice que tiene la Propiedad de Extensión Univaluada en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (abreviado SVEP en λ_0), si para todo disco abierto $\mathbb{D}_{\lambda_0}$ centrado en λ_0, la única función analítica

$$f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X,$$

que satisface la ecuación

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0, \tag{2.2}$$

es la función $f \equiv 0$.

Un operador $T \in L(X)$ se dice que posee la SVEP si T posee la SVEP en cada punto $\lambda \in \mathbb{C}$.

En lo que sigue mencionaremos algunas consecuencias básicas de la SVEP:

(a) La SVEP asegura la consistencia de la solución local de la ecuación

$$(\mu I - T)f(\mu) = x \quad \forall \mu \in U_\lambda \subseteq \mathbb{C}.$$

Esto es, supongamos que T tiene la SVEP en $\lambda_0 \in \rho_T(x)$, y que existen una vecindad U de λ_0 y las funciones analíticas $f, g : U \to X$ que cumplen con

$$\begin{cases} (\mu I - T)f(\mu) = x & \text{para cada} \quad \mu \in U \\ (\mu I - T)g(\mu) = x & \text{para cada} \quad \mu \in U. \end{cases} \tag{2.3}$$

de (2.3) tenemos que $(\mu I - T)(f - g)(\mu) = 0$, pero como T tiene la SVEP en λ_0 y $f - g$ analítica, entonces $(f - g) \equiv 0$, lo cual implica que $f = g$, esto nos indica, que si

$$(\mu I - T)f(\mu) = x \quad \forall \mu \in U_\lambda \subseteq \mathbb{C}.$$

tiene dos soluciones analíticas y diferentes sobre U_λ, entonces el operador T no posee la SVEP en λ.

Otra consecuencia importante de la SVEP es la existencia de una extensión analítica maximal $\widetilde{f}$ de $R(\lambda, T)x = (\lambda I - T)^{-1}x$ definida en $\rho(T)$. Esta función verifica la ecuación.

$$(\mu I - T)\widetilde{f}(\mu) = x \quad \text{para cada} \quad \mu \in \rho_T(x)$$

y, claramente

$$\widetilde{f}(\mu) = (\mu I - T)^{-1}x \quad \text{para cada} \quad \mu \in \rho(T).$$

(b) La SVEP se hereda por la restricción sobre espacios cerrados invariantes. Es decir, si $T \in L(X)$ tiene la SVEP en λ_0 y M es un subespacio cerrado T-invariante, entonces $T|_M$ tiene la SVEP en λ_0. Además,

$$\sigma_T(x) \subseteq \sigma_{T|_M}(x) \quad \text{para cada} \quad x \in M.$$

En efecto; probamos que $\rho_{T|_M}(x) \subseteq \rho_T(x)$.

Sean $x \in M, \lambda \in \rho_{T|_M}(x)$, entonces existe una vecindad U_λ de λ y una función analítica $f : U_\lambda \to M \subset X$ tal que

$$(\mu I - T|_M)f(\mu) = x \qquad \forall \mu \in U_\lambda \quad \text{y} \quad x \in M.$$

Pero, $T(x) = T|_M(x), \forall x \in M$, ya que M es T-invariante, así

$$(\mu I - T|_M)f(\mu) = (\mu I - T)f(\mu) = x \qquad \forall \mu \in U_\lambda.$$

Más aún, si en lo anterior $x = 0$ demostramos que $T|_M$ posee la SVEP en λ_0; si T tiene la SVEP en λ_0.

En consecuencia, $\lambda \in \rho_T(x)$ y por lo tanto $\rho_{T|_M}(x) \subseteq \rho_T(x)$, luego, $\sigma_T(x) \subseteq \sigma_{T|_M}(x)$.

(c) Sabiendo la definición de Espectro Puntual de T. De la definición de la SVEP, se tiene que:

Si λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_p(T) \Rightarrow T$ tiene la SVEP en λ_0.

En efecto, observemos primero que:

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda \text{ es un autovalor de } T &\Leftrightarrow Tx = \lambda x, \text{ para algún } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda I - T)x = 0, \quad \text{ para algún } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda I - T \text{ no es inyectivo.} \end{aligned}$$

luego, si λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_p(T)$, entonces existe una vecindad U de λ_0 tal que $(\lambda I - T)$ es inyectivo para cada $\lambda \in U, \lambda \neq \lambda_0$.

Sea $f : V \to X$ una función analítica definida sobre otra vecindad V de λ_0 para la cual la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ es válida para cada $\lambda \in V$.

Asumamos que $V \subseteq U$. Entonces $f(\lambda) \in \ker(\lambda I - T) = \{0\}, \lambda \neq \lambda_0$, ya que $\lambda I - T$ es inyectivo en U, se tiene que $f(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in V$, $\lambda \neq \lambda_0$. Por la continuidad de f en λ_0 tenemos que $f(\lambda_0) = 0$, en consecuencia $f \equiv 0$, y por lo tanto T tiene la SVEP en λ_0.

Recordemos que $\sigma_a(T)$ es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $\lambda I - T$ no es bounded below, luego usando el mismo argumento de la prueba anterior, tenemos que, si λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_a(T)$ entonces T tiene la SVEP en λ_0.

Por dualidad, como $\sigma_s(T) = \sigma_a(T^*)$ (ver el Teorema 1.7) tenemos que, si λ_0 no es punto de acumulación de $\sigma_s(T)$, entonces T^* tiene la SVEP en λ_0.

(d) De la parte c) se deduce que cada operador T tiene la SVEP en un punto aislado del espectro.

2. Teoría Local Espectral.

La SVEP es caracterizada a través de algunas herramientas típicas originadas por la Teoría Local Espectral.

Definición 2.4 (**Subespacio Espectral Local**). Para todo subconjunto F de $\mathbb{C}$, denotaremos por $X_T(F)$ al Subespacio Espectral Local de T asociado con F dado por:

$$X_T(F) := \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq F\}.$$

Teorema 2.1. *Sea $\mu \in \rho_T(x)$ y sea U una vecindad abierta de μ. Si $f : U \to X$ es analítica y satisface la ecuación:*

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x, \forall \lambda \in U \tag{2.4}$$

entonces $\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(x)$, $\forall \lambda \in U$. Además, $0 \in \sigma_{\lambda I - T}(x)$ si y solo si $\lambda \in \sigma_T(x)$.

Demostración.

Primero, probemos que $\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(x), \forall \lambda \in U$.

Verifiquemos la primera inclusión $\sigma_T(f(\lambda)) \subseteq \sigma_T(x)$. En efecto, para cualquier $\lambda \in U$ definimos la función $g : U \to X$, dada por

$$\begin{cases} g(\mu) := (\mu I - \lambda I)^{-1}(f(\mu) - f(\lambda)), \quad \forall \mu \in U \backslash \{\lambda\}. \\ \qquad \text{y} \\ g(\lambda) := f'(\lambda). \end{cases}$$

Ahora bien,

$$(T - \mu I)g(\mu) = (\mu I - \lambda I)^{-1}(T - \mu I)(f(\mu) - f(\lambda)) = f(\lambda).$$

Verifiquemos la segunda igualdad,

$$\begin{aligned}(T-\mu I)(f(\mu)-f(\lambda)) &= (T-\lambda I+\lambda I-\mu I)(f(\mu)-f(\lambda))\\ &= (T-\lambda I)(f(\mu)-f(\lambda))+(\lambda I-\mu I)(f(\mu)-f(\lambda))\\ &= (T-\lambda I)(f(\mu)-f(\lambda))+(\lambda I-\mu I)(f(\mu))+(\mu I-\lambda I)(f(\lambda))\\ &= -(T-\lambda I)f(\lambda)+Tf(\mu)-\lambda If(\mu)+\lambda If(\mu)-\mu If(\mu)\\ &\quad +(\mu I-\lambda I)f(\lambda)\\ &= -(T-\lambda I)f(\lambda)+(T-\mu I)f(\mu)+(\mu I-\lambda I)f(\lambda)\\ &= -x+x+(\mu I-\lambda I)f(\lambda).\end{aligned}$$

De esta manera,

$$(T-\mu I)(f(\mu)-f(\lambda))=(\mu I-\lambda I)f(\lambda),$$

Entonces,

$$(\mu I-\lambda I)^{-1}(T-\mu I)(f(\mu)-f(\lambda))= f(\lambda).$$

Entre tanto,

$$\begin{aligned}(T-\mu I)g(\mu) &= (\mu I-\lambda I)^{-1}(T-\mu I)(f(\mu)-f(\lambda))\\ &= f(\lambda),\ \forall\mu\in U/\{\lambda\}\end{aligned}.$$

por continuidad, se sigue también

$$(T-\lambda I)g(\lambda)=f(\lambda). \tag{2.5}$$

De manera que $(T-\mu I)g(\mu)=f(\lambda),\forall\lambda\in U$.

Esto indica,

$$U\subseteq\rho_T(f(\lambda)). \tag{2.6}$$

Dado $\omega\in\rho_T(x)\backslash U$, se puede elegir una vecindad abierta W de ω para la cual $\lambda\notin W$ y una función analítica $h:W\to X$ tal que $(T-\mu I)h(\mu)=x,\forall\mu\in W$, si definimos $k(\mu):(\mu I-\lambda I)^{-1}(f(\mu)-f(\lambda)),\forall\mu\in W$, entonces $k:W\to X$ es analítica, y como antes, cumple que $(T-\mu I)k(\mu)=f(\lambda),\forall\mu\in W$.

Lo que indica que $\omega\in\rho_T(f(\lambda))$, de esta manera tenemos que

$$\rho_T(x)\backslash U\subseteq\rho_T(f(\lambda)). \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7), se tiene que $\rho_T(x) \subseteq \rho_T(f(\lambda))$.

Así,

$$\sigma_T(f(\lambda)) \subseteq \sigma_T(x). \tag{2.8}$$

Estudiemos la inclusion contraria, esto es, $\sigma_T(x) \subseteq \sigma_T(f(\lambda))$.

Sea $\omega \in \rho_T(f(\lambda))$, consideremos una función analítica $\hat{h} : W \to X$, sobre una vecindad abierta W de ω, tal que $(T - \mu I)\hat{h}(\mu) = f(\lambda); \forall \mu \in W$.

Se sigue que,

$$\begin{aligned} (T-\mu I)(T-\lambda I)\hat{h}(\mu) &= (T-\lambda I)(T-\mu I)\hat{h}(\mu) \\ &= (T-\lambda I)(f(\lambda)) \\ &= x, \ \forall \mu \in W. \end{aligned}$$

Así, que $\omega \in \rho_T(x)$. Esto prueba que $\rho_T(f(\lambda)) \subseteq \rho_T(x)$.

Lo que indica que,

$$\sigma_T(x) \subseteq \sigma_T(f(\lambda)). \tag{2.9}$$

De (2.8) y (2.9), deducimos que $\sigma_T(x) = \sigma_T(f(\lambda)), \forall \lambda \in U$.

Por otra parte, si $0 \notin \sigma_{\lambda I - T}(x)$ entonces $0 \in \rho_{\lambda I - T}(x)$, esto implica que existe una vecindad U de 0 y una función f, tal que

$$(\mu I - \lambda I + T)f(\mu) = x, \forall \mu \in U_0.$$

Ahora bien, sea $L(\theta) = -\theta + \lambda$ y $g = -f \circ L$.

Luego,

$$((\mu - \lambda)I + T)f(\mu) = x, \forall \mu \in U_0,$$

así,

$$((\lambda - \mu)I - T)(-f(\mu)) = x, \forall \mu \in U_0,$$

por lo tanto,

$$((\theta I - T)g(\theta) = x, \forall \theta \in \lambda - U_0 := U_\lambda.$$

Observando que:

(i) $g(\theta) = g(\lambda - \mu) = -f \circ L(\lambda - \mu) = -f(-\lambda + \mu + \lambda) = -f(\mu)$;

(ii) g es analítica;

(iii) U_λ es una vecindad de λ.

Así, $\lambda \in \rho_T(x)$, podemos asegurar que $\lambda \notin \sigma_T(x)$, de esta forma obtenemos que $0 \notin \sigma_{\lambda I - T}(x)$ implica que $\lambda \notin \sigma_T(x)$, por lo tanto,

$$\lambda \in \sigma_T(x) \Rightarrow 0 \in \sigma_{\lambda I - T}(x). \tag{2.10}$$

Recíprocamente, si $\hat{\lambda} \notin \sigma_T(x)$ entonces $\hat{\lambda} \in \rho_T(x)$.

