UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”

Decanato de Ciencias y Tecnología
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

“Transformaciones espectrales y matrices Hermitianas Toeplitz”

Trabajo Especial de Grado presentado por

Br. Henry A. Rojas

como requisito final
para obtener el título de licenciado
en ciencias matemáticas
Tutor: Dr. Javier Hernández

Barqusimeto, Venezuela. Febrero de 2014

A mis padres:

Pilares de este proyecto.

Transformaciones espectrales y matrices Hermitianas Toeplitz

RESUMEN

En este trabajo se estudian algunas transformaciones espectrales de funcionales lineales Hermitianos asociados a medidas de probabilidad soportadas en la circunferencia unidad, considerando, particularmente, a las transformaciones canónicas de Christoffel y Uvarov. Para ello, se analizan las matrices de Hessenberg asociadas a cada perturbación polinómica del funcional lineal Hermitiano. Luego, se muestra la relación existente entre estas matrices y la matriz de Hessenberg asociada al funcional no perturbado mediante el uso de las factorizaciones LU y QR.

Índice general

Introducción

Los polinomios ortogonales, aunque conforman una familia de funciones caracterizadas por su gran sencillez, en los últimos años han sido objeto de importantes investigaciones debido a sus numerosas aplicaciones tanto en la Física como en las Matemáticas. Sus aplicaciones en la física cuántica, en el álgebra lineal, en la probabilidad y en la estadística han demostrado la importancia de las propiedades básicas de esta familia de funciones. Por tales razones en esta monografía se estudia el trabajo de L. Daruis, J. Hernández y F. Marcellán [3], donde se analizan algunas perturbaciones polinómicas de funcionales lineales Hermitianos definidos en el espacio vectorial de los polinomios de Laurent, centrando la atención en las conocidas transformaciones de Christoffel y Uvarov.

La historia de los polinomios ortogonales se remonta al siglo XVIII, asociando sus orígenes al trabajo de Legendre sobre el movimiento planetario. Es en el siglo XIX, empero, cuando la teoría de polinomios ortogonales comienza a desarrollarse con la aparición de las llamadas familias clásicas continuas: los polinomios de Hermite, los polinomios de Laguerre y los polinomios de Jacobi. Posteriormente aparecen los polinomios discretos de Chebyshev. Sin embargo, es a finales del siglo XIX cuando Stieltjes establece las bases de la naciente teoría general sobre polinomios ortogonales, la cual se consolida en el siglo XX con los trabajos de Szegö y Geronimus, dando inicio a la teoría de polinomios sobre la circunferencia unidad. Luego, en trabajos posteriores, se analiza, desde un punto de vista algebraico, el tema de los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad ligado a la factorización de matrices de Hessenberg de dimensión finita.

El hecho de que el círculo unitario sea una de las curvas más simple en el plano complejo ha permitido que, en las últimas décadas, se desarrollara una teoría de polinomios ortogonales asociados a perturbaciones de medidas soportadas en la circunferencia unidad. Siguiendo la misma línea, en este trabajo se analizan algunas perturbaciones polinómicas (transformación canónica de Christoffel y de Uvarov) de funcionales lineales Hermitianos asociados a medidas de probabilidad cuyos soportes son subconjuntos de la circunferencia unidad, con el propósito de mostrar la conexión entre las matrices de Hessenberg asociadas al operador de multiplicación y a sus perturbaciones canónicas. He aquí donde juega un papel importante el uso de las factorizaciones LU y QR.

Con la finalidad de facilitar al lector la comprensión de los temas acá tratados, la monografía se ha divido de la siguiente manera:

En los primeros dos capítulos se introducen las definiciones básicas de la teoría general de polinomios ortogonales. En ellos se brinda una exposición concisa sobre la familia de polinomios ortogonales con respecto a funcionales lineales, mostrando las condiciones que garantizan la existencia de esta familia de funciones y sus propiedades básicas. Asimismo, se exponen los conceptos más importantes de la teoría de polinomios ortogonales con respecto a funcionales lineales Hermitianos sobre la circunferencia unidad, demostrando con detalles aquellos resultados y propiedades que serán utilizados en capítulos posteriores.

Debido al rol preponderante que algunas factorizaciones de matrices tendrán en los capítulos siguientes, en el Capítulo III se explican las nociones básicas de la factorización LU, la descomposición de Cholesky y la factorización QR.

En los Capítulos IV y V se estudia la transformación canónica de Christoffel. Acá se analizan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de sucesiones de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional perturbado, y se estudia la conexión entre las respectivas matrices de Hessenberg asociadas al funcional perturbado y al funcional original mediante el uso de las factorizaciones LU y QR. En este último caso solamente se consideran funcionales lineales Hermitianos definido-positivos.

Finalmente, en el Capítulo VI se hace un análisis de la transformación canónica de Uvarov, donde se utilizan los resultados obtenidos en el Capítulo V para establecer la relación entre las matrices de Hessenberg asociadas al funcional perturbado y el funcional sin perturbar. Nuevamente la factorización QR es utilizada en este proceso.

Capítulo I

Polinomios Ortogonales

Introduciremos en este capítulo las nociones básicas de los Polinomios Ortogonales. Por ser un capítulo preliminar, se exponen brevemente algunos de los resultados más importantes de la materia, omitiendo, en la mayoría de los casos, la prueba de los mismos y haciendo énfasis en aquellos que usaremos en los próximos capítulos. La brevedad de la exposición, sin embargo, no ha impedido que cada uno de los temas haya sido tratado de manera clara y sencilla, pensando en el lector que no se encuentre familiarizado con el asunto.

1.1. El Funcional de momentos

Sea $\mathbb{P}$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos, y denotemos por $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}$, con $n \in \mathbb{N}$, al subespacio de todos los polinomios de grado a lo sumo n. Entonces, dada la base canónica $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, escribiremos $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ para todo polinomio $p \in \mathbb{P}_n$. Si denotamos con $\mathbf{P} = [c_0, c_1, \ldots, c_n]^T$ a la matriz columna de coeficientes de p y tomamos $\mathbf{X} = [1, x, x^2, \ldots, x^n]^T$, entonces $p(x) = \mathbf{X}^T\mathbf{P}$. Así, podemos identificar el espacio $\mathbb{P}_n$ de los polinomios complejos con el espacio de sus coeficientes, es decir, con el espacio $\mathbb{C}^{(n+1)\times 1}$ de vectores columnas de orden $(n+1) \times 1$ en los complejos. Ahora bien, podemos definir un producto interno en $\mathbb{P}_n$ y, en consecuencia, también podemos definir una norma. Por consiguiente, el espacio $\mathbb{P}_n$ con la norma definida por el producto interno es un espacio de Hilbert, puesto que todo espacio vectorial normado de dimensión finita es completo (*ver* [9]). Asimismo, observe que $\mathbb{P}_n \subsetneq \mathbb{P}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la topología de cada $\mathbb{P}_n$ es la topología inducida por $\mathbb{P}_{n+1}$. Así pues, $\mathbb{P}_n$ es cerrado en $\mathbb{P}_{n+1}$ (*ver* [9]). Por ello, en lo sucesivo, escribiremos $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{n-1} \oplus (\mathbb{P}_{n-1})^{\perp}$, donde el subespacio

$$(\mathbb{P}_{n-1})^{\perp} = \{p \in \mathbb{P}_n : \langle p, q \rangle = 0, \ \forall q \in \mathbb{P}_{n-1}\}$$

es el *complemento ortogonal* de $\mathbb{P}_{n-1} \subsetneq \mathbb{P}_n$.

Sea $\mathbb{P}^*$ el espacio dual de $\mathbb{P}$, es decir, el espacio vectorial de todos los funcionales lineales $\mathcal{L} : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$, de modo que el espacio dual de $\mathbb{P}_n$ será representado con $\mathbb{P}_n^*$, el cual podemos identificar con el espacio $\mathbb{C}^{1\times(n+1)}$ de los vectores filas de orden $1 \times (n+1)$ en los complejos. Entonces, para cualquier $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^*$, denotaremos por $\mathcal{L}(p) = \langle \mathcal{L}, p \rangle$ a la acción del funcional $\mathcal{L}$ sobre un polinomio p.

En la siguiente definición, mostramos el caso en el cual $\mathcal{L}$ actúa sobre el polinomio x^n.

Definición 1.1.1. Dada una sucesión $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos, diremos que el funcional lineal $\mathcal{L} : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ definido por

$$\mathcal{L}(x^n) = \langle \mathcal{L}, x^n \rangle = m_n, \ \ n = 0, 1, 2, \dots$$

es el *funcional de momentos* asociado a la *sucesión de momentos* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$. Al valor m_n lo llamaremos *momento de orden* n.

Al funcional de momentos $\mathcal{L}$ le podemos asociar una matriz H, cuyas componentes $h_{i,j}$ vienen dadas por

$$h_{i,j} = \mathcal{L}(x^i x^j) = \mathcal{L}(x^{i+j}) = m_{i+j}.$$

Esta matriz recibe el nombre de *matriz de momentos*, y se caracteriza por ser una matriz de Hankel, es decir, los elementos de sus antidiagonales son idénticos:

$$H = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_n & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+1} & \cdots \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & m_{n+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ m_n & m_{n+1} & m_{n+2} & \cdots & m_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Denotaremos por H_n a la submatriz principal de H, o sea, a la sección principal de orden $n \times n$ de dicha matriz.

Definición 1.1.2.

(i) El funcional $\mathcal{L}$ se dice *cuasi-definido* si las submatrices principales H_n de H son no singulares para todo n, esto es,

$$\Delta_n := \det H_n \neq 0 \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

(ii) El funcional $\mathcal{L}$ se dice *definido-positivo* si, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(p(x)) > 0$ para todo polinomio $p(x)$ no nulo y no negativo.

Cuando $\mathcal{L}$ es definido-positivo, todos los momentos de $\mathcal{L}$ son reales (*ver* [2]). Más aún, podemos escribir

$$\mathcal{L}(x^n) = m_n = \int_E x^n d\mu(x),$$

donde μ es una medida de Borel positiva cuyo soporte

$$\operatorname{supp}(\mu) = \left\{x \in \mathbb{R} : \mu(x - \varepsilon, x + \varepsilon) > 0 \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \geq 0\right\}$$

está contenido en un subconjunto cerrado E de la recta real y está formado por una cantidad infinita de puntos.

En general, si $\mathcal{L}$ es definido-positivo entonces admite una representación integral

$$\mathcal{L}(p(x)) = \int_E p(x) d\mu(x).$$

Observe que, en el caso definido-positivo, podemos definir el siguiente producto interno:

$$\langle p, q \rangle = \mathcal{L}(p(x)q(x)),$$

para todo $p, q \in \mathscr{P}$, donde $\mathscr{P}$ es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales. Así, la matriz de Gram asociada a este producto interno respecto a la base canónica $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una matriz de Hankel, como en (1.1).

1.2. Polinomios Ortogonales respecto a funcionales lineales

Definición 1.2.1. Sea $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios. Diremos que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una *sucesión de polinomios ortogonales* respecto al funcional $\mathcal{L}$ si:

(*i*) $P_n(x)$ es un polinomio de grado n;

(*ii*) $\mathcal{L}(P_n(x)P_m(x)) = \kappa_n \delta_{n,m}$,

donde $\kappa_n \neq 0$ y $\delta_{n,m}$ es el delta de Kronecker definido por

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Diremos además que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una *sucesión de polinomios ortonormales* respecto al funcional lineal $\mathcal{L}$ si $\kappa_n = 1$ para todo $n \geq 0$.

Si existe una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}$, entonces, por las condiciones (*i*) y (*ii*) de la definición anterior se tiene que $m_0 \neq 0$, $P_0(x) \neq 0$. En consecuencia, no puede existir una sucesión de polinomios ortogonales si $\mathcal{L}(1) = 0$. Sin embargo, estamos interesados en conocer las condiciones necesarias y suficientes que garantizan la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales. El siguiente teorema nos brinda la respuesta:

Teorema 1.2.1 (*ver* [2])**.** *El funcional lineal $\mathcal{L}$ es cuasi-definido si, y solamente si, existe una sucesión de polinomios ortogonales respecto al funcional $\mathcal{L}$.*

Es necesario destacar que si $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto al funcional $\mathcal{L}$, entonces para toda familia de constantes no nulas $\{c_n\}$ se tiene que $\{c_n P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es también una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\mathcal{L}$ (*ver* [4]).

Teorema 1.2.2 (*ver* [2])**.** *Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios ortogonales con respecto al funcional $\mathcal{L}$. Entonces, para todo polinomio $Q(x)$ de grado n,*

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

donde $\{c_k\}_{k=0}^{n}$ son los coeficientes de Fourier dados por

$$c_k = \frac{\mathcal{L}(Q(x)P_k(x))}{\mathcal{L}(P_k^2(x))}.$$

El teorema anterior establece que todo polinomio de grado n puede escribirse como combinación lineal de los primeros n términos de una sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales con respecto al funcional $\mathcal{L}$. Por consiguiente $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ constituye una base para el espacio vectorial $\mathbb{P}$. Por otro lado, una sucesión $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales puede estar únicamente determinada al fijar el coeficiente líder de cada P_n. En otras palabras, para determinar una sucesión particular de polinomios ortogonales respecto a un funcional de momentos dado, solamente debemos especificar explícitamente el valor del coeficiente líder de cada polinomio P_n.

Definición 1.2.2. Si el coeficiente líder de cada $P_n(x)$ es igual a 1, diremos que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales *mónicos*.

En el caso real, es común denotar por γ_n al coeficiente líder de un polinomio $P_n(x)$ de grado n. Por tanto, para $n \geq 0$, los polinomios ortonormales $P_n(x)$ vienen dados explícitamente por

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{pmatrix}$$

de modo que $\gamma_n = \sqrt{\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$, utilizando el convenio $\Delta_{-1} = 1$.

Una característica importante de los polinomios ortogonales en la recta real es que satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$xP_n(x) = \lambda_{n+1} P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) + \lambda_n P_{n-1}(x)$$

con condiciones iniciales $P_0(x) = 1$ y $P_{-1}(x) = 0$, de modo que

$$\lambda_n^2 = \frac{\mathcal{L}(P_n^2(x))}{\mathcal{L}(P_{n-1}^2(x))} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} = \left(\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\right)^2, \quad \lambda_n > 0, \quad \forall\, n \geq 1,$$

$$c_n = \frac{\mathcal{L}(xP_n^2(x))}{\mathcal{L}(P_n^2(x))}, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Si los polinomios ortogonales son mónicos, entonces la fórmula de recurrencia adopta la forma

$$\widehat{P}_{n+1}(x) = (x - c_n)\widehat{P}_n(x) - \lambda_n^2 \widehat{P}_{n-1}(x), \tag{1.2}$$

con $\widehat{P}_n(x) = P_n(x)/\gamma_n$.

Por otro lado, dada una sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfaga (1.2), con $\lambda_n, c_n \in \mathbb{R}$ y λ_n positivo, existe un único funcional de momentos $\mathcal{L}$, definido-positivo, tal que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al funcional $\mathcal{L}$. Este resultado es conocido como el Teorema de Favard (*ver* [2]).

Una consecuencia inmediata de la fórmula de recurrencia es que dos polinomios ortogonales consecutivos no tienen ceros comunes (*ver* [4]). En efecto, si $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos tal que $P_{n+1}(x_0) = P_n(x_0) = 0$, con $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces, por la ecuación (1.2), $P_{n-1}(x_0) = 0$. Usando la fórmula de recurrencia reiteradamente se llega a que $P_0(z_0) = 0$, contradiciendo el hecho de que $P_0(x) = 1$.

