UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
LISANDRO ALVARADO
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

ALGUNOS VALORES EXACTO DE LA CONSTANTE DE HARBORTH Y SU MAS-MENOS ANÁLOGO PONDERADO

POR: DENNYS RAMOS

BARQUISIMETO, ABRIL 2014

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
LISANDRO ALVARADO
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ALGUNOS VALORES EXACTO DE LA CONSTANTE DE HARBORTH Y SU MAS-MENOS ANÁLOGO PONDERADO

Trabajo de Ascenso presentado como requisito parcial para optar
a la categoría de Asociado en el escalafón del personal
docente e investigación de la UCLA.

POR: DENNYS RAMOS

BARQUISIMETO, ABRIL 2014

Dedicatoria

A mi Señor, **Jesús**, quien me dio la fe, la fortaleza, la salud y la esperanza para terminar este trabajo.

A mi adorada hija **Lesly Ramos**, quien me prestó el tiempo que le pertenecía para terminar este trabajo y me motivó siempre con su sonrisa. Realmente ella me llena por dentro para conseguir un equilibrio que me permita dar el máximo de mi.

A mi esposa, **Deyanira Álvarez de Ramos**, a ella especialmente le dedico este trabajo. Con ella a mi lado no necesito nada más en esta vida ya que con ella tengo más de lo que puedo pedir.

A mis padres, **Gregoria y Fidel** quienes me enseñaron desde pequeño a luchar para alcanzar mis metas. Por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien.

A mis suegros **Pastor Álvarez y Martha Jiménez**, y a mi cuñada **Martha Álvarez**, por su comprensión y ayuda en momentos malos y menos malos. Me han ayudado en la adversidad y sin pedir nunca nada a cambio.

A todos aquellos que nunca dudaron que lograría este triunfo, muchas gracias de todo corazón.

Agradecimientos

Este trabajo, si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación por parte del autor, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que a continuación citaré:

Primero y antes que nada, dar gracias al **Dios Vivo**, por su infinito amor, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por ser una gran fuente de inspiración en la resolución de varios problemas.

A mi Tutora, **Dra. Luz Elimar Marchan**, por su estímulo y afecto eterno.

A mis coautores **Dr. Oscar Ordaz** y el **Dr. R. Wolfgang A. Schmid**, por sus maravillosa colaboraciones.

Estoy muy, muy agradecido con el **profesor Oscar Ordaz** por sugerir el problema considerado en el capítulo 3 de este trabajo.

A **mi familia** que se preocupan por mi bienestar.

A **Deyanira Álvarez de Ramos**, mi refugio en este mundo, ella me alegra la vida cada instante de mi vida.

A todos aquellos que participaron directa o indirectamente en la elaboración de este trabajo. Muchas gracias de todo corazón.

Introducción

Investigamos cierta constante de suma cero de grupos abelianos finitos, introducida por Harborth [20], y uno de sus análogo ponderada. Para un grupo abeliano finito G, denotado aditivamente, una constante de suma cero de G puede ser definido como el menor entero ℓ tal que cada conjunto (o secuencia, resp.) de elementos de G de cardinalidad (o longitud, resp.) ℓ tiene un subconjunto (o subsecuencia, resp.) cuyos suma de sus elementos da 0, el elemento neutro del grupo, y que posiblemente cumpla alguna condición adicional (típicamente en su tamaño). Nos referimos al artículo [15] para una visión general.

Motivados por un problema en puntos reticulares Harborth consideró la constantes que se presentan, para las secuencias y para los conjuntos, cuando la condición adicional sobre la subestructura es que su tamaño sea igual al exponente del grupo. Para los grupos cíclicos y en el caso de las secuencias de este problema han sido considerados por Erdős, Ginzburg, y Ziv [13] y la constante resultante es por lo tanto a veces llamada la constante de Erdős–Ginzburg-Ziv de G, véase, por ejemplo, [7] para una contribución reciente a este problema.

En el presente trabajo nos centraremos en la constante introducida por Harborth [20] para conjuntos, que la llamaremos la constante de Harborth de G, preservaremos la notación clásica $\mathsf{g}(G)$. La constante $\mathsf{g}(G)$, es el menor entero positivo ℓ tal que cada subconjunto de G de cardinalidad ℓ tiene un subconjunto de cardinalidad igual al exponente del grupo cuyas sumas de sus elementos es igual a 0, esta constante es solamente conocida para pocos tipos de grupos. Incluso en el caso de 3-grupos elementales en donde el problema es particularmente popular, ya que es equivalente a varios otros problemas bien investigados el valor exacto sólo es conocida para pocos grupo ver [12] para obtener una descripción detallada y [31] para resultados más recientes para rango 6.

Índice general

Capítulo 1

Teoría Aditiva

En la teoría de números, la especialidad de la teoría aditiva en su principio estudiaba las propiedades de los subconjuntos de números enteros y su comportamiento bajo la adición. Recientemente el campo de la teoría aditiva fue creciendo y se generalizo a los grupos abelianos y los semigrupos conmutativos que tenían una operación de adición. La teoría aditiva tiene estrechos vínculos con la teoría combinatoria de números y la geometría de los números. También es bueno destacar que la teoría aditiva juega un papel muy importante a la hora de tratar problemas de suma cero.

Antes de continuar vamos, a necesitar algunas definiciones de teoría de grupos.

1.1. Definiciones Básicas de Teoría de Grupos

Recopilamos algunas definiciones y notaciones que utilizamos con frecuencia en este trabajo. Por $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0$ denotamos el conjunto de los enteros positivos y no negativos, respectivamente. Para los números reales a, b denotamos por $[a, b]$ al siguiente conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \colon a \leq x \leq b\}.$$

Definición 1.1.1 *Sea K un conjunto no vacío. Una **operación binaria** en K es* *una función de $K \times K$ en K.*

Definición 1.1.2 *Un **monoide** es un conjunto no vacío K con una operación binaria $*$ tal que son válidas las siguientes dos propiedades:*

1. *Para todo $a, b, c \in K$ se tiene que $(a * b) * c = a * (b * c)$ (asociatividad).*

2. *para toda $a \in K$ existe un $e \in K$, tal que $e * a = a * e = a$ (**elemento neutro**).*

*Si para toda $a \in K$ existe un $a' \in K$, tal que $a * a' = a' * a = e$ (**elemento inverso**), decimos que K es un **grupo**. Si para todo $a, b \in K$ se tiene que $a * b = b * a$, decimos que K es un **monoide conmutativo**.*

Definición 1.1.3 *Sea K un monoide. Sean $a, b \in K$. Decimos que a **divide a** b (y escribimos $a \mid b$) si existe un elemento $c \in K$ tal que $b = ac$.*

Definición 1.1.4 *Un monoide K es llamado **libre** (abeliano, con base $P \subset K$) si cada $a \in K$ tiene una representación única en la forma*

$$a = \prod_{p \in P} p^{\mathsf{v}_p(a)}$$

con $v_p(a) \in \mathbb{N}_0$ y $v_p(a) = 0$ para casi todo $p \in P$. En este caso, K es (salvo isomorfismo canónico) únicamente determinada por P, y recíprocamente P es determina en forma única por F. Escribimos $F = \mathcal{F}(P)$.

En este trabajo vamos a considerar a $C_n = \langle e_n \rangle$ un grupo cíclico generado por e_n y tal que $\operatorname{ord}(e_n) = n$. También, vamos a considerar a G como un grupo abeliano finito escrito aditivamente, con $|G| > 1$, y donde $G = C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$, con $1 < n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_r$, aquí n_r es es llamado el ***exponente*** de G y es denotado por $\exp(G)$, r es llamado el ***rango*** de G es denotado por $\mathsf{r}(G)$, una propiedad que tiene el rango es que $\mathsf{r}(G)g = 0$ para todo $g \in G$.

Definición 1.1.5 *Sea G un grupo abeliano finito. Los elementos $e_1, \ldots, e_r \in G$ se llaman **independientes**, si cada ecuación de la forma $\sum_{i=1}^{r} n_i e_i = 0$, donde $n_i \in \mathbb{Z}$ con $i \in [1, r]$, implica que $m_1 e_1 = m_2 e_2 = \cdots = m_r e_r = 0$. Decimos que $\{e_1, \ldots, e_r\}$ es una **base** de G, si $e_1, e_2, \ldots, e_r$ son independientes y generan el grupo G (que es equivalente, $G = \oplus_{i=1}^{r} \langle e_i \rangle$).*

En este trabajo cuando escribamos a G como $G = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_r \rangle$, estamos considerando que $\{e_1, \dots, e_r\}$ es una base de G tal que $\mathrm{ord}(e_{n_i}) = n_i$, para todo $i \in [1, r]$.

Definición 1.1.6 *Sea $G = C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$. El p-**rango** de G, para un número primo p, es el número de i tal que $p \mid n_i$.*

Ejemplo 1.1.1 *Sea $G = C_2 \oplus C_4 \oplus C_8$, entonces el $2-$rango es 3.*

Para $G = \oplus_{i=1}^{s} G_i$, la ***proyección*** $\pi_i : G \to G_i$ es el homomorfismo de grupo $g_1 + \cdots + g_s \mapsto g_i$; este homomorfismo depende de la descomposición de la suma directa y no sólo de los grupos G y G_i, pero al menos de manera implícita quedará claro que descomposición estamos trabajando.

Definición 1.1.7 *Sea A un subconjunto no vacío de un grupo abeliano G, definimos el* **estabilizador** *de A, y lo denotamos por $\mathsf{H}(A)$, como el conjunto*

$$\mathsf{H}(A) = \{g \in G : \, g + A = A\}$$

$\mathsf{H}(A)$, es un subgrupo del grupo G, en efecto, si $x, y \in \mathsf{H}(A)$, entonces $x + A = A$ y $y + A = A$, luego $(x - y) + A = x + (-y + A) = x + A = A$, luego $x - y \in \mathsf{H}(A)$ y de aquí que $\mathsf{H}(A)$ es un subgrupo de G.

Definición 1.1.8 *Un **grupo homocíclico** es un producto directo de grupos cíclicos del mismo orden.*

1.2. Definiciones Básicas de Teoría Aditiva

Definición 1.2.1 *Sea G un grupo abeliano y sean A y B subcunjuntos no vacíos de G. Definimos el **conjunto suma** de A y B, denotado por $A + B$ como*

$$A + B = \{a + b : \, a \in A, b \in B\}.$$

Como G es un grupo abeliano tenemos que $A + B = B + A$.

En general el conjunto suma de más de dos subconjuntos de G, digamos $A_1, \dots, A_n$, se define como

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i : a_i \in A_i \right\}.$$

Definición 1.2.2 *Sea G un grupo abeliano y sean A y B subcunjuntos no vacíos de G. Definimos la* ***suma restringida*** *de A y B, denotado por $A \hat{+} B$ como*

$$A \hat{+} B = \{a + b : a \in A, b \in B, a \neq b\}.$$

Cuando uno de los conjuntos es unitario, escribimos $g + A$ en lugar de $\{g\} + A$, el conjunto $g + A$ es llamado ***traslación de*** A.

Para $k \in \mathbb{Z}$ definimos la ***dilatación*** de A por k como el conjunto

$$k \cdot A = \{ka : a \in A\},$$

no la suma de A k-veces consigo misma. Escribimos $-A$ en lugar de $(-1) \cdot A$. El cardinal del conjunto A lo denotamos por $|A|$.

Escribiremos $A - B$, en lugar de $A + (-1)B$, no confundir esta notación con la diferencia de conjunto, la cual denotaremos por $A \setminus B$.

Ejemplo 1.2.1 *Sea $G = \mathbb{Z}_6$, sean $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 5\}$, entonces*

1. $A + B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \mathbb{Z}_6$
2. $A \hat{+} B = \{0, 1, 2, 3, 5\} \neq \mathbb{Z}_6$
3. $A - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \mathbb{Z}_6$
4. $2 + A = \{0, 4, 5\}$

5. $2 \cdot A = \{0, 2, 4\}$

6. $2A = A + A = \{4, 5, 0, 1, 2\}$

7. $3 \cdot A = \{0, 3\}$

Si $|A| = m$ y $|B| = n$, sabemos que la cardinalidad de $A + B$ esta dada entre $\max\{m, n\}$ y mn, la teoría aditiva estudia la relación entre estas cardinalidades y la estructura de dichos conjuntos. En teoría aditiva los problemas suelen ser llamados directos o inversos.