Luego, $(\lambda I - T)f(\lambda) = x, \forall \lambda \in U_{\hat{\lambda}}$, donde $U_{\hat{\lambda}}$ es una vecindad abierta de $\hat{\lambda}$, ahora

$$\begin{array}{rcl} (\lambda I - T)f(\lambda) & = & x \\ \Rightarrow \quad (\lambda I - \hat{\lambda} I + \hat{\lambda} I - T)f(\lambda) & = & x \\ \Rightarrow \quad ((\lambda - \hat{\lambda})I + (\hat{\lambda} I - T))f(\lambda) & = & x. \end{array}$$

Así,

$$((\hat{\lambda} - \lambda)I - (\hat{\lambda} I - T))(-f(\lambda)) = x. \tag{2.11}$$

Sea $\hat{h} = -f \circ L$, donde $L(\theta) = -\theta + \hat{\lambda}$.

Luego, si $\theta = \hat{\lambda} - \lambda$ y de (2.11) tenemos,

$$(\theta I - (\hat{\lambda} I - T))(\hat{h}(\theta)) = x.$$

De manera que, si $U_0 = \hat{\lambda} - U_{\hat{\lambda}}$ entonces,

$$(\theta I - (\hat{\lambda} I - T))(\hat{h}(\theta)) = x, \forall \theta \in U_0.$$

Esto indica que $0 \in \rho_{(\hat{\lambda} I - T)}(x)$, así obtenemos $0 \notin \sigma_{\hat{\lambda} I - T}(x)$, de esta forma, $\hat{\lambda} \notin \sigma_T(x)$ implica que $0 \notin \sigma_{\hat{\lambda} I - T}(x)$, por lo tanto,

$$0 \in \sigma_{\hat{\lambda} I - T}(x) \Rightarrow \hat{\lambda} \in \sigma_T(x). \tag{2.12}$$

De (2.10) y (2.12) deducimos que

$$0 \in \sigma_{\lambda I - T} \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_T(x).$$

A continuación vemos una caracterización para los operadores con SVEP.

Teorema 2.2. *Sea $T \in L(X)$, entonces T posee la SVEP si, y sólo si $X_T(\emptyset) = \{0\}$, esto es, $\sigma_T(x) \neq \emptyset, \forall x \in X, x \neq 0$.*

Demostración. Dado $x \in X$ supongamos que $\sigma_T(x) = \emptyset$, existe entonces una función analítica $f : \mathbb{C} \to X$ tal que

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.13}$$

ya que $\rho_T(x) = \mathbb{C}$, tenemos que $f(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}x$ por (2.13), también $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \to 0$, cuando $|\lambda| \to +\infty$ (ver el Teorema 1.4), $f(\lambda)$ es una función analítica acotada sobre $\mathbb{C}$ según el Teorema 1.8, en tal sentido por el Teorema de Liouville $f(\lambda)$ es constante y dado que $(\lambda I - T)^{-1}\ x \to 0$, cuando $|\lambda| \to +\infty$, $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{C}$.

En vista de (2.13) se prueba que $x = 0$.

Por otro lado, como $0 \in X_T(\emptyset)$, concluimos que $X_T(\emptyset) = \{0\}$.

Recíprocamente, supongamos que $X_T(\emptyset) = \{0\}$ y consideremos una función analítica $f : U \to X$ en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0,\ \forall \lambda \in \mathrm{U}.$$

De la igualdad $\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(0) = \emptyset$, por el Teorema 2.1, se deduce que f$\equiv 0$ sobre U y por tanto T posee la SVEP. $\square$

Uno de los temas de suma importancia para los resultados que se quieren a lo largo de este trabajo es el que se encuentra en la Teoría Espectral Local, acá estudiaremos algunos subespacios que son de vital importancia para el desarrollo del trabajo por su aplicación en los teoremas que conllevan a los resultados buscados, cabe destacar que estos subespacios están inmersos en la Teoría de Fredholm, a continuación definiremos cada uno de los subespacios lineales a usar.

Definición 2.5 (**Core Algebraico**)**.** Dado un operador lineal T definido sobre un espacio vectorial X, el Core Algebraico $C(T)$, es definido por el subespacio lineal M más grande en el sentido de la inclusión, tal que $T(M) = M$.

Definición 2.6 (**Core Analítico**)**.** Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. El Core Analítico de T es el conjunto $K(T)$ de todos los $x \in X$ para los cuáles existe una sucesión $(u_n) \subset X$ y $\delta > 0$ que satisfacen

(a) $x = u_0$, y $Tu_{n+1} = u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\|u_n\| \leq \delta^n \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el siguiente teorema se enuncian algunas propiedades elementales de $K(T)$.

Teorema 2.3. *Sea $T \in L(X)$, X un Espacio de Banach. Entonces:*

(i) *$K(T)$ es un subespacio lineal de X.*

(ii) *$T(K(T)) = K(T)$.*

(iii) *$K(T) \subseteq C(T)$.*

Demostración. (i) Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in K(T)$, entonces existe una sucesión $(u_n) \subseteq X$, tal que $x = u_0$, $T(u_{n+1}) = u_n$ y $\| u_n \| \leq \delta^n \| x \|$, $\delta > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ahora bien, sea $(y_n) = (\lambda u_n)$.

Así,

$$y_0 = \lambda u_0 = \lambda x,$$

además,

$$\begin{aligned} T(y_{n+1}) &= T(\lambda u_{n+1}) \\ &= \lambda T(u_{n+1}) \\ &= \lambda u_n \\ &= y_n. \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} \| \lambda u_n \| &= | \lambda | \| u_n \| \\ &\leq | \lambda | \delta^n \| x \| \\ &= \delta^n \| \lambda x \| , \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\lambda x \in K(T)$.

Por otro lado, sean $x, y \in K(T)$ entonces $x + y \in K(T)$. En efecto, si $x \in K(T)$, existe $\delta_1 > 0$ y una sucesión $(u_n) \subseteq X$ tal que $x = u_0$, $T(u_{n+1}) = u_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\| u_n \| \leq \delta_1^n \| x \|$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $\delta_1 > 0$.

Análogamente, si $y \in K(T)$, existe $\delta_2 > 0$ y una sucesión $(v_n) \in X$ tal que satisface la condición (a) de la definición de K(T), $T(v_{n+1}) = v_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\| v_n \| \leq \delta_2^n \| x \|$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $\delta_2 > 0$.

Luego, para $x+y$ existe $(b_n)=(u_n+v_n)$ tal que $b_0=u_0+b_0=x+y$, y

$$\begin{aligned} T(b_{n+1}) &= T(u_{n+1}+v_{n+1}) \\ &= T(u_{n+1})+T(v_{n+1}) \\ &= u_n+v_n \\ &= b_n. \end{aligned}$$

Sea, $\delta := \text{máx}\,\{\delta_1,\delta_2\}$.

Así,

$$\begin{aligned} \| u_n+v_n \| &\leq \| u_n \| + \| v_n \| \\ &\leq \delta_1^n \| x \| + \delta_2^n \| y \| \\ &\leq \delta^n \| x \| + \delta^n \| y \| \\ &= \delta^n(\| x \| + \| y \|). \end{aligned}$$

Para $x+y=0$ la prueba es trivial, puesto que si $x+y=0$, no hay nada que probar ya que $0\in K(T)$.

Supongamos entonces que $x+y\neq 0$.

Ahora bien, sea $\mu := \frac{\|x\|+\|y\|}{\|x+y\|}$ esto implica que $\mu\geq 1$ por tanto, $\mu^n\geq\mu$.

Luego,

$$\begin{aligned} \| u_n+v_n \| &\leq (\delta^n \| x+y \|)(\tfrac{\|x\|+\|y\|}{\|x+y\|}) \\ &= \delta^n \| x+y \| \,\mu \\ &\leq \delta^n\mu^n \| x+y \| \\ &= (\delta\mu)^n \| x+y \| \\ &= \delta_3^n \| x+y \| \text{ , con } \delta_3=\delta\mu \ \forall n\in\mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Así, $x+y\in K(T)$.

Entre tanto, $K(T)$ es un subespacio lineal de X.

(ii) Veamos que $T(K(T))\subset K(T)$. Sea $y\in T(K(T))$, entonces existe $x\in K(T)$ tal que $T(x)=y$, como $x\in K(T)$, entonces, existe $\delta>0$ y una sucesión $(u_n)\subset X$ tal que $x=u_0$ y $T(u_{n+1})=u_n$, $\| u_n \|\leq \delta^n \| x \|$, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Sea $(y_n)=T(u_n)$, así

$$y_0=T(u_0)=Tx=y.$$

Además,

$$y_n = T(T(u_{n+1})) = T(y_{n+1}).$$

También

$$\| y \| = \| Tx \| \leq \| T \| \| x \|.$$

Implica que $1 \leq \frac{\|T\|\|x\|}{\|y\|} := \mu \leq \mu^n$.

Así,

$$\begin{aligned}
\| y_n \| = \| Tu_n \| &\leq \| T \| \| u_n \| \\
&\leq \| T \| \delta^n \| x \| \\
&\leq \delta^n \mu \| y \| \text{ , ya que } \mu = \tfrac{\|T\|\|x\|}{\|y\|} \\
&\leq \delta^n \mu^n \| y \| \\
&= (\delta\mu)^n \| y \| \\
&= \delta_1^n \| y \| \text{ , con } \delta_1 = \delta\mu \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y \in K(T)$.

En consecuencia, se tiene $T(K(T) \subseteq K(T))$.

Ahora veamos que $K(T) \subseteq T(K(T))$.

Sea $x \in K(T)$, entonces existe $\delta > 0$ y una sucesión $(u_n) \subseteq X$ tal que $x = u_0$, $T(u_{n+1}) = u_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\| u_n \| \leq \delta^n \| x \|$.

Por lo tanto, $x = u_0 = T(u_1)$, para u_1 hacemos $b_n = (u_{n+1})$, así $b_0 = u_1$ y $T(b_{n+1}) = T(u_{n+2}) = u_{n+1} = b_n$.

Además,

$$\begin{aligned}
\| b_n \| = \| u_{n+1} \| &\leq \delta^{n+1} \| x \| \\
&= \delta^{n+1} \| T(u_1) \| \\
&\leq \delta^{n+1} \| T \| \| u_1 \| \\
&= \delta^n \delta \| T \| \| u_1 \|.
\end{aligned}$$

Tomando $\mu \geq \text{máx}\{1, \delta \| T \|\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\| b_n \| &\leq \delta^n \mu \| u_1 \| \\
&\leq \delta^n \mu^n \| u_1 \| \\
&= (\delta\mu)^n \| u_1 \| \\
&= \delta_2^n \| u_1 \| \text{ , con } \delta_2 = \delta\mu, \forall n \in \mathbb{Z}^+.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_1 \in K(T)$ y ya que $x = T(u_1)$, se tiene que $x \in T(K(T))$.

(iii) Se sigue de (ii) y de la definición de $C(T)$. □

Observemos que en general $K(T)$ y $C(T)$ no son cerrados. En el siguiente teorema mostraremos que si $C(T)$ es cerrado entonces los dos subespacios $C(T)$ y $K(T)$ coinciden.

Teorema 2.4. *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$, entonces.*

(i) *Si F es un subespacio lineal cerrado de X tal que $T(F) = F$, entonces $F \subseteq K(T)$.*

(ii) *Si $C(T)$ es cerrado, entonces $C(T) = K(T)$.*

Demostración. (i) Sea $T_0 : F \to F$ la restricción de T en F. Por hipótesis F, es un espacio de Banach y $T(F) = F$, así por el Teorema de la Aplicación Abierta, T_0 es abierto. Ahora bien, existe $\delta > 0$ con la propiedad que para cada $x \in F$ existe un $u \in F$ tal que $Tu = x$ y $\| u \| \leq \delta \| x \|$. Luego, si $x \in F$ definimos $u_0 := x$. Consideremos un elemento $u_1 \in F$ tal que

$$Tu_1 = u_0 \text{ y } \| u_1 \| \leq \delta \| u_0 \|.$$

Repitiendo el procedimiento, para cada $n \in \mathbb{N}$, encontramos un elemento $u_n \in F$ tal que

$$Tu_n = u_{n-1} \text{ y } \| u_n \| \leq \delta \| u_{n-1} \|.$$

De la ultima desigualdad obtenemos

$$\| u_n \| \leq \delta^n \| u_0 \| = \delta^n \| x \|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, $x \in K(T)$.

Por lo tanto, $F \subseteq K(T)$.