La relación (1.2) se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$x\begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} = J_n \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde J_n es una matriz tridiagonal

$$J_n = \begin{pmatrix} c_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & c_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

denominada *matriz mónica de Jacobi de orden n*.

En el caso infinito, de la relación (1.2) se tiene

$$xP = JP,$$

con $P = [P_0(x)\ P_1(x)\dots]^T$ y

$$J = \begin{pmatrix} c_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda_1 & c_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & c_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se conoce comúnmente como *matriz de Jacobi*.

Dentro del proceso de factorización de la matriz J, en la literatura se han considerado distintos ejemplos de perturbaciones $\widetilde{\mathcal{L}}$ de un funcional lineal cuasi-definido sobre el espacio vectorial $\mathscr{P}$. Particularmente, se han estudiado tres modelos canónicos:

(*i*) El funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}$ dado por

$$\widetilde{\mathcal{L}}(p(x)) = \mathcal{L}(xp(x)), \quad p \in \mathscr{P},$$

el cual se denomina *transformación de Christoffel.*

(*ii*) El funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}$ definido mediante

$$\widetilde{\mathcal{L}}(p(x)) = \mathcal{L}(p(x)) + mp(0), \quad p \in \mathscr{P},\ m \in \mathbb{R},$$

el cual es llamado *transformación de Uvarov.*

(*iii*) El funcional lineal $\widetilde{\mathcal{L}}$ definido por

$$\widetilde{\mathcal{L}}(p(x)) = \mathcal{L}\left(\frac{p(x) - p(0)}{x}\right) + mp(0), \quad p \in \mathscr{P},\ m \in \mathbb{R},$$

el cual es conocido como *transformación de Geronimus.*

Estas transformaciones canónicas se denominan *transformaciones espectrales básicas*.

Capítulo II

Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad

Sea $\mathbb{L} = \text{span}\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ el espacio vectorial de los polinomios de Laurent con coeficientes complejos. Suponga que $\mathcal{S} : \mathbb{L} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal definido en $\mathbb{L}$. Entonces, definamos un funcional bilineal $\mathcal{L} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ mediante

$$\mathcal{L}(p(z), q(z)) := \mathcal{S}(p(z)\overline{q}(z^{-1})), \tag{2.1}$$

con $p, q \in \mathbb{P}$ y $z \in \mathit{\Gamma} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, de modo que $\mathcal{L}$ satisface la siguiente propiedad:

$$\mathcal{L}(zp(z), zq(z)) = \mathcal{L}(p(z), q(z)). \tag{2.2}$$

La matriz $T = (t_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ asociada al funcional $\mathcal{L}$, cuyas componentes están dadas por

$$t_{i,j} := \mathcal{L}(z^i, z^j) = \mathcal{S}(z^{i-j}) = t_{i-j},$$

es una matriz de Toeplitz, esto es, los elementos de cada subdiagonal son constantes.

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n} & \dots \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{-(n-1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_n & t_{n-1} & \dots & t_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Denotaremos por $T_n = (t_{i,j})_{i,j=0}^n$ a la submatriz principal de la matriz T de dimensión $(n+1) \times (n+1)$.

Definición 2.1.3.

(i) Diremos que $\mathcal{L}$ es un funcional bilineal *Hermitiano* en $\mathbb{P}$ si $t_{i,j} = \overline{t_{j,i}}$.

(ii) Diremos que $\mathcal{L}$ es un funcional bilineal *cuasi-definido* en $\mathbb{P}$ si $\det T_n \neq 0$, para todo entero n no negativo.

(iii) Diremos que $\mathcal{L}$ es un funcional bilineal *definido-positivo* en $\mathbb{P}$ si $\mathcal{L}(p,p) > 0$, para todo $p \in \mathbb{P}$, con $p(z) \neq 0$.

Nótese que el funcional $\mathcal{L}$ es Hermitiano. Además, si $\mathcal{L}$ es definido-positivo entonces $\det T_n > 0$ para todo entero n no negativo. En ese caso, existe una medida de probabilidad no trivial σ soportada en la circunferencia unidad de modo que $\mathcal{L}$ admite una representación integral

$$\mathcal{L}(p,q) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}\, d\sigma(\theta).$$

Diremos entonces que el funcional bilineal $\mathcal{L}$ es definido-positivo sobre la circunferencia unidad.

Teorema 2.1.3.

1. *Si el funcional bilineal $\mathcal{L}$ es cuasi-definido, entonces existe una sucesión $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ de polinomios ortogonales mónicos asociada a $\mathcal{L}$, esto es,*

   (i) *P_n es un polinomio de grado n;*

   (ii) *$\mathcal{L}(P_k, P_n) = \mathbf{k}_n \delta_{k,n}$, $\mathbf{k}_n \neq 0$, $0 \leq k \leq n$, donde $\delta_{k,n}$ es el delta de Kronecker.*

   Esta sucesión viene dada por

$$P_0(z) = 1, \qquad P_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n} \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{-(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_{-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \qquad (2.3)$$

   donde $\Delta_{n-1} = \det T_{n-1}$.

2. *Si el funcional bilineal $\mathcal{L}$ es definido-positivo, entonces existe una única sucesión $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortonormales asociada a $\mathcal{L}$, dada explícitamente por*

$$\varphi_n(z) = \kappa_n P_n(z), \tag{2.4}$$

donde $P_n(z)$ está dada en (2.3) *y* $\kappa_n = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{k}_n}}$, *con* $\mathbf{k}_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Si bien es cierto que, en el caso real, una sucesión $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales satisface una relación de recurrencia a tres términos, en el caso complejo esta relación no se cumple. Esto se debe al hecho de que para todo $p \in \mathscr{P}$, el operador multiplicación $M_x(p) = xp$ es autoadjunto. Y así, para $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, se tiene

$$\langle M_x(P_n), P_k\rangle = \langle P_n, M_x(P_k)\rangle = 0, \text{ para } k < n-1. \tag{2.5}$$

Por el contrario, si $p \in \mathbb{P}$ entonces el operador multiplicación no es autoadjunto. En consecuencia, los dos miembros en (2.5) serán distintos. Sin embargo, en la circunferencia unidad Γ, los polinomios ortonormales satisfacen las siguientes relaciones:

$$\kappa_n\varphi_{n+1}(z) = \kappa_{n+1} z\varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(0)\varphi_n^*(z), \tag{2.6}$$

$$\kappa_{n+1}\varphi_{n+1}(z) = \kappa_n z\varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(0)\varphi_{n+1}^*(z). \tag{2.7}$$

Si los polinomios ortogonales son mónicos entonces las relaciones de recurrencia adoptan la forma siguiente:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) &= zP_n(z) + P_{n+1}(0)P_n^*(z), \\ P_{n+1}(z) &= \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} zP_n(z) + P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z), \end{aligned} \tag{2.8}$$

las cuales se conocen como relaciones de recurrencia *ascendente* y *descendente*, respectivamente. El polinomio

$$P_n^*(z) = z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = z^n \overline{P_n}\left(\frac{1}{z}\right)$$

se denomina *polinomio recíproco* de P_n. Como $|z| = 1$ implica $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, entonces

$$P_n^*(z) = z^n \overline{P_n}(\overline{z}) = z^n \overline{P_n(z)}.$$

Definición 2.1.4. Dada una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortonormales sobre la circunferencia unidad, el n-ésimo núcleo $K_n(z,\alpha)$ se define como

$$K_n(z,\alpha) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\alpha)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{k}_j} P_j(z)\overline{P_j(\alpha)},$$

y recibe el nombre de *núcleo reproductor* asociado a $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

El teorema siguiente aporta una expresión sencilla para el núcleo repoductor de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad.

Teorema 2.1.4 (*ver* [10]). *Si $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortonormales en la circunferencia unidad, entonces*

$$\begin{aligned} K_n(z,\alpha) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\alpha)} &= \frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(\alpha)}\varphi_{n+1}^*(z) - \overline{\varphi_{n+1}(\alpha)}\varphi_{n+1}(z)}{1-\overline{\alpha}z} \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}_{n+1}} \frac{\overline{P_{n+1}^*(\alpha)}P_{n+1}^*(z) - \overline{P_{n+1}(\alpha)}P_{n+1}(z)}{1-\overline{\alpha}z} \end{aligned} \tag{2.9}$$

para todo $n \geq 0$ y $z,\alpha \in \mathbb{C}$, con $\overline{\alpha}z \neq 1$.

También es necesario destacar que el núcleo reproductor satisface las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{L}(p(z), K_n(z,\alpha)) = p(\alpha)$ para todo $p \in \mathbb{P}_n$. (*Propiedad Reproductora*)

(b) $K_n(z,0) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(0)} = \kappa_n \varphi_n^*(z)$.

(c) $K_n(0,0) = \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(0)|^2 = \kappa_n^2$.

Por la propiedad (c) se tiene

$$K_n(0,0) = \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(0)|^2 = |\varphi_n(0)|^2 + \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(0)|^2 = |\varphi_n(0)|^2 + K_{n-1}(0,0),$$

lo cual implica

$$\kappa_n^2 - \kappa_{n-1}^2 = K_n(0,0) - K_{n-1}(0,0) = |\varphi_n(0)|^2 = \kappa_n^2 |P_n(0)|^2.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\right)^2 = 1 - |P_n(0)|^2 = \frac{\mathbf{k}_n}{\mathbf{k}_{n-1}}. \tag{2.10}$$

De aquí se sigue que $|P_n(0)| \neq 1$, y las relaciones de recurrencia en (2.8) pueden ser reescritas como

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) + P_{n+1}(0)P_n^*(z), \tag{2.11}$$

$$P_{n+1}(z) = (1 - |P_{n+1}(0)|^2)zP_n(z) + P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z). \tag{2.12}$$

Proposición 2.1.1 (*ver* [5]). *El funcional bilineal $\mathcal{L}$ es cuasi-definido si, y solamente si, $|P_n(0)| \neq 1$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Si $\mathcal{L}$ es cuasi-definido, por el teorema 2.1.3 existe una sucesión $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales mónicos asociada a $\mathcal{L}$, la cual satisface las relaciones de recurrencia dadas en (2.11) y (2.12). Suponga, por reducción al absurdo, que $|P_n(0)| = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces de la relación de recurrencia descendente se tiene que $P_n(z) = P_n(0)P_n^*(z)$. Así,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P_n(z), z^n) &= P_n(0)\mathcal{L}(P_n^*(z), z^n) = P_n(0)\mathcal{L}(z^n\overline{P_n}(z^{-1}), z^n) \\ &= P_n(0)\mathcal{S}(z^n\overline{P_n}(z^{-1}) \cdot z^{-n}) = \mathcal{S}(P_n(0)\overline{P_n}(z^{-1})) \\ &= \mathcal{L}(P_n(0), P_n(z)) = 0,\end{aligned}$$

contradiciendo el hecho de que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a $\mathcal{L}$.

Recíprocamente, suponga que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos definida mediante la relación de recurrencia ascendente (2.11), tal que $|P_n(0)| \neq 1$ para todo $n \geq 1$. Probaremos por inducción que existe un funcional de momentos $\mathcal{L}$, cuasi-definido, de modo que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ sea la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos.

Para $n = 1$ se tiene $P_1(z) = z + P_1(0)$. Entonces defina los valores $t_0 = \mathcal{S}(1)$ y $t_1 = \mathcal{S}(z) = -P_1(0)t_0$. Así,

$$T_1 = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ \overline{t_1} & t_0 \end{pmatrix},$$

y $\Delta_1 = \det T_1 = t_0^2 - t_1\overline{t_1} = (1 - |P_1(0)|^2)\, t_0^2 \neq 0$. Además,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P_1(z), z) &= \mathcal{S}(P_1(z) \cdot z^{-1}) = \mathcal{S}(1 + z^{-1}P_1(0)) \\ &= \mathcal{S}(1) + P_1(0)\mathcal{S}(\overline{z}) = t_0 + P_1(0)\overline{t_1} \\ &= t_0 - |P_1(0)|^2 t_0 = (1 - |P_1(0)|^2)\, t_0 \neq 0.\end{aligned}$$

De aquí se sigue que P_1 es un polinomio mónico de grado 1 tal que

$$\mathcal{L}(P_1(z), 1) = \mathcal{S}(z + P_1(0)) = t_1 + P_1(0)t_0 = 0.$$

Por lo tanto, P_1 es ortogonal a $\mathbb{P}_0$.

Suponga ahora que $\{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}$ son polinomios ortogonales mónicos. Entonces tome $a_n = P_n(0)$, con $|a_n| \neq 1$, y construya un polinomio P_n de grado n que satisfaga la relación de recurrencia ascendente

$$P_n(z) = zP_{n-1}(z) + a_n P_{n-1}^*(z).$$

Si ese polinomio es dado por $P_n(z) = z^n + c_{n,1}z^{n-1} + \cdots + c_{n,n-1}z + a_n$, entonces defina

$$t_n = -c_{n,1}t_{n-1} - \cdots - c_{n,n-1}t_1 - a_n t_0$$

de manera que

$$\mathcal{L}(P_n(z), 1) = \mathcal{S}(P_n(z)) = t_n + c_{n,1}t_{n-1} + \cdots + c_{n,n-1}t_1 + a_n t_0 = 0.$$

Por otro lado, para $1 \leq k \leq n-1$, de la relación de recurrencia ascendente se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P_n(z), z^k) &= \mathcal{L}(zP_{n-1}(z) + a_n P_{n-1}^*(z), z^k) \\ &= \mathcal{L}(P_{n-1}(z), z^{k-1}) + a_n\mathcal{L}(P_{n-1}^*(z), z^k) \\ &= \mathcal{L}(P_{n-1}(z), z^{k-1}) + a_n\mathcal{L}(z^{n-1}\overline{P_{n-1}}(z^{-1}), z^k) \\ &= \mathcal{L}(P_{n-1}(z), z^{k-1}) + a_n\mathcal{L}(z^{n-k-1}, P_{n-1}(z)) = 0.\end{aligned}$$

Finalmente, por (2.10) tenemos que

$$\mathcal{L}(P_n(z), z^n) = \mathbf{k}_n = (1 - |P_n(0)|^2)\mathbf{k}_{n-1}.$$

Luego, por la hipótesis inductiva, $\mathcal{L}(P_n(z), z^n) \neq 0$. ■

Observe que el funcional $\mathcal{L}$ es definido-positivo si, y solamente si, $|P_n(0)| < 1$ para todo $n \geq 1$. Los valores $P_n(0)$, $n \in \mathbb{N}$, reciben el nombre de *coeficientes de reflexión*.

En el caso definido-positivo el núcleo reproductor tiene una propiedad extremal, la cual será dada en el siguiente teorema. Esta propiedad no solo se cumple en la circunferencia unidad, sino en todo el plano complejo.