1.3. Problema directo y problema inverso

Un ***problema directo*** es aquel donde se trata de buscar la estructura y/o propiedades de $A + B$ a partir de propiedades conocidas de A y de B, Cauchy y Davenport fueron los primeros en mostrar un problema de este tipo al encontrar una cota inferior para $|A + B|$ en términos de $|A|$ y $|B|$, donde A y B son subconjuntos de los números enteros.

Un ***problema inverso*** es aquel donde se deducen propiedades de los conjuntos A y B conociendo propiedades del conjunto suma $A+B$, el problema inverso que tradicionalmente es tratado es que si el número $|A+B|$ es "pequeño", entonces A, B y $A+B$ deben tener una estructura; existen muchos resultados que garantizan este hecho para casos particulares, por ejemplo, si A y B son conjuntos finitos con cardinalidad mayor o igual que 2 y $|A + B| = |A| + |B| - 1$, entonces se puede probar que A y B son progresiones aritméticas. Recientemente estos problemas han encontrado aplicaciones en la teoría de factorización no única.

Observemos que el cardinal de un conjunto es invariante bajo traslación, es decir, dado $g \in G$

$$|g + A| = |A|.$$

Para ver esta igualdad solamente tenemos que chequear que $f : A \to g + A$ dada por $f(x) = g + x$, es una función biyectiva. También es fácil de probar que $|-A| = |A|$, estos dos resultados los vamos a utilizar varias veces.

Entonces al abordar problemas de cardinalidad, es indiferente considerar el conjunto A o el conjunto $g + A$, por lo que frecuentemente en lugar de trabajar con un conjunto en particular, se trabaja con su traslación según sea conveniente (frecuentemente es conveniente que $0 \in A$), sin que se pierda generalidad. Mann [22] demostró que cuando $|A|$ y $|B|$ son suficientemente "grandes", todo elemento de G puede ser representado como un elemento de $A + B$, este hecho lo veremos en el Lema 1.4.2.

1.4. Lema de Mann

El siguiente lema es conocida como el Lema de Mann.

Lema 1.4.1 (Lema de Mann [22]) *Sea G un grupo abeliano finito. Sean $A, B \subset G$ subconjuntos no vacíos. Si $|A| + |B| \geq |G| + 1$, entonces $A + B = G$.*

Demostración. Sea $g \in G$ y supongamos que $|A|+|B| \geq |G|+1$. Si $(g-A)\cap B = \emptyset$, entonces $|G| \geq |(g-A)\cup B| = |g-A|+|B|-|(g-A)\cap B| = |A|+|B| \geq |G|+1$, pero esto es una contradicción. Así, $(g - A) \cap B \neq \emptyset$, esto es, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $g - a = b$, esto implica que $g = a + b$, así que $g \in A + B$. Como g es arbitrario, tenemos que $A + B = G$. ■

El siguiente lema es muy útil, es una variación del Lema de Mann, por falta de una referencia apropiada incluimos su prueba.

Lema 1.4.2 ([25]) *Sea G un grupo abeliano finito, y sea t el 2-rango de G. Sean $A, B \subset G$ subconjuntos no vacíos. Si $|A| + |B| \geq |G| + 1 + 2^t$, entonces $A \hat{+} B = G$.*

Demostración. Sea $g \in G$. Supongamos que $|A| + |B| \geq |G| + 1 + 2^t$. Si $|(g - A) \cap B| < 1 + 2^t$, entonces $-|(g - A) \cap B| > -1 - 2^t$, y de aquí que

$$|G| \geq |(g-A) \cup B| = |g-A| + |B| - |(g-A) \cap B| > |A| + |B| - 1 - 2^t.$$

Usando la hipótesis $|A| + |B| \geq |G| + 1 + 2^t$ y la desigualdad anterior tenemos que $|G| > |G|$, esto es una contradicción, teniéndose que $|(g-A) \cap B| \geq 1 + 2^t$. Así, existen (distintos) $a_i \in A$ y (distintos) $b_i \in B$ para $i \in [1, 2^t + 1]$ tales que $g - a_i = b_i$. Supongamos que para cada $i \in [1, 2^t + 1]$, se tiene que $a_i = b_i$, esto implica que $g = 2a_i$ para cada $i \in [1, 2^t + 1]$. Sin embargo, por propiedad de p-rango, tenemos que para g fija en número de las soluciones para la ecuación $g = 2x$, es 2^t. Por lo tanto, es imposible que $a_i = b_i$ y de ahí que $g = 2a_i$ sea válido para cada a_i, luego para toda $g \in G$ existen elementos distintos $a \in A$ y $b \in B$ tales que $g = a + b \in A \hat{+} B$, por tanto $G = A \hat{+} B$. ■

1.5. Teorema de Cauchy-Davenport

El primer resultado en teoría aditiva de grupos fue probado por Cauchy en 1813 y nuevamente en 1935, en forma independiente por Davenport; éste da una cota inferior para $|A + B|$ cuando A y B son subconjuntos de un grupo finito de orden primo, a continuación presentamos una prueba corta de dicho resultado basada en el Teorema de Mann. Aunque generalmente es presentado para dos conjuntos, puede generalizarse para cualquier colección finita de subconjuntos usando inducción.

Teorema 1.5.1 (Teorema de Cauchy-Davenport [6], [8]) *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de subconjuntos no vacíos de C_p con p primo, entonces*

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i| \geq \text{mín}\{p, \sum_{i=1}^{n} |A_i| - n + 1\}.$$

Demostración. Haremos la prueba para dos subconjuntos A y B de C_p, la prueba para más de dos conjuntos se sigue por inducción. Queremos probar que $|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}$. Supongamos que $|A + B| < p$. Sea $b \in B$ y consideremos el conjunto $A + B - b$, observemos que $A \subseteq A + B - b$, luego $|(A + B - b) \setminus A| = |A + B - b| - |A| = |A + B| - |A|$, además

$$A + B - b = \bigcup_{x \in B-b} (A + x).$$

Ahora veamos que existe una biyección entre $B - b$ y el conjunto $\{A + x : x \in B - b\}$. Si $x, y \in B - b$ con $x \neq y$ y $A + x = A + y$, entonces $A + (x - y) = A$, así $0 \neq x - y \in H(A)$, luego $H(A) \neq 0$, pero el único subgrupo no trivial de C_p es C_p, entonces $H(A) = C_p$ y luego $A = C_p$, de allí que $|A| + |B| \geq |C_p| + 1$, y el Lema 1.4.1 implica que $A + B = C_p$, luego $|A + B| = p$ pero esto contradice nuestra suposición. Por lo tanto

$$|A + B| - |A| = |(A + B - b) \setminus A| = | \,(\bigcup_{b \in B-b} (A + x)) \setminus A\, | \geq |B - b| - 1 = |B| - 1,$$

en consecuencia $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$. ■

Capítulo 2

Problemas de Suma Cero

Al estudiar los problemas de suma cero, el objeto principal de estudio son las ***secuencias*** finitas $S = g_1 g_2 \dots g_l$, cuyos términos están en un grupo abeliano finito G (en lugar de pares de conjuntos, usados en Teoría Aditiva). No se necesita que las secuencias sean ordenadas, sólo que éstas permitan la repetición de elementos, por esta razón el término "multiconjunto" también es usado por algunos autores para referirse a las secuencias. Recientemente, dadas las aplicaciones de los problemas de suma cero en teoría de factorización, se ha tratado a las secuencias como elementos del monoide libre abeliano con base G, cuyo producto es la concatenación de las secuencias. En este capítulo revisaremos algunos resultados relacionados con los problemas de suma cero que nos servirán como herramientas para tratar la constante de Harborth.

2.1. Secuencias

Definición 2.1.1 *Sea G un grupo abeliano finito. Una* ***secuencia*** *S de elementos de G será $g_1, \dots, g_\ell$ (posiblemente algunos de ellos iguales) donde $g_i \in G$, para todo $i \in [1, l]$. Para facilitar la notación de secuencia, escribiremos a S como un producto formal $S = g_1 g_2 \dots g_\ell = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$ (el orden de colocación de los elementos es irrelevante), también podemos escribir la secuencia S como*

$$S = \prod_{g \in G} g^{\mathsf{v}_g(S)}\,, \quad \textit{para todo} \quad g \in G$$

donde $v_g(S)$ *es la llamada* ***multiplicidad*** *de* g *en* S *(el número de veces que* g *aparece en la secuencia* S*).*

Sean $S = g_1 g_2 \dots g_\ell$ y $S' = g_1' g_2' \dots g_{\ell'}'$ dos secuencias de elementos de G. La ***concatenación*** de S y S' es la secuencia $SS' = g_1 g_2 \dots g_\ell g_1' g_2' \dots g_{\ell'}'$, también $SS' = \prod_{g\in G} g^{\mathsf{v}_g(S)+\mathsf{v}_g(S')} = \prod_{g\in G} g^{\mathsf{v}_g(S')+\mathsf{v}_g(S)} = S'S$, luego la concatenación de secuencia es una operación binaria la cual es asociativa y conmutativa. La ***secuencias vacía*** sirve como elemento identidad, en efecto, si denotamos por 1 la secuencia vacía, entonces $1 = \prod_{g\in G} g^0$, luego si $S = \prod_{g\in G} g^{\mathsf{v}_g(S)}$, entonces $1S = \prod_{g\in G} g^{0+\mathsf{v}_g(S)} = \prod_{g\in G} g^{\mathsf{v}_g(S)} = S$, en forma similar se prueba que $S1 = S$. Si el conjunto de todas las secuencias sobre G es denotado por $\mathcal{F}(G)$ y $S \in \mathcal{F}(G)$, entonces existen único $\mathsf{v}_g \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$S = \prod_{g\in G} g^{\mathsf{v}_g(S)}.$$

Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{F}(G)$ y la operación de concatenación forman un monoide abeliano libre con base G ver Definición 1.1.4.

Decimos que S ***contiene*** a g si $\mathsf{v}_g(S) > 0$. Llamamos ***longitud*** de S al entero

$$|S| = \ell = \sum_{g\in G} \mathsf{v}_g(S) \in \mathbb{N}_0.$$

Una secuencia T es llamada una ***subsecuencia*** de S si $T \mid S$ en $\mathcal{F}(G)$ (o equivalentemente, si $\mathsf{v}_g(T) \le \mathsf{v}_g(S)$ para todo $g \in G$). Si $T \mid S$ y $|T| = k$, decimos que T es una k***-subsecuencia*** de S. Para $T \mid S$ denotamos por ST^{-1} la subsecuencia de S dada por

$$ST^{-1} = \prod_{g\in G} g^{\mathsf{v}_g(S)-\mathsf{v}_g(T)}\,, \quad \text{para todo} \quad g \in G\,.$$

La ***máxima de las multiplicidades*** de S es denotada por

$$\mathsf{h}(S) = \max\{\mathsf{v}_g(S) \mid g \in G\} \in [0, |S|].$$

El ***soporte*** de S es el conjunto

$$\operatorname{supp}(S) = \{g \in G \mid \mathsf{v}_g(S) > 0\} \subset G.$$

La ***suma*** de S la definimos como

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^{\ell} g_i = \sum_{g \in G} \mathsf{v}_g(S) g \in G.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, $k \leq |S|$, el conjunto ***suma de k-subsecuencias*** de S es

$$\Sigma_k(S) = \left\{ \sum_{i \in I} g_i \;\middle|\; I \subset [1, l] \text{ con } |I| = k \right\}.$$

y el conjunto ***suma de subsecuencias*** de S es

$$\Sigma(S) = \bigcup_{j \geq 1} \Sigma_j(S).$$

Para la secuencia $S = g_1 \dots g_\ell$ y para $g \in G$ usamos la notaciones $g + S$ para denotar la secuencia $(g+g_1) \dots (g+g_\ell)$ y $-S$ para denotar la secuencia $(-g_1) \dots (-g_\ell)$.

$S \in \mathcal{F}(G)$ es una ***secuencia de suma cero*** si $\sigma(S) = 0$.