(ii) Supongamos que $C(T)$ es cerrado. Como $C(T) = T(C(T))$ y según la parte (i) del Teorema se tiene que $C(T) \subseteq K(T)$, por su parte, la inclusión $K(T) \subseteq C(T)$ se obtiene según la parte (iii) del Teorema 2.3, en función de ello concluimos que $C(T) = K(T)$. □

Definición 2.7 (Parte Quasi-Nilpotente). Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. La Parte Quasi-Nilpotente de T es el conjunto

$$H_0(T) := \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}.$$

Observación 2.1. Se sigue de la definición, que H_0 es un subespacio lineal de X. En general, $H_0(T)$ no es cerrado y $kerT^m \subseteq H_0(T)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

En el siguiente teorema se enuncian algunas propiedades elementales de $H_0(T)$.

Teorema 2.5. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, entonces*

(i) $K(T) = \{x \in X : 0 \in \rho_T(x)\}$.

(ii) $H_0(T) \subseteq \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq \{0\}\}$.

(iii) *Si $x \in kerT \bigcap K(T)$ entonces $\sigma_T(x) = \emptyset$.*

Demostración. (i) Debemos verificar que $K(T) = X_T(\mathbb{C}/\{0\}) = \{x \in X : 0 \in \rho_T(x)\}$.

Veamos que $K(T) \subset X_T(\mathbb{C}/\{0\})$

Sea $x \in K(T)$. Supongamos que $x \neq 0$, por la Definición 2.6, existe una sucesión $(u_n) \subset X$ y $\delta > 0$ que satisfacen,

$$x = u_0,\, Tu_{n+1} = u_n \text{ y } \| u_n \| \leq \delta^n \| x \|, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Sea la función $f : \mathbb{D}(0, \frac{1}{\delta}) \to X$, donde $\mathbb{D}(0, \frac{1}{\delta})$ es el disco abierto centrado en 0 y radio $(\frac{1}{\delta})$, definida por

$$f(\lambda) := -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n, \forall \lambda \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{\delta}).$$

Por la Proposición 1.1 tenemos que la serie converge, ya que $\mid \lambda \mid < \frac{1}{\delta} \leq r$, donde r es el radio de convergencia, con

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\|u_n\|}}$$

Esto se debe a que

$$\begin{array}{rcl} \| u_n \| & \leq & \delta^n \| x \| \\ \Rightarrow \quad \limsup \sqrt[n]{\| u_n \|} & \leq & \lim \delta \| x \|^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{\delta} & \leq & \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\|u_n\|}}. \end{array}$$

Luego, f es analítica definida en $\mathbb{D}(0, \frac{1}{\delta})$.

Además

$$\begin{array}{rcl} (\lambda I - T)f(\lambda) & = & (\lambda I - T)(-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n) \\ & = & (T - \lambda I)(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n). \end{array}$$

Estudiemos el siguiente limite:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=1}^{\infty}(T - \lambda I)(\lambda^{n-1} u_n) & = & \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\lambda^{n-1} T u_n - \lambda^n u_n) \\ & = & \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\lambda^{n-1} T u_n - \lambda^n T u_{n+1}) \\ & = & \lim_{k\to\infty} (x - \lambda T u_2 + \lambda T u_2 - \lambda^2 T u_3 + \lambda^2 T u_3 -, \ldots, -\lambda^k T u_{k+1}) \\ & = & \lim_{k\to\infty} (x - \lambda^k T u_{k+1}) \\ & = & x - \lambda \lim_{k\to\infty} \lambda^{k-1} u_k \\ & = & x - \lambda \cdot 0 \\ & = & x. \end{array}$$

Así

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = (T - \lambda I)(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n) = x.$$

En consecuencia, se tiene que

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x, \, \forall \lambda \in \mathbb{D}(0, \tfrac{1}{\{\delta\}}).$$

Por lo tanto, $0 \in \rho_T(x)$.

Así,

$$K(T) \subseteq \{x \in X : 0 \in \rho_T(x)\}. \tag{2.14}$$

Recíprocamente, si $0 \in \rho_T(x)$ entonces existe un disco abierto $\mathbb{D}(0, \varepsilon)$ y una función analítica $f : \mathbb{D}(0, \varepsilon) \to X$, tal que

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x, \, \forall \lambda \in \mathbb{D}(0, \varepsilon).$$

Dado que f es analítica sobre $\mathbb{D}(0,\varepsilon)$, existe una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$f(\lambda) := -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n, \forall \lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon).$$

$f(0) = -u_1$, sustituyendo $\lambda = 0$ en $(\lambda I - T)f(\lambda) = x$, tenemos que

$$-T(f(0)) = T(u_1) = x.$$

Por otra parte,

$$x = (\lambda I - T)\lambda I - T = Tu_1 + \lambda(Tu_2 - u_1) + \lambda^2(Tu_3 - u_2) + \cdots$$

para todo $\lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)$, ya que $Tu_1 = x$, concluimos que

$$Tu_{n+1} = u_n \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Por otro lado, si $Tu_1 = x$ la sucesión (u_n) satisface para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ la condición (a) de la definición de $K(T)$.

Queda por demostrar la condición $\| u_n \| \leq \delta^n \| x \|$. En efecto, dado $\delta > 0$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Tomamos $\mu > \frac{1}{\varepsilon}$, dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} u_n$ converge entonces $| \lambda^{n-1} | \| u_n \| \to 0$, cuando $n \to \infty$, para todo $| \lambda | < \varepsilon$ y, en particular, $(\frac{1}{\mu^{n-1}}) \| u_n \| \to 0$; de manera que existe un $c > 0$ tal que $\| u_n \| \leq c\mu^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\| u_n \| \leq (\mu + \tfrac{c}{\|x\|})^n \| x \|.$$

Así,

$$\|u_n\| \leq \|x\| c_1^n, \forall n \geq 1, \text{ donde } c_1 = \mu + \tfrac{c}{\|x\|}.$$

Por lo tanto, $x \in K(T)$.

De esta manera,

$$\{x \in X : 0 \in \rho_T(x)\} \subseteq K(T). \tag{2.15}$$

De (2.14) y (2.15) se tiene que $\{x \in X : 0 \in \rho_T(x)\} = K(T)$.

(ii) Sea $x \in H_0(T)$, luego $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$, de donde $\forall \lambda \neq 0$, $\sum_{n\geq 0} \lambda^{-n-1} T^n x$ es convergente.

Supongamos que $f(\lambda) := \sum_{n\geq 0} \lambda^{-n-1} T^n x$,$\forall \lambda \neq 0$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)f(\lambda) &= \textstyle\sum_{n\geq 0}\lambda^{-n}T^n x - \sum_{n\geq 0}\lambda^{-n-1}T^{n+1}x \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0}\frac{T^n}{\lambda^n}(x) - \sum_{n\geq 1}\frac{T^n}{\lambda^n}(x) \\ &= \text{x.}\end{aligned}$$

Por ende, $(\lambda I - T)f(\lambda) = x$, $\forall\lambda \neq 0$.

Así, $\lambda \in \rho_T(x)$, si $\lambda \neq 0$.

Por lo tanto, $\sigma_T(x) \subseteq \{0\}$.

De esta manera, concluimos que $H_0(T) \subseteq \{x \in X : \sigma_T \subseteq \{0\}\}$.

(iii) Es consecuencia inmediata de (i) y (ii) una vez visto que $kerT \subseteq H_0(T)$. □

Veamos ahora un teorema que nos indica una condición para los operadores que no verifican la SVEP.

Teorema 2.6. *Supongamos que $T \in L(X)$, X un Espacio de Banach. Entonces T no posee SVEP en 0 si, y sólo si existe $0 \neq x \in kerT$ tal que $\sigma_T(x) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que existe un elemento $0 \neq x_0 \in kerT$ tal que $\sigma_T(x_0) = \emptyset$. Entonces por el Teorema 2.5 parte i) tenemos que $x_0 \in K(T)$. Asumamos que $\|x_0\| = 1$. Por la definición de $K(T)$, existe una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$u_0 = x_0,\ Tu_n = u_{n-1} \text{ y } \|u_n\| \leq \delta^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Claramente la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n$ converge para $|\lambda| < \frac{1}{\delta}$, también la función $f(\lambda) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n u_n$ es analítica sobre el disco abierto $\mathbb{D}(0, \frac{1}{\delta})$.

Por otro lado,

$$(\lambda I - T)(u_0 + \sum_{n=1}^{k}\lambda^n u_n) = \lambda^{k+1}u_k$$

y $\|\lambda^{k+1}u_k\| \leq \delta^k \mid \lambda \mid^{k+1}$. Además, para todo $|\lambda| < \frac{1}{\delta}$ tenemos

$$\lim_{k\to+\infty}\delta^k \mid \lambda \mid^{k+1} = 0$$

así

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = \lim_{k\to+\infty}(\lambda I - T)(u_0 + \sum_{n=1}^{k}\lambda^n u_n) = 0, \forall\lambda \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{\delta}).$$

Como $f(0) = x_0 \neq 0$, se sigue que T no posee SVEP en 0.

Recíprocamente, supongamos que para todo $0 \neq x \in kerT$ tenemos que $\sigma_T(x) \neq \emptyset$.

Consideremos el disco abierto $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ y sea $f : \mathbb{D}(0,\epsilon) \to X$ una función analítica tal que $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}(0,\epsilon)$. Entonces $f(\lambda) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n$, para una sucesión adecuada $(u_n) \subset X$. Claramente, $Tu_0 = T(f(0)) = 0$, así, $u_0 \in kerT$. Además, de las igualdades

$$\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(0) = \emptyset, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{D}(0,\epsilon)$$

obtenemos que

$$\sigma_T(f(0)) = \sigma_T(u_0) = \emptyset,$$

así, por lo supuesto, concluimos que $u_0 = 0$, para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}(0,\epsilon)$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda I - T)f(\lambda) \\ &= (\lambda I - T)(u_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n) \\ &= \lambda(\lambda I - T)(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{n+1}), \end{aligned}$$

y por tanto

$$0 = (\lambda I - T)(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{n+1})$$

para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}(0,\epsilon)$.

Por la continuidad, esto es verdadero para cada $\lambda \in \mathbb{D}(0,\epsilon)$. En este punto, usando el mismo argumento que al inicio de la prueba es posible demostrar que $u_1 = 0$, e iterando este procedimiento, concluimos que $u_2 = u_3 = \ldots = 0$. Esto prueba que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ y por tanto T posee la SVEP en 0. □

El siguiente resultado nos indica que si falla una de las tres condiciones el operador en cuestión no posee la SVEP en un $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.7. *Supongamos que $T \in L(X), X$ un espacio de Banach. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *T tiene la SVEP en λ_0;*

(ii) $\ker(\lambda_0 I - T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\}$;

(iii) $\ker(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \{0\}$;

(iv) *Para cada $0 \neq x \in \ker(\lambda_0 I - T)$ tenemos $\sigma_T(x) = \{\lambda_0\}$.*

Demostración. Veamos que (i)$\Rightarrow$ (ii) Sea $x \in \ker(\lambda_0 I - T)$ tal que $\sigma_T(x) = \emptyset$. Luego, $\lambda_0 \in \rho_T(x)$, así existe un disco abierto $\mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon)$ y una función analítica $f : \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon) \to X$ tal que

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x, \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon). \tag{2.16}$$

Así,

$$(\lambda_0 I - T)((\lambda I - T)f(\lambda)) = (\lambda_0 I - T)x = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon). \tag{2.17}$$

Por lo tanto,

$$(\lambda I - T)((\lambda_0 I - T)f(\lambda)) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon). \tag{2.18}$$

Dado que T tiene la SVEP en λ_0, entonces $(\lambda_0 I - T)(f(\lambda)) = 0$, por lo tanto

$$((\lambda_0 I - T)f(\lambda_0)) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon). \tag{2.19}$$

Así, $x = 0$, (por 2.16), teniéndose

$$\ker(T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\}.$$

Recíprocamente, veamos que (ii)$\Rightarrow$ (i).

Supongamos que para cada $0 \neq x \in \ker(\lambda_0 I - T)$ tal que $\sigma_T(x) \neq \emptyset$.

Sea $f : \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon) \to X$ una función analítica tal que

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon). \tag{2.20}$$

Luego,

$$f(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n u_n \text{ para una sucesión adecuada } (u_n) \subset X.$$

Ahora,

$$f(\lambda_0) = u_0 \Rightarrow (\lambda_0 I - T)(u_0) = (\lambda_0 I - T)(f(\lambda_0)) = 0 \text{ (por 2.20)}.$$

Así, $u_0 \in \ker(\lambda_0 I - T)$. Además de la igualdad $\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(0) = \emptyset$ para cada $\lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon)$ obtenemos que $\sigma_T(f(\lambda_0)) = \sigma_T(u_0) = \emptyset$, por lo tanto, como $u_0 \in \ker(\lambda_0 I - T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\}$, (por hipótesis).