Teorema 2.1.5 (*ver* [10])**.** *Sea $\sigma(z)$ una medida de Borel positiva y finita con soporte acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$. Suponga que $p_n(z)$ es un polinomio de grado n tal que $p_n(y) = 1$, para un cierto $y \in \mathbb{C}$ fijo. Entonces el valor mínimo de la integral*

$$\int |p_n(z)|^2 d\sigma(z)$$

es alcanzado cuando

$$p_n(z) = \frac{1}{K_n(y, y)} K_n(z, y).$$

Además, el mínimo es justamente

$$\frac{1}{K_n(y, y)}.$$

El recíproco del núcleo reproductor con argumentos iguales comúnmente se llama *función de Christoffel* y se define como

$$\lambda_n(y) = \frac{1}{K_n(y, y)} = \left(\sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(y)|^2 \right)^{-1}.$$

Así, λ_n es decreciente en n para todo $y \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, sobre la circunferencia unidad se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_\infty(y) &= \lim_{n\to\infty} \lambda_n(y) \\ &= \inf \left\{ \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) \,;\; P \in \mathbb{P},\ P(y) = 1 \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Proposición 2.1.2. *Sea σ una medida de probabilidad no trivial sobre la circunferencia unidad. Entonces*

(*i*) *Si $|y| > 1$, entonces $\lambda_\infty(y) = 0$.*

(*ii*) *Si $|y| = 1$, entonces $\lambda_\infty(y) = \sigma(\{y\})$.*

(*iii*) *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 = +\infty$, *entonces* $\lambda_\infty(y) = 0$ *para todo* y *con* $|y| < 1$.

(*iv*) *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 < +\infty$, *entonces* $\lambda_\infty(y) > 0$ *para todo* y *con* $|y| < 1$. *Además,*

$$\lambda_\infty(0) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - |P_n(0)|^2).$$

Una versión dual de la propiedad extremal del núcleo reproductor es la siguiente:

Teorema 2.1.6 (*ver* [10]). *Sean* $\alpha \in \mathbb{C}$ *fijo y* $p_n(z)$ *un polinomio de grado a lo sumo* n *tal que*

$$\int |p_n(z)|^2 d\sigma(z) = 1.$$

Entonces el máximo de $|p_n(\alpha)|^2$ *es alcanzado para*

$$p_n(z) = e^{i\theta} \frac{K_n(z,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)},$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, *y el máximo es* $K_n(\alpha, \alpha)$.

En el estudio de los polinomios es importante considerar el conjunto de elementos en los cuales dichos polinomios se anulan. Por ello, es un hecho conocido que todo polinomio de grado n tiene a los sumo n ceros, contando multiplicidades. No obstante, al trabajar con polinomios ortogonales se puede hablar, incluso, de la localización de dichos ceros, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 2.1.7. *Si* $\mathcal{L}$ *es definido-positivo y* z_0 *es un cero de* $P_n(z)$, *entonces* $|z_0| < 1$.

Demostración. Supongamos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un cero del polinomio $P_n(z)$ de grado n. Entonces $P_n(z) = (z - z_0)q_{n-1}(z)$, donde $q_{n-1}(z)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Así,

$$zq_{n-1}(z) = P_n(z) + z_0 q_{n-1}(z).$$

Luego, por la propiedad (2.2),

$$\begin{aligned} 0 < \mathcal{L}(q_{n-1}(z), q_{n-1}(z)) &= \mathcal{L}(zq_{n-1}(z), zq_{n-1}(z)) \\ &= \mathcal{L}(P_n(z) + z_0 q_{n-1}(z), P_n(z) + z_0 q_{n-1}(z)) \\ &= \mathcal{L}(P_n(z), P_n(z)) + |z_0|^2 \mathcal{L}(q_{n-1}(z), q_{n-1}(z)), \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$0 < (1 - |z_0|^2)\mathcal{L}(q_{n-1}(z), q_{n-1}(z)) = \mathcal{L}(P_n(z), P_n(z)).$$

Por lo tanto $|z_0| < 1$. ■

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que los ceros de $P_n^*(z)$ se encuentran fuera del círculo $|z| < 1$. En efecto, $P_n^*(z_0) = 0$ si, y solo si, $P_n(\overline{z}_0^{-1}) = 0$. Luego, del teorema 2.1.7 se sigue que $|z_0|^{-1} < 1$.

Teorema 2.1.8. *Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal cuasi-definido. Suponga que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a $\mathcal{L}$.*

(i) Si $|z_0| \neq 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$, y $P_n(z_0) = 0$, entonces $P_n^*(z_0) \neq 0$.

(ii) Si $|z_0| = 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces $P_n(z_0) \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. (i) Supongamos que, para algún $N \in \mathbb{N}$, $P_N(z_0) = P_N^*(z_0) = 0$, con $|z_0| \neq 1$. Entonces, aplicando la relación de recurrencia descendente (2.12) reiteradamente se tiene que $P_1(z_0) = P_1^*(z_0) = 0$. Sin embargo, $P_1(z) = z - z_0$ y

$$P_1^*(z) = z\overline{P_1}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = z\left(\frac{1}{z} - \overline{z}_0\right) = 1 - \overline{z}_0 z.$$

Así,

$$0 = P_1^*(z_0) = 1 - |z_0|^2 \implies |z_0| = 1,$$

lo cual es una contradicción.
(ii) Supongamos que, para algún $N \in \mathbb{N}$, $P_N(z_0) = 0$, con $|z_0| = 1$. De aquí se sigue que $P_N^*(z_0) = z_0^N\,\overline{P_N(z_0)} = 0$. Luego, aplicando la relación de recurrencia descendente (2.12) reiteradamente se tiene que $P_1(z_0) = 0$, esto es, $P_1(z) = z - z_0$, de modo que

$$0 = (1 - |P_1(0)|^2)z_0 \implies |P_1(0)| = 1,$$

lo cual es absurdo por la Proposición 2.1.1. ■

Si $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a un funcional bilineal $\mathcal{L}$, consideremos la matriz

$$H_p = \begin{pmatrix} h_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ h_{1,0} & h_{1,1} & 1 & 0 & \cdots \\ h_{2,0} & h_{2,1} & h_{2,2} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

la cual llamaremos *matriz de Hessenberg* inferior asociada a $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$. Esta matriz nos permite obtener la siguiente relación:

$$zP = H_p P,$$

donde $P = [P_0(z), P_1(z), \dots, P_n(z), \dots]^T$. En lo sucesivo, estaremos interesados en las perturbaciones polinómicas del funcional $\mathcal{L}$ de la forma

$$\mathcal{L}_2(p,q) = \mathcal{L}((z-\alpha)p, (z-\alpha)q), \quad p, q \in \mathbb{P}; \tag{2.13}$$

$$\mathcal{L}_3(p,q) = \mathcal{L}(p,q) + mp(\alpha)\overline{q(\alpha)}, \quad p, q \in \mathbb{P}. \tag{2.14}$$

Estos funcionales Hermitianos $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ reciben el nombre de *transformación de Christoffel* y *transformación de Uvarov* del funcional bilineal $\mathcal{L}$, respectivamente. Además, estudiaremos la relación existente entre las matrices de Hessenberg asociadas a estos funcionales perturbados y las matrices de Hessenberg asociadas al funcional original $\mathcal{L}$ mediante el uso de las factorizaciones LU y QR.

Capítulo III

Factorización de matrices

Al hablar de factorización de una matriz A nos referimos a la representación de A como el producto de dos matrices B y C cualesquiera, esto es, $A = BC$. En general, este proceso de factorización no es único. De hecho, existe una cantidad infinita de matrices B y C cuyo producto es igual a A. No obstante, en el marco de este trabajo nos centraremos en el estudio de las factorizaciones LU y QR.

3.1. Factorización *LU*

Supongamos que $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ es una matriz que puede representarse como un producto de dos matrices L y U, donde $L \in \mathbb{K}^{(m,m)}$ es una matriz triangular inferior cuyos términos diagonales son iguales a 1, y $U \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ es una matriz triangular superior; esto es,

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}.$$

A esta descomposición la llamaremos *Factorización LU* de la matriz A. La ventaja de esta factorización es que nos permite analizar la solución del sistema de ecuaciones lineales

$Ax = b$ al transformar dicho sistema en dos sistemas de ecuaciones de la forma

$$Ax = (LU)x = L(Ux) = b \iff \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases}$$

Dicho de otro modo, descomponemos la resolución de un sistema de ecuaciones lineales en la resolución de dos sistemas triangulares. El primero, triangular inferior, que se resuelve mediante sustituciones progresivas; y el segundo, triangular superior, que se resuelve con sustituciones regresivas.

El método de la factorización LU consiste en la aplicación de los siguientes pasos (*ver* [1]):

1. Reducir la matriz A a la forma escalonada U, utilizando operaciones elementales por fila, en las cuales un múltiplo de una fila se le suma a otra fila que esté por debajo de ella. En este caso, existen matrices triangulares inferiores unitarias $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ tales que $(\varepsilon_p \dots \varepsilon_1)A = U$. No se incluye la operación de intercambiar dos filas.

2. Colocar los elementos de la matriz L de manera que la secuencia de operaciones anterior reduzca a L a la matriz identidad, es decir, si $(\varepsilon_p \dots \varepsilon_1)A = U$ entonces $A = (\varepsilon_p \dots \varepsilon_1)^{-1}U = LU$, donde $L = (\varepsilon_p \dots \varepsilon_1)^{-1}$. Así, las operaciones elementales por fila que reducen la matriz A a la forma escalonada U, también reducen L a la matriz identidad I_m, pues $(\varepsilon_p \dots \varepsilon_1)L = (\varepsilon_p \dots \varepsilon_1)(\varepsilon_p \dots \varepsilon_1)^{-1} = I_m$.

Ahora bien, si una matriz A es no singular y admite una descomposición LU, entonces los factores son únicos. Sin embargo, no toda matriz invertible admite una factorización LU única. Por ello, el siguiente teorema, cuya demostración puede ver en [8], establece condiciones necesarias y suficientes para que una matriz no singular admita una factorización LU.

Teorema 3.1.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. La factorización LU de la matriz A, con $l_{ii} = 1$ para $i = 1, \dots, n$, existe y es única si, y solamente si, las submatrices principales A_i de A de orden $i = 1, \dots, n-1$ son invertibles.*

Por el Teorema anterior, si alguna submatriz A_i, $i = 1, \dots, n-1$, es singular entonces la factorización no existe o no es única (*ver* [8]).

Por otro lado, si la factorización LU de $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ existe y es única, entonces

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U),$$

es decir, el determinante de A está dado por

$$\det(A) = u_{11} \dots u_{nn}.$$

Es oportuno señalar que el algoritmo de factorización LU acá descrito es válido sólo para matrices A, en las cuales no aparecen filas de cero durante el proceso de triangularización. En el caso general, es necesario premultiplicar la matriz A por una o varias matrices de permutación, que colocan dichas filas de ceros como últimas filas de A. Luego, la factorización está dada por $PA = LU$, donde P es el producto de dichas matrices de permutación. (*véase* [1])

En el caso que A sea una matriz tridiagonal, la factorización LU de A es fácil de obtener. Basta con tomar las matrices L y U de la siguiente forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & a_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_2 & a_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_3 & a_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, de la relación $A = LU$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &u_1 = a_{11} \\ &l_2 u_1 = a_{21} \\ &l_2 a_{12} + u_2 = a_{22} \\ &l_3 u_2 = a_{33} \\ &l_3 a_{23} + u_3 = a_{33} \\ &\qquad \vdots \end{aligned}$$

Así, de las ecuaciones anteriores podemos deducir que la factorización LU de una matriz tridiagonal la obtenemos mediante el siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned} &u_1 = a_{11} \\ &\text{Para } m = 2, \dots, n \\ &\qquad l_m = a_{m,m-1}/u_{m-1} \\ &\qquad u_m = a_{m,m} - l_m a_{m-1,m}\,. \end{aligned}$$

Definición 3.1.1. Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ se denomina *valor propio* o *autovalor* de una aplicación lineal $h : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ del espacio vectorial $\mathbb{E}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, si existe un vector v no nulo de $\mathbb{E}$ tal que $h(v) = \lambda v$. Al vector v se le conoce como *vector propio* o *autovector* de h asociado al valor propio λ.

Sean $\mathbb{E}$ un espacio vectorial de dimensión n y $\mathfrak{B} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ una base de $\mathbb{E}$. Supongamos que A es la matriz de h respecto a la base $\mathfrak{B}$. Entonces λ es un valor propio de h si el sistema lineal $Ax = \lambda x$, o equivalentemente,

$$(\lambda I_n - A)x = 0_n,$$

admite una solución no trivial. En consecuencia, λ será un valor propio de h si es raíz de la ecuación $\det(tI_n - A) = 0$.

Definición 3.1.2.

1. Una matriz $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ se denomina *simétrica* si $A = A^T$.
2. Una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ se denomina *definida positiva* si

$$X^T AX > 0 \text{ para todo } X \in \mathbb{R}^{(n,1)} \text{ no nulo.}$$

Toda matriz A es definida positiva si, y solo si, todos los valores propios de A son positivos [1]. Además, todos los menores principales (o subdeterminantes) de A son positivos si A es definida positiva. En este caso, del teorema 3.1.1 se sigue que A admite una factorización LU, con los factores L y U únicos. Así, por ser A simétrica, se concluye que $A = U^T U$, donde U es triangular superior con elementos diagonales positivos. Esta descomposición se conoce como *Factorización de Cholesky* de una matriz simétrica definida positiva.

Otra representación de la factorización de Cholesky es dada por $A = LL^T$, donde L es triangular inferior con elementos diagonales positivos. Esta representación, al igual que la anterior, se sigue del hecho de que A es una matriz simétrica definida positiva y, en ese caso, los factores L y U de la factorización LU son únicos, tal como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2. *Sea $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ una matriz simétrica definida positiva. Entonces, existe una única matriz triangular superior U cuyos términos diagonales son estrictamente* *positivos, de modo que*

$$A = U^T U,$$

y los coeficientes u_{ij} *de la matriz* U^T *se pueden calcular como sigue:* $u_{11} = \sqrt{a_{11}}$ *y, para* $i = 2, \ldots, n$,

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik} h_{jk} \right) / h_{jj}, \quad j = 1, \ldots, i-1,$$

$$h_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Una demostración detallada de este teorema se puede encontrar en [8].

En general, si A es Hermitiana y definida positiva, entonces A puede ser descompuesta como $A = LL^*$, donde L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos y L^* es la matriz transpuesta conjugada de L. En este caso, los elementos de la matriz L son complejos, pero en la diagonal principal son reales.

3.2. Factorización *QR*

Como ya hemos visto, el algoritmo de la factorización LU nos lleva a la descomposición de una matriz como el producto de dos matrices triangulares, donde una es inferior y la otra es superior. Asimismo, el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt nos permite factorizar una matriz como el producto de dos matrices: una ortonormal y otra triangular superior. A esta descomposición la denominaremos *Factorización* QR.