$S \in \mathcal{F}(G)$ es una ***secuencia libre de suma cero*** si $0 \notin \Sigma(S)$.

$S \in \mathcal{F}(G)$ es una ***secuencia de suma cero minimal***, si S es una secuencia de suma cero y toda subsecuencia propia de S es una secuencia libre de suma cero.

$S \in \mathcal{F}(G)$ es una ***secuencia de suma cero corta***, si S es una secuencia de suma cero con longitud $|S| \in [1, \exp(G)]$.

$S \in \mathcal{F}(G)$ es ***libre de cuadrado*** si $\mathsf{v}_g(S) \leq 1 \quad \text{para todo} \quad g \in G$.

Hay una correspondencia inmediata entre las secuencias libres de cuadrados sobre G y los subconjuntos de G, es decir, podemos identificar a la secuencia S con el soporte de S.

Si bien en este trabajo estamos interesados principalmente en secuencias libres de cuadrados, es decir en conjuntos, seguimos utilizando el formalismo y el lenguaje de secuencias en lugar de conjuntos. Por un lado, lo hacemos para mantener la coherencia con otros trabajos, sin embargo, por otra parte en relación con ciertos aspectos, hay una diferencia real en relación con el significado de construcciones estándar.

Para un grupo abeliano finito G, denotado aditivamente, un ***problemas de suma cero*** de G puede ser definido como el menor entero positivo λ tal que cada conjunto (o secuencia, resp.) de elementos de G de cardinalidad (o longitud, resp.) λ tiene un subconjunto (o subsecuencia, resp.) cuya suma de sus elementos da 0, el elemento neutro del grupo, y que posiblemente cumpla con alguna condición adicional (típicamente en su tamaño). Dentro de los problemas de suma cero se consideran también aquellos problemas que consisten en establecer condiciones suficientes para que una secuencia dada represente al grupo G, o a un subgrupo no trivial de G. Nos referimos al artículo [15] para una visión general y también pueden consultar [19], de todos modos en la próxima sección se verán algunos problemas de suma cero para un mayor entendimiento de este tema.

2.2. Constantes de suma cero

El resultado de Erdős-Ginzburg-Ziv fue el punto de partida de la investigación dedicado al estudio de secuencias que tengan subsecuencias de suma cero y que además satisfacen alguna propiedad adicional. Erdős conjeturó que si G es un grupo abeliano finito de orden n, entonces todo subconjunto A de G con cardinalidad

$|A| \geq \sqrt{2n}$ contiene un subconjunto no vacío de suma cero. Damos tres problemas claves que se estudian en los problemas de suma cero:

Problema 2.2.1 *Para un grupo abeliano finito G, determinar el menor entero positivo $l \in \mathbb{N}$ tal que cada secuencia S en G con longitud $|S| \geq l$ contiene una subsecuencia de suma cero.*

Más adelante veremos que este número l del problema 2.2.1 ha llegado a ser conocido como la constante de Davenport de G y es denotada por $\mathsf{D}(G)$.

Problema 2.2.2 *Para un grupo abeliano finito G, determinar el menor entero positivo $l \in \mathbb{N}$ tal que cada secuencia S en G con longitud $|S| \geq l$ contiene una subsecuencia T de suma cero tal que:*

1. $|T| \leq \exp(G)$.
2. $|T| = \exp(G)$.
3. $|T| = |G|$.

El número l del problema 2.2.2 parte 3. se llama la constante de Erdős-Ginzburg-Ziv de G y es denotada por $\mathsf{ZS}(G)$. Para los grupos abelianos finitos en general sólo el Problema 2.2.2 parte 3. fue totalmente resuelto en el año 1996 por W. Gao [14] también en el mismo año Y. Caro dio una demostración parcial ver [14], dicho número es $|G| + \mathsf{D}(G) - 1$ ver Teorema 2.2.3.

Problema 2.2.3 *Para un grupo abeliano finito G, determinar el menor entero positivo $l \in \mathbb{N}$ tal que cada secuencia libre de cuadrados S en G con longitud $|S| \geq l$ contiene una subsecuencia T tal que: T sea de suma cero y que $|T| = \exp(G)$.*

1. *T sea de suma cero.*
2. *T sea de suma cero y $|T| = \exp(G)$.*

Más adelante veremos que el número l del problema 2.2.3 parte 1. es llamado la constante de Olson, esta constante es denotada por O y también es denotada por Ol. El número l del problema 2.2.3 parte 2. se llama la constante de Harborth de G y es denotada por $\mathsf{g}(G)$. En el caso que el grupo sea cíclico, la constante l del problema 2.2.1, problema 2.2.2 y el problema 2.2.3 parte 2. están resueltos, nosotros daremos algunas demostraciones de esta afirmación ver Ejemplo 2.2.1 y Ejemplo 2.2.2 y el Teorema 2.2.1.

2.2.1. La Constante de Erdős-Ginzburg-Ziv y la Constante de Davenport

Comenzaremos revisando uno de los teoremas más básicos en el área de los problemas de suma cero. Este fue probado por Erdős, Ginzburg y Ziv en el año 1961, y desde entonces ha tenido muchas generalizaciones. Con nuestra notación el teorema es el siguiente:

Teorema 2.2.1 (Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv (EGZ) [13]) *Sea G un grupo abeliano finito. Si $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| \geq 2|G| - 1$, entonces $0 \in \Sigma_{|G|}(S)$.*

Existen al menos 13 pruebas diferentes del Teorema . Para ver una prueba con todos sus detalles ver [24].

Notemos que el Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv da una cota sobre la longitud minimal que necesita tener una secuencia para que esta posea una subsecuencia de longitud $|G|$ que sume cero. Con este trabajo Erdős-Ginzburg-Ziv dan origen a la constante de Erdős-Ginzburg-Ziv.

Definición 2.2.1 *Sea G un grupo abeliano finito. La* ***constante de Erdős-Ginzburg-Ziv****, $\mathsf{ZS}(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia de longitud mayor o igual que t contiene una subsecuencia de longitud $|G|$ y de suma cero.*

A veces en otros trabajos se utiliza la notación $E(G)$ en lugar de $\mathsf{ZS}(G)$.

El Teorema 2.2.1 implica que $\mathsf{ZS}(G) \leq 2|G|-1$. Ahora, podemos preguntarnos qué longitud debe tener una secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ para garantizar la existencia de una subsecuencia no trivial de suma cero, sin importarnos que longitud tenga. De esta manera Davenport, en abril de 1966, durante una conferencia sobre Teoría de Grupos y Teoría de Números ver [9] dio origen a su célebre constante $\mathsf{D}(G)$, la cual definimos a continuación.

Definición 2.2.2 *Sea G un grupo abeliano finito. La **constante de Davenport**, $\mathsf{D}(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia de longitud mayor o igual que t en G contiene una subsecuencia de suma cero.*

También, independientemente K. Rogers estudia esta constante en el año 1963 ver [32].

En 1969, J. Olson ver [27] y [28]) demostró el siguiente teorema:

Teorema 2.2.2 ([27], [28])) *Sea p un numero primo. Entonces*

1. *Si $G = C_{p^{n_1}} \oplus \cdots \oplus C_{p^{n_r}}$ donde r y n_i para todo $i \in [1, r]$ son enteros positivos, entonces tiene que $\mathsf{D}(G) = 1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{n_i} - 1)$*
2. *Si $G = C_m \oplus C_n$, donde m divide a n, entonces $\mathsf{D}(G) = m + n - 1$.*

Estos dos resultados también fueron probados en el mismo año en forma independiente por P. van Emde Boas (ver [33]).

El siguiente resultado da una cota superior para $\mathsf{D}(G)$, esencialmente muestra que toda secuencia de longitud $|G|$ posee una subsecuencia de suma cero, este resultado fue uno de los primeros resultado en esta área y fué denominado por Erdős como Lema Prehistórico, aunque la demostración es muy simple, la idea central es muy versátil y aparece con mucha frecuencia en las pruebas de otros teoremas más complejos.

Lema 2.2.1 (Lema Prehistórico) $\mathsf{D}(G) \leq |G|$ *para todo grupo abeliano finito G.*

Demostración. Sea $|G| = m$ y $S = s_1 s_2 \cdots s_m \in \mathcal{F}(G)$. Necesitamos probar que $0 \in \Sigma(S)$, es decir, que S tiene una subsecuencia no trivial de suma cero. Para cada $i \in [1, m]$, definimos las siguientes subsecuencias de S, $S_i = s_1 s_2 \cdots s_i$. Notemos que si $\sigma(S_i) = \sigma(S_j)$ con $i < j$, entonces $s_{i+1} + s_{i+2} + \cdots + s_j = \sigma(S_j S_i^{-1}) = \sigma(S_j) - \sigma(S_i) = 0$, de aquí que $s_{i+1} s_{i+2} \cdots s_j$ es una subsecuencia no trivial de S de suma cero, como se deseaba. Supongamos que todos los $\sigma(S_i)$ son distintos, entonces $A = \{\sigma(S_1), \sigma(S_2), \ldots, \sigma(S_m)\}$ es un subconjunto de G de cardinalidad $m = |G|$, implicando que $A = G$, de modo que $0 \in A$, es decir, existe $i \in [1, m]$ tal que $\sigma(S_i) = 0$, como queríamos demostrar. ■

Ejemplo 2.2.1 $\mathsf{D}(C_n) = n$*, donde* C_n *es un grupo cíclico de orden* n*. En efecto, la secuencia* $S = e^{|G|-1}$*, donde* e *es el generador de* C_n*, no posee subsecuencias de suma cero, así* $\mathsf{D}(Cn) \geq |C_n|$*. Luego el Lema 2.2.1 implica que* $\mathsf{D}(C_n) = |C_n| = n$*.*

En general no es fácil determinar el valor exacto de la constante de Davenport, existen varios resultados que dan cotas inferiores y superiores para $\mathsf{D}(G)$ y estudian problemas inversos asociados a tal constante. Gao prueba que hallar $\mathsf{ZS}(G)$ y $\mathsf{D}(G)$ es equivalente, esto lo veremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Gao [14]) $\mathsf{ZS}(G) = \mathsf{D}(G) + |G| - 1$ *para todo grupo finito abeliano* G*.*

Para ver una prueba de este teorema con todos sus detalles ver [24].

2.2.2. Constante de Olson

El nombre de Constante de Olson fue introducido por Ordaz, en 1994 durante un seminario celebrado en la Universidad Central de Venezuela (UCV), como un homenaje a la obras de Olson sobre este tema ver [26] y [29], en el año siguiente Ordaz junto a sus colaboradores presentan un trabajo donde figura por primera vez el nombre de la Constante de Olson ver [10], a continuación damos la definición formal de esta constante.

Definición 2.2.3 *Sea G un grupo abeliano finito. La* ***constante de Olson****, $\mathsf{O}(G)$, es el menor entero positivo t tal que toda secuencia libre de cuadrados de longitud mayor o igual que t en G contiene una subsecuencia de suma cero.*

La Constante de Olson es análoga a la Constante de Davenport, pero no se permiten repeticiones de elementos de G.

La siguiente proposición la vamos a utilizar al comienzo de la Sección 3.2

Proposición 2.2.1 $\mathsf{O}(C_2) = \mathsf{D}(C_2) = 2$.

Demostración. Por el Ejemplo 2.2.1 tenemos que $\mathsf{D}(C_2) = 2$, por definición de las constantes de Olson y Davenport tenemos que $\mathsf{O}(C_2) \leq \mathsf{D}(C_2) = 2$. Si suponemos que $\mathsf{O}(C_2) = 1$, entonces la secuencia libre de cuadrado $S = e$, donde $C_2 = \langle e \rangle$, no posee subsecuencia de suma cero, así $\mathsf{O}(C_2) \geq 2$, luego $\mathsf{O}(C_2) = \mathsf{D}(C_2) = 2$. ■

Olson extiende el área de los problemas de suma cero, en vez de encontrar condiciones sobre una secuencia S para que el cero se pueda escribir como suma de una subsecuencia de S, él encuentra condiciones suficientes sobre una secuencia S para que cada elemento de un grupo G, se pueda escribir como la suma de una $|G|$-subsecuencia de S.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Olson [30]) *En un grupo abeliano finito G toda secuencia $S \in \mathcal{F}(G)$ con $|S| = 2|G| - 1$ y $h(S) \leq |G|$, cumple una de las siguientes alternativas:*
(i) $G = \Sigma_{|G|}(S)$.
(ii) Existe un subgrupo propio, no trivial H tal que $H \subseteq \Sigma_{|G|}(S)$, y todos, excepto a lo sumo $|G/H| - 2$ términos de S, pertenecen a una H-clase.