Así, $u_0 = 0$.

Para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon)$ tenemos

$$0 = (\lambda I - T)f(\lambda) = (\lambda I - T)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n = (\lambda I - T)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n u_n$$
$$= \lambda(\lambda I - T)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_{n+1}.$$

Por lo tanto

$$0 = (\lambda I - T)\big(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_{n+1}\big) \text{ para todo } 0 \neq \lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon).$$

Por continuidad, esto es cierto para cada $\lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon)$, usando el mismo argumento es posible mostrar que $u_1 = 0$ e iterando este procedimiento concluimos que $u_2, u_3 = ... = 0$. Esto muestra que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}(\lambda_0, \varepsilon)$, y por lo tanto T tiene la SVEP en λ_0.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Es suficiente probar la igualdad

$$\ker T \cap K(T) = \ker T \cap X_T(\emptyset).$$

$$\ker T \cap K(T) \subseteq \ker T \cap X_T(\mathbb{C}\backslash\{0\}). \tag{2.21}$$

Ya que por el Teorema 2.5 parte (i), tenemos

$$K(T) = \{x \in X : 0 \in \rho_T(x)\} = \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq X_T(\mathbb{C}\backslash\{0\})\}.$$

Por otro lado, del Teorema 2.5 parte (ii)

$$H_0(T) \subseteq X_T(\{0\})$$

.

Ahora,

$$\ker T \subseteq H_0(T) \subseteq X_T(\{0\}),$$

por lo que,

$$\ker T \cap K(T) \subseteq X_T(\{0\}) \cap K(T).$$

Por Teorema, $K(T) = X_T(\mathbb{C}\backslash\{0\})$.

Así,

$$\ker T \cap K(T) \subseteq X_T(\{0\}) \cap X_T(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = X_T(\emptyset). \tag{2.22}$$

De (2.21) y (2.22) tenemos que

$$\ker T \cap K(T) \subseteq \ker T \cap X_T(\emptyset).$$

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Dado que $\ker T \subseteq H_0(T)$, se sigue que $\sigma_T(x) \subseteq \{0\}$ para cada $0 \neq x \in \ker T$.

Asumiendo que $\sigma_T(x) \neq \emptyset$, tenemos $\sigma_T(x) = \{0\}$.

$(iv) \Leftarrow (ii)$ Es claro.

Si $\lambda_0 I - T$ es inyectivo, entonces $\ker(\lambda_0 I - T) = \{0\}$ y como $\{0\} \in X_T(\emptyset)$ entonces

$$\ker(\lambda_0 I - T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\},$$

y por el Teorema anterior T tiene la SVEP en λ_0. □

Corolario 2.1. *Sea $T \in L(X)$, tal que $\lambda_0 I - T$ es sobreyectivo. Entonces T tiene la SVEP en λ_0 si y solo si $\lambda_0 I - T$ es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $(\lambda_0 I - T)$ es sobreyectivo, esto es

$$(\lambda_0 I - T)(X) = X.$$

por el Teorema 2.4, tenemos que $X \subseteq K(\lambda_0 I - T)$ por lo tanto $K(\lambda_0 I - T) = X$ y por el Teorema 2.7, tenemos que si T tiene la SVEP en λ_0.

$$\{0\} = \ker(\lambda_0 I - T) \cap K(\lambda_0 I - T) = \ker(\lambda_0 I - T) \cap X = \ker(\lambda_0 I - T).$$

Por lo tanto, $\lambda_0 I - T$ es inyectivo. El recíproco ya fue mostrado. □

Consideremos a

$$\Xi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T \quad \text{no tiene la SVEP en} \lambda\}.$$

Es claro que si T tiene la SVEP, entonces $\Xi(T) = \emptyset$. El conjunto $\Xi(T)$ es abierto y está contenido en el interior de $\sigma(T)$.

Corolario 2.2. *Sea $T \in L(X)$, entonces $\sigma(T) = \Xi(T) \cup \sigma_S(T)$. En particular, $\sigma_S(T)$ contiene $\partial\Xi(T)$, la frontera topológica de $\Xi(T)$.*

Demostración. La inclusión $\Xi(T) \cup \sigma_S(T) \subseteq \sigma(T)$ es clara, ya que $\Xi(T)$ y $\sigma_S(T)$ están contenidos en $\sigma(T)$.

Recíprocamente, sea $\lambda \notin \Xi(T) \cup \sigma_S(T)$ entonces $\lambda I - T$ es sobreyectivo y T tiene la SVEP en λ por el Corolario 2.1, $\lambda I - T$ es inyectivo, en consecuencia $\lambda I - T$ es invertible, luego $\lambda \notin \sigma(T)$. Esto demuestra que $\sigma(T) \subseteq \Xi(T) \cup \sigma_S(T)$.

Por otro lado, $\partial\Xi(T) \subseteq \sigma(T) = \Xi(T) \cup \sigma_S(T)$, como $\Xi(T)$ es abierto, entonces $\partial\Xi(T) \cap \Xi(T) = \emptyset$, así $\partial\Xi(T) \subseteq \sigma_S(T)$. □

Corolario 2.3. *Sea $T \in L(X)$, entonces, las siguientes condiciones son válidas:*

(i) *Si T tiene la SVEP, entonces $\sigma_S(T) = \sigma(T)$.*

(ii) *Si T^* tiene la SVEP, entonces $\sigma_a(T) = \sigma(T)$.*

(iii) *Si ambos T y T^* tienen la SVEP, entonces*

$$\sigma(T) = \sigma_S(T) = \sigma_a(T).$$

Demostración. (i) Si T tiene la SVEP, entonces $\Xi(T) = \emptyset$ y del Corolario 2.2 tenemos que

$$\sigma(T) = \Xi(T) \cup \sigma_S(T) = \sigma_S(T).$$

implicando que $\sigma(T) = \sigma_S(T)$.
(ii) Si T^* tiene la SVEP, entonces $\Xi(T^*) = \emptyset$ y por el Corolario 2.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sigma(T^*) \\ &= \Xi(T^*) \cup \sigma_S(T^*) \\ &= \emptyset \cup \sigma_a(T), \quad \text{por el Teorema 1.7} \\ &= \sigma_a(T). \end{aligned}$$

teniéndose que

$$\sigma(T) = \sigma_a(T)$$

(iii) Se sigue por la parte (i), (ii). □

El siguiente corolario es una versión detallada del resultado obtenido en el Teorema 2.6.

Corolario 2.4. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. Entonces T no posee la SVEP si, y solo si existe $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ y un autovector correspondiente $x_0 \neq 0$ tal que $\sigma_T(x_0) = \emptyset$. En tal caso T no posee la SVEP en λ_0.*

Corolario 2.5. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, sobreyectivo. Entonces*

$$T \text{ no posee la SVEP en } 0 \Leftrightarrow T \text{ no es inyectiva.}$$

Demostración. Supongamos que T es sobreyectiva, pero no inyectiva. Como T es sobreyectiva entonces $C(T) = X$ es cerrado, así por el Teorema 2.4 parte (ii) $K(T) = X$. Por lo tanto, $\{0\} \neq kerT \subseteq K(T)$ y además, por el Teorema 2.5 parte(iii), $\sigma_T(X) = \emptyset$, para cada $x \in kerT$. Como T es no inyectivo, existe $0 \neq x \in kerT$ tal que $\sigma_T(x) = \emptyset$, por el Teorema anterior concluimos que T no posee la SVEP en 0. $\square$

Capítulo 3

La Teoría de Riesz-Schauder.

En esta parte desarrollamos una teoría basada en algunas cantidades asociadas a un operador lineal T, cantidades que nos permitirán establecer resultados con los cuales hacemos la Teoría de Fredholm, de donde se obtienen las relaciones con la SVEP y la Teoría de Fredholm. También establecemos un resultado que nos caracterizan los operadores que tienen la SVEP en 0, mediante cierta descomposición del espacio X.

1. Operadores con Ascent y Descent Finito.

En esta sección buscamos un subespacio Y que verifica $T(Y) = Y$ y tal que $T \mid Y$ no es inyectiva. También se establecerá la relación entre los Kernel y los rangos de los iterados T^n de un operador T en un espacio vectorial X.

Definición 3.1 (**Hiperrango**). Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. El Hiperrango de T está dado como sigue

$$T^{\infty}(X) := \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(X).$$

En general, $T(T^{\infty}(X)) \subseteq T^{\infty}(X)$, así estamos interesados en buscar condiciones, para el cual $T(T^{\infty}(X)) = T^{\infty}(X)$. Obviamente, la igualdad se verifica si $T(X) = C(T)$. Un simple argumento inductivo muestra que se cumple la siguiente inclusión
$C(T) \subseteq T^n(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De esto, se sigue que $C(T) \subseteq T^{\infty}(X)$.

Definición 3.2 (**Hipernúcleo**). Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach. El Hipernúcleo de T está dado como sigue

$$\mathcal{N}^{\infty}(T) := \bigcup_{n=1}^{\infty} ker(T^n)$$

El siguiente Lema muestra que bajo ciertas condiciones el Core Algebraico y el Hiperrango de un operador coinciden.

Lema 3.1. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$kerT \cap T^m(X) = kerT \cap T^{m+n}(X), \text{ para todo entero } n \geq 0.$$

Entonces $C(T) = T^\infty(X)$.

Demostración. Sabemos que $C(T) \subseteq T^\infty(X)$, se probará que $T^\infty(X) \subseteq C(T)$. Para ello, basta probar que $T(T^\infty(X)) = T^\infty(X)$.

Dado que $T^\infty(X)$ es T-invariante, entonces $T(T^\infty(X)) \subseteq T^\infty(X)$.

Veamos ahora que $T^\infty(X) \subseteq T(T^\infty(X))$.

En efecto, sea la sucesión de conjuntos $D := kerT \bigcap T^m(X), \forall m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} D &= kerT \cap T^m(X) \\ &= kerT \cap T^\infty(X). \end{aligned}$$

Ahora, sea $y \in T^\infty(X)$, así $y \in T^n(X), \forall n \in \mathbb{N}$. En particular, $y \in T^{m+k}(x), \forall k \geq 0$, esto implica que existen $x_k \in X$ tal que $y = T^{m+k}(x_k), \forall k \geq 0$.

Definamos $B = \{z_k \in X \diagup z_k = T^m(x_1) - T^{m+k-1}(x_k), \forall k \geq 0\}$.

Nótese que

$$\begin{aligned} T^{m+k}(X) &\subseteq T^{m+k-1}(X), \\ T^{m+k-1}(X) &\subseteq T^m(X) \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{gathered} T^{m+k-1}(x_k) \in T^{m+k-1}(X) \subseteq T^m(X) \\ \Rightarrow T^{m+k-1}(x_k) \in T^m(X), \end{gathered}$$

y dado que $T^m(x_1) \in T^m(X)$, se tiene que

$$z_k = T^m(x_1) - T^{m+k-1}(x_k) \in T^m(X)$$

ahora,

$$\begin{aligned} T(z_k) &= T(T^m(x_1) - T^{m+k-1}(x_k)) \\ &= T^{m+1}(x_1) - T^{m+k}(x_k) \\ &= y - y \\ &= 0 \end{aligned}$$

teniendo que $z_k \in kerT$.

Así,

$$z_k \in kerT \cap T^{m+k}(X) \subseteq kerT \cap T^{m+k-1}(X).$$

Por lo tanto,

$$z_k \in T^{m+k-1}(X),$$

luego,

$$\begin{aligned} & T^m(x_1) &=& \ z_k + T^{m+k-1}(x_k) \\ \Rightarrow & T^m(x_1) &\in& \ T^{m+k-1}(X), \forall k \geq 0 \\ \Rightarrow & T^m(x_1) &\in& \ \cap_{k=1}^{\infty} T^{m+k-1}(X) = T^{\infty}(X) \\ \Rightarrow & T^m(x_1) &\in& \ T^{\infty}(X) \\ \Rightarrow & T^{m+1}(x_1) &\in& \ T(T^{\infty}(X)) \\ \Rightarrow & y &\in& \ T(T^{\infty}(X)). \end{aligned}$$

Dado que $y = T^{m+k}(x_k), \forall k \geq 0$, se tiene que

$$T^{\infty}(X) \subseteq T(T^{\infty}(X)).$$

Así, la prueba es completa. □

Lema 3.2. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X, tenemos que*

$$T^m(\ker T^{m+n}) = T^m(X) \cap \ker T^n \quad \textit{para todo} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Si $x \in \ker T^{m+n}$, entonces $T^n(T^m x) = 0$, luego $T^m(x) \in \ker T^n$ y $T^m(x) \in T^m(X)$. Así que

$$T^m(\ker T^{m+n}) \subseteq T^m(X) \cap \ker T^n.$$

Por otro lado, sea $y \in T^m(X) \cap \ker T^n$ entonces $y = T^m(x)$ para algún $x \in X$ y $T^n(y) = 0$, así que $T^n(y) = T^n(T^m(x)) = 0$, lo que implica que $x \in \ker T^{m+n}$ y por lo tanto $T^m(X) \cap \ker T^n \subseteq T^m(\ker T^{m+n})$ □

El próximo resultado establece la relación entre los Kernel y los rangos de los iterados T^n de un operador T en un espacio vectorial X.