Para descomponer una matriz A mediante el proceso de factorización QR, utilizamos el método de Gram-Schmidt, el cual inicia con la matriz A expresada como un conjunto de vectores columnas. Así,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Suponiendo que los vectores columnas $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son linealmente independientes, podemos construir un conjunto de vectores columnas ortonormales $\mathbf{q}_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, de la siguiente manera:

Tomamos el vector $\mathbf{a}_1$ y lo normalizamos para obtener:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|},$$

donde $\|\mathbf{a}_1\| = (a_{11}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2)^{1/2}$ es la magnitud de $\mathbf{a}_1$. Luego, determinamos el vector $\mathbf{a}_2'$, el cual es normal a $\mathbf{q}_1$ y está dado por

$$\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1 .$$

Ahora, procedemos a normalizar el vector $\mathbf{a}_2'$, de manera que:

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{a}_2'}{\|\mathbf{a}_2'\|}.$$

Para determinar $\mathbf{q}_3$ repetimos el proceso. Así,

$$\mathbf{a}_3' = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_2 .$$

Luego, normalizando al vector $\mathbf{a}_3'$ se tiene:

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{a}_3'}{\|\mathbf{a}_3'\|}.$$

Este proceso continua hasta construir un conjunto de n vectores ortonormales. Las expresiones generales para $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{q}_i$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i' &= \mathbf{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{q}_j^T \mathbf{a}_i)\mathbf{q}_j ; \quad && (i = 2, 3, \ldots, n) \\ \mathbf{q}_i &= \frac{\mathbf{a}_i'}{\|\mathbf{a}_i'\|} ; && (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz Q está formada por los vectores columnas $\mathbf{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, esto es, $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$, mientras que la matriz triangular superior R tiene elementos $r_{i,j}$ definidos por

$$r_{i,j} = \begin{cases} \|\mathbf{a}_i'\| & \text{si } i = j, \\ \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_j & \text{si } j \geq i + 1. \end{cases}$$

de modo que $A = QR$.

Teorema 3.2.1 (*ver* [1])**.** *Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ con $m \geq n$ y rang $A = n$, existe una matriz Q con vectores columna ortonormales y una matriz triangular superior $R \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ con elementos diagonales positivos, tales que $A = QR$. Esta factorización es única.*

La factorización QR de una matriz singular no es única. De hecho, existe una factorización QR para matrices rectangulares en la cual R es una matriz cuasi-triangular.

Una de las ventajas de la factorización QR de una matriz A es que, a través del *método QR* presentado por Strang (1988), es posible encontrar todos los autovalores de A. Para ello, consideramos las matrices Q y R obtenidas mediante el método de Gram-Schmidt, las cuales utilizamos para determinar una nueva matriz $A^{(1)}$ dada por $A^{(1)} = RQ$. Observe que A y $A^{(1)}$ son matrices semejantes. En efecto, basta con premultiplicar y postmultiplicar la relación $A = QR$ por Q^{-1} y Q para obtener

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}QRQ = IRQ = RQ = A^{(1)}.$$

Por lo tanto, A y $A^{(1)}$ tienen los mismos autovalores. Luego, hallamos la factorización QR de $A^{(1)}$ y repetimos el proceso para determinar la matriz $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{1}$, donde $Q^{(1)}R^{(1)} = A^{(1)}$. El proceso continua hasta que $A^{(n)}$ sea una matriz triangular, cuyos elementos diagonales serán los autovalores de A. El algoritmo se puede resumir en los siguientes dos pasos:

$$\boxed{\begin{array}{l} A^{(k)} = Q^{(k)}R^{(k)} \\ A^{(k+1)} = R^{(k)}Q^{(k)} \end{array}}$$

Capítulo IV

Funcionales cuasi-definidos y factorización *LU*

En este capítulo estudiaremos la perturbación polinómica de $\mathcal{L}$ dada en (2.13). Para ello, consideraremos, en primer lugar, la perturbación del funcional $\mathcal{L}$ definida como

$$\mathcal{L}_1(p,q) := \mathcal{L}((z-\alpha)p,q), \quad p,q \in \mathbb{P}.$$

Luego, consideraremos la perturbación polinómica de $\mathcal{L}_1$ definida mediante

$$\mathcal{L}_2(p,q) = \mathcal{L}_1(p,(z-\alpha)q) = \mathcal{L}((z-\alpha)p,(z-\alpha)q), \quad p,q \in \mathbb{P}.$$

Este método nos permitirá mostrar que sus correspondientes matrices de Hessenberg están relacionadas. La factorización LU de la matriz de Hessenberg asociada al funcional $\mathcal{L}$ jugará un rol importante en este proceso.

4.1. Funcionales no Hermitianos y la factorización *LU*

Sea $\mathcal{S}$ un funcional lineal cuasi-definido en el espacio vectorial de los polinomios de Laurent con coeficientes complejos. Sea $\mathcal{L}$ el funcional bilineal Hermitiano dado por

$$\mathcal{L}(p(z),q(z)) := \mathcal{S}(p(z)\overline{q}(z^{-1})), \quad p,q \in \mathbb{P}.$$

Definamos una perturbación polinómica de $\mathcal{L}$ mediante

$$\mathcal{L}_1(p,q) := \mathcal{L}((z-\alpha)p,q).$$

Si $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al funcional bilineal $\mathcal{L}$, entonces, por la relación de recurrencia ascendente (2.11) y la propiedad (b) del núcleo reproductor, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_n^{-1} z P_n(z) &= \mathbf{k}_n^{-1} P_{n+1}(z) - P_{n+1}(0)\mathbf{k}_n^{-1} P_n^*(z)\\ &= \mathbf{k}_n^{-1} P_{n+1}(z) - P_{n+1}(0) K_n(z,0).\end{aligned}$$

Luego, por la definición del núcleo reproductor podemos reescribir el resultado anterior como sigue:

$$zP_n(z) = P_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathbf{k}_n}{\mathbf{k}_j} P_{n+1}(0)\overline{P_j(0)} P_j(z). \tag{4.1}$$

De esta relación se puede concluir que

$$zP_i(z) = \sum_{j=0}^{i+1} a_{i,j} P_j(z),$$

donde $a_{i,j}$ son los valores definidos mediante

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1, \\ \dfrac{\mathbf{k}_i}{\mathbf{k}_j} P_{i+1}(0)\overline{P_j(0)} & \text{si } j \leq i, \\ 0 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Por lo tanto, la representación matricial de (4.1) viene dada por

$$zP = H_p P,$$

donde $P = [P_0(z), P_1(z), \ldots]^T$ y H_p es una matriz de Hessenberg inferior cuyos elementos están dados por $a_{i,j}$.

Es fácil ver que, para $P = [P_0(z), P_1(z), \ldots]^T$, la matriz $D_p = \mathcal{L}(P, P^T)$ es una matriz diagonal no singular. En efecto,

$$\mathcal{L}(P, P^T) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(P_0,P_0) & \mathcal{L}(P_0,P_1) & \cdots & \mathcal{L}(P_0,P_n) & \cdots \\ \mathcal{L}(P_1,P_0) & \mathcal{L}(P_1,P_1) & \cdots & \mathcal{L}(P_1,P_n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}(P_n,P_0) & \mathcal{L}(P_n,P_1) & \cdots & \mathcal{L}(P_n,P_n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Como $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\mathcal{L}$ se concluye que, para todo $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, los elementos de D_p están dados por

$$(D_p)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \mathbf{k}_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Observe, además, que $\mathcal{L}_1$ no es un funcional Hermitiano, pues, si lo fuera, el valor $t_{i,j}^1 = \mathcal{L}_1(z^i, z^j)$ sería exactamente igual a $\overline{t_{j,i}^1}$. Sin embargo, mediante cálculos sencillos podemos probar que

$$t_{i,j}^1 = \mathcal{L}_1(z^i, z^j) = \mathcal{L}((z-\alpha)z^i, z^j) = \mathcal{S}(z^{i-j+1}) - \alpha\mathcal{S}(z^{i-j}) = t_{i-j+1} - \alpha\, t_{i-j},$$

mientras que

$$\overline{t_{j,i}^1} = \overline{\mathcal{L}_1(z^j, z^i)} = \mathcal{L}(\overline{(z-\alpha)z^j}, \overline{z^i}) = \mathcal{S}(z^{i-j-1}) - \overline{\alpha}\mathcal{S}(z^{i-j}) = t_{i-j-1} - \overline{\alpha} t_{i-j}.$$

El hecho de que $\mathcal{L}_1$ no sea un funcional Hermitiano nos genera el siguiente problema: no podemos garantizar la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\mathcal{L}_1$. No obstante, es posible hallar sucesiones de polinomios que sean ortogonales por la izquierda o por la derecha con respecto al funcional $\mathcal{L}_1$ tal como se indica a continuación.

Definición 4.1.1. Sea $\mathcal{F}$ un funcional bilineal en $\mathbb{P}$. Suponga que $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones de polinomios mónicos. Entonces, para todo $n \geq 0$,

(i) Diremos que $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ es *ortogonal por la izquierda* respecto a $\mathcal{F}$ si

- $L_n(z)$ es un polinomio de grado n;
- $\mathcal{F}(L_n(z), z^k) = 0$, $0 \leq k \leq n-1$;
- $\mathcal{L}(L_n(z), z^n) \neq 0$.

(ii) Diremos que $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ es *ortogonal por la derecha* respecto a $\mathcal{F}$ si

- $R_n(z)$ es un polinomio de grado n;
- $\mathcal{F}(z^k, R_n(z)) = 0$, $0 \leq k \leq n-1$;
- $\mathcal{L}(z^n, R_n(z)) \neq 0$.

Ahora, con esta definición en mente se puede probar la siguiente proposición, la cual será de gran utilidad en lo que sigue.

Proposición 4.1.1. *Si $P_n(\alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, entonces*

(i) *La sucesión*

$$R_n(z,\alpha) = \frac{\mathbf{k}_n}{\overline{P_n(\alpha)}} K_n(z,\alpha) = P_n(z) + \frac{\mathbf{k}_n}{\overline{P_n(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{k}_j^{-1} \overline{P_j(\alpha)} P_j(z) \tag{4.2}$$

es ortogonal por la derecha respecto al funcional bilineal $\mathcal{L}_1$.

(ii) *La sucesión*

$$S_n(z,\alpha) = \frac{1}{z-\alpha}\left(P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} P_n(z)\right) \tag{4.3}$$

es ortogonal por la izquierda respecto al funcional bilineal $\mathcal{L}_1$.

Demostración. (i) De (4.2) se sigue inmediatamente que $\deg R_n = \deg P_n = n$. Entonces, al usar la propiedad (a) del núcleo reproductor, para $0 \leq k \leq n$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(z^k, R_n(z,\alpha)) &= \mathcal{L}\left(z^k(z-\alpha), \frac{\mathbf{k}_n}{\overline{P_n(\alpha)}} K_n(z,\alpha)\right) \\
&= \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)} \mathcal{L}(z^k(z-\alpha), K_n(z,\alpha)) \\
&= \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)} \mathcal{L}(z^k(z-\alpha), K_{n+1}(z,\alpha) - \mathbf{k}_{n+1}^{-1} P_{n+1}(z)\overline{P_{n+1}(\alpha)}) \\
&= -\mathbf{k}_n \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \delta_{n,k}.
\end{aligned}$$

(ii) De (4.3) se tiene que $\deg(S_n(z,\alpha)) = \deg(P_{n+1}(z)/(z-\alpha)) = n$. Luego, para $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(S_n(z,\alpha), z^k) &= \mathcal{L}((z-\alpha)S_n(z,\alpha), z^k) \\
&= \mathcal{L}\left(P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} P_n(z), z^k\right) \\
&= \mathcal{L}(P_{n+1}(z), z^k) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \mathcal{L}(P_n(z), z^k) \\
&= -\mathbf{k}_n \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \delta_{n,k}.
\end{aligned}$$

■

Ahora mostraremos una conexión entre las matrices de Hessenberg H_p y H_r asociadas a $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{R_n(z,\alpha)\}_{n=0}^{\infty}$, respectivamente.

En primer lugar, observe que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{R_n(z,\alpha)\}_{n=0}^{\infty}$ son bases de polinomios mónicos sobre el espacio vectorial $\mathbb{P}$. Entonces existe una matriz de cambio de base L_{pr}, la cual es triangular inferior con términos diagonales iguales a 1, tal que $P = L_{pr}R$, con $R = [R_0(z,\alpha), R_1(z,\alpha), \ldots]^T$. Como L_{pr} es una matriz invertible, podemos escribir $R = L_{pr}^{-1}P$, con $P = [P_0(z), P_1(z), \ldots]^T$. En efecto, la relación (4.2) puede ser reescrita como

$$R_i(z,\alpha) = \sum_{j=0}^{i} b_{i,j} P_j(z)$$

donde

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ \dfrac{\mathbf{k}_i}{\mathbf{k}_j} \dfrac{\overline{P_j(\alpha)}}{\overline{P_i(\alpha)}} & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Por lo tanto, la representación matricial de (4.2) es

$$R = L_{pr}^{-1}P,$$

donde L_{pr}^{-1} es una matriz triangular inferior con elementos dados por $b_{i,j}$.

Nótese que $\mathcal{L}_1(R, R^T) = D_r$ es una matriz triangular inferior no singular.

Lema 4.1.1. *Sea I la matriz unitaria infinita. Entonces*

(i) $\mathcal{L}_1(P, P^T) = (H_p - \alpha I)\mathcal{L}(P, P^T) = (H_p - \alpha I)D_p$;

(ii) $\mathcal{L}_1((z-\alpha)P, P^T) = (H_p - \alpha I)^2 D_p$.

Demostración. (i) Sea $zP = H_pP$. Entonces $(z-\alpha)P = zP - \alpha P = (H_p - \alpha I)P$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(P, P^T) &= \mathcal{L}((z-\alpha)P, P^T) \\ &= \mathcal{L}((H_p - \alpha I)P, P^T) \\ &= (H_p - \alpha I)\mathcal{L}(P, P^T) \\ &= (H_p - \alpha I)D_p. \end{aligned}$$

(ii) Considerando lo probado anteriormente se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1((z-\alpha)P, P^T) &= \mathcal{L}_1((H_p-\alpha I)P, P^T)\\ &= (H_p-\alpha I)\mathcal{L}_1(P, P^T)\\ &= (H_p-\alpha I)^2 D_p.\end{aligned}$$

∎

Teorema 4.1.1. *Sea L_{pr} la matriz triangular inferior con términos diagonales iguales a* 1 *tal que $P = L_{pr}R$. Entonces $H_p - \alpha I = LU$, donde*

$$L = L_{pr}D_r \tag{4.4}$$

es una matriz triangular inferior y

$$U = L_{pr}^{*}D_p^{-1} \tag{4.5}$$

es una matriz triangular superior.

Demostración. Haciendo uso de la parte (i) del Lema anterior podemos escribir

$$\begin{aligned}(H_p-\alpha I)D_p &= \mathcal{L}_1(P, P^T)\\ &= \mathcal{L}_1(L_{pr}\,R, R^T\,L_{pr}^T)\\ &= L_{pr}\,\mathcal{L}_1(R, R^T)\,\overline{L_{pr}^T}\\ &= L_{pr}\,\mathcal{L}_1(R, R^T)\,L_{pr}^{*}\\ &= L_{pr}\,D_r\,L_{pr}^{*}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H_p-\alpha I = L_{pr}\,D_r\,L_{pr}^{*}\,D_p^{-1} = (L_{pr}\,D_r)(L_{pr}^{*}\,D_p^{-1}) = LU.$$

∎

Como los elementos en la diagonal principal de la matriz $L = L_{pr}D_r$ no necesariamente son iguales a 1, entonces la factorización LU en el teorema anterior no es única.

En el teorema siguiente se muestra la relación existente entre las matrices H_p y H_r.