2.2.3. La constante de Harborth

En 1973, Harborth en [20] define dos constantes y una formaliza lo que era de hecho el Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv.

Definición 2.2.4 *Sea $C_n^r = C_n \oplus C_n \oplus \cdots \oplus C_n$, r veces con $r \in \mathbb{N}$.*

1. *la constante $s(C_n^r)$ (denotado por Harborth como $f(n, r)$) es el menor entero positivo l tal que toda secuencia S en C_n^r con longitud mayor o igual que l, posee una subsecuencia T tal que su longitud es n y sea de suma cero.*

2. *La **constante de Harborth** $\mathsf{g}(C_n^r)$ (denotado por Harborth como $\mathsf{g}(n, r)$) es el menor entero positivo l tal que cada secuencia libre de cuadrados S en C_n^r con longitud mayor o igual que l, posee una subsecuencia T tal que su longitud es n y sea de suma cero.*

Ejemplo 2.2.2 *$s(C_n) = \mathsf{ZS}(C_n) = 2n-1$, donde C_n es un grupo cíclico de orden n. Por lo tanto, para $r = 1$ y $C_n = \langle e \rangle$ con $|\langle e \rangle| = n$, por el Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv tenemos que $s(C_n) = \mathsf{ZS}(C_n) \leq 2n - 1$, ahora bien la secuencia $S = 0^{n-1}e^{n-1}$, no posee subsecuencia de longitud n de suma cero, así, $s(C_n) \geq \mathsf{ZS}(C_n) \geq 2n - 1$, luego*

$$s(C_n) = \mathsf{ZS}(C_n) = 2n - 1.$$

Generalizando las constantes que Harborth introdujo en 1973 quedarían como sigue:

Definición 2.2.5 *Sea G un grupo abeliano finito escrito aditivamente.*

1. *La constante $s(G)$ es el menor entero positivo l tal que toda secuencia S en G con longitud mayor o igual que l, posee una subsecuencia T tal que su longitud es $exp(G)$ y sea de suma cero.*

2. *La **constante de Harborth** $\mathsf{g}(G)$ es el menor entero positivo l tal que cada secuencia libre de cuadrados S en G con longitud mayor o igual que l, posee una subsecuencia T tal que su longitud es $exp(G)$ y sea de suma cero.*

Kemnitz [21] estableció cotas generales para los grupos homocíclicos, el valor exacto para grupo cíclico es,

Teorema 2.2.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que*

$$\mathsf{g}(C_n) = \begin{cases} n & \textit{para } n \textit{ impar} \\ n+1 & \textit{para } n \textit{ par} \end{cases} .$$

Demostración. Para todo grupo abeliano finito G tenemos por definición de g que $exp(G) \leq \mathsf{g}(G)$ y además para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $exp(C_n) = n$, luego $\mathsf{g}(C_n) \geq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $C_n = \langle e \rangle$, con $\mathrm{ord}(e) = n$, entonces la única secuencia libre de cuadrados de longitud mayor o igual a $exp(C_n)$ en C_n es $T = \prod_{i=0}^{n-1}(ie)$, esta secuencia contiene todos los elementos del grupo C_n. Si $n = 1$, la prueba es trivial. Supongamos que $n > 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} ie \\ &= 0e + \sum_{i=1}^{n-1} ie \\ &= \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} e \\ &= \frac{n(n-1)}{2} e \end{aligned}$$

Luego, $\sigma(T) = \frac{n(n-1)}{2}e$, supongamos que n es impar, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m+1$, luego $\sigma(T) = \frac{n(2m)}{2}e = m(ne) = m0 = 0$, luego $\mathsf{g}(C_n) = n$ si n es impar. Supongamos que n es par, entonces existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2m$, luego $\sigma(T) = \frac{2m(n-1)}{2}e = m(ne) - me = -me$. Supongamos que $me = 0$, entonces $n \mid m$, de aquí que $n \leq m$, como $n = 2m$, tenemos que $m < n$, luego $n < n$, pero esto es una contradicción, luego $\sigma(T) = -me \neq 0$, y en consecuencia $\mathsf{g}(C_n) = n+1$ si n es par. ■

Nótese que la constante $\mathsf{g}(C_n) = n + 1$ en el caso de que n sea par significa que no existe conjunto con la propiedad deseada en absoluto, pero para $\ell > n$ la declaración es siempre cierta. Más en general, se sabe que:

Lema 2.2.1 ([15], Lemma 10.1) *Sea G un grupo abeliano finito. $\mathsf{g}(G) = |G| + 1$ si y solo si G es un $2-$grupo elemental, o un grupo cíclico de orden par.*

Para un grupo abeliano de rango a lo más 2, la constante $s(G)$ está totalmente determinado, pero para la constante $\mathsf{g}(G)$ no se tiene todavía un valor exacto.

Teorema 2.2.1 ([18], Theorem 5.8.3) *Sea $G = C_m \oplus C_n$ donde $m \mid n$, entonces $s(C_m \oplus C_n) = 2m + 2n - 3$*

Por otra parte, Kemnitz mostró que $\mathsf{g}(C_p^2) = 2p - 1$ para $p \in \{3, 5, 7\}$. Más recientemente Gao y Thangadurai [17] mostraron que $\mathsf{g}(C_p^2) = 2p - 1$ para primos $p \geq 67$ y $\mathsf{g}(C_4^2) = 9$. Posteriormente en [16] se prueba que $\mathsf{g}(C_p^2) = 2p - 1$ para todo primo $p \geq 47$. Gao y Thangadurai ver [17] conjeturaron que $\mathsf{g}(C_n^2)$ es igual a $2n - 1$ o $2n + 1$, de acuerdo con n sea impar o par, que son las cotas inferiores obtenidos por Kemnitz.

Por lo tanto, se nota una dependencia directa de la paridad del exponente n tanto para C_n y C_n^2, en este último caso al menos conjeturalmente; también los límites de Kemnitz dependen de la paridad del exponente. En el capítulo 3 discutiremos nuestros resultados principales, esto es el valor exacto de $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n})$ y de $\mathsf{g}_{\pm}(C_2 \oplus C_{2n})$ para todo n vea [25].

2.3. Variación con Peso de Algunos Problemas de Suma Cero

Una variante interesante en los problemas de suma cero, es originada por Y. Caro y sus colaboradores en el año 2006 ver [1]. Para $W \subset \mathbb{Z}$, llamamos $\sum_{i=1}^{\ell} w_i g_i$ con $w_i \in W$ una $W-$***suma ponderada*** de S, cuando se plantean en este contexto nos referimos a W como ***el conjunto de pesos***. Además, denotamos por

$$\sigma_W(S) = \{\sum_{i=1}^{\ell} w_i g_i \colon w_i \in W\}$$

el ***conjunto de todas las*** $W-$***sumas ponderadas*** de S.

$$\Sigma_W(S) = \left\{ \sum_{i\in I} w_i g_i \colon w_i \in W,\, \emptyset \neq I \subset [1,\ell] \right\} = \bigcup_{1\neq T|S} \sigma_W(T)$$

El ***conjunto de todos las*** $W-$***subsumas ponderadas*** de S, así como la variante

$$\Sigma_W^0(S) = \left\{ \sum_{i\in I} w_i g_i \colon w_i \in W,\, I \subset [1,\ell] \right\} = \bigcup_{T|S} \sigma_W(T)$$

donde también se permite la subsuma vacía. Tenga en cuenta que siempre tenemos que $\Sigma_W^0(S) = \Sigma_W(S) \cup \{0\}$, pero no siempre $\Sigma_W^0(S) \setminus \{0\} = \Sigma_W(S)$.

Además, denotamos por

$$\Sigma_{W,k}(S) = \left\{ \sum_{i\in I} w_i g_i \colon w_i \in W,\, \emptyset \neq I \subset [1,\ell],\, |I| = k \right\} = \bigcup_{1\neq T|S,\, |T|=k} \sigma_W(T)$$

el ***conjunto de todas las*** $W-$***subsumas ponderadas de*** S ***de longitud*** k.

Para $W = \{1\}$, se recupera las nociones habituales en el caso no ponderado, y eliminamos el subíndice W en este caso, excepto para $\sigma_{\{1\}}(S)$ que no es $\sigma(S)$ sino más bien el conjunto que contiene a $\sigma(S)$, esto es $\sigma_{\{1\}}(S) = \{\sigma(S)\}$. Seguimos considerando $\sigma(S)$ como un elemento de G, más que como un conjunto unitario que contiene este elemento. Por otra parte, se utiliza el símbolo $\pm$ en vez de W para el conjunto de pesos $W = \{+1, -1\}$ en dicho caso hablaremos de ***las sumas ponderadas más-menos***.

Para una función $\varphi \colon G \to G'$, donde G' denota un grupo abeliano finito, existe una única extensión homomorfica de φ del monoide de las secuencias sobre G al monoide de las secuencias sobre G', que seguimos denotando por comodidad por φ. Más explícitamente, si $S = g_1 \dots g_\ell$, entonces $\varphi(S) = \varphi(g_1)\dots\varphi(g_\ell)$. Veamos que φ es un homomorfismo de $\mathcal{F}(G)$ en $\mathcal{F}(G')$, sean $S, \widehat{S} \in \mathcal{F}(G)$ dadas por $S = g_1 \dots g_\ell$ y $\widehat{S} = \widehat{g}_1 \dots \widehat{g}_{\widehat{\ell}}$, entonces

$$\varphi(S\widehat{S}) = \varphi(g_1 \dots g_\ell \widehat{g}_1 \dots \widehat{g}_{\widehat{\ell}}) = \varphi(g_1) \dots \varphi(g_\ell)\varphi(\widehat{g}_1) \dots \varphi(\widehat{g}_{\widehat{\ell}}) = \varphi(S)\varphi(\widehat{S}).$$

Resaltamos que si φ no es inyectiva, entonces la imagen bajo φ de una secuencia libre de cuadrados podría no ser una secuencia libre de cuadrados, pero siempre tenemos $|S| = |\varphi(S)|$. En este caso, la situación sería diferente si consideramos S como un conjunto, ya que si φ no es inyectaba podría ocurrir que $|S| \neq |\varphi(S)|$ y esta es la razón principal por la que preferimos trabajar con secuencias pues vamos a utilizar en varias ocasiones la función proyección. Si φ no es sólo una función, sino que es un homomorfismo de grupo, entonces $\varphi(\sigma(S)) = \sigma(\varphi(S))$, y lo mismo para σ_W, Σ_W^0, Σ_W y $\Sigma_{W,k}$.

Definition 2.3.1 *Sea G un grupo abeliano. Sea $W \subset \mathbb{Z}$.*

- *La W-**constante de Davenport ponderada** de G, denotada por $\mathsf{D}_W(G)$, es el menor $\ell \in \mathbb{N}$ tal que para cada secuencia sobre G con $|S| \geq \ell$ tenemos que $0 \in \Sigma_W(S)$.*

- *La W-**constante de Erdős-Ginzburg-Ziv ponderada** de G, denotada por $\mathsf{ZS}(G)_W$, es el menor $\ell \in \mathbb{N}$ tal que para cada secuencia sobre G con $|S| \geq \ell$ tenemos que $0 \in \Sigma_{W,|G|}(S)$.*

- *La W-**constante de Olson ponderada** de G, denotada por $\mathsf{D}_W(G)$, es el menor $\ell \in \mathbb{N}$ tal que para cada secuencia libre de cuadrados sobre G con $|S| \geq \ell$ tenemos que $0 \in \Sigma_W(S)$.*

- *La W-**constante de Harborth ponderada** de G, denotada por $\mathsf{g}_W(G)$, es el menor $\ell \in \mathbb{N}$ tal que para cada secuencia libre de cuadrado sobre G con $|S| \geq \ell$ tenemos $0 \in \Sigma_{W,\exp(G)}(S)$.*

La constante de Davenport, Erdős-Ginzburg-Ziv, Olson y Harborth clásica (mas-menos) es el caso especial $W = \{1\}$ ($W = \{+1, -1\}$). Denotaremos la constante de Harborth ponderada mas-menos por $\mathsf{g}_\pm(G)$.