Teorema 3.1. *Para un operador lineal T en un espacio vectorial X, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $\ker T \subseteq T^m(X)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $\ker T^n \subseteq T(X)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) $\ker T^n \subset T^m(X)$ *para cada* $m, n \in \mathbb{N}$*;*

(iv) $\ker T^n = T^m(\ker T^{m+n})$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. (iv) $\Rightarrow$ (iii). Sea

$$y \in \ker T^n = T^m(\ker T^{m+n}),$$

por el Lema anterior

$$T^m(\ker T^{m+n}) = T^m(X) \cap \ker T^n,$$

para cada $m, n, \in \mathbb{N}$, por lo tanto $y \in T^m(X)$.

Así $\ker T^n \subset T^m(X)$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Es trivial ya que $T^m(X) \subseteq T(X)$ para $m \geq 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Aplicando la inclusión (ii) al operador T^m, tenemos que $\ker(T^m)^n \subseteq T^m(X)$ y dado que $\ker T \subseteq \ker(T^m)^n$ tenemos que

$$\ker T \subseteq \ker(T^m)^n \subseteq T^m(X).$$

(i) $\Rightarrow$ (iv). Aplicando la inclusión (i) al operador T^n, tenemos que

$$\ker T^n \subseteq (T^n)^m(X) \subseteq T^m(X).$$

Por el Lema 3.2 tenemos que $T^m(\ker T^{m+n}) = T^m(X) \cap \ker T^n = \ker T^n$. □

Los espacios nulos $kerT^n$ de un endomorfismo T sobre el espacio vectorial X forma una sucesión creciente para $n \geq 1$

$$ker(T^0) = \{0\} \subseteq ker(T) \subseteq ker(T^2) \subseteq \dots$$

la cual es llamada la Nulicadena.

Si para cierto $n \geq 0$ tenemos $ker(T^n) = ker(T^{n+1})$, entonces $ker(T^{n+1}) = ker(T^{n+2})$ y así $ker(T^n) = ker(T^{n+m})$ para $m = 1, 2, \ldots$. Es claro que si $x \in ker(T^{n+2})$ se sigue que $T^{n+1}Tx = 0$, de aquí $Tx \in ker(T^{n+1}) = ker(T^n)$ y así $T^{n+1}x = 0$, esto es, $x \in ker(T^{n+1})$. Este razonamiento nos permite definir lo siguiente.

Definición 3.3 (**Ascent**). El Ascent de un operador T, es el entero no negativo más pequeño $p := p(T)$ tal que $ker(T)^p = ker(T)^{p+1}$.

Si tal entero no existe, esto es, $ker(T)^p \neq ker(T)^{p+1}$ para todo p, entonces $p(T) = \infty$.

La cadena imagen de T, es la sucesión decreciente conformada por los espacios imagen de cada iteración de T consigo mismo, esto es.

$$T^0(X) = X \supseteq T(X) \supseteq T^2(X) \supseteq \ldots$$

Si para cierto $n \geq 0$ tenemos que $T^n(X) = T^{n+1}(X)$, entonces $T^n(X) = T^{n+m}(X)$ para $m = 1, 2, \ldots$; con esto definimos lo siguiente

Definición 3.4 (**Descent**). El Descent de un operador T, es el entero no negativo más pequeño $q := q(T)$ tal que $T^q(X) = T^{q+1}(X)$.

Si tal entero no existe, esto es, $T^n(X) \neq T^{n+1}(X), \forall n \in \mathbb{N}$ entonces diremos que $q(T) = \infty$.

Claramente, si $p(T) = 0$ entonces T es inyectiva, y si $q(T) = 0$ entonces T es sobreyectiva.

Las siguientes dos proposiciones establecen condiciones utiles y sencillas de los operadores que tienen Ascent y Decent finito.

Proposición 3.1. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X, tenemos que $p(T) \leq m < \infty$ si, y sólo si $ker(T^n) \cap T^m(X) = \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si $p(T) \leq m < \infty$, n es un número natural y $y \in ker(T^n) \cap T^m(X)$, entonces $y = T^m x$ y $T^n y = 0$, de aquí $T^{n+m}x = 0$.
Por lo tanto, $x \in ker(T^{n+m}) = ker(T^m), (m \geq p)$, así $y = T^m x = 0$.

Recíprocamente, para un número natural n, sea

$$ker(T^n) \cap T^m(X) = \{0\}.$$

Debido a que $ker(T) \subset ker(T^m)$ se tiene que $ker(T) \cap T^m(X) = \{0\}$.

sea $x \in ker(T^{m+1})$; así $T(T^m x) = 0$, se sigue $T^m x \in ker(T) \cap T^m(X) = \{0\}$, así $x \in ker(T^m)$. Por lo que tenemos $ker(T^m) = ker(T^{m+1})$ y de acá $p(T) \leq m$. □

Proposición 3.2. *Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial X, tenemos que $q(T) \leq m < \infty$ si, y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subespacio complementario $C_n \subseteq X$ contenido en el $ker(T^m)$, tal que $X = C_n \oplus T^n(X)$.*

Demostración. Sea $q := q(T) \leq m < \infty$, sea $n \in \mathbb{N}$ y C algún complemento algebraico de $T^n(X)$ en X, es decir,

$$X = C \oplus T^n(X). \tag{3.1}$$

Para todo elemento x_l de una base $\{x_l : l \in J\}$ de C existe un $y_l \in X$ con $T^q x_l = T^{q+n} y_l$, debido a que $T^q(C) \subset T^q(X) = T^{q+n}(X)$. Si definimos $z_l := x_l - T^n y_l$, entonces $T^q z_l = T^q x_l - T^{q+n} y_l = 0$. Se sigue que el espacio generado C_n de los z_l está contenido en $ker(T^q)$, y más aún en $ker(T^m)$. De (3.1) obtenemos, para todo x en X una representación de la forma

$$\begin{aligned} x &= \sum \alpha_l x_l + T^n y_l \\ &= \sum \alpha_l (z_l + T^n y_l) + T^n y \\ &= \sum \alpha_l z_l + T^n z. \end{aligned}$$

Así $X = C_n + T^n(X)$. Esta suma es directa, en efecto, para $x \in C_n \cap T^n(X)$ se tiene $x = \sum \beta_l z_l = T^n v$.

Luego,

$$\sum \beta_l x_l = \sum \beta_l T^n y_l + T^n v \in T^n(X).$$

Y así, de acuerdo a (3.1), $\beta_l = 0$, para todo $l \in J$ y también $x = 0$. Se sigue que C_n es, en efecto, un complemento algebraico de $T^n(X)$ perteneciente a $ker(T^m)$. Ahora, sea n un número natural y asumamos que para $T^n(X)$ existe un complemento algebraico C_n contenido en $ker(T^m)$, esto es, $X = C_n \oplus T^n(X)$.

Entonces $T^m(X) = T^m(C_n) + T^{m+n}(X) = T^{m+n}(X)$, y de esta forma $q(T) \leq m$. □

Proposición 3.3. *Si $p(T)$ y $q(T)$ son finitas entonces $p(T)=q(T)$.*

Demostración. Llamemos $p := p(T), q := q(T)$ y asumamos primero que $p \leq q$ entonces, $T^q(X) \subset T^p(X)$. Además sea $q > 0$, de la Proposición 3.2 se sigue la representación $X = ker(T^q) + T^q(X)$; así para todo elemento $y := T^p x$ de $T^p(X)$ tenemos la descomposición $y = z + T^q w$ con $z \in ker(T^q)$. El elemento $z = T^p x - T^q w$ pertenece a $T^p(X)$, de aquí $z \in ker(T^q) \cap T^p(X)$. De acuerdo a la Proposición 3.1 esta intersección contiene sólo al 0, por lo tanto $y = T^q w$ y y pertenece a $T^q(X)$. Así, tenemos demostrado la igualdad $T^p(X) = T^q(X)$. De donde se sigue que $p \geq q$. De esta forma tenemos $p = q$.

Supongamos ahora que $q \leq p$ y $p > 0$, entonces $ker(T^q) \subset ker(T^p)$. Obtenemos de la Proposición 3.2 la representación $X = ker(T^q) + T^p(X)$, tal que para un elemento arbitrario x de $ker(T^p)$ tenemos que $x = u + T^p v$ con $u \in ker(T^q) \subseteq ker(T^p)$.

Ya que, $T^p x = T^p u = 0$ obtenemos que $T^{2p} v = 0$. Así $v \in ker(T^{2p}) = ker(T^p)$ tal que $T^p v = 0$ y de esta forma $x = u \in ker(T^q)$. Se sigue que $ker(T^q) = ker(T^p)$, de aquí $q \geq p$. Así tenemos de nuevo $p = q$. □

2. Operadores con Deficiencias Finitas.

De aquí en adelante, para cada operador acotado $T \in L(X, Y)$ denotamos por $\alpha(T)$ La Nulideficiencia o Nulidad de T; definida como $\alpha(T) := dimkerT$, mientras que denotamos por $\beta(T)$ a la Imagen Deficiencia o Rango de T definida como
$\beta(T) := codimT(X)$.

Definición 3.5 (**Deficiencia Finita**)**.** Diremos que un operador posee Deficiencia Finita si $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ son finitos.

Definición 3.6. Sea X un espacio de Banach, denotemos por $\Delta(X)$ al conjunto de los endomorfismos de X con deficiencia finita.

Teorema 3.2. *El producto de operadores con deficiencia finita también posee deficiencia finita, Así $\Delta(X)$ es un semigrupo. Si el operador TS posee deficiencia finita, entonces o ambos operadores o ningún operador posee deficiencia finita. La suma de un operador con deficiencia finita y de un operador con dimensión finita posee deficiencia finita.*

Demostración. (Ver [11]) □

Si $\alpha(T)$ o $\beta(T)$ son finitos, definimos el índice de T como

$$indT := \alpha(T) - \beta(T).$$

Teorema 3.3. ***(Teorema del Índice)***
Sea X un espacio vectorial, $T, S \in \Delta(X)$. Entonces $TS \in \Delta(X)$. Además

$$ind\, TS = ind\, T + ind\, S$$

Demostración. Iniciamos la prueba observando que TS posee deficiencia finita por la Proposición 3.2 y por medio de la Observación 1.3 también posee complemento algebraico. Sea

$$X_1 = S(X) \cap ker(T), \tag{3.2}$$

determinamos subespacios X_2, X_3 y X_4 de X tales que

$$S(X) = X_1 \oplus X_2, \tag{3.3}$$

$$ker(T) = X_3 \oplus X_1, \tag{3.4}$$

$$X = \overbrace{X_3 \oplus X_1}^{ker(T)} \oplus X_2 \oplus X_4 \tag{3.5}$$

Se sigue de la descomposición anterior que

$$\begin{aligned} T(X) &= T(X_2 \oplus X_4) \\ &= T(X_2) \oplus T(X_4) \\ &= T(X_1 \oplus X_2) \oplus T(X_4) \\ &= (TS)(X) \oplus T(X_4). \end{aligned}$$

De acá tenemos entonces

$$T(X) = (TS)(X) \oplus T(X_4). \tag{3.6}$$

Además sea Y un subespacio de X tal que

$$ker(TS) = ker(S) \oplus Y, \tag{3.7}$$

la restricción de S en Y es inyectiva, de aquí $S|Y$ es un isomorfismo cuya imagen

$$\begin{aligned} S(Y) &= S(Y \oplus ker(S)) \\ &= S(ker(TS)) \\ &= S(X) \cap ker(T) \\ &= X_1. \end{aligned}$$

Luego, la Proposición 1.2 garantiza que

$$dimY = dimX_1. \tag{3.8}$$

Por la misma razón

$$dimT(X_4) = dimX_4. \tag{3.9}$$

De (3.4),(3.5), (3.7) y (3.6), obtenemos (en este orden) tomando en consideración (3.8),(3.9).