Teorema 4.1.2. *Si $H_p - \alpha I = LU$, con L y U dadas en (4.4) y (4.5) respectivamente, entonces*

$$H_r = D_r(UL)D_r^{-1} + \alpha I.$$

Demostración. Considere la relación $R = L_{pr}^{-1}P$. Luego, por la parte (*ii*) del Lema 4.1.1 y el teorema anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1((z-\alpha)R, R^T) &= \mathcal{L}_1((z-\alpha)L_{pr}^{-1}P, P^T L_{pr}^{-T}) \\
&= L_{pr}^{-1}\,\mathcal{L}_1((z-\alpha)P, P^T)\,(L_{pr}^*)^{-1} \\
&= L_{pr}^{-1}\,(H_p-\alpha I)^2 D_p\,(L_{pr}^*)^{-1} \\
&= L_{pr}^{-1}(LU)^2 D_p\,(L_{pr}^*)^{-1}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1((z-\alpha)R, R^T) &= \mathcal{L}_1((H_r-\alpha I)R, R^T) \\
&= (H_r-\alpha I)\mathcal{L}_1(R, R^T) \\
&= (H_r-\alpha I)D_r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
H_r-\alpha I &= L_{pr}^{-1}(LU)^2 D_p\,(L_{pr}^*)^{-1} D_r^{-1} \\
&= L_{pr}^{-1}L_{pr}D_r(UL)L_{pr}^*D_p^{-1}D_p\,(L_{pr}^*)^{-1}D_r^{-1} \\
&= D_r(UL)D_r^{-1}.
\end{aligned}$$

■

4.2. La transformación de Christoffel y la factorización *LU*

Dado el funcional $\mathcal{L}_1$ definido en la sección anterior, definamos su perturbación polinómica como sigue:

$$\mathcal{L}_2(p,q) := \mathcal{L}_1(p,(z-\alpha)q), \quad p,q \in \mathbb{P},$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{L}_2(p,q) := \mathcal{L}((z-\alpha)p,(z-\alpha)q), \quad p,q \in \mathbb{P}.$$

Aunque $\mathcal{L}_1$ no es un funcional bilineal Hermitiano, el funcional $\mathcal{L}_2$ sí lo es. De hecho, es fácil ver que

$$t_{i,j}^2 = \mathcal{L}_2(z^i, z^j) = t_{i-j} - \overline{\alpha}t_{i-j+1} - \alpha t_{i-j-1} + |\alpha|^2 t_{i-j} = \overline{\mathcal{L}_2(z^j, z^i)} = \overline{t_{j,i}^2}.$$

En el teorema que enunciaremos a continuación, mostraremos la condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{L}_2$ sea un funcional cuasi-definido.

Teorema 4.2.1. *El funcional bilineal $\mathcal{L}_2$ es cuasi-definido si, y solamente si, $K_n(\alpha,\alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}_2$ un funcional bilineal cuasi-definido. Entonces, en virtud del teorema 2.1.3, existe una sucesión $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\mathcal{L}_2$. Por otra parte, escriba

$$\mathbb{P}_n = (z-\alpha)\mathbb{P}_{n-1} \oplus \operatorname{span}\{K_n(z,\alpha)\}, \tag{4.6}$$

donde $\operatorname{span}\{p(z)\}$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{P}$ generado por $p \in \mathbb{P}$. Para probar la igualdad anterior basta con observar que

$$\mathcal{L}((z-\alpha)P_{n-1}(z), K_n(z,\alpha)) = (\alpha-\alpha)P_{n-1}(\alpha) = 0$$

para todo $P_{n-1}(z) \in \mathbb{P}_{n-1}$, por la propiedad reproductora. Así que $\operatorname{span}\{K_n(z,\alpha)\}$ es el complemento ortogonal de $(z-\alpha)\mathbb{P}_{n-1}$.

Ahora bien, como $\mathbb{P}_{n-2} \subsetneq \mathbb{P}_{n-1}$ y $\mathbb{P}_{n-2}$ es un subespacio cerrado, entonces se puede escribir $(z-\alpha)\mathbb{P}_{n-1} = (z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2} \oplus ((z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2})^{\perp}$. Para determinar el complemento ortogonal de $(z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2}$, observe que, para todo $Q_{n-2}(z) \in \mathbb{P}_{n-2}$,

$$\mathcal{L}_2((z-\alpha)Q_{n-1}(z), (z-\alpha)Q_{n-2}(z)) = 0,$$

ya que $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}_2$, y el grado de $Q_{n-1}(z)$ es distinto al grado de $Q_{n-2}(z)$. En consecuencia, $\operatorname{span}\{(z-\alpha)Q_{n-1}(z)\}$ es el complemento ortogonal de $(z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2}$. Así pues,

$$(z-\alpha)\mathbb{P}_{n-1} = \operatorname{span}\{(z-\alpha)Q_{n-1}(z)\} \oplus (z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2}.$$

De esta forma, la relación (4.6) se puede reescribir como

$$\mathbb{P}_n = \operatorname{span}\{(z-\alpha)Q_{n-1}(z)\} \oplus (z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2} \oplus \operatorname{span}\{K_n(z,\alpha)\}.$$

Por otro lado, de manera completamente análoga se demuestra que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n &= \mathbb{P}_{n-1} \oplus \operatorname{span}\{P_n(z)\} \\ &= \operatorname{span}\{P_n(z)\} \oplus \operatorname{span}\{K_{n-1}(z,\alpha)\} \oplus (z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2}.\end{aligned}$$

Luego, como el complemento ortogonal del subespacio vectorial $(z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2}$ respecto a $\mathbb{P}_n$ es único, entonces

$$\operatorname{span}\{(z-\alpha)Q_{n-1}(z)\} \oplus \operatorname{span}\{K_n(z,\alpha)\} = \operatorname{span}\{P_n(z)\} \oplus \operatorname{span}\{K_{n-1}(z,\alpha)\}.$$

Por lo tanto,

$$P_n(z) = (z-\alpha)Q_{n-1}(z) + \beta_n K_{n-1}(z,\alpha). \tag{4.7}$$

Suponga, por reducción al absurdo, que $K_{n_0-1}(\alpha,\alpha) = 0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces, por la expresión (4.7), $P_{n_0}(\alpha) = 0$. Luego,

$$K_{n_0}(\alpha,\alpha) = K_{n_0-1}(\alpha,\alpha) + |P_{n_0}(\alpha)|^2 = 0.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.7) se tiene $P_{n_0+1}(\alpha) = 0$. En consecuencia, $K_n(\alpha,\alpha) = 0$ para todo $n \geq n_0$ y, por consiguiente, $P_{n+1}(\alpha) = 0$, $n \geq n_0$.

Si $|\alpha| \neq 1$ entonces $P_n^*(\alpha) \neq 0$, $n \geq n_0$ (Teorema 2.1.8). Así, de la fórmula de Christoffel-Darboux (2.9) resulta

$$K_n(\alpha,\alpha) = \frac{1}{\mathbf{k}_{n+1}} \frac{|P_{n+1}^*(\alpha)|^2 - |P_{n+1}(\alpha)|^2}{1-|\alpha|^2} = \frac{1}{\mathbf{k}_{n+1}} \frac{|P_{n+1}^*(\alpha)|^2}{1-|\alpha|^2} \neq 0,$$

para $n \geq n_0$, lo cual es absurdo.

Si $|\alpha| = 1$ entonces $P_n^*(\alpha) = 0$. Por la relación de recurrencia descendente (2.12), $P_{n-1}(\alpha) = 0$. Si aplica esta fórmula de recurrencia reiteradamente se obtiene $P_1(\alpha) = 0$, esto es, $P_1(z) = z - \alpha$. En consecuencia, $|P_1(0)| = |\alpha| = 1$, contradiciendo así la Proposición 2.1.1. Por lo tanto, $K_n(\alpha,\alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Recíprocamente, suponga que $K_n(\alpha,\alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 0$. Además, considere la sucesión de polinomios mónicos $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$(z-\alpha)Q_n(z) = P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} K_n(z,\alpha). \tag{4.8}$$

Observe también que, al usar la definición del núcleo reproductor, se puede escribir

$$\begin{aligned} K_{n+1}(z,\alpha) &= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{\mathbf{k}_j} \overline{P_j(\alpha)} P_j(z) \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}_{n+1}} \overline{P_{n+1}(\alpha)} P_{n+1}(z) + \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{k}_j} \overline{P_j(\alpha)} P_j(z) \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}_{n+1}} \overline{P_{n+1}(\alpha)} P_{n+1}(z) + K_n(z,\alpha). \end{aligned}$$

Por ello, podemos expresar $K_n(z,\alpha)$ en (4.8) como

$$K_n(z,\alpha) = K_{n+1}(z,\alpha) - \frac{\overline{P_{n+1}(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n+1}} P_{n+1}(z).$$

Entonces, para $0 \leq k \leq n$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(Q_n(z), (z-\alpha)^k) &= \mathcal{L}((z-\alpha)Q_n(z), (z-\alpha)^{k+1}) \\
&= \mathcal{L}\left(P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} K_n(z,\alpha), (z-\alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathcal{L}(P_{n+1}(z), (z-\alpha)^{k+1}) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} \mathcal{L}(K_n(z,\alpha), (z-\alpha)^{k+1}) \\
&= \mathbf{k}_{n+1}\delta_{n,k} - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} \mathcal{L}\left(K_{n+1}(z,\alpha) - \frac{\overline{P_{n+1}(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n+1}} P_{n+1}(z), (z-\alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathbf{k}_{n+1}\delta_{n,k} + \frac{P_{n+1}(\alpha)\overline{P_{n+1}(\alpha)}}{K_n(\alpha,\alpha)} \delta_{n,k} \\
&= \mathbf{k}_{n+1} \frac{\left(K_n(\alpha,\alpha) + \dfrac{1}{\mathbf{k}_{n+1}} P_{n+1}(\alpha)\overline{P_{n+1}(\alpha)}\right)}{K_n(\alpha,\alpha)} \delta_{n,k} \\
&= \mathbf{k}_{n+1} \frac{K_{n+1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} \delta_{n,k}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional $\mathcal{L}_2$. Luego, del Teorema 1.2.1 se sigue que $\mathcal{L}_2$ es un funcional bilineal cuasi-definido. ■

Sea H_q la matriz de Hessenberg inferior asociada a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$zQ = H_q Q,$$

con $Q = [Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_n(z), \ldots]^T$. Entonces $\mathcal{L}_2(Q, Q^T) = D_q$, donde D_q es una matriz diagonal no singular cuyos elementos vienen dados por

$$
(D_q)_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{k}_{i+1} \dfrac{K_{i+1}(\alpha,\alpha)}{K_i(\alpha,\alpha)} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}
$$

A continuación mostraremos que H_q puede obtenerse a partir de la factorización LU de la matriz de Hessenberg H_r asociada a la sucesión $\{R_n(z,\alpha)\}_{n=0}^{\infty}$. Para ello necesitamos el siguiente resultado:

Lema 4.2.1. *Sea I la matriz unitaria infinita. Entonces*

(*i*) $\mathcal{L}_2(R, R^T) = \mathcal{L}_1(R, R^T)(H_r - \alpha I)^* = D_r(H_r - \alpha I)^*$;

(*ii*) $\mathcal{L}_2(R,(z-\alpha)R^T) = D_r((H_r-\alpha I)^*)^2$.

Demostración.

$$(i) \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}_2(R,R^T) &= \mathcal{L}_1(R,(z-\alpha)R^T) \\ &= \mathcal{L}_1(R,(H_r-\alpha I)^T R^T) \\ &= \mathcal{L}_1(R,R^T)(H_r-\alpha I)^* \\ &= D_r(H_r-\alpha I)^*. \end{aligned}$$

$$(ii) \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}_2(R,(z-\alpha)R^T) &= \mathcal{L}_2(R,(H_r-\alpha I)^T R^T) \\ &= \mathcal{L}_2(R,R^T)(H_r-\alpha I)^* \\ &= D_r((H_r-\alpha I)^*)^2. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.2. *Sea L_{rq} la matriz triangular inferior cuyos términos diagonales son iguales a 1 y tal que $R = L_{rq}Q$. Entonces*

$$H_r-\alpha I = L_{rq}\widetilde{U},$$

donde $\widetilde{U}$ es una matriz triangular superior no singular.

Demostración. Por la parte (*i*) del Lema anterior podemos escribir

$$\begin{aligned} D_r(H_r-\alpha I)^* &= \mathcal{L}_2(R,R^T) = \mathcal{L}_2(L_{rq}Q,Q^T L_{rq}^T) \\ &= L_{rq}\,\mathcal{L}_2(Q,Q^T)\,L_{rq}^* \\ &= L_{rq}\,D_q\,L_{rq}^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(H_r-\alpha I)^* = D_r^{-1}\,L_{rq}\,D_q\,L_{rq}^*,$$

lo cual implica $H_r-\alpha I = L_{rq}\,D_q^*\,L_{rq}^*\,(D_r^*)^{-1}$. Así, $H_r-\alpha I = \widetilde{L}\widetilde{U}$, donde $\widetilde{L} = L_{rq}$ y $\widetilde{U} = D_q^*\,L_{rq}^*\,(D_r^*)^{-1}$. ■

Teorema 4.2.3. *Sea L_{rq} la matriz triangular inferior cuyos términos diagonales son iguales a 1 y tal que $R = L_{rq}Q$. Si $H_r-\alpha I = \widetilde{L}\widetilde{U}$ es la factorización LU sin pivoteo de $H_r-\alpha I$, entonces*

$$H_q-\alpha I = \widetilde{U}\widetilde{L}.$$

Demostración. Por el Lema 4.2.1 (*ii*) tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(Q,(z-\alpha)Q^T) &= \mathcal{L}_2(L_{rq}^{-1}R,(z-\alpha)R^T L_{rq}^{-T}) \\ &= L_{rq}^{-1}\,\mathcal{L}_2(R,(z-\alpha)R^T)\,(L_{rq}^*)^{-1} \\ &= L_{rq}^{-1}\,D_r((H_r-\alpha I)^*)^2\,(L_{rq}^*)^{-1}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathcal{L}_2(Q,(z-\alpha)Q^T) = \mathcal{L}_2(Q,Q^T)(H_q-\alpha I)^* = D_q(H_q-\alpha I)^*.$$

Así,

$$\begin{aligned}D_q(H_q-\alpha I)^* &= L_{rq}^{-1}\,D_r((H_r-\alpha I)^*)^2\,(L_{rq}^*)^{-1} \\ &= L_{rq}^{-1}\,D_r\,D_r^{-1}\,L_{rq}\,D_q\,L_{rq}^*\,D_r^{-1}\,L_{rq}\,D_q\,L_{rq}^*\,(L_{rq}^*)^{-1} \\ &= D_q\,L_{rq}^*\,D_r^{-1}\,L_{rq}\,D_q.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(H_q-\alpha I)^* = L_{rq}^*\,D_r^{-1}\,L_{rq}\,D_q.$$

De aquí se sigue que

$$H_q-\alpha I = D_q^*\,L_{rq}^*\,(D_r^*)^{-1}\,L_{rq} = \widetilde{U}\,\widetilde{L}. \qquad \blacksquare$$

Capítulo V

Funcionales definido-positivos y factorización *QR*

En este capítulo, a diferencia del anterior, estudiaremos directamente la perturbación polinómica del funcional $\mathcal{L}$, la cual fue dada en (2.13). Asimismo, mostraremos la conexión entre las matrices de Hessenberg asociadas a los funcionales $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente, mediante la factorización QR.