Capítulo 3

NUEVOS APORTES A LA CONSTANTE DE HARBORTH

El objetivo de este trabajo es la investigación de la constante de Harborth y su análogo ponderado más-menos. Empezamos por establecer un simple lema general sobre el comportamiento de la $W-$constante de Harborth ponderada con respecto a la descomposiciones de la suma directa del grupo.

Lema 3.0.1 ([25]) *Sea G un grupo abeliano finito. Sea $W \subset \mathbb{Z}$ un subconjunto de pesos. Si $G = H \oplus K$ con $\exp(H) \mid \exp(K)$, entonces $\mathsf{g}_W(G) \geq \mathsf{O}_W(H) + \mathsf{g}_W(K) - 1$.*

Demostración. Por definición de $\mathsf{g}_W(K)$, tenemos que existe una secuencia B libre de cuadrados sobre K de longitud $\mathsf{g}_W(K) - 1$ que no contiene una W-subsuma cero ponderada de longitud $\exp(K)$. También, por la definición de $\mathsf{O}_W(H)$ tenemos que existe una secuencia A libre de cuadrados sobre H de longitud $\mathsf{O}_W(H) - 1$, que no contiene una W-subsuma cero ponderada no vacía. Como $\exp(H) \mid \exp(K)$, tenemos que $\exp(K) = \exp(G)$. Consideremos la secuencia $\widehat{A}\widehat{B}$, donde $\widehat{A} = \prod_{a \in supp(A)}(a, 0)$ y $\widehat{B} = \prod_{b \in supp(B)}(0, b)$, luego $\widehat{A}\widehat{B}$ es una secuencia libre de cuadrados en G. Supongamos que $\widehat{A}\widehat{B}$, tiene una subsecuencia T de longitud $\exp(G)$ tal que $0 \in \sigma_W(T)$. Sea $T = T_A T_B$, donde $s \mid T_A$ si y solo si $s \mid \widehat{A}$, igualmente $s \mid T_B$ si y solo si $s \mid \widehat{B}$. Supongamos que $|T_A| \neq 0$, esto es T_A no es la secuencia vacía. Como $0 \in \sigma_W(T) = \sigma_W(T_A T_B)$, entonces la subsecuencia $\pi_1(T_A)$ es una subsecuencia no vacía de A tal que $0 \in \sigma_W(\pi_1(T_A))$, pero esto contradición ya que A no contiene una W-subsuma cero ponderada no vacía, así, T_A es la secuencia vacía, y de aquí que T_B tiene longitud $\exp(G) = \exp(K)$ y como $0 \in \sigma_W(T)$, entonces $\pi_2(T_B)$ es una subsecuencia de B de longitud $\exp(K)$ tal que $0 \in \sigma_W(\pi_2(T_B))$, pero esto contradice la elección B. Luego, la secuencia $\widehat{A}\widehat{B}$ no puede tener una subsecuencia T de longitud $\exp(G)$ tal que $0 \in \sigma_W(T)$. Así, $\mathsf{g}_{\pm W}(G) > |\widehat{A}\widehat{B}| = |\widehat{A}| + |\widehat{B}| = |A| + |B| = (\mathsf{O}_W(H) - 1) + (\mathsf{g}_W(K) - 1)$, luego $\mathsf{g}_W(G) \geq \mathsf{O}_W(H) + \mathsf{g}_W(K) - 1$. $\blacksquare$

Ahora vamos a dar una forma de expresar, para $W = \{+1, -1\}$, el conjunto de las W- sumas ponderadas de una secuencia en términos de nociones que no impliquen pesos.

Lema 3.0.2 ([25]) *Sea G un grupo abeliano finito y sea S una secuencia sobre G. Entonces $\sigma_{\pm}(S) = -\sigma(S) + 2 \cdot \Sigma^0(S)$. En particular, si $|G|$ es impar, entonces $|\sigma_{\pm}(S)| = |\Sigma^0(S)| \geq 1 + |\operatorname{supp}(S) \setminus \{0\}|$.*

Demostración. Sea $S = g_1 \dots g_k$ una secuencia en G. Nótese que para cada $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, existe una única $\delta \in \{0, 2\}$, tal que $\varepsilon = -1 + \delta$. Por otra parte, si $h \in 2 \cdot \Sigma^0(S)$, entonces $h = 2\sum_{i \in I} \varepsilon_i g_i$ donde $I \subset [1, k]$. Tomando $\delta_i = 0$ si $i \notin I$ y $\delta_i = 2$ si $i \in I$, tenemos que $h = \sum_{i=1}^{k} \delta_i g_i$. Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} g \in \sigma_{\pm}(S) &\Leftrightarrow \exists \varepsilon_i \in \{+1, -1\} : g = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i g_i \\ &\Leftrightarrow \exists \delta_i \in \{0, 2\} : g = \sum_{i=1}^{k} (-1 + \delta_i) g_i \\ &\Leftrightarrow \exists \delta_i \in \{0, 2\} : g = -\sigma(S) + \sum_{i=1}^{k} \delta_i g_i \\ &\Leftrightarrow g \in -\sigma(S) + 2 \cdot \Sigma^0(S). \end{aligned}$$

Supongamos que $|G|$ es impar. Si suponemos que en $2 \cdot \Sigma^0(S)$ existen $2x, 2y \in 2 \cdot \Sigma^0(S)$ tales que $x, y \in \Sigma^0(S)$ son distintos con $2x = 2y$, entonces $2(x - y) = 0$, como $x - y \in G$ y $x - y \neq 0$, entonces $2 \mid \operatorname{ord}(x - y)$ y como $\operatorname{ord}(x - y) \mid |G|$, tenemos que $2 \mid |G|$, pero esto es una contradicción ya que estamos suponiendo que $|G|$ es impar, en consecuencia $|\sigma_{\pm}(S)| = |-\sigma(S) + 2 \cdot \Sigma^0(S)| = |2 \cdot \Sigma^0(S)| = |\Sigma^0(S)| \geq 1 + |\operatorname{supp}(S) \setminus \{0\}|$. De esta manera completamos la demostración. ■

Para una mejor comprensión de este trabajo establecimos este lema sólo para las secuencias ponderadas más-menos, pero aplicando exactamente el mismo argumento podemos mostrar que para distintos $v, w \in \mathbb{Z}$ tenemos que $\sigma_{\{v,w\}}(S) = v\sigma(S) + (w - v) \cdot \Sigma^0(S)$, y las afirmaciones adicionales con la condición $|G|$ impar es remplazada por $w - v$ co-primo a $|G|$.

3.1. Grupos cíclicos

Ahora, se procede a demostrar uno de nuestro teoremas principal el teorema 3.1.1, mostrando que en la presencia de pesos la situación es algo diferente, todavía existe una dependencia directa de la 'paridad' de n, o para ser preciso de una condición de congruencia módulo 4.

Teorema 3.1.1 ([25]) *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\mathsf{g}_{\pm}(C_n) = \begin{cases} n+1 & \textit{para } n \equiv 2 \pmod 4 \\ n & \textit{en otro caso} \end{cases}.$$

Demostración. Queremos demostrar que, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{g}_{\pm}(C_n)$ es igual a $n+1$ para $n \equiv 2 \pmod 4$ e igual a n en otro caso. Para todo grupo abeliano finito G tenemos por definición de $\mathsf{g}_{\pm}$ que $exp(G) \leq \mathsf{g}_{\pm}(G)$ y además $\mathsf{g}_{\pm}(G) \leq \mathsf{g}(G)$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $exp(C_n) = n$, luego $\mathsf{g}_{\pm}(C_n) \geq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que n es impar, entonces usando el Teorema 2.2.1 tenemos que $n \leq \mathsf{g}_{\pm}(C_n) \leq \mathsf{g}(C_n) = n$, luego $\mathsf{g}_{\pm}(C_n) = n$, si n es impar. Ahora supongamos que n es par. Sea $C_n = \langle e \rangle$. Como $exp(C_n) = n = |C_n|$, entonces la única secuencia libre de cuadrados de longitud $exp(C_n)$ en C_n es $T = \prod_{i=0}^{n-1}(ie)$, esta secuencia contiene todos los elementos del grupo C_n. Nótese que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n/2} i - \sum_{i=n/2+1}^{n-1} i &= 0 + \sum_{i=1}^{n/2} i - \sum_{i=1}^{n-1-n/2} \left(i + \frac{n}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n/2} i - \sum_{i=1}^{n/2-1} i - \sum_{i=1}^{n/2-1} \frac{n}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n/2-1} i + \frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n/2-1} i - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) \\
&= \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) \\
&= \frac{n}{2}\left(1 - \frac{n}{2} + 1\right) \\
&= n\left(1 - \frac{n}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Todo número par se puede escribir en forma única como $4r$ o $4r+2$, esto es, todo número par es equivalente a 0 módulo 4 o es equivalente a 2 módulo 4. Si $n \equiv 0 \pmod 4$, entonces $r = \frac{n}{4}$ es un entero, así, $n(1+r)$ es múltiplo del $exp(C_n) = n$. Por lo tanto, $\sum_{i=0}^{n/2} ie - \sum_{i=n/2+1}^{n-1} ie = n(1+r)e = 0$ y de aquí obtenemos que $0 \in \sigma_{\pm}(T)$. Por definición de $\mathsf{g}_{\pm}$ tenemos que $\mathsf{g}_{\pm}(C_n) \leq n$, pero como ya mencionamos anteriormente tenemos $\mathsf{g}_{\pm}(C_n) \geq n$, obteniendo que $\mathsf{g}_{\pm}(C_n) = n$ si $n \equiv 0 \pmod 4$.

Ahora probemos que $0 \notin \sigma_{\pm}(T)$ cuando $n \equiv 2 \pmod 4$. Nótese que

$$
\begin{aligned}
\sigma(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} ie \\
&= \frac{n}{2}(n-1)e \\
&= \frac{n}{2}(ne) - \frac{n}{2}e \\
&= -\frac{n}{2}e
\end{aligned}
$$

Luego, $-\sigma(T) = \frac{n}{2}e$ y recordemos que n es par. Como $n \equiv 2 \pmod 4$, entonces $\frac{n-2}{4}$ es un entero, luego se tiene que $-\sigma(T) = \frac{n}{2}e = e + \frac{n-2}{4}(2e)$. Si suponemos que

$x \in \frac{n-2}{4}(2e) + 2 \cdot \Sigma^0(T)$, entonces existe $I \subset [1, n-1]$ tal que

$$x = \frac{n-2}{4}(2e) + 2 \cdot \sum_{i \in I} \varepsilon_i(ie) = \left(\frac{n-2}{4} + \sum_{i \in I} \varepsilon_i i\right)(2e) = t(2e)$$

donde $t = \frac{n-2}{4} + \sum_{i \in I} \varepsilon_i i$ es un entero, así,

$$\frac{n-2}{4}(2e) + 2 \cdot \Sigma^0(T) \subset \langle 2e \rangle.$$

Por el Lema 3.0.2 tenemos que $\sigma_{\pm}(T) = -\sigma(T) + 2 \cdot \Sigma^0(T)$. Luego

$$\sigma_{\pm}(T) = -\sigma(T) + 2 \cdot \Sigma^0(T) = e + \frac{n-2}{4} 2e + 2 \cdot \Sigma^0(T) \subset e + \langle 2e \rangle.$$

Si $0 \in e + \langle 2e \rangle$, entonces existe un $r \in \mathbb{N}_0$, tal que $0 = e + r(2e) = e(1 + 2r)$, luego n divide a $1 + 2r$, pero n es par y $1 + 2r$ es impar, esta división da una contradicción, en consecuencia $0 \notin e + \langle 2e \rangle$ y como $\sigma_{\pm}(T) \subset e + \langle 2e \rangle$ tenemos que $0 \notin \sigma_{\pm}(T)$ y en consecuencia $\mathsf{g}_{\pm}(C_n) = n + 1$ si $n \equiv 2 \pmod 4$. ■

Ahora determinaremos todos los grupos abelianos finito G para los cuales $\mathsf{g}_{\pm}(G) > |G|$. La demostración utiliza el Lema 2.2.1.