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= dimX_1 + dimX_3, \\ \beta(S) &= dimX_3 + dimX_4, \\ \alpha(TS) &= \alpha(S) + dimY &&= \alpha(S) + dimX_1, \\ \beta(TS) &= \beta(T) + dimT(X_4) &&= \beta(T) + dimX_4. \end{aligned}$$

De estas cuatro ecuaciones se sigue que

$$\begin{aligned} ind(TS) &= \alpha(TS) - \beta(TS) \\ &= \alpha(S) + dimX_1 - \beta(T) - dimX_4 \\ &= \alpha(S) + \alpha(T) - dimX_3 - \beta(T) - \beta(S) + dimX_3 \\ &= \alpha(T) - \beta(T) + \alpha(S) - \beta(S) \\ &= ind(T) + ind(S). \end{aligned}$$

□

Observación 3.1. Sea $T \in L(X)$, supongamos que $\alpha(T) < \infty \Rightarrow \alpha(T^n) < \infty, \forall n \geq 1$. Para ver esto, es claro que $T(ker(T^{n+1})) \subseteq ker(T^n)$. Luego la función,

$$T_0 = T|_{ker(T^{n+1})} : ker(T^{n+1}) \to ker(T^n)$$

tiene solución igual a $kerT$. Así, la función canónica

$$\tilde{T_0} : ker(T^{n+1})/ker(T) \to ker(T^n)$$

es inyectiva. Luego,

$$dimker(T^{n+1})/ker(T) \subseteq dim(ker(T^n)) < \infty.$$

Como $\alpha(T) < \infty$, entonces deducimos que $\alpha(T^{n+1}) < \infty$, por lo tanto, si $\alpha(T) < \infty$ entonces $\alpha(T^n) < \infty$.

Por otra parte, si $\beta(T) < \infty$ entonces $\beta < (T^n) < \infty$, ya que por el Teorema 1.7 $\beta(T) = \alpha(T^*)$, así $\alpha(T^*) < \infty$ por lo anterior $\alpha(T^{*^n}) < \infty$. Así, por el Teorema 1.7 $\beta(T^*) < \infty$.

Por lo tanto, $\beta(T) < \infty \Rightarrow \beta(T^n) < \infty, \forall n \geq 1$.

Teorema 3.4. *Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial X, entonces las siguientes proposiciones son válidas.*

(i) *Si $p(T) < \infty$ entonces $\alpha(T) \leq \beta(T)$;*

(ii) *Si $q(T) < \infty$ entonces $\beta(T) \leq \alpha(T)$;*

(iii) *Si $p(T) = q(T) < \infty$ entonces $\alpha(T) = \beta(T)$, posiblemente infinitos;*

(iv) *Si $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y si $p(T)$ o $q(T)$ es finito, entonces $p(T) = q(T)$.*

Demostración. (i) Sea $p := p(T) < \infty$. Claramente si $\beta(T) = \infty$ no hay nada por probar. Asumimos que $\beta(T) < \infty$ lo que implica que $\beta(T^p)$ es finito por la Observación 3.1. En vista de la Proposición 3.1 tenemos que $\ker T \cap T^p(X) \subseteq \ker T^n \cap T^p(X) = \{0\}$, lo que implica que $\ker T \cap T^p(X) = \{0\}$, como $\beta(T^p)$ es finito, entonces $\alpha(T) < \infty$, puesto que $\ker T - \{0\}$ está contenido en la codimensión de T^p.

Haciendo uso del Teorema 3.3 tenemos que para todo $n \geq p$, se cumple la siguiente igualdad:

$$n.ind\, T = ind\, T^n = \alpha(T^n) - \beta(T^n). \tag{3.10}$$

Ahora, supongamos que $q := q(T) < \infty$. Para todo entero $n \geq \max\{p, q\}$, tenemos que

$$\ker T^p = \ker T^{p+1} = ... = \ker T^n = \ker T^{n+1} = ...$$

$$T^q(X) = T^{q+1}(X) = ... = T^n(X) = T^{n+1}(X) = ...$$

Luego,

$$\alpha(T^p) = \alpha(T^{p+1}) = ... = \alpha(T^{n+1}) = ... \quad \text{y} \quad \beta(T^q) = \beta(T^{q+1}) = ... = \beta(T^{n+1}) = ...$$

Así que, la cantidad $n.indT = \alpha(T^n) - \beta(T^n)$ es constante, ya que ambas dimensiones son finitas, ahora bien, para que tenga sentido la igualdad (3.10) debe tenerse que $ind\,T = 0$, y en consecuencia $\alpha(T) = \beta(T)$.

Supongamos ahora que $q := q(T) = \infty$, entonces $\beta(T^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, así $n.ind\,T$ eventualmente es negativo, y en consecuencia $ind\,T < 0$. Y por lo tanto $\alpha(T) < \beta(T)$.

(ii) Sea $q := q(T) < \infty$. Claramente si $\alpha(T) = \infty$ no hay nada que probar. Supongamos que $\alpha(T) < \infty$ lo que implica que $\alpha(T^q) < \infty$ por la Observación 3.1. Por la Proposición 3.2, $X = Y \oplus T(X)$ con $Y \subset \ker T^q$ de aquí se sigue que

$$\beta(T) = dim\,Y \leq dim \ker T^q = \alpha(T^q) < \infty,$$

lo que implica que $\beta(T^q)$ es finito.

Por el Teorema 3.3 , tenemos que

$$n\,ind\,T = ind\,T^n = \alpha(T^n) - \beta(T^n).$$

Ahora, si $p := p(T) < \infty$ por el mismo argumento usado en la parte (i) tenemos que para todo $n \geq \max\{p, q\}$ la cantidad $n.ind\,T = \alpha(T^n) - \beta(T^n)$ es constante, por lo que $ind\,T = 0$ teniendo que $\alpha(T) = \beta(T)$.

Además de lo anterior, supongamos que $p = \infty$, luego tenemos que $\alpha(T^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, así que $n.indT$ es eventualmente positivo, y en consecuencia $indT > 0$, y por lo tanto tenemos que $\beta(T) < \alpha(T)$.

(iii) Es consecuencia inmediata de la parte (i) y (ii).

(iv) Puede verse de manera sencilla, ya que

$$\alpha(T^n) - \beta(T^n) = ind\,T^n = n.ind\,T = 0$$

esto es válido para cada $n \in \mathbb{N}$. Teniéndose que

$$\alpha(T^n) = \beta(T^n) \tag{3.11}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Luego, si $p(T) < \infty$, entonces para

$$n \geq p, \alpha(T^p) = \alpha(T^{p+1}) = ...\alpha(T^n) = \alpha(T^{n+1}) < \infty,$$

y $q(T)$ no debe ser infinito, ya que si fuese así $\beta(T^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, contradiciendo la igualdad (3.11).

Similarmente si $q(T)$ es finito, resulta que $p(T)$ es finito, y por la Proposición 3.3, $p(T) = q(T)$. □

Teorema 3.5. *Sea T un operador lineal en un espacio vectorial X. Supongamos que una de las siguientes condiciones se cumplen*

(i) $\alpha(T) < \infty$.

(ii) $\beta(T) < \infty$.

(iii) $p(T) < \infty$.

(iv) $q(T) < \infty$.

(v) $kerT \subseteq T^n(X), \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $C(T) = T^\infty(X)$.

Demostración. (i) Si $kerT$ es de dimensión finita, entonces existe un entero positivo m tal que

$$kerT \cap T^m(X) = kerT \cap T^{m+k}(X),\ \forall k \geq 0$$

y por tanto, es suficiente con aplicar el Lema 3.1.

(ii) Supongamos que $\beta(T) < \infty$ y la descomposición $X = F \oplus T(X)$ con $dimF < \infty$.

Sea $D_n = kerT \cap T^n(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces se tiene

$$D_{n+1} = kerT \cap T^{n+1}(X) \subseteq kerT \cap T^n(X) = D_n$$

luego,

$$D_{n+1} \subseteq D_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que existen k subespacios distintos D_n; no hay perdida de generalidad al suponer que,$D_j \neq D_{j+1}, \forall j = 1, 2, 3, ..., k$.

Así, para cada j, podemos encontrar un elemento $w_j \in X$ tal que $T^j(w_j) \in D_j$ y $T^j(w_j) \notin D_{j+1}$.

Como $X = F \oplus T(X)$, también existen $u_j \in F, v_j \in T(X)$ tal que $w_j = u_j + v_j$.

Veamos que los vectores $u_1, u_2, ..., u_k$ son linealmente independiente. Supongamos que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = 0$, entonces $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$.

Como $w_j \in X$ es tal que $T^j(w_j) \in D_j$. Entonces,

$$T^j(w_j) \in kerT \cap T^j(X).$$

Por lo tanto,

$$T^j(w_j) \in kerT, \text{ para } j = 1, 2, ..., k$$

luego,

$$\begin{aligned}
T(w_1) \in kerT \quad &\Rightarrow \quad T^k(w_1) = 0 \\
T^2(w_2) \in kerT \quad &\Rightarrow \quad T^k(w_2) = 0 \\
&\vdots \\
T^{k-1}(w_{k-1}) \in kerT \quad &\Rightarrow \quad T^k(w_{k-1}) = 0.
\end{aligned}$$

De aquí, dado que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$$

entonces,

$$\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j w_j + \lambda_k w_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$$

$$\Rightarrow T^k(\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j w_j + \lambda_k w_k) = T^k(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j)$$

$$\Rightarrow \lambda_k T^k(w_k) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T^k(v_j) \in T^{k+1}(X). \tag{3.12}$$

Como,

$$T^k(w_k) \in D_k = kerT \cap T^k(X)$$
$$\Rightarrow T^k(w_k) \in kerT \Rightarrow \lambda_k T^k(w_k) \in kerT. \tag{3.13}$$

De (3.12) y (3.13), se tiene

$$\lambda_k T^k(w_k) \in D_{k+1},$$

y dado que,

$$T^k(w_k) \notin D_{k+1}.$$

Esto es posible solo si $\lambda_k = 0$.

Siguiendo este proceso se muestra que $\lambda_{k-1} = \lambda_{k-2} = \cdots \lambda_1 = 0$, así los vectores $u_1, u_2, ..., u_k$ son linealmente independiente.

De esto tenemos que $k \leq dimF < \infty$, pero para un m suficientemente grande, tenemos que

$$kerT \cap T^m(X) = kerT \cap T^{m+j}(X), \forall j \geq 0.$$

Luego, se aplica el Lema 3.1.

(iii) Si $p := p(T) \leq m < \infty$, por la Proposición 3.1, obtenemos

$$kerT \cap T^p(X) = kerT \cap T^{p+k}(X), \forall k \geq 0,$$

y luego aplicamos el Lema 3.1.

(iv) Si $q := q(T) < \infty$, entonces

$$T^q(X) = T^{q+k}(X), \forall k \geq 0.$$

Así,

$$kerT \cap T^q(X) = kerT \cap T^{q+k}(X), \forall k \geq 0,$$

nuevamente , se aplica el Lema 3.1.

(v) Si $kerT \subseteq T^n(X), \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$kerT \cap T^n(X) = kerT \cap T^{n+k}(X) = kerT, \forall k \geq 0.$$

Aplicando el Lema 3.1, se tiene que $C(T) = T^{\infty}(X)$. □

Teorema 3.6. *Sea $T \in L(X)$, X un espacio de Banach, si T no posee la SVEP en 0 entonces $p(T) = \infty$.*

Demostración. Supongamos que T no posee la SVEP en 0. Entonces por el Teorema 2.6 existe un elemento $x \neq 0$, donde $x \in kerT$ tal que $\sigma_T(x) = \emptyset$. Por el Teorema 2.5 parte (i), $x \in K(T)$ y además existe una sucesión $(u_n) \in X$ tal que $u_0 = x$ y $T_{u_{n+1}} = u_n$, para cada $n = 0, 1, 2, ...$

Tenemos que

$$T^{n+1}u_n = T^n(Tu_n) = T^n u_{n-1} = \cdots = Tu_0 = 0$$

$$T^n u_n = T^{n-1}u_{n-1} = \cdots = u_0 \neq 0, \text{ para cada } n = 0, 1, 2, ...$$

Por lo tanto, $u_n \in kerT^{n+1}$, más aún $u_n \notin kerT^n$. □

El teorema anterior también muestra que $p(\lambda I - T) < \infty$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ implica que T posee la SVEP en λ.