5.1. Perturbaciones polinómicas de medidas positivas

Sea $\mathcal{L}$ un funcional definido-positivo en $\mathbb{P}$. Entonces, por el teorema 2.1.3, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortonormales asociada a $\mathcal{L}$, la cual viene dada por

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}_n}} P_n(z).$$

Si consideramos la relación de recurrencia ascendente (2.6) y la propiedad (b) del núcleo reproductor, podemos escribir

$$\begin{aligned} z\varphi_n(z) &= \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \varphi_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n} K_n(z,0) \\ &= \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \varphi_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n} \sum_{j=0}^{n} \overline{\varphi_j(0)} \varphi_j(z) \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$z\varphi_n(z) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\,\varphi_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n}\sum_{j=0}^{n}\kappa_j\,\overline{P_j(0)}\varphi_j(z). \tag{5.1}$$

De aquí resulta

$$z\varphi_i(z) = \sum_{j=0}^{i+1} h_{i,j}\varphi_j(z),$$

donde

$$h_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{\kappa_j}{\kappa_i}\,P_{i+1}(0)\overline{P_j(0)} & \text{si } 0 \leq j \leq i, \\ \dfrac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}} & \text{si } j = i+1, \\ 0 & \text{si } j > i+1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Por lo tanto, si $\varphi = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots]^T$ y H_φ es la matriz de Hessenberg inferior cuyos elementos están dados por $h_{i,j}$, entonces la relación (5.1) puede ser expresada matricialmente como

$$z\varphi = H_\varphi \varphi.$$

Ahora bien, consideremos la perturbación polinómica del funcional $\mathcal{L}$ definida como

$$\mathcal{L}_2(p,q) = \mathcal{L}((z-\alpha)p, (z-\alpha)q),$$

con $p, q \in \mathbb{P}$ y $|\alpha| \neq 1$. Este funcional bilineal $\mathcal{L}_2$ es Hermitiano y definido-positivo. Supongamos, además, que $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la correspondiente sucesión de polinomios ortonormales tal que

$$\psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{\mathbf{k}}_n}}\,Q_n,$$

donde $\widetilde{\mathbf{k}}_n = \mathbf{k}_{n+1}K_{n+1}(\alpha,\alpha)/K_n(\alpha,\alpha)$. Denotaremos por H_ψ a la matriz de Hessenberg asociada a la sucesión $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ de modo que $H_\psi\psi = z\psi$.

Estamos interesados en hallar la relación entre las matrices H_φ y H_ψ. Para ello usaremos la relación (4.8), la cual reescribiremos en términos de los polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ con respecto a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente.

En primer lugar, premultipliquemos ambos miembros en (4.8) por $\widetilde{\mathbf{k}}_n^{-1/2}$ para obtener

$$\begin{aligned}
(z-\alpha)\psi_n(z) &= \frac{1}{\sqrt{\widetilde{\mathbf{k}}_n}} P_{n+1}(z) - \frac{1}{\sqrt{\widetilde{\mathbf{k}}_n}} \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} K_n(z,\alpha) \\
&= \sqrt{\frac{K_n(\alpha,\alpha)}{K_{n+1}(\alpha,\alpha)}} \frac{P_{n+1}(z)}{\sqrt{\mathbf{k}_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{K_{n+1}(\alpha,\alpha)K_n(\alpha,\alpha)}} \frac{P_{n+1}(\alpha)}{\sqrt{\mathbf{k}_{n+1}}} K_n(z,\alpha) \\
&= \sqrt{\frac{K_n(\alpha,\alpha)}{K_{n+1}(\alpha,\alpha)}} \varphi_{n+1}(z) - \frac{1}{\sqrt{K_{n+1}(\alpha,\alpha)K_n(\alpha,\alpha)}} \varphi_{n+1}(\alpha) K_n(z,\alpha).
\end{aligned}$$

Luego,

$$(z-\alpha)\psi_n(z) = \sqrt{\frac{K_n(\alpha,\alpha)}{K_{n+1}(\alpha,\alpha)}} \varphi_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_{n+1}(\alpha)\,\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{n+1}(\alpha,\alpha)K_n(\alpha,\alpha)}} \varphi_j(z). \tag{5.3}$$

Si tomamos $\psi = [\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_n(z), \ldots]^T$ entonces $\mathcal{L}_2(\psi, \psi^T) = I$. Más aún, si consideramos $\varphi = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots]^T$, entonces la representación matricial de (5.3) viene dada por

$$(z-\alpha)\psi = M\varphi, \tag{5.4}$$

donde M es una matriz de Hessenberg inferior cuyos elementos $m_{i,j}$ están dados por

$$m_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{\varphi_{i+1}(\alpha)}{\sqrt{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)}} \overline{\varphi_j(\alpha)} & \text{si } j \le i, \\ \sqrt{\dfrac{K_i(\alpha,\alpha)}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)}} & \text{si } j = i+1, \\ 0 & \text{si } j > i+1. \end{cases} \tag{5.5}$$

Proposición 5.1.1. *Sea I la matriz unitaria infinita. Entonces la matriz M satisface las siguientes propiedades:*

(*i*) $MM^* = I$;

(*ii*) $M^*M = I - \lambda_\infty(\alpha)\varphi(\alpha)\varphi^*(\alpha)$.

Demostración. (i) Por (5.4) y la ortogonalidad de $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ respecto a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} I = \mathcal{L}_2(\psi, \psi^T) &= \mathcal{L}((z-\alpha)\psi, (z-\alpha)\psi^T) \\ &= \mathcal{L}(M\varphi, \varphi^T M^T) \\ &= M\mathcal{L}(\varphi, \varphi^T)M^* \\ &= MM^*. \end{aligned}$$

(ii) Para $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} M_{(j)}^* M^{(j)} &= \frac{K_{j-1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{i=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{i+1}(\alpha)|^2}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)} \\ &= \frac{K_{j-1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{i=j}^{\infty} \frac{K_{i+1}(\alpha,\alpha) - K_i(\alpha,\alpha)}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)} \\ &= 1 - \frac{|\varphi_j(\alpha)|^2}{K_j(\alpha,\alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{i=j}^{\infty} \left(\frac{1}{K_i(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)} \right) \\ &= 1 - \frac{|\varphi_j(\alpha)|^2}{K_\infty(\alpha,\alpha)} \\ &= 1 - \lambda_\infty |\varphi_j(\alpha)|^2. \end{aligned}$$

Para $k < j$,

$$\begin{aligned} M_{(k)}^* M^{(j)} &= -\frac{1}{K_j(\alpha,\alpha)}\, \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} + \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{i+1}(\alpha)|^2}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)} \\ &= \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \left(-\frac{1}{K_j(\alpha,\alpha)} + \sum_{i=j}^{\infty} \left(\frac{1}{K_i(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)} \right) \right) \\ &= -\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}\lambda_\infty(\alpha). \end{aligned}$$

■

En virtud de la proposición 2.1.2, si $|\alpha| > 1$ entonces M es una matriz unitaria, ya que $\lambda_\infty(\alpha) = 0$. Asimismo, la matriz M será unitaria si $|\alpha| < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 = +\infty$. Lo mismo ocurre si $|\alpha| = 1$ y $\sigma(\{\alpha\}) = 0$.

Un resultado análogo para las submatrices principales de M es dado en la siguiente proposición.

Proposición 5.1.2. *Sea M_n la submatriz principal de M de orden n.*

(*i*) *Suponga que I_n es la matriz unitaria de orden n y $e_n = [0, \ldots, 0, 1]^T$ es un vector columna de orden n. Entonces*

$$M_n M_n^* = I_n - \frac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}\, e_n e_n^*.$$

(*ii*) *Si $\Phi_n = [\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_{n-1}(\alpha)]^T$, entonces*

$$M_n^* M_n = I_n - \frac{1}{K_n(\alpha,\alpha)} \Phi_n \Phi_n^*.$$

Demostración. (*i*) Para $0 \le k \le n-2$, tenemos

$$\begin{aligned}
(M_n)_{(k)}(M_n^*)^{(k)} &= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)K_k(\alpha,\alpha)} \sum_{i=0}^{k} |\varphi_i(\alpha)|^2 + \frac{K_k(\alpha,\alpha)}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)} \\
&= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)K_k(\alpha,\alpha)}\, K_k(\alpha,\alpha) + \frac{K_k(\alpha,\alpha)}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)} \\
&= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)} + \frac{K_k(\alpha,\alpha)}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)} = 1.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(M_n)_{(n-1)}(M_n^*)^{(n-1)} &= \frac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha,\alpha)K_{n-1}(\alpha,\alpha)} \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi_i(\alpha)|^2 \\
&= \frac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha,\alpha)} \\
&= 1 - \frac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}.
\end{aligned}$$

Para $k < j$, tenemos

$$\begin{aligned}
(M_n)_{(k)}(M_n^*)^{(j)} = {} & \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}|\varphi_i(\alpha)|^2}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha,\alpha)K_k(\alpha,\alpha)}\,\sqrt{K_{j+1}(\alpha,\alpha)K_j(\alpha,\alpha)}} \\
& - \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{j+1}(\alpha,\alpha)K_j(\alpha,\alpha)}} \sqrt{\frac{K_k(\alpha,\alpha)}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)}} \\
= {} & \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha,\alpha)K_k(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)K_j(\alpha,\alpha)}} \left(\sum_{i=0}^{k} |\varphi_i(\alpha)|^2 - K_k(\alpha,\alpha) \right) \\
= {} & 0.
\end{aligned}$$

(ii) Para $1 \leq k \leq n-1$,

$$
\begin{aligned}
(M_n^*)_{(k)}(M_n)^{(k)} &= \frac{K_{k-1}(\alpha,\alpha)}{K_k(\alpha,\alpha)} + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2|\varphi_{i+1}(\alpha)|^2}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)} \\
&= \frac{K_{k-1}(\alpha,\alpha)}{K_k(\alpha,\alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{1}{K_i(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)} \right) \\
&= \frac{K_{k-1}(\alpha,\alpha)}{K_k(\alpha,\alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \left(\frac{1}{K_k(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_n(\alpha,\alpha)} \right) \\
&= 1 - \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2}{K_n(\alpha,\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
(M_n^*)_{(0)}(M_n)^{(0)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|\varphi_0(\alpha)|^2|\varphi_{i+1}(\alpha)|^2}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)} \\
&= |\varphi_0(\alpha)|^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{K_i(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)} \right) \\
&= \frac{1}{K_0(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_n(\alpha,\alpha)} \\
&= 1 - \frac{1}{K_n(\alpha,\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Para $k < j$,

$$
\begin{aligned}
(M_n^*)_{(k)}(M_n)^{(j)} &= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_j(\alpha,\alpha)K_{j-1}(\alpha,\alpha)}} \sqrt{\frac{K_{j-1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)}} + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{|\varphi_{i+1}(\alpha)|^2\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)} \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_j(\alpha,\alpha)} + \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{i=j}^{n-1} \frac{|\varphi_{i+1}(\alpha)|^2}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)} \\
&= -\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \left(\frac{1}{K_j(\alpha,\alpha)} - \sum_{i=j}^{n-1} \left(\frac{1}{K_i(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)} \right) \right) \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_n(\alpha,\alpha)}.
\end{aligned}
$$

■

Con la finalidad de obtener la relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ, consideramos la matriz triangular inferior L de modo que $\varphi = L\psi$, la cual puede expresarse en términos de las matrices H_φ y M, tal como se muestra a continuación.

Teorema 5.1.1.

(*i*) $L = (H_\varphi - \alpha I)M^*$;

(*ii*) $H_\psi - \alpha I = ML$.

Demostración. (*i*) Sea $\varphi = L\psi$. Entonces $(z-\alpha)\psi = (z-\alpha)L^{-1}\varphi$. Luego, por (5.4),

$$M\varphi = L^{-1}(z\varphi - \alpha\varphi) = L^{-1}(H_\varphi - \alpha I)\varphi.$$

En consecuencia,

$$LM = H_\varphi - \alpha I.$$

Así, en virtud de la proposición 5.1.1 se tiene

$$L = (H_\varphi - \alpha I)M^*.$$

(*ii*) Sea $\varphi = L\psi$. Por (5.4), $(z-\alpha)\psi = M\varphi$. Entonces,

$$ML\psi = z\psi - \alpha\psi = (H_\psi - \alpha I)\psi.$$

De aquí se sigue que

$$H_\psi - \alpha I = ML,$$

tal como se deseaba probar. ■

Obsérvese que la matriz H_ψ puede obtenerse a partir de H_φ. Para ello, es necesario determinar la matriz triangular inferior L, la cual es dada explícitamente en el siguiente teorema.

Teorema 5.1.2. *Los elementos $l_{i,j}$ de la matriz L están dados por*

$$l_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}} \sqrt{\dfrac{K_{i+1}(\alpha,\alpha)}{K_i(\alpha,\alpha)}}, & i = j; \\[2ex] \dfrac{\overline{\varphi_i(\alpha)}((P_{i+1}(0)/\kappa_i)\kappa_{i-1}\varphi_{i-1}^*(\alpha))}{\sqrt{K_i(\alpha,\alpha)K_{i-1}(\alpha,\alpha)}} - (P_{i+1}(0)\overline{P_i(0)} + \alpha)\sqrt{\dfrac{K_{i-1}(\alpha,\alpha)}{K_i(\alpha,\alpha)}}, & j = i-1; \\[2ex] \dfrac{P_{i+1}(0)}{\kappa_i\sqrt{K_j(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)}}(\kappa_j\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}\varphi_j^*(\alpha) - \overline{\varphi_{j+1}(0)}K_j(\alpha,\alpha)), & j \le i-2. \end{cases}$$

Demostración. La parte (i) del Teorema 5.1.1 muestra que la matriz L se puede descomponer como el producto de las matrices $H_\varphi - \alpha I$ y M^*. Entonces, considerando que los elementos de las matrices de Hessenberg H_φ y M están dados en (5.2) y (5.5) respectivamente, podemos realizar los siguientes cálculos:

Para $i = j$,

$$l_{i,j} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}} \sqrt{\frac{K_{i+1}(\alpha,\alpha)}{K_i(\alpha,\alpha)}}.$$

Para $j = i-1$,

$$\begin{aligned}
l_{i,j} &= -\frac{P_{i+1}(0)}{\kappa_i} \sum_{k=0}^{i-1} \kappa_k \overline{P_k(0)} \left(-\frac{\overline{\varphi_i(\alpha)}}{\sqrt{K_i(\alpha,\alpha)K_{i-1}(\alpha,\alpha)}} \sum_{k=0}^{i-1} \varphi_k(\alpha) \right) - \\
&\quad - \left(P_{i+1}(0)\overline{P_i(0)} + \alpha\right) \sqrt{\frac{K_{i-1}(\alpha,\alpha)}{K_i(\alpha,\alpha)}} \\
&= \frac{\overline{\varphi_i(\alpha)}(P_{i+1}(0)/\kappa_i)}{\sqrt{K_i(\alpha,\alpha)K_{i-1}(\alpha,\alpha)}} \sum_{k=0}^{i-1} \kappa_k \overline{P_k(0)} \varphi_k(\alpha) - \left(P_{i+1}(0)\overline{P_i(0)} + \alpha\right) \sqrt{\frac{K_{i-1}(\alpha,\alpha)}{K_i(\alpha,\alpha)}} \\
&= \frac{\overline{\varphi_i(\alpha)}((P_{i+1}(0)/\kappa_i)\, \kappa_{i-1}\varphi^*_{i-1}(\alpha))}{\sqrt{K_i(\alpha,\alpha)K_{i-1}(\alpha,\alpha)}} - \left(P_{i+1}(0)\overline{P_i(0)} + \alpha\right) \sqrt{\frac{K_{i-1}(\alpha,\alpha)}{K_i(\alpha,\alpha)}}
\end{aligned}$$

Para $j \le i-2$,

$$\begin{aligned}
l_{i,j} &= -\frac{P_{i+1}(0)}{\kappa_i} \sum_{k=0}^{j} \kappa_k \overline{P_k(0)} \left(-\frac{\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_j(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)}} \sum_{k=0}^{j} \varphi_k(\alpha) \right) - \\
&\quad - \frac{\kappa_{j+1}}{\kappa_i}\, P_{i+1}(0)\overline{P_{j+1}(0)} \sqrt{\frac{K_j(\alpha,\alpha)}{K_{j+1}(\alpha,\alpha)}} \\
&= \frac{P_{i+1}(0)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\kappa_i \sqrt{K_j(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)}} \sum_{k=0}^{j} \kappa_k \overline{P_k(0)} \varphi_k(\alpha) - \frac{P_{i+1}(0)\kappa_{j+1}\overline{P_{j+1}(0)}}{\kappa_i \sqrt{K_j(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)}} K_j(\alpha,\alpha) \\
&= \frac{P_{i+1}(0)}{\kappa_i \sqrt{K_j(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)}} \left(\kappa_j \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)} \varphi_j^*(\alpha) - \overline{\varphi_{j+1}(0)} K_j(\alpha,\alpha) \right).
\end{aligned}$$

∎

La importancia del teorema 5.1.1 radica en el hecho de que al multiplicar las matrices M y L obtenemos la matriz H_{ψ}. Sin embargo, realizar estos cálculos no es nada sencillo. De hecho, resulta ser un proceso tedioso y laborioso en la mayoría de los casos. Como muestra de ello, en el siguiente ejemplo calcularemos la matriz H_{ψ} asociada a una sucesión de polinomios ortonormales.