Corolario 3.1.1 ([25]) *Sea G un grupo abeliano finito. Entonces $\mathsf{g}_{\pm}(G) = |G| + 1$ si y solo si G es un 2-grupo elemental o un grupo cíclico de orden congruente con 2 módulo 4.*

Demostración. Comencemos primero con el directo. Supongamos que se cumple la igualdad $\mathsf{g}_{\pm}(G) = |G| + 1$. Como $\mathsf{g}_{\pm}(G) \leq \mathsf{g}(G)$ y $\mathsf{g}(G) \leq |G| + 1$, entonces $|G| + 1 = \mathsf{g}_{\pm}(G) \leq \mathsf{g}(G) \leq |G| + 1$, luego $\mathsf{g}(G) = |G| + 1$ y de aquí que G es un 2-grupo elemental o un grupo cíclico de orden par (ver introducción). Si G es un 2-grupo elemental, no hay nada que demostrar. Supongamos que G es un grupo cíclico de orden par, por Teorema 3.1.1 como $\mathsf{g}_{\pm}(G) = |G| + 1$ tenemos que G es un grupo cíclico de orden congruente con 2 módulo 4.

Ahora probaremos el recíproco. Si G un 2-grupo elemental, entonces el rango de G es 2, luego para todo $g \in G$ tenemos que $2g = 0$, esto implica que $g = -g$ para todo $g \in G$, así, $\mathsf{g}_{\pm}(G) = \mathsf{g}(G)$. Como G es un 2-grupo elemental, entonces $|G|$ es par y por (3.1), tenemos que $\mathsf{g}(G) = |G| + 1$ y por ser $\mathsf{g}_{\pm}(G) = \mathsf{g}(G)$ tenemos que $\mathsf{g}_{\pm}(G) = |G| + 1$. Queda por considerar el caso de que G sea un grupo cíclico de orden congruente con 2 módulo 4. En este caso por el Teorema 3.1.1 tenemos que $\mathsf{g}_{\pm}(G) = |G| + 1$. Esto completa la prueba. ■

3.2. Grupos de la forma $C_2 \oplus C_{2n}$

En esta sección se determina $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n})$ y $\mathsf{g}_{\pm}(C_2 \oplus C_{2n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $W = \{1\}$ o $W = \{+1, -1\}$. Como para todo $x \in C_2$ se tiene que $2x = 0$, entonces $x = -x$, para todo $x \in C_2$, luego el signo en C_2 es irrelevante, así, $\mathsf{O}_{\pm}(C_2) = \mathsf{O}(C_2) = 2$ ver Proposición 2.2.1, entonces $\mathsf{O}_W(C_2) = 2$. Por lema 3.0.1 tenemos que

$$\mathsf{g}_W(C_2 \oplus C_{2n}) \geq \mathsf{O}_W(C_2) + \mathsf{g}_W(C_{2n}) - 1 = 2 + \mathsf{g}_W(C_{2n}) - 1 = \mathsf{g}_W(C_{2n}) + 1$$

Luego,

$$\mathsf{g}_W(C_2 \oplus C_{2n}) \geq \mathsf{g}_W(C_{2n}) + 1 \tag{3.1}$$

Para $W = \{1\}$, usando (3.1), (3.1) y el hecho de que $2n$ es par tenemos

$$\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n + 2 \tag{3.2}$$

Si $n = 2r + 1$ para algún $r \in \mathbb{N}$, entonces $2n = 4r + 2$, de aquí que $2n \equiv 2 \pmod 4$. Ahora bien, si $n = 2r$ para algún $r \in \mathbb{N}$, entonces $2n = 4r$, luego si suponemos que $2n \equiv 2 \pmod 4$, entonces existe un $t \in \mathbb{N}$ tal que $2n - 2 = 4t$, de aquí que $4r - 2 = 4t$ y esto implica que $4(r - t) = 2$, luego $4|2$ esto es una contradicción. Por tanto, $2n$ no es equivalente a 2 módulo 4 si n es par. Tomando $W = \{+1, -1\}$ en (3.1), y usando el teorema 3.1.1 y las dos observaciones anteriores tenemos

$$\mathsf{g}_{\pm}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq \begin{cases} 2n + 2 & \text{para } n \text{ impar} \\ 2n + 1 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} . \tag{3.3}$$

Lema 3.2.1 ([25]) *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Entonces $\mathsf{g}_{\pm}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n + 2$.*

Demostración. Si n es impar, entonces por (3.3) la desigualdad es válida. Luego asumamos que n es par. Sea $C_2 \oplus C_{2n} = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$ donde e_1 y e_2 es una base de $C_2 \oplus C_{2n}$ y donde $\text{ord}(e_1) = 2$ y $\text{ord}(e_2) = 2n$. Consideremos la secuencia $S = TR$ con $T = \prod_{i=1}^{2n-2}(ie_2)$ y $R = e_1(e_1 + 2e_2)(e_1 + 4e_2)$. Como $n \geq 3$ tenemos que $2n \geq 6$. Probemos que R es libre de cuadrados, en efecto, si $e_1 = e_1 + 2e_2$, entonces $0e_1 - 2e_2 = 0$, por ser e_1 y e_2 una base de $C_2 \oplus C_{2n}$, tenemos que $-2e_2 = 0$, de aquí que $2n|(-2)$, así, $2n \leq -2$ pero esto es una contradicción ya que $\text{ord}(e_2) = 2n \geq 6$. Si $e_1 = e_1 + 4e_2$, entonces $0e_1 - 4e_2 = 0$, por ser e_1 y e_2 una base de $C_2 \oplus C_{2n}$, tenemos que $-4e_2 = 0$, de aquí que $2n|(-4)$, así, $2n \leq -4$ pero esto es una contradicción ya que $\text{ord}(e_2) = 2n \geq 6$. Si suponemos que $e_1 + 2e_2 = e_1 + 4e_2$, también tenemos una contradicción. Luego, R es libre de cuadrados. Ahora probemos que T es libre de cuadrados, supongamos lo contrario, esto es supongamos que existen $i, j \in [1, 2n]$ con $i > j$ tales que $ie_2 = je_2$, luego $(i - j)e_2 = 0$ y de aquí que $2n|(i - j)$, esto implica que $2n \leq i - j$, por otra parte como $i, j \in [1, 2n]$, entonces $1 \leq i \leq 2n$ y $-2n \leq -j \leq -1$, luego $1 - 2n \leq i - j \leq 2n - 1$, así, $2n \leq i - j \leq 2n - 1$, pero esto es una contradicción, de aquí que T es libre de cuadrados. Probemos que S es libre de cuadrados. Supongamos que existen $i \in [1, 2n]$ y $r \in \{0, 2, 4\}$ tal que $ie_2 = e_1 + re_2$, así, $0 = e_1 + (r - i)e_2$ y como e_1 y e_2 es una base de $C_2 \oplus C_{2n}$, tenemos que $e_1 = 0$, pero esto es una contradicción, luego S es libre de cuadrados. Nótese que

$$\begin{aligned}
\sigma(T) &= \sum_{i=1}^{2n-2} ie_2 \\
&= (n-1)(2n-1)e_2 \\
&= (n-1)(2ne_2 - e_2) \\
&= (n-1)(0 - e_2) \\
&= -ne_2 + e_2
\end{aligned}$$

$\sigma_{\pm}(T) \subset e_2 + \langle 2e_2 \rangle$, en efecto por lema 3.0.2 tenemos que $\sigma_{\pm}(T) = -\sigma(T) + 2 \cdot \Sigma^0(T) = -e_2 + (ne_2 + 2 \cdot \Sigma^0(T)) \subset -e_2 + (ne_2 + \langle 2e_2 \rangle) = -e_2 + \langle 2e_2 \rangle = e_2 + \langle 2e_2 \rangle$. Recordemos que n es par esto implica que $ne_2 \in \langle 2e_2 \rangle$ y también $-e_2 + \langle 2e_2 \rangle = e_2 + \langle 2e_2 \rangle$

ya que $e_2 - (-e_2) = 2e_2 \in \langle 2e_2 \rangle$ (igualdad de clases).

Sea $S' \mid S$ una subsecuencia de longitud $2n$. Es claro que S' no puede ser una subsecuencia de T, ya que $|T| = 2n-2$. Sea R' la subsecuencia de elementos en S' de R. Si la longitud de R' es 1, entonces $|S'| = |T| + |R'| = 2n-2+1 = 2n-1$, esto es una contradicción ya que la longitud de $|S'|$ es $2n$. Así, $|R'| = 2$ o $|R'| = 3$. Supongamos que $|R'| = 3$, de aquí tenemos que $R' = R$. Si $0 \in \sigma_{\pm}(S')$, entonces existen $I \subset [1, 2n]$ y $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon_i \in \{+1, -1\}$, con $i \in I$ tal que $0 = \sum_{i \in I} \varepsilon_i e_2 + \varepsilon'_1 e_1 + \varepsilon'_2(e_1 + 2e_2) + \varepsilon'_2(e_1 + 4e_2) = (\sum_{i \in I} \varepsilon_i + 2\varepsilon'_2 + 4\varepsilon'_2)e_2 + e_1 + e_1 + e_1 = e_1 + me_2$, donde $m = \sum_{i \in I} \varepsilon_i + 2\varepsilon'_2 + 4\varepsilon'_2$ y recordemos que $\varepsilon e_1 = e_1$ para todo $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ esto debido a que $\operatorname{ord}(e_1) = 2$, y de aquí que $e_1 = -e_1$. Como e_1 y e_2 es una base de $C_2 \oplus C_{2n}$ y $e_1 + me_2 = 0$, entonces $e_1 = 0$, esto es una cotradicción, así, $|R'| = 2$. Por tanto, $S' = R'T$. Sea $R' = (e_1 + xe_2)(e_1 + ye_2)$, donde $x, y \in \{0, 2, 4\}$. Sea $x \in \sigma_{\pm}(R')$, entonces existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+1, -1\}$ tales que $x = \varepsilon_1(e_1 + xe_2) + \varepsilon_2(e_1 + ye_2) = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_1 + (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_1)e_2 = e_1 + e_1 + me_2 = me_2$, donde $m = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_1$, como x y y son pares tenemos que m también es par, así, $x = me_2 \in \langle 2e_2 \rangle$, luego $\sigma_{\pm}(R') \subset \langle 2e_2 \rangle$ y como $\sigma_{\pm}(T) \subset e_2 + \langle 2e_2 \rangle$, tenemos que $\sigma_{\pm}(R'T) = \sigma_{\pm}(R') + \sigma_{\pm}(T) \subset \langle 2e_2 \rangle + e_2 + \langle 2e_2 \rangle = e_2 + \langle 2e_2 \rangle$. Si $0 \in e_2 + \langle 2e_2 \rangle$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 = e_2 + n(2e_2) = (1+2n)e_2$, luego $2n|(2n+1)$ esto es una contradicción ya que un número par no puede dividir a un número impar. Por tanto, $0 \notin e_2 + \langle 2e_2 \rangle$ y de aquí obtenemos que $0 \notin \sigma_{\pm}(R'T)$. Luego, en S no hay subsecuencias de suma cero de longitud $2n$. Por tanto, $\mathsf{g}_{\pm}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n + 2$. ∎

Ahora establecemos una mejor cota inferior para $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n})$ donde n es impar.

Lema 3.2.2 ([25]) *Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Entonces* $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n + 3$.

Demostración. Para $n = 1$, tenemos que $C_2 \oplus C_2$ es un 2-grupo elemental, luego $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_2) = |C_2 \oplus C_2| + 1 = 4 + 1 = 5 = 2(1) + 1$ (vea la introducción), luego para $n = 1$, tenemos que la desigualdad se cumple. Luego, asumamos que $n \neq 1$. Como n es impar, tenemos que 2 y n son primos relativos luego, $C_{2n} \cong C_2 \oplus C_n$. Sea $C_2 \oplus C_{2n} \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_n = \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle \oplus \langle e \rangle$ donde f_1, f_2 y e forman una base de $C_2 \oplus C_2 \oplus C_n$ con $\operatorname{ord}(f_i) = 2$ y $\operatorname{ord}(e) = n$. Como $\operatorname{ord}(f_i) = 2$, entonces $-f_i = f_i$ y de aquí que $\varepsilon f_i = f_i$ para todo $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, este resultado lo vamos a utilizar más adelante.