A continuación en el proximo teorema muestra cierta descomposición del espacio que nos permite saber si el operador T posee la SVEP en 0.

Teorema 3.7. *Supóngase que T es un operador lineal sobre un espacio vectorial X. Si $p = p(T) = q(T) < \infty$, entonces se tiene la descomposición*

$$X = \ker T^p \oplus T^p(X).$$

Recíprocamente, si para un número natural m, se tiene la descomposición $X = T^m(X) \oplus \ker T^m$, entonces $p(T) = q(T) \leq m$. En este caso $T|T^p(X)$ es biyectivo.

Demostración. Supongamos que $p = p(T) = q(T) \leq m < \infty$, por la Proposición 3.2, si $q(T) < \infty$, entonces, para todo n, existe un subespacio $Y_n \subseteq \ker T^m$ tal que $X = Y_n \oplus T^n(X)$.

En particular, para $n = p$

$$X = Y_p \oplus T^p(X) \text{ con } Y_p \subseteq \ker T^p \text{ también}$$

$$X = \ker T^p + T^p(X).$$

Por otro lado, por la Proposición 3.1, si $p(T) \leq m < \infty$, entonces

$$\ker T^p \cap T^m(X) \subseteq \ker T^p \cap T^p(X) = \{0\}.$$

Luego, tenemos que

$$X = \ker T^p \oplus T^p(x).$$

Recíprocamente, si $X = T^m(X) \oplus \ker T^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces, nuevamente por la Proposición 3.1 se tiene que $p(T), q(T) \leq m$, y por la Proposición 3.3 tenemos que $p(T) = q(T) < \infty$.

Sea $\widetilde{T} = T|_{T^p(X)}$, obsérvese que si $p(T) = q(T) < \infty$, entonces $T^p(X), T^q(X), T^{q+k}(X)$ para $k \geq 0$ son iguales, así $T^p(X) = T^\infty(X)$, luego, aplicando el Teorema 3.5 tenemos que $\widetilde{T} = T|_{T^p(X)}$ es sobreyectiva.

Por otro lado, $\ker \widetilde{T} = \ker T \cap T^p(X)$, lo que implica que

$$\ker \widetilde{T} \subseteq \ker T \subseteq \ker T^p \text{ así}$$

$$\ker \widetilde{T} \subseteq T^p(X),$$

así la descomposición siguiente

$$X = \ker T^p \oplus T^p(X)$$

se establece que

$$\ker \widetilde{T} = \{0\},$$

y por lo tanto

$$\widetilde{T} = T|_{T^p(X)} \quad \text{es inyectiva.}$$

□

Capítulo 4

Operadores de Fredholm.

La Teoría de Fredholm esta desarrollada en base a las longitudes de las cadenas del operador T, así pues, la Teoría de Fredholm tiene relación con la SVEP en un punto, es por ello que definiremos los operador que la cumpla y muy particularmente, en este capítulo, estudiaremos ciertas condiciones bajo las cuales un operador T no verifica la SVEP en un punto, es de hacer notar que estos operadores son los Operadores de Semi-Fredholm, los Operadores Semi-regulares, además se definirán los espectros de Weyl y Browder, el Resolvente Tipo Kato cuya caracterización permitirá verificar, mediante teoremas, que se cumpla o no la SVEP.

1. Operadores de Semi-Fredholm.

En el Teorema 3.5 establece que bajo ciertas condiciones puramente algebraicas el Hiperrango verifica lo siguiente $T(T^\infty(X)) = T^\infty(X)$. Ahora estamos interesados en las condiciones topólogicas que aseguran que ese espacio es cerrado. A continuación, introducimos algunas clases de operadores.

Definición 4.1 (**Operadores de Semi-Fredholm**). Sea X un espacio de Banach, el conjunto de todos los Operadores upper Semi-Fredholm es definido por

$$\Phi_+(X):=\{T \in L(X) : \alpha(T) < \infty \text{ y } T(X) \text{ es cerrado}\}$$

mientras que el conjunto de todos los operadores lower Semi-Fredholm es definido por

$$\Phi_-(X):=\{T \in L(X) : \beta(T) < \infty\}.$$

El conjunto de todos los Operadores Semi-Fredholm es definido por

$$\Phi_\pm(X) := \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X).$$

La clase $\Phi(X)$ de todos los Operadores de Fredholm es definida por

$$\Phi(X) := \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X).$$

Denotaremos al conjunto de Fredholm por

$$\Phi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in \Phi(X)\}.$$

Es una afirmación que $\Phi(T)$ es un conjunto abierto, por lo que se puede desglosar en componentes conexas disjuntas no vacías, ver [11].

Lema 4.1. *Sea $T \in L(X)$. Supongamos que $\alpha(T) < \infty$ o $\beta(T) < \infty$. Entonces*

$$p(T) < \infty \Leftrightarrow \textit{la restricción } T \mid T^{\infty}(X) \textit{ es inyectivo.}$$

Demostración.

Supongamos que $p(T) < \infty$, por el Teorema 3.5 vemos que $C(T) = T^{\infty}(X)$, en consecuencia se tiene que $T(T^{\infty}(X)) = T^{\infty}(X)$. Sea $\tilde{T} = T \mid T^{\infty}(X)$, entonces $\tilde{T}$ es sobreyectivo, así $q(\tilde{T}) = 0$.

Por otro lado, $ker\tilde{T}^n = kerT^n \cap T^{\infty}(X)$. Además, si

$$p(T) < \infty \Rightarrow kerT^p = kerT^{p+k}, \forall k \geq 0.$$

Así,

$$kerT^p \cap T^{\infty}(X) = kerT^{p+k} \cap T^{\infty}(X)$$

por lo tanto,

$$ker\tilde{T}^p = kerT^{p+k} \cap T^{\infty}(X) = ker\tilde{T}^{p+k}$$

lo que implica que $p(\tilde{T}) < \infty$.

Por la Proposición 3.3, como $q(\tilde{T}) = 0$ y $p(\tilde{T}) < \infty$, entonces $p(\tilde{T}) = 0$.

Por lo tanto,

$$T \mid T^{\infty}(X) \text{ es inyectivo.}$$

Recíprocamente, si $\tilde{T}$ es inyectivo, entonces $kerT \cap T^{\infty}(X) = \{0\}$. Supongamos que $\alpha(T) < \infty$ o $\beta(T) < \infty$, siguiendo la demostración del Teorema 3.5, se sigue que

$$\begin{aligned} kerT \cap T^m(X) &= kerT \cap T^{m+k}, \forall k > 0 \\ &= kerT \cap T^\infty(X) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Luego aplicando la Proposición 3.1, se sigue que $p(T) < \infty$.

Teorema 4.1. *Si $T \in \Phi_\pm(X)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *T no posee la SVEP en 0.*

(ii) *$p(T) = \infty$.*

(iii) *0 es un punto limite de $\sigma_p(T)$.*

Demostración. (i)$\Rightarrow$ (ii) ver el Teorema 3.6.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Supongamos que $p(T) = \infty$. Asumamos que $T \in \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ y $Y := T^\infty(X)$. Por el Teorema 3.5 se tiene que $Y = C(T)$, así $T \mid Y$ es sobreyectiva. Además, por la Observación 3.1 se tiene que $T^n \in \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así su espacio imagen es cerrado y por tanto Y también es cerrado. Por el Lema 4.1 $T \mid Y$ no es inyectiva, por lo tanto, como Y es de Banach entonces por el Corolario 2.5, deducimos que T no posee la SVEP en 0.

(iii)$\Rightarrow$ (i) Sea $Y := T^\infty(X)$ como en la primera parte de la prueba, Y es un Espacio de Banach y $T \mid Y$ es sobreyectiva. Es fácil ver que si $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \neq 0$, entonces $x \in Y$. Por lo tanto,

$$\sigma_p(T) \backslash \{0\} \subseteq \sigma_p(T \mid Y) \subseteq \sigma(T \mid Y).$$

De lo supuesto, se sigue que 0 es un punto limite de $\sigma(T \mid Y)$ y por tanto $0 \in \sigma(T \mid Y)$. Pero como $T \mid Y$ no es inyectiva,por lo tanto, como Y es de Banach entonces por el Corolario 2.5, se tiene que T no posee la SVEP en 0.

(i)$\Rightarrow$ (iii) Supongamos que 0 no es un punto límite de $\sigma_p(T)$ y sea $f : D(0, \epsilon) \to X$ una función analítica tal que $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in D(0, \epsilon)$. Para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y $\lambda \neq 0$ con $\lambda \in D(0, \epsilon)$ que no es un autovalor de T, así $f(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \neq 0$ con $\lambda \in D(0, \epsilon)$. Por continuidad esto se cumple también para $\lambda = 0$; por lo tanto T posee la SVEP en 0. $\square$

Corolario 4.1. *Supongamos que $T \in \Phi_\pm(X)$ posee $indT > 0$. Entonces T no posee la SVEP en 0.*

Demostración. Si $indT > 0$ entonces $p(T) = \infty$; luego por la inclusión (ii)$\Rightarrow$ (i) del Teorema anterior se sigue que T no posee la SVEP en 0. □

Observación 4.1. Sea $T \in \Phi_{\pm}(X)$, entones $p(T) = q(T^{*})$ y $q(T) = p(T^{*})$.

Demostración. (Ver [2]). □

Teorema 4.2. *Supongamos que $T \in \Phi_{\pm}(X)$, entonces T^{*} no posee la SVEP en 0 si y solo si $q(T) = \infty$. Además si T y T^{*} poseen la SVEP en 0 entonces $T \in \Phi_{\pm}(X)$ con $indT = 0$.*

Demostración. Sabemos que si $T \in \Phi_{\pm}(X)$ entonces $T^{*} \in \Phi_{\pm}(X^{*})$ y $p(T^{*}) = q(T)$ por la Observación anterior.

La ultima afirmación es una consecuencia evidente del hecho que si tanto el Ascent $p(T)$ y Descent $q(T)$ son finitos, y por tanto iguales, entonces $\alpha(T) = \beta(T)$. □

El Teorema 4.2 muestra también que T y T^{*} tienen la SVEP en 0, entonces T es un Operador Riesz-Schauder, es decir, un Operador de Fredholm teniendo así el Ascent y Descent finitos.

Teorema 4.3. *Sea $T \in L(X)$, entonces T posee la SVEP o para todo punto o para ningún punto de una componente Ω de $\Phi(T)$.*

Demostración. El Ascent $p(\lambda I - T)$ es finito o para todo punto o para ningún punto de Ω por el Teorema 3.6. Supongamos que T no posee la SVEP en $\lambda_0 \in \Omega$. Por el Teorema 4.1, $\lambda_0 I - T$ posee Ascent infinito y por lo tanto $p(\lambda I - T) = \infty$, para todo $\lambda \in \Omega$. Por el Teorema 4.1, se sigue que T no posee la SVEP en ningún punto de Ω. □

2. Espectro de Weyl y Browder.

El Teorema 4.2 tiene otra consecuencia interesante, antes de ello definiremos dos espectros de suma importancia para tal hecho.

Definición 4.2 (**Espectro de Weyl**)**.** Sea $T \in L(X)$, definimos el Espectro de Weyl de T como

$$\sigma_W(T) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in \Phi(X), indT = 0\}.$$

Definición 4.3 (Espectro Browder). Sea $T \in L(X)$, definimos el Espectro de Browder de T como

$$\sigma_B(T) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in \Phi(X), p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty\}.$$

Teorema 4.4. *Supongamos que $T \in L(X)$, si T posee la SVEP, entonces $\sigma_B(T) = \sigma_W(T)$.*

Demostración. La inclusion $\sigma_W(T) \subseteq \sigma_B(T)$ es cierta para todo operador acotado.

Recíprocamente, supongamos que $\lambda \notin \sigma_W(T)$, ya que T posee la SVEP en $\lambda \in \mathbb{C}$, el ascent $p(\lambda I - T)$ es finito por el Teorema 4.2, por lo tanto también $q(\lambda I - T)$ es finito. Así $\lambda \notin \sigma_B(T)$.

Por lo tanto, $\sigma_B(T) \subseteq \sigma_W(T)$. □

3. Operadores Semi-Regulares.

Otro operador que debemos estudiar para verificar si posee o no la SVEP en un punto, es el operador semi-regular, en lo que sigue se dá la definición de operador semi-regular y un teorema que indica bajo que condición este operador no posee la SVEP.