Ejemplo. Consideremos el funcional bilineal $\mathcal{L}$ definido como

$$\mathcal{L}(p,q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}d\theta.$$

La sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ asociada a este funcional satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z), \quad \forall\, n \geq 0.$$

Nótese que el n-ésimo polinomio ortogonal es $P_n(z) = \varphi_n(z) = z^n$, para todo $n \geq 0$. En efecto,

$$\mathcal{L}(z^n, z^m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}.e^{-im\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(n-m)i\theta}d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ el parámetro tal que $|\alpha| = 1$. Entonces

$$K_n(z,\alpha) = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{\alpha^j} = \frac{1}{\alpha^n}\,\frac{z^{n+1}-\alpha^{n+1}}{z-\alpha} = \frac{1}{\alpha^n}\,(z^n + z^{n-1}\alpha + z^{n-2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n).$$

En consecuencia, $K_n(\alpha,\alpha) = n+1$, para todo $n \geq 0$.

Por otro lado, las componentes de la matriz H_{φ} son

$$h_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq j \leq i, \\ 1 & \text{si } j = i+1, \\ 0 & \text{si } j > i+1, \end{cases}$$

lo cual implica

$$H_{\varphi} - \alpha I = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -\alpha & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la matriz M están dados por

$$m_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^{i-j+1}}{\sqrt{(i+2)(i+1)}} & \text{si } j \leq i, \\ \sqrt{\dfrac{i+1}{i+2}} & \text{si } j = i+1, \\ 0 & \text{si } j > i+1. \end{cases} \tag{5.6}$$

Luego, por el teorema 5.1.2, la matriz L es bidiagonal y está dada por

$$l_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{i+2}{i+1}} & \text{si } j = i, \\ -\alpha\sqrt{\dfrac{i}{i+1}} & \text{si } j = i-1, \\ 0 & \text{si } j \leq i-2. \end{cases} \tag{5.7}$$

Para $j \geq i+2$, $M_{(i)}L^{(j)} = 0$ puesto que $m_{i,j} = 0$.
Para $j = i+1$,

$$\begin{aligned} M_{(i)}L^{(i+1)} = m_{i,i+1}l_{i+1,i+1} &= \sqrt{\frac{i+1}{i+2}}\sqrt{\frac{i+3}{i+2}} \\ &= \frac{\sqrt{(i+1)(i+3)}}{i+2}. \end{aligned}$$

Para $j = i$,

$$\begin{aligned} M_{(i)}L^{(i)} &= m_{i,i}l_{i,i} + m_{i,i+1}l_{i+1,i} \\ &= -\frac{\alpha}{\sqrt{(i+2)(i+1)}}\sqrt{\frac{i+2}{i+1}} - \alpha\,\frac{i+1}{i+2} \\ &= -\alpha\,\frac{i+2+(i+1)^2}{(i+1)(i+2)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para $j < i$,

$$
\begin{aligned}
M_{(i)}L^{(j)} &= m_{i,j}l_{j,j} + m_{i,j+1}l_{j+1,j} \\
&= -\frac{\alpha^{i-j+1}}{\sqrt{(i+2)(i+1)}}\sqrt{\frac{j+2}{j+1}} - \frac{\alpha^{i-j}}{\sqrt{(i+2)(i+1)}}\left(-\alpha\sqrt{\frac{j+1}{j+2}}\right) \\
&= \frac{\alpha^{i-j+1}}{\sqrt{(i+2)(i+1)}}\left(\sqrt{\frac{j+1}{j+2}} - \sqrt{\frac{j+2}{j+1}}\right) \\
&= -\frac{\alpha^{i-j+1}}{\sqrt{(i+2)(i+1)(j+2)(j+1)}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, los elementos $\tilde{h}_{i,j}$ de la matriz de Hessenberg $H_\psi - \alpha I$ vienen dados por

$$
\tilde{h}_{i,j} = \begin{cases}
0 & \text{si } j \geq i+2, \\[2ex]
\dfrac{\sqrt{(i+1)(i+3)}}{i+2} & \text{si } j = i+1, \\[2ex]
-\alpha\,\dfrac{i+2+(i+1)^2}{(i+1)(i+2)} & \text{si } j = i, \\[2ex]
-\dfrac{\alpha^{i-j+1}}{\sqrt{(i+2)(i+1)(j+2)(j+1)}} & \text{si } j < i.
\end{cases}
$$

5.2. La transformación de Christoffel y la factorización *QR*

En el ejercicio anterior se puede observar el laborioso proceso realizado para hallar la matriz H_ψ. Por ello, con el fin de evitar cálculos complicados, en el caso general usaremos la factorización QR de la matriz $(H_\varphi - \alpha I)^*$ para obtener $H_\psi - \alpha I$.

Supongamos que $Q^* R^*$ es la factorización QR de la matriz $(H_\varphi - \alpha I)^*$, donde Q es una matriz ortogonal (esto es, $QQ^* = I$) y R^* es una matriz triangular superior con elementos diagonales estrictamente positivos. Entonces $H_\varphi - \alpha I = RQ$.

Teorema 5.2.1. *Si L es una matriz triangular inferior tal que $\varphi = L\psi$, entonces $R = L$.*

Demostración. Observe que

$$\mathcal{L}_2(\varphi, \varphi^T) = \mathcal{L}_2(L\psi, \psi^T L^T) = L\,\mathcal{L}_2(\psi, \psi^T)\,L^* = LL^*.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\varphi, \varphi^T) &= \mathcal{L}((z-\alpha)\varphi, (z-\alpha)\varphi^T) \\
&= \mathcal{L}((H_\varphi - \alpha I)\varphi, (H_\varphi - \alpha I)^T \varphi^T) \\
&= (H_\varphi - \alpha I)\, \mathcal{L}(\varphi, \varphi^T)\, (H_\varphi - \alpha I)^* \\
&= (H_\varphi - \alpha I)(H_\varphi - \alpha I)^* \\
&= (RQ)(Q^* R^*) \\
&= RR^*.
\end{aligned}$$

Del teorema 5.1.2 se sigue que todos los elementos diagonales de la matriz L son estrictamente positivos. Por lo tanto, LL^* es la factorización de Cholesky de la matriz de Gram del funcional bilineal $\mathcal{L}_2$ respecto a la base ortonormal $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Luego, por la unicidad de la descomposición de Cholesky (teorema 3.1.2), $R = L$. ■

Teorema 5.2.2. *Sea I la matriz unitaria infinita. Entonces $H_\psi - \alpha I = QL$.*

Demostración. Suponiendo que $\psi = L^{-1}\varphi$, por el teorema anterior se tiene

$$\begin{aligned}
H_\psi - \alpha I &= (H_\psi - \alpha I)\mathcal{L}_2(\psi, \psi^T) \\
&= \mathcal{L}_2((H_\psi - \alpha I)\psi, \psi^T) \\
&= \mathcal{L}_2((z-\alpha)\psi, \psi^T) \\
&= \mathcal{L}_2((z-\alpha)L^{-1}\varphi, \varphi^T L^{-T}) \\
&= L^{-1}\, \mathcal{L}_2((z-\alpha)\varphi, \varphi^T)\, (L^{-1})^* \\
&= L^{-1}\, \mathcal{L}_2((H_\varphi - \alpha I)\varphi, \varphi^T)\, (L^{-1})^* \\
&= L^{-1}\, (H_\varphi - \alpha I)\, \mathcal{L}_2(\varphi, \varphi^T)\, (L^{-1})^* \\
&= L^{-1}(LQ)(LL^*)(L^{-1})^* \\
&= QL.
\end{aligned}$$

■

Observación. Como $H_\psi - \alpha I = ML$ (teorema 5.1.1), entonces, por lo anterior, $Q = M$.

A continuación presentamos una versión finita del último teorema.

Teorema 5.2.3. *Sea $(H_\varphi - \alpha I)_n$ la submatriz principal líder de orden n de $H_\varphi - \alpha I$. Suponga que $(H_\varphi - \alpha I)_n = R_n Q_n$, donde R_n es una matriz triangular inferior y Q_n es una matriz unitaria, de modo que $(H_\varphi - \alpha I)_n^* = Q_n^* R_n^*$ es la factorización QR de $(H_\varphi - \alpha I)_n^*$. Entonces*

$$(H_\psi - \alpha I)_{n-1} = (Q_n R_n)_{n-1}.$$

Demostración. Consideremos la factorización $H_\varphi - \alpha I = LM$. Denotaremos por L_{11}, M_{11} a la submatriz principal líder de orden n de L y M, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} H_\varphi - \alpha I &= \left(\begin{array}{c:c} L_{11} & 0 \\ \hdashline L_{21} & L_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} M_{11} & M_{12} \\ \hdashline M_{21} & M_{22} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c:c} L_{11}M_{11} & L_{11}M_{12} \\ \hdashline L_{21}M_{11} + L_{22}M_{21} & L_{21}M_{12} + L_{22}M_{22} \end{array}\right). \end{aligned}$$

En consecuencia, $(H_\varphi - \alpha I)_n = L_{11}M_{11}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} H_\psi - \alpha I &= ML \\ &= \left(\begin{array}{c:c} M_{11} & M_{12} \\ \hdashline M_{21} & M_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} L_{11} & 0 \\ \hdashline L_{21} & L_{22} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c:c} M_{11}L_{11} + M_{12}L_{21} & M_{12}L_{22} \\ \hdashline M_{21}L_{11} + M_{22}L_{21} & M_{22}L_{22} \end{array}\right). \end{aligned}$$

Así, $(H_\psi - \alpha I)_n = M_{11}L_{11} + M_{12}L_{21}$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} M_{12}L_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots \\ m_{n-1,n} & 0 & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{n,0} & \cdots & l_{n,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \\ &= m_{n-1,n}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ l_{n,0} & \cdots & l_{n,n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $(H_\psi - \alpha I)_{n-1} = (M_{11}L_{11})_{n-1}$.

Como $MM^* = I$, entonces

$$M_{11}M_{11}^* = I_n - |m_{n-1,n}|^2 E_{nn},$$

donde I_n es la matriz unitaria de orden n y

$$E_{nn} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden n.

Ahora, tomando $\delta = \sqrt{1 - |m_{n-1,n}|^2} > 0$, consideremos la matriz

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}.$$

Sean $\widehat{Q} = EM_{11}$ y $\widehat{R} = L_{11}E^{-1}$. Entonces $\widehat{Q}$ es una matriz unitaria de orden n. En efecto, si $\widehat{q}_i$ es la i-ésima fila de $\widehat{Q}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, entonces

$$\widehat{q}_i = \begin{cases} m_i, & 0 \leq i \leq n-2, \\ \frac{1}{\delta}\, m_n, & i = n-1, \end{cases}$$

donde m_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, es la i-ésima fila de M_{11}.

Para $0 \leq i,\ j \leq n-2$,

$$(\widehat{Q}\widehat{Q}^*)_{i,j} = \widehat{q}_i\widehat{q}_j^* = m_i m_j^* = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Para $i = n-1$ o $j = n-1$, con $i \neq j$, tenemos

$$\widehat{q}_i\widehat{q}_j^* = \frac{1}{\delta}\, m_i m_j^* = 0.$$

Finalmente,

$$\widehat{q}_{n-1}\widehat{q}_{n-1}^* = \frac{1}{\delta^2}\, m_{n-1}m_{n-1}^* = \frac{1}{\delta^2}(1 - |m_{n-1,n}|^2) = 1.$$

Ahora bien, la matriz $\hat{R}$ es triangular inferior con elementos diagonales positivos. Además,

$$\widehat{Q}^* \widehat{R}^* = M_{11}^* E E^{-1} L_{11}^* = M_{11}^* L_{11}^* = (H_\varphi - \alpha I)_n^*.$$

Así, por la unicidad de la factorización QR de la matriz $(H_\varphi - \alpha I)_n^*$, se tiene

$$\widehat{Q} = Q_n \quad \text{y} \quad \widehat{R} = R_n.$$

Sin embargo, Q_n y M_{11} difieren en la última fila mientras que R_n y L_{11} difieren en la última columna. Por lo tanto,

$$(Q_n R_n)_{n-1} = (M_{11} L_{11})_{n-1} = (H_\psi - \alpha I)_{n-1}. \qquad \blacksquare$$

Capítulo VI

Transformación canónica de Uvarov

Sea $\mathcal{L}$ el funcional bilineal cuasi-definido y Hermitiano definido en (2.1). Entonces consideremos la perturbación polinómica de $\mathcal{L}$ dada por

$$\mathcal{L}_3(p,q) = \mathcal{L}(p,q) + mp(\alpha)\overline{q(\alpha)}, \quad p,q \in \mathbb{P}, \tag{6.1}$$

donde $m \in \mathbb{R}$ y $|\alpha| = 1$. En vista de que $m \in \mathbb{R}$, podemos concluir que $\mathcal{L}_3$ es Hermitiano. En efecto,

$$t^3_{i,j} = \mathcal{L}_3(z^i, z^j) = t_{i,j} + m\alpha^{i-j} = \overline{\mathcal{L}_3(z^j, z^i)} = \overline{t^3_{j,i}}.$$

Teorema 6.1.4. *El funcional $\mathcal{L}_3$ es cuasi-definido si, y solamente si, $1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{L}_3$ es cuasi-definido. Suponga, además, que $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}_3$. Como $\mathcal{L}$ es cuasi-definido, entonces, por el teorema 2.1.3, existe una sucesión $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}$. Pues bien, para obtener una relación entre los n-ésimos polinomios U_n y P_n, escriba

$$U_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} P_j(z), \tag{6.2}$$

donde $\{\lambda_{n,j}\}_{j=0}^{n-1}$ son los coeficientes de Fourier dados por

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mathcal{L}(U_n, P_j)}{\mathcal{L}(P_j, P_j)}, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Por la relación (6.1) y las condiciones de ortogonalidad de U_n con respecto a $\mathcal{L}_3$, se tiene

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mathcal{L}_3(U_n, P_j) - mU_n(\alpha)\overline{P_j(\alpha)}}{\mathcal{L}(P_j, P_j)} = -\frac{mU_n(\alpha)\overline{P_j(\alpha)}}{\mathcal{L}(P_j, P_j)}, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Luego, sustituya $\lambda_{n,j}$ en (6.2) para obtener

$$U_n(z) = P_n(z) - mU_n(\alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\mathcal{L}(P_j, P_j)} \overline{P_j(\alpha)} P_j(z) = P_n(z) - mU_n(\alpha) K_{n-1}(z, \alpha).$$

Tomando $z = \alpha$ en la fórmula anterior se tiene

$$P_n(\alpha) = U_n(\alpha) + mU_n(\alpha)K_{n-1}(\alpha, \alpha) = U_n(\alpha)(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)).$$

Si $1 + mK_{n_0-1}(\alpha, \alpha) = 0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $P_{n_0}(\alpha) = 0$. Asimismo, $1 + mK_{n_0}(\alpha, \alpha) = 0$ implica $P_{n_0+1}(\alpha) = 0$. En consecuencia, $P_n(\alpha) = 0$ para todo $n \geq n_0$.