Construiremos una secuencia libre de cuadrado A de longitud $2n+2$ sin subsecuencia de suma cero de longitud $2n$. Sea $B = \prod_{i=0}^{(n-1)/2}(ie)$ y sea

$$A = B(f_1 + f_2 + B)(f_1 - B)(f_2 - B).$$

Sean $C = f_1+f_2+B$, $D = f_1-B$ y $E = f_2-B$. Entonces $|A| = |B|+|C|+|D|+|E| = |B|+|B|+|B|+|B| = 4((n-1)/2+1) = 4(n+1)/2 = 2n+2$. Ahora veamos que A es libre de cuadrados. Sean $i, j \in [0, \frac{n-1}{2}]$. Si $ie = je$, entonces $(i-j)e = 0$, así, $n \leq i-j$, pero como $i, j \in [0, \frac{n-1}{2}]$, entonces $-\frac{n-1}{2} \leq i-j \leq \frac{n-1}{2}$ de aquí obtenemos que $n \leq i-j \leq \frac{n-1}{2}$, esto es una contradicción y por tanto, B es libre de cuadrados. De forma similar se prueba que C, D y E son libre de cuadrados. Si $ie = f_1+f_2+je$, entonces $f_1+f_2+(j-i)e = 0$, como f_1, f_2 y e forman una base, tenemos que $f_i = 0$, esto es una contradicción. Si $ie = f_1 - je$, entonces $f_1 + 0f_2 + (-j-i)e = 0$, como f_1, f_2 y e forman una base, tenemos que $f_1 = 0$, esto es una contradicción. Si $ie = f_2 - je$, entonces $0f_1 + f_2 + (-j-i)e = 0$, como f_1, f_2 y e forman una base, tenemos que $f_2 = 0$, esto es una contradicción. Si $f_1 + f_2 + ie = f_1 - je$, entonces $0f_1 - f_2 + (-j-i)e = 0$, como f_1, f_2 y e forman una base, tenemos que $-f_2 = 0$, esto es una contradicción. Si $f_1 + f_2 + ie = f_2 - je$, entonces $-f_1 + 0f_2 + (-j-i)e = 0$, como f_1, f_2 y e forman una base, tenemos que $-f_1 = 0$, esto es una contradicción. Si $f_1 - ie = f_2 - je$, entonces $f_1 - f_2 + (j-i)e = 0$, como f_1, f_2 y e forman una base, tenemos que $f_1 = 0$ y $-f_2 = 0$, esto es una contradicción. En todos los casos posibles tenemos una contradicción si suponemos que en A existen dos elementos iguales. Por lo tanto, A es una secuencia libre de cuadrados. Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \sigma(B) + \sigma(f_1 + f_2 + B) + \sigma(f_1 - B) + \sigma(f_2 - B) \\
&= \sum_{i=0}^{(n-1)/2} ie_2 + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (f_1 + f_2 + ie_2) + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (f_1 - ie_2) + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (f_2 - ie_2) \\
&= \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (2ie_2 - 2ie_2) + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (2f_1 + 2f_2) \\
&= \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (0) + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (0 + 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego, $\sigma(A) = 0$. Supongamos que A tiene una subsecuencia S de suma cero de longitud $2n$, entonces la secuencia AS^{-1} también es una secuencia de suma cero de A, en efecto, $\sigma(AS^{-1}) = \sigma(A) - \sigma(S^{-1}) = 0 - 0 = 0$. La secuencia AS^{-1} tiene longitud 2 ya que A tiene longitud $2n+2$ y S tiene longitud $2n$. Sea $AS^{-1} = h_1h_2|A$. Sean $i, j \in [0, \frac{n-1}{2}]$. Si $h_1 = ie$ y $h_2 = je$, entonces $0 = h_1 + h_2 = (i + j)e$, pero ya vimos que esto es una contradicción. Si $h_1 = f_1 + f_2 + ie$ y $h_2 = f_1 + f_2 + je$, entonces $0 = h_1 + h_2 = (i + j)e$, pero esto es una contradicción. Si $h_1 = f_1 - ie$ y $h_2 = f_1 - je$, entonces $0 = h_1 + h_2 = (i + j)e$, pero esto es una contradicción. Si $h_1 = f_2 - ie$ y $h_2 = f_2 - je$, entonces $0 = h_1 + h_2 = (i + j)e$, pero esto es una contradicción. Si $h_1 = ie$ y $h_2 = f_1+f_2+je$, entonces $0 = h_1+h_2 = f_1+f_2+(i+j)e$, por definición de base tenemos que $f_i = 0$, pero esto es una contradicción. Si $h_1 = ie$ y $h_2 = f_1 - je$, entonces $0 = h_1 + h_2 = 0f_1 + f_2 + (i - j)e$, por definición de base tenemos que $f_2 = 0$, pero esto es una contradicción. Si $h_1 = ie$ y $h_2 = f_2 - je$, entonces $0 = h_1 + h_2 = 0f_1 + f_2 + (i - j)e$, por definición de base tenemos que $f_2 = 0$, pero esto es una contradicción. Si $h_1 = f_1 + f_2 + ie$ y $h_2 = f_1 - je$, entonces $0 = h_1 + h_2 = 0f_1 + f_2 + (i - j)e$, por definición de base tenemos que $f_2 = 0$, pero esto es una contradicción. Si $h_1 = f_1 + f_2 + ie$ y $h_2 = f_2 - je$, entonces $0 = h_1 + h_2 = f_1 + 0f_2 + (i - j)e$, por definición de base tenemos que $f_1 = 0$, pero esto es una contradicción. Si $h_1 = f_1 - ie$ y $h_2 = f_2 - je$, entonces $0 = h_1+h_2 = f_1+f_2+(-i-j)e$, por definición de base tenemos que $f_i = 0$, pero esto es una contradicción. La contradicciones proviene de haber supuesto que A posee una subsecuencia de suma cero de longitud $2n$. Por tanto, A no posee subsecuencia de suma cero de longitud $2n$ y de aquí que $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n+3$. ■

A continuación, se establece cota superior de $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n})$ para n par. Este resultado también se utiliza en la prueba del teorema 3.2.1, por lo tanto se formula por separado.

Proposición 3.2.1 ([25]) *Sea $n \in \mathbb{N}$ par. Entonces $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \leq 2n+2$.*

Demostración. Sea $C_2 \oplus C_{2n} = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$ con $\mathrm{ord}(e_1) = 2$ y $\mathrm{ord}(e_2) = 2n$; sea π_1 y π_2 denota la proyección sobre $\langle e_1 \rangle$ y $\langle e_2 \rangle$, respectivamente.

Sea A una secuencia libre de cuadrados sobre $C_2 \oplus C_{2n}$ de longitud $2n+2$ y escribimos $A = A_0 A_1$ donde $\pi_1(g)$ es 0 y e_1 para $g \mid A_0$ y $g \mid A_1$, respectivamente. Distinguimos los dos casos $\pi_1(\sigma(A)) \neq 0$ y $\pi_1(\sigma(A)) = 0$.

Asumamos que $\pi_1(\sigma(A)) \neq 0$, entonces $\pi_1(\sigma(A)) = e_1$. Como $\pi_2(A_i)$ es libre de cuadrados para $i \in \{0,1\}$ y como $|\pi_2(A_0)| + |\pi_2(A_1)| = |A| = 2n+2 > 2n+1$, esto sigue del Lemma 1.4.2 que $\mathrm{supp}(\pi_2(A_0)) + \mathrm{supp}(\pi_2(A_1)) = \langle e_2 \rangle$, esto es cada elemento de $\langle e_2 \rangle$ es la suma de un elemento que aparece en $\pi_2(A_0)$ y un elemento que aparece en $\pi_2(A_1)$. Como $\pi_2(\sigma(A)) \in \langle e_2 \rangle$ existen $g_i \mid A_i$ con $i \in \{0,1\}$ tal que $\pi_2(g_0) + \pi_2(g_1) = \pi_2(\sigma(A))$. Sea $S = A(g_0 g_1)^{-1}$. Entonces $\pi_2(\sigma(S)) = \pi_2(\sigma(A)) - (\pi_2(g_0) + \pi_2(g_1)) = \pi_2(\sigma(A)) - \pi_2(\sigma(A)) = 0$. Más aún, como $\pi_1(g_0) = 0$ y $\pi_1(g_1) = e_1$, entonces $\pi_1(\sigma(S)) = \pi_1(\sigma(A)) - (\pi_1(g_0) + \pi_1(g_1)) = e_1 - (0 + e_1) = 0$. Luego $\sigma(S) = 0$. Como $|S| = (2n+2) - 2 = 2n$, en este caso A tiene una subsecuencia de suma cero de longitud $2n$.

Asumamos que $\pi_1(\sigma(A)) = 0$. Sean $\{x, y\} = \{0, 1\}$ tal que $|A_x| \geq |A_y|$. Entonces $2|A_x| = |A_x| + |A_x| \geq |A_x| + |A_y| = 2n+2$, luego $|A_x| \geq (2n+2)/2 = n+1$. Nótese que si $|A_x| = n+1$, entonces por ser $|A_x| + |A_y| = 2n+2$ tenemos que $|A_y| = n+1$, así $|A_1| = n+1$; esto contradice $\pi_1(\sigma(A)) = 0$ pues $\pi_1(\sigma(A)) = |A_1| e_1 = e_1$ ya que $|A_1| = n+1$ es impar pues n es par (este es la única parte donde vamos a utilizar el hecho de que n es par). Consecuentemente, $|A_x| \geq n+2$ y de aquí que $|A_x| + |A_x| = 2|A_x| \geq 2n+4 \geq 2n+1+2$ como el 2-rango de $\langle e_2 \rangle$ es 2 tenemos por el

Lema 1.4.2 que $\mathrm{supp}(\pi_2(A_x))\hat{+}\mathrm{supp}(\pi_2(A_x)) = \langle e_2\rangle$. Como $\pi_2(\sigma(A)) \in \langle e_2\rangle$, entonces existen $g \neq h$ con $gh \mid A_x$ tal que $\pi_2(g) + \pi_2(h) = \pi_2(\sigma(A))$. Sea $S = A(gh)^{-1}$. Entonces $\pi_2(\sigma(S)) = \pi_2(\sigma(A)) - (\pi_2(g) + \pi_2(h)) = \pi_2(\sigma(A)) - \pi_2(\sigma(A)) = 0$. Más aún, $\pi_1(\sigma(S)) = \pi_1(\sigma(A)) - (\pi_1(g) + \pi_1(h)) = 0 - (\pi_1(g) + \pi_1(g)) = -2\pi_1(g) = 0$ (recordar que $gh \mid A_x$, así $\pi_1(g) = \pi_1(h)$ y además $\mathrm{ord}(e_1) = 2$). Luego, $\sigma(S) = 0$. Como $|S| = (2n + 2) - 2 = 2n$, entonces en este caso también A posee una subsecuencia de suma cero de longitud $2n$. Por tanto, toda secuencia libre de cuadrados de longitud $2n + 2$ posee una subsecuencia de suma cero de longitud $2n$, luego, $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \leq 2n + 2$. ■

El siguiente resultado técnico se utiliza tanto en la prueba del Teorema 3.2.2 y el Teorema 3.2.1. Sólo lo necesitamos para n impar, cuando el grupo es isomorfo a $C_2 \oplus C_{2n}$, sin embargo, como que no causa ninguna complicación declara a n en general.