Definición 4.4 (Operador Semi-regular). Sea $T \in L(X)$, X es un espacio de Banach, se dice que es un operador Semi-regular si T posee el rango cerrado $T(X)$ y $kerT \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por el Teorema 3.5, si T es Semi-regular entonces $C(T) = T^\infty(X)$. Además, en este caso $C(T)$ es cerrado (ver [15]), por el Teorema 2.4 se tiene que $C(T) = K(T)$.

Claramente, todo operador sobreyectivo es semi-regular, así que el siguiente resultado generaliza el Corolario 2.4.

Teorema 4.5. *Sea $T \in L(X)$, con T un operador semi-regular entonces*

$$T \textit{ no posee la SVEP en } 0 \Leftrightarrow T \textit{ no es inyectiva.}$$

Demostración. Supongamos que T no es inyectiva, ya que T es semi-regular $Y := T^\infty(X)$ es cerrado y $T^\infty(X) = C(T) = K(T)$; Así, $T \mid Y$ es sobreyectiva. Además, por hipótesis, $kerT \subseteq T^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, $kerT \subseteq T^\infty(X)$ es decir, $T \mid Y$ es inyectiva, y así T no posee la SVEP en 0. □

Corolario 4.2. *Sea $T \in L(X)$, T un operador semi-regular. Entonces*

$$T^* \text{ no posee la SVEP en } 0 \Leftrightarrow T \text{ no es sobreyectiva.}$$

Demostración. Observemos primeramente si T es semi-regular, entonces T^* es semi-regular, ver [15], y además sabemos que T es sobreyectiva si y solo si T^* es bounded below, es decir, T^* es inyectiva y con rango cerrado. Ahora por la definición de semi-regularidad podemos asegurar que T^* es de rango cerrado y por tanto T no es sobreyectiva si y solo si T^* no es inyectiva. □

4. Operadores Tipo Kato.

En lo siguiente se define el Resolvente y el Operador Tipo Kato, en esta sección se demuestra bajo que condiciones no se cumple la SVEP en un punto, teniendo en cuenta este tipo de operadores.

Definición 4.5 (Resolvente Tipo Kato). Sea $T \in L(X)$, el Resolvente Kato denotado como $\rho_K(T)$, es definido por

$$\rho_K(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ es semi-regular}\}.$$

$\rho_K(T)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y por tanto se puede descomponer en componentes abiertos disjuntos conexos no vacío, ver [13].

Teorema 4.6. *Sea $T \in L(X)$, entonces T posee la SVEP o en todo punto o en ningún punto de una componente Ω de $\rho_K(T)$.*

Demostración. Suponga que T no posee la SVEP en $\lambda_0 \in \Omega$ y consideremos un punto arbitrario $\lambda \in \Omega$. Con el fin de demostrar que T no posee la SVEP en el punto λ es suficiente demostrar, siguiendo el Teorema 4.5, que $\lambda I - T$ no es inyectiva.

El subespacio $\overline{H_0(\lambda I - T)}$ es constante sobre las componentes de $\rho_K(T)$, ver [10]. Por otro lado, de la definición de semi-regularidad podemos evidenciar que de $\lambda I - T$ se obtienen las igualdades

$$\overline{H_0(\lambda_0 I - T)} = \overline{H_0(\lambda I - T)} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} ker(\lambda I - T)^n}, \quad \text{ver [15].}$$

de esto se sigue que $ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$.

En efecto, si $ker(\lambda I - T) = \{0\}$ entonces $ker(\lambda I - T)^n = \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto

$$\overline{H_0(\lambda_0 I - T)} = \overline{H_0(\lambda I - T)} = \{0\},$$

lo cual es imposible, ya que $\{0\} \neq ker(\lambda_o I - T) \subseteq H_0(\lambda_0 I - T)$. □

El resultado del Teorema 4.5 podrá ampliarse a una clase de operadores que es estrictamente más grande que la clase de todos los operadores semi-regulares.

Diremos que $T \in L(X)$ admite una descomposición generalizada de Kato, abreviada GKD, si existen subespacios cerrados T-invariantes (M, N) tal que $X = M \oplus N$ y la restricción $T \mid M$ es semi-regular y $T \mid N$ es Quasi-Nilpotente.

Obviamente, el operador semi-regular corresponde, en esta descomposición GKD (M, N), para el caso $M = X$ y $N = \{0\}$.

Definición 4.6 (**Operador Tipo Kato**). Sea $T \in L(X)$ y T admite GKD (M, N) supongamos que $T|N$ es nilpotente de orden d, diremos entonces que T es un Operador Tipo Kato de orden d.

A continuación una caracterización más para los operadores que no verifican la SVEP.

Teorema 4.7. *Supongamos que $T \in L(X)$ y admite una GKD (M, N). Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) *T no posee la SVEP en 0.*

(ii) *$T \mid M$ no es inyectiva.*

(iii) *$T \mid M$ no posee la SVEP en 0.*

(iv) *0 es un punto limite de $\sigma_p(T)$.*

Demostración. Nótese que si T admite GKD (M, N), entonces $K(T) = C(T \mid M) \subseteq M$ ver [14], y se denota $C(T \mid M)$ como el core algebraico de $T \mid M$.

Por otra parte,

$$K(T) \cap kerT = K(T) \cap M \cap kerT = K(T) \cap kerT \mid M$$

y como $T \mid M$ es semi-regular,

$$kerT \mid M \subseteq C(T \mid M) = K(T).$$

De lo anterior, podemos concluir que $kerT \mid M = K(T) \cap kerT$.

Ahora supongamos que T no posee la SVEP en 0. Por el Teorema 2.6 existe un elemento $x \in kerT, x \neq 0$, tal que $\sigma_T(x) = \emptyset$. Por la parte (i) del Teorema 2.5 tenemos $x \in K(T) = C(T \mid M)$, de manera que $kerT \mid M = K(T) \cap kerT \neq \{0\}$. Esto demuestra la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$.

Para demostrar $(ii) \Rightarrow (i)$, supongamos que T tiene una descomposición generalizada de Kato (M, N) con $kerT \mid M \neq \{0\}$. Por hipótesis $T \mid M$ es semi-regular; así, $K(T) = C(T \mid M)$ es cerrado. Por otro lado, $kerT \mid M = K(T) \cap kerT \neq \{0\}$.

Por lo tanto, si $Y := K(T)$, $T \mid Y$ es sobreyectiva pero no inyectiva y por ende T no posee la SVEP en 0.

$(iii) \Leftrightarrow (ii)$ Esto se sigue del Teorema 4.5, así por hipótesis $T \mid M$ es semi-regular.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Como se observó antes, $K(T)$ es cerrado y $kerT \mid M = kerT \cap K(T)$.

Por otro lado, de la igualdad $K(T) = C(T \mid M)$ obtenemos que $T \mid K(T)$ es sobreyectiva.

Ahora, supongamos que $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \neq 0$. Entonces la sucesión $x_0 := x$ y $x_n := x/\lambda^n$ verifica la condición (a) y (b) de la definición de K(T); así $x \in K(T)$. Esto demuestra que $\sigma_p(T) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(T \mid K(T)) \subseteq \sigma(T \mid K(T))$ y así $0 \in \sigma(T \mid K(T))$, como $\sigma(T \mid K(T))$ es cerrado y 0 es un punto limite de $\sigma(T \mid K(T))$. Por lo tanto, $T \mid K(T)$ no es inyectiva y de esta forma $kerT \mid M = kerT \cap K(T) \neq \{0\}$.

La implicación $(i) \Rightarrow (iv)$ se ha demostrado en el Teorema 4.2.

$\square$

Teorema 4.8. *Supongamos que $T \in L(X)$ admite una GKD (M, N), entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *T tiene la SVEP en 0;*

(ii) *$T\big|M$ tiene la SVEP en 0;*

(iii) *$T\big|M$ es inyectivo;*

(iv) $H_0(T) = N$;

(v) $H_0(T)$ *es cerrado;*

(vi) $H_0(T) \cap K(T) = \{0\}$;

(vii) $H_0(T) \cap K(T)$ *es cerrado.*

Demostración. (ver [2]). □

En particular, si T es Semi-regular, entonces las condiciones (i)-(vii) son equivalentes a la siguiente condición: (**viii**) $H_0(T) = \{0\}$.

Teorema 4.9. *Sea* $T \in L(X), X$ *un espacio de Banach, y asuma que* T *es de Tipo Kato. Entonces las condiciones (i)-(vii) del Teorema 4.8 son equivalentes a las condiciones*

(viii) $p(T) < \infty$,

(ix) $\mathcal{N}^\infty(T) \cap T^\infty(X) = \{0\}$;

Demostración. (ver [2]). □

En este caso, si $p := p(T)$ *entonces* $H_0(T) = \mathcal{N}^\infty(T) = \ker T^p$.

Ahora mostraremos el siguiente ejemplo donde un Operador de Fredholm T con índice menor que 0 no posee la SVEP en 0.

Ejemplo 4.1. Sea R y L se denotaran operadores de cambio derecho y operadores de cambio izquierdo, respectivamente, sobre el espacio de Hilbert $H := l^2(\mathbb{N})$, definido por

$$R(x) := (0, x_1, x_2, \dots) \text{ y } L(x) := (x_2, x_3, \dots),$$

para todo $(x) := (x_n) \in l^2(\mathbb{N})$. Claramente

$$\alpha(R) = \beta(L) = 0 \text{ y } \alpha(L) = \beta(R) = 1,$$

así, L y R son de Fredholm. Por el Teorema 3.4 $p(L) = q(R) = \infty$, por otro lado, $q(L) = p(R) = 0$.

Consideremos el operador $L \oplus R \in L(H \times H)$ definido por

$$(L \oplus R)(x, y) := (Lx, Ry), \text{ con } x, y \in l_2\mathbb{N}.$$

Es fácil verificar que

$$\alpha(L \oplus R) = \alpha(L) = 1, \ \beta(L \oplus R) = 1 \text{ y } p(L \oplus R) = \infty.$$

Análoganente, si $T := L \oplus R \oplus R \in L(H \times H \times H)$ entonces

$$\beta(T) = 2, \ \alpha(T) = \alpha(L) = 1 \quad \text{y} \quad p(T) = \infty,$$

así T es un operador de Fredholm teniendo $indT < 0$, y por el Teorema 4.1, T no posee la SVEP en 0.

Referencias Bibliográficas

[1] Aiena P. *Fredholm and local spectral theory, with application to multipliers.* Kluwer Acad. Publishers (2004).

[2] Aiena P. *Semi-Fredholm operators perturbation theory and localized SVEP.* Ediciones IVIC (2007)

[3] Aiena P. *Riesz multipliers on commutative semisimple Banach algebras.* Arch. Math.(Basel) **54** (1990) **293-303**.

[4] Aiena P., Aponte E., Balzan E. *Weyl type theorems for left and right polaroid operators*, Integr. Equ. Oper. Theory 66 (2010) **1-20**.

[5] Aiena P., Monsalve O. *Operators which do not have the single valued extension property*, J. Math. Anal. Appl. **250** (2000) **435-448**.

[6] Bachman G., Narici L. *Functional Analysis.* Academic Press. New York, San Francisco London. 1966.

[7] Dunford N. *Spectral Operators.* Pacific J. Math. 4, (1954) **321-354**.

[8] Dunford N. *Spectral Theory II. Resolution of the Identy.* Pacific J. Math. 2,(1952) **559-614**.

[9] Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators.* Part I (1967), Part II (1967), Part III, Wiley, New York (1971).

[10] *Förster* K. H. *Über die Invarianz eineger Räume, die zum Operator* $T - \lambda A$ *gehören.* Arch. Math. (1966)**56-64**.

[11] Heuser H. *Functional Analysis.* Marcel Dekker, New York (1982).

[12] Laursen K.B. *The Browder spectrum through local spectral theory*, in "Proc. Int. Conf. on Banach Algebras, July-August 1997, Blaubeuren, Germany,"de Gruyter, Berlin, 1998.

[13] Laursen K.B., Neumann M.M. *An Introduction to Local Spectral Theory*, Clarendon Press, Oxford, (2000). London Math. Soc. Monographs 20. Clarendon Press, Oxford.

[14] Mbekhta M. *Sur la théorie spectrale locale et limite des nilpotents.* Proc. Amer. Math. Soc. 110, (1990), **621–631**.

[15] Mbekhta M., Ouahab A. *Opérateur s-régulier dans un espace de Banach et théorie spectrale*, Acta Sci. Math. (Szeged)*59*(1994)*525-543*

[16] Rudin W. *Functional Analysis.* Mc. Graw-Hill, Inc. New York. 1991.

[17] Vrbová P. *On local spectral properties of operators in Banach spaces.* Czechoslovak Math. J. 23(98), (1973a), **483-492**.