Por otro lado, como $|\alpha| = 1$ entonces $P^*_{n_0}(\alpha) = 0$. Luego, por la relación de recurrencia descendente (2.12), $P_{n_0-1}(\alpha) = 0$. Al aplicar reiteradamente esta fórmula de recurrencia se obtiene $P_1(\alpha) = 0$, esto es, $P_1(z) = z - \alpha$. Así pues, $|P_1(0)| = |\alpha| = 1$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{L}$ es un funcional cuasi-definido. Por tanto, $1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

Recíprocamente, suponga que $1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Además, defina

$$U_n(z) = P_n(z) - \frac{mP_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} K_{n-1}(z, \alpha). \tag{6.3}$$

Entonces, para $0 \leq k \leq n$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3(U_n(z), (z-\alpha)^k) &= \mathcal{L}_3\left(P_n(z) - \frac{mP_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} K_{n-1}(z, \alpha), (z-\alpha)^k \right) \\
&= \mathcal{L}(P_n(z), (z-\alpha)^k) - \frac{mP_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \mathcal{L}(K_{n-1}(z, \alpha), (z-\alpha)^k) \\
&= \mathbf{k}_n \delta_{n,k} - \frac{mP_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \mathcal{L}\left(K_n(z, \alpha) - \frac{\overline{P_n(\alpha)}}{\mathbf{k}_n} P_n(z), (z-\alpha)^k \right) \\
&= \mathbf{k}_n \delta_{n,k} + \frac{mP_n(\alpha)\overline{P_n(\alpha)}}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k} \\
&= \mathbf{k}_n \frac{\left(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) + \dfrac{m}{\mathbf{k}_n} P_n(\alpha)\overline{P_n(\alpha)} \right)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k} \\
&= \mathbf{k}_n \frac{1 + mK_n(\alpha, \alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k} \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}_3$. De modo que el funcional $\mathcal{L}_3$ es cuasi-definido, por el teorema 1.2.1. ■

Es evidente que si $\mathcal{L}$ es definido-positivo y $m > 0$, entonces $1 + mK_n(\alpha,\alpha) > 0$ para todo $n \geq 0$. Por consiguiente, $\mathcal{L}_3$ también es definido-positivo.

Ahora bien, supongamos que $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ son las sucesiones de polinomios ortonormales con respecto a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_3$, respectivamente, las cuales vienen dadas por

$$\varphi_n(z) = \kappa_n P_n(z) \quad \text{y} \quad \xi_n(z) = \widetilde{\kappa}_n U_n(z),$$

donde

$$\widetilde{\kappa}_n = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{\mathbf{k}}_n}} = \kappa_n \sqrt{\frac{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}{1 + mK_n(\alpha,\alpha)}}.$$

Entonces, para reescribir (6.3) en términos de las sucesiones $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, determinemos, en primer lugar, la norma de U_n. Así,

$$\|U_n\|_{\mathcal{L}_3}^2 = \mathcal{L}_3(U_n, U_n) = \frac{1}{\kappa_n^2}\,\frac{1 + mK_n(\alpha,\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}.$$

Luego, observe que $\widetilde{\kappa}_n = \dfrac{1}{\|U_n\|_{\mathcal{L}_3}}$. Por lo tanto, podemos reescribir (6.3) como sigue:

$$\begin{aligned}
\xi_n(z) &= \frac{\widetilde{\kappa}_n \varphi_n(z)}{\kappa_n} - \frac{m\widetilde{\kappa}_n P_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}\, K_{n-1}(z,\alpha) \\
&= \left(\frac{1}{\kappa_n \|U_n\|_{\mathcal{L}_3}}\right)\varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{mP_n(\alpha)}{\|U_n\|_{\mathcal{L}_3}(1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha))}\,\overline{\varphi_j(\alpha)}\varphi_j(z) \\
&= \left(\sqrt{\frac{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}{1 + mK_n(\alpha,\alpha)}}\right)\varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{\frac{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}{1 + mK_n(\alpha,\alpha)}}\,\frac{m\kappa_n P_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}\,\varphi_j(z) \\
&= \left(\sqrt{\frac{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}{1 + mK_n(\alpha,\alpha)}}\right)\varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1 + mK_n(\alpha,\alpha))(1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha))}}\,\varphi_j(z).
\end{aligned}$$

De esta manera hemos probado el siguiente teorema:

Teorema 6.1.5. *Sea L_1 la matriz triangular inferior tal que $\xi = L_1\varphi$, donde $\varphi = [\varphi_0, \varphi_1, \ldots]^T$ y $\xi = [\xi_0, \xi_1, \ldots]^T$. Entonces, los elementos $l_{i,j}^{(1)}$ de la matriz L_1 vienen* *dados por*

$$l_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1 + mK_{i-1}(\alpha,\alpha)}{1 + mK_i(\alpha,\alpha)}}, & si\ i = j, \\ \dfrac{m\varphi_i(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1 + mK_i(\alpha,\alpha))(1 + mK_{i-1}(\alpha,\alpha))}}, & si\ i > j. \end{cases}$$

Teorema 6.1.6. *Los elementos* $\widehat{l}_{i,j}^{(1)}$ *de la matriz* L^{-1} *están dados por*

$$\widehat{l}_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1 + mK_i(\alpha,\alpha)}{1 + mK_{i-1}(\alpha,\alpha)}}, & si\ i = j, \\ \dfrac{m\varphi_i(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1 + mK_j(\alpha,\alpha))(1 + mK_{j-1}(\alpha,\alpha))}}, & si\ i > j. \end{cases}$$

Demostración. Escriba el n-ésimo polinomio P_n como sigue:

$$P_n(z) = U_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n,j} U_j(z), \tag{6.4}$$

donde $\{\gamma_{n,j}\}_{n=0}^{\infty}$ son los coeficientes de Fourier dados por

$$\gamma_{n,j} = \frac{\mathcal{L}_3(P_n, U_j)}{\mathcal{L}_3(U_j, U_j)} = \frac{\mathcal{L}(P_n, U_j) + mP_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|^2_{\mathcal{L}_3}} = \frac{mP_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|^2_{\mathcal{L}_3}}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Entonces, se puede reescribir (6.4) en términos de las sucesiones $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Así,

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \kappa_n \frac{\xi_n(z)}{\widetilde{\kappa}_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\kappa_n P_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|^2_{\mathcal{L}_3}} \frac{\xi_j(z)}{\widetilde{\kappa}_j} \\ &= \kappa_n \|U_n\|_{\mathcal{L}_3} \xi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|_{\mathcal{L}_3}} \xi_j(z) \\ &= \sqrt{\frac{1 + mK_n(\alpha,\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}}\, \xi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{\frac{1 + mK_{j-1}(\alpha,\alpha)}{1 + mK_j(\alpha,\alpha)}}\, \frac{m\varphi_n(\alpha)\kappa_j \overline{P_j(\alpha)}}{1 + mK_{j-1}(\alpha,\alpha)} \xi_j(z) \\ &= \sqrt{\frac{1 + mK_n(\alpha,\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}}\, \xi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1 + mK_j(\alpha,\alpha))(1 + mK_{j-1}(\alpha,\alpha))}} \xi_j(z), \end{aligned}$$

tal como se deseaba probar. ∎

Ahora utilizaremos los resultados obtenidos en el Capítulo V para establecer una relación entre la matriz de Hessenberg inferior asociada al funcional $\mathcal{L}$ y la matriz de Hessenberg inferior asociada al funcional $\mathcal{L}_3$. Para ello, note que al aplicar la transformación definida en (2.13) al funcional $\mathcal{L}_3$ se obtiene

$$|z-\alpha|^2\mathcal{L}_3 = |z-\alpha|^2\mathcal{L} = \mathcal{L}_2.$$

En consecuencia, el proceso que aplicamos al funcional $\mathcal{L}$ en el Capítulo V podemos aplicarlo al funcional $\mathcal{L}_3$. De ahí que, para los polinomios ortonormales $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ con respecto a $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, se tienen las siguientes relaciones:

$$(z-\alpha)\psi = M_3\xi \quad \text{y} \quad \xi = L_3\psi, \tag{6.5}$$

donde $\psi = [\psi_0, \psi_1, \ldots]^T$ y $\xi = [\xi_0, \xi_1, \ldots]^T$. Luego, en virtud del teorema 5.1.1, $H_\xi - \alpha I = L_3M_3$, lo cual implica $(H_\xi - \alpha I)^* = M_3^*L_3^*$. Además, $H_\psi - \alpha I = M_3L_3$.

Teorema 6.1.7. *Las matrices M_3 y L_3 dadas en (6.5) se pueden descomponer como sigue:*

$$L_3 = L_1L \quad y \quad M_3 = ML_1^{-1}. \tag{6.6}$$

Demostración. Por el teorema 6.1.5, $\xi = L_1\varphi$ y, por el capítulo anterior, $\varphi = L\psi$. Así que $\xi = L_1L\psi$. Sin embargo, $\xi = L_3\psi$. Por tanto, $L_3 = L_1L$.

Por otro lado, del teorema 5.1.1 resulta $H_\psi - \alpha I = ML = M_3L_3$. Entonces

$$M_3 = MLL_3^{-1} = ML(L_1L)^{-1} = ML(L^{-1}L_1^{-1}) = ML_1^{-1}. \qquad \blacksquare$$

Por lo tanto, para obtener la matriz $H_\xi - \alpha I$ a partir de $H_\varphi - \alpha I$, basta con hallar la factorización QR de $(H_\varphi - \alpha I)^*$. De esta manera obtenemos las matrices M y L, las cuales nos permitirán calcular las matrices M_3 y L_3 de acuerdo a las fórmulas del teorema anterior. Así tendremos $H_\xi - \alpha I = L_3M_3$.

Teorema 6.1.8. *Sea $(H_\varphi - \alpha I)_n$ la submatriz principal líder de orden n de $H_\varphi - \alpha I$. Suponga que $(H_\varphi - \alpha I)_n = R_nQ_n$, donde R_n es una matriz triangular inferior y Q_n es una matriz unitaria tal que $(H_\varphi - \alpha I)_n^* = Q_n^*R_n^*$. Entonces*

$$(H_\xi - \alpha I)_{n-1} = (\widehat{L}_{11}R_nQ_n\widehat{L}_{11}^{-1})_{n-1},$$

donde $\widehat{L}_{11}$ es la submatriz principal de orden n de la matriz L_1 que satisface $\xi = L_1\varphi$.

Demostración. Sean L y M las matrices que satisfacen $H_\varphi - \alpha I = LM$. Suponga que L_{11} y M_{11} son las submatrices principales líder de orden n de L y M, respectivamente. Entonces

$$L_3 = L_1 L = \left(\begin{array}{c:c} \widehat{L}_{11} & 0 \\ \hdashline \widehat{L}_{21} & \widehat{L}_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} L_{11} & 0 \\ \hdashline L_{21} & L_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \widehat{L}_{11}L_{11} & 0 \\ \hdashline \widehat{L}_{21}L_{11} + \widehat{L}_{22}L_{21} & \widehat{L}_{22}L_{22} \end{array}\right)$$

y

$$M_3 = ML_1^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} M_{11} & M_{12} \\ \hdashline M_{21} & M_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \widehat{L}_{11}^{-1} & 0 \\ \hdashline \widetilde{L}_{21} & \widetilde{L}_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} M_{11}\widehat{L}_{11}^{-1} + M_{12}\widetilde{L}_{21} & M_{12}\widetilde{L}_{22} \\ \hdashline M_{21}\widehat{L}_{11}^{-1} + M_{22}\widetilde{L}_{21} & M_{22}\widetilde{L}_{22} \end{array}\right)$$

Pues bien,

$$(L_3)_n = \widehat{L}_{11}L_{11} \quad \text{y} \quad (M_3)_n = M_{11}\widehat{L}_{11}^{-1} + M_{12}\widetilde{L}_{21}.$$

Por lo tanto,

$$(L_3M_3)_n = \widehat{L}_{11}L_{11}(M_{11}\widehat{L}_{11}^{-1} + M_{12}\widetilde{L}_{21}).$$

Sin embargo, $\widehat{L}_{11}L_{11}M_{11}\widehat{L}_{11}^{-1}$ y $(L_3M_3)_n$ difieren en la última fila. Así,

$$(H_\xi - \alpha I)_{n-1} = (L_3M_3)_{n-1} = (\widehat{L}_{11}L_{11}M_{11}\widehat{L}_{11}^{-1})_{n-1}.$$

Si se toma $R_nQ_n = L_{11}E^{-1}EM_{11} = L_{11}M_{11}$, entonces

$$(H_\xi - \alpha I)_{n-1} = (\widehat{L}_{11}R_nQ_n\widehat{L}_{11}^{-1})_{n-1}. \qquad \blacksquare$$

Bibliografía

[1] Carballo, Jorge; Álvarez, Renato; Marcellán, Francisco. *Álgebra Lineal y aplicaciones*. Ed. Síntesis, S.A., España, 1999.

[2] Chihara, T.S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York, 1978.

[3] Daruis, Leyla; Hernández, Javier; Marcellán, Francisco. *Spectral transformations for Hermitian Toeplitz matrices*. Journal of Computational and Applied Mathematics, p. 155-176, 2006.

[4] Lagomasino, Guillermo; Pijeira, Héctor. *Polinomios Ortogonales*. XIV Escuela Venezolana de Matemáticas, 2001.

[5] Marcellán, F.; Álvarez-Nodarse, R. *On the Favard theorem and its extensions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 127, p. 231-254, 2001.

[6] Marcellán, Francisco; Hernández, Javier. *Christoffel transforms and Hermitian linear functionals*. Mediterranean Journal of Mathematics, vol. 99, p. 1-9, 2006.

[7] Marcellán, Francisco; Quintana, Yamilet. *Polinomios Ortogonales no estándar*. XXII Escuela Venezolana de Matemáticas, 2009.

[8] Quarteroni, Alfio; Sacco, Riccardo; Saleri, Fausto. *Méthodes Numériques*. Springer-Verlag Italia, Milán 2007.

[9] Treves, François. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press, Inc. New York, 1967.

[10] Van Assche, Walter. *Analytic aspects of orthogonal polynomials*. Senior Research Associate NFWO/FNRS, 1993.