Proposición 3.2.2 ([25]) *Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $\pi_1 : C_2 \oplus C_2 \oplus C_n \to C_2 \oplus C_2$. Sea A una secuencia libre de cuadrados sobre $C_2 \oplus C_2 \oplus C_n$ de longitud $2n+2$. Si $\sigma(\pi_1(A)) \neq 0$, entonces A tiene una subsecuencia de suma cero de longitud $2n$.*

Demostración. Escribamos $C_2 \oplus C_2 \oplus C_n = \langle f_1\rangle \oplus \langle f_2\rangle \oplus \langle e\rangle$ con $\mathrm{ord}(f_i) = 2$ para $\{1, 2\}$ y $\mathrm{ord}(e) = n$. Sea $\langle f_1\rangle \oplus \langle f_2\rangle = \{0, a, b, c\}$ donde 0 es el elemento neutro; nótese que por ser $\mathrm{ord}(f_i) = 2$ para $\{1, 2\}$, entonces $2x = 0$ para toda $x \in \{0, a, b, c\}$ y también $b+c = a$. Si $n = 1$, entonces la secuencia A de longitud $2(1)+2 = 4$ libre de cuadrados sobre $C_2 \oplus C_2 \oplus C_1$, tiene a todos los elementos de $C_2 \oplus C_2 \oplus C_1$, luego $\pi_1(A) = 0abc$, pero $\sigma(\pi_1(A)) = 0 + a + (b + c) = a + a = 2a = 0$, en consecuencia la hipótesis no se cumple, por tanto asumamos que $n \neq 1$.

Sea π_2 la proyección $C_2 \oplus C_2 \oplus C_n \to \langle e\rangle$. Sea A una secuencia libre de cuadrados sobre $C_2 \oplus C_2 \oplus C_n$ de longitud $2n+2$ y Supongamos que $\sigma(\pi_1(A)) \neq 0$, digamos que $\sigma(\pi_1(A)) = x$ donde $x \in \{a, b, c\}$ sean $y, z \in \{a, b, c\}$ tal que $y + z = x$, (recordar que $a + b = c$, $a + c = b$ y $b + c = a$). Escribamos $A = A_0A_xA_yA_z$ donde $\pi_1(g) = t$ para $g \mid A_t$ con $t \in \{0, a, b, c\}$.

Sea (B_1, B_2) igual a (A_0, A_x) o (A_y, A_z) tal que $|B_1| + |B_2| = \max\{|A_0| +$

$|A_x|, |A_y|+|A_z|\}$. Entonces $2n+2 = |A| = (|A_0|+|A_x|)+(|A_y|+|A_z|) \leq (|B_1|+|B_2|)+(|B_1|+|B_2|) = 2(|B_1|+|B_2|)$, luego $|B_1|+|B_2| \geq (2n+2)/2 = n+1$. Por definición de A_t donde $t \in \{0, a, b, c\}$, tenemos que $\pi_2(A_t)$ es libre de cuadrados para toda $t \in \{0, a, b, c\}$, así, $\pi_2(B_i)$ es libre de cuadrados y en consecuencia $|\operatorname{supp}(\pi_2(B_i))| = |\pi_2(B_i)| = |B_i|$, luego $|\operatorname{supp}(\pi_2(B_1))| + |\operatorname{supp}(\pi_2(B_2))| = |B_1| + |B_2| \geq n+1 = |\langle e\rangle| + 1$ y por el Lemma 1.4.2 tenemos que $\operatorname{supp}(\pi_2(B_1)) + \operatorname{supp}(\pi_2(B_1)) = \langle e\rangle$. Como $\pi_2(\sigma(A)) \in \langle e\rangle$, existen $g_1 \mid B_1$ y $g_2 \mid B_2$ tales que $\pi_2(g_1)+\pi_2(g_2) = \pi_2(\sigma(A))$. Entonces $\pi_2(\sigma(A(g_1g_2)^{-1})) = \pi_2(\sigma(A)) - \pi_2(g_1) - \pi_2(g_2) = \pi_2(g_1)+\pi_2(g_2)-\pi_2(g_1)-\pi_2(g_2) = 0$ Recordemos que (B_1, B_2) igual a (A_0, A_x) o (A_y, A_z), en cualquiera de los dos casos tenemos que $(\pi_1(g_1), \pi_1(g_2))$ es iguales a $(0, x)$ o (y, z) y de aquí que $\pi_1(g_1) + \pi_1(g_2) = x$, pues $0 + x = x$ y $y + z = x$. Luego, $\pi_1(\sigma(A(g_1g_2)^{-1})) = \pi_1(\sigma(A)) - (\pi_1(\sigma(g_1)) + \pi_1(\sigma(g_2))) = x - (\pi_1(g_1) + \pi_1(g_2)) = x - x = 0$. Por tanto, $A(g_1g_2)^{-1}$ es una subsecuencia de suma cero de A de longitud $2n$. ■

Antes de proceder a probar los resultados principales, se considera un caso especial.

Lema 3.2.3 ([25]) $\mathsf{g}_{\pm}(C_2 \oplus C_4) = 5$.

Demostración. Tenemos $\mathsf{g}_{\pm}(C_2 \oplus C_{2(2)}) \geq 2(2) + 1 = 5$ por (3.3). Se establece que 5 es también una cota superior. Sea $C_2 \oplus C_4 = \langle e_1\rangle \oplus \langle e_2\rangle$ con $\operatorname{ord}(e_1) = 2$ y $\operatorname{ord}(e_2) = 4$; sea π_1 y π_2 denotan las proyecciones sobre $\langle e_1\rangle$ y $\langle e_2\rangle$, respectivamente.

Sea A una secuencia libre de cuadrados sobre $C_2 \oplus C_4$ de longitud 5 y escribamos $A = A_0A_1$ donde $\pi_1(g)$ es 0 y e_1 para $g \mid A_0$ y $g \mid A_1$, respectivamente. Sea $\{x, y\} = \{0, 1\}$ tal que $|A_x| \geq |A_y|$. Como $|A_x| + |A_y| = |A| = 5$ y $|A_x| \geq |A_y|$ tenemos las siguientes dos posibilidades, que $|A_x| = 4$ y $|A_y| = 1$ o $|A_x| = 3$ y $|A_y| = 2$ (por definición de tenemos que $|A_x| \leq 4$ y $|A_y| \leq 4$). Supongamos que $|A_x| = 4$ y $|A_y| = 1$, entonces por ser A_x una secuencia libre de cuadrados entonces $|\operatorname{supp}(\pi_2(A_x)| = |\pi_2(A_x)| = |A_x| = 4$, luego, $\operatorname{supp}(\pi_2(A_x) = \langle e_2\rangle$ donde $\operatorname{ord}(e_2) = 4$, por el Teorema 3.1.1 tenemos que $\pi_2(A_x)$, el cual es una secuencia libre de cuadrados sobre $\langle e_2\rangle$ de longitud 4, tiene una subsuma cero ponderada mas-menos de longitud 4. Como $|A_x| = 4$, entonces $A_x = (xe_1)(xe_1 + e_2)(xe_1 + 2e_2)(xe_1 + 3e_2)$, luego $\pi_1(A_x) = (xe_1)(xe_1)(xe_1)(xe_1)$ y de aquí,

$$\sigma_{\pm}(\pi_1(A_x)) = \{x(4e_1)\} = \{0\}.$$

Recordar que $\mathrm{ord}(e_1) = 2$ entonces $-e_1 = e_1$ y además $4e_1 = 0$. Por tanto, A_x es una secuencia de suma cero ponderada más-menos de longitud 4.

Ahora, supongamos que $|A_x| = 3$ y $|A_y| = 2$. Como $|A_y| = 2$, entonces $A_y = (ye_1 + ie_2)(ye_1 + je_2)$ donde $i \neq j$ e $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Podemos suponer que $i < j$. Sea $z \in \sigma_{\pm}(A_y)$, entonces existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+1, -1\}$ tales que

$$\begin{aligned}
z &= \varepsilon_1(ye_1 + ie_2) + \varepsilon_2(ye_1 + je_2) \\
&= y\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_1(ie_2) + y\varepsilon_2 e_1 + \varepsilon_2(je_2) \\
&= ye_1 + ye_1 + (\varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j)e_2 \\
&= y2e_1 + (\varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j)e_2 \\
&= y0 + (\varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j)e_2 \\
&= (\varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j)e_2.
\end{aligned}$$

Recordar que $\mathrm{ord}(e_1) = 2$. Luego, $\sigma_{\pm}(A_y) \subset \langle e_2 \rangle$. Como $i < j$, $0 \leq i \leq 3$ y $0 \leq i \leq 3$, entonces $0 < j - i \leq 3$, luego 4 no divide a $j - i$ y en consecuencia $(j - i)e_2 \neq 0$. Como $(j - i)e_2 \in \sigma_{\pm}(A_y)$ (aquí estamos tomando a $\varepsilon_1 = -1$ y $\varepsilon_2 = 1$), entonces $\sigma_{\pm}(A_y)$ contiene un elemento no nulo de $\langle e_2 \rangle$. Como $|A_x| = 3$, entonces $A_x = (xe_1 + n_1e_2)(xe_1 + n_2e_2)(xe_1 + n_3e_2)$ donde $n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$, de aquí tenemos dos casos:

CASO 1. $\{n_1, n_2\} = \{0, 2\}$ y $n_1 \in \{1, 3\}$ (dos pares y un impar). Supongamos que $n_1 = 0$ y $n_2 = 2$. Como $1e_2 + 3e_2 = 4e_2 = 0$, entonces $-3e_2 = e_2$ y $-e_2 = 3e_2$, luego $\{-n_3e_2, n_3e_2\} = \{e_2, 3e_2\}$. Tomando $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = -1$, tenemos $\varepsilon_1(xe_1 + n_1e_2) + \varepsilon_2(xe_1 + n_3e_2) = x(2e_1) - n_3e_2 = -n_3e_2$. Tomando $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 1$, tenemos $\varepsilon_1(xe_1 + n_1e_2) + \varepsilon_2(xe_1 + n_3e_2) = x(2e_1) + n_3e_2 = n_3e_2$. Tomando $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 1$, tenemos $\varepsilon_1(xe_1 + n_1e_2) + \varepsilon_2(xe_1 + n_2e_2) = x(2e_1) + n_2e_2 = 2e_2$. Luego, $\langle e_2 \rangle \setminus \{0\} = \{2e_2, e_2, 3e_2\} = \{2e_2, n_3e_2, -n_3e_2\} \subset \Sigma_{\pm,2}(A_x)$.

CASO 2. $n_1 \in \{0,2\}$ y $\{n_2, n_3\} = \{1,3\}$ (dos impares y un par). Supongamos que $n_2 = 1$ y $n_3 = 3$. Tomando $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 1$, tenemos $\varepsilon_1(xe_1 + n_1e_2) + \varepsilon_2(xe_1 + n_2e_2) = x(2e_1) + (n_1 + n_2)e_2 = (n_1 + n_2)e_2$. Tomando $\varepsilon_1 = -1$ y $\varepsilon_2 = -1$, tenemos $\varepsilon_1(xe_1 + n_1e_2) + \varepsilon_2(xe_1 + n_2e_2) = x(2e_1) - (n_1 + n_2)e_2 = -(n_1 + n_2)e_2$. Como $n_2 = 1$ y $n_1 \in \{0,2\}$, entonces $n_1 + n_2 \in \{1,3\}$ y como en el Caso 1 tenemos que $\{-(n_1 + n_2)e_2, (n_1 + n_2)e_2\} = \{e_2, 3e_2\}$. Tomando $\varepsilon_1 = -1$ y $\varepsilon_2 = 1$, tenemos $\varepsilon_1(xe_1 + n_2e_2) + \varepsilon_2(xe_1 + n_3e_2) = x(2e_1) + (-n_2 + n_3)e_2 = (-1 + 3)e_2 = 2e_2$. Luego, $\langle e_2\rangle \setminus \{0\} = \{2e_2, e_2, 3e_2\} = \{2e_2, (n_1 + n_2)e_2, -(n_1 + n_2)e_2\} \subset \Sigma_{\pm,2}(A_x)$.

Luego, en ambos casos tenemos que $\langle e_2\rangle \setminus \{0\} \subset \Sigma_{\pm,2}(A_x)$. Como $A_y = (ye_1 + ie_2)(ye_1 + je_2)$, $\sigma_\pm(A_y) \subset \langle e_2\rangle$ y $\sigma_\pm(A_y)$ contiene un elemento no nulo de $\langle e_2\rangle$, entonces existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{+1, -1\}$ tales que $\varepsilon_1(ye_1 + ie_2) + \varepsilon_1(ye_1 + je_2) \neq 0$ y además $\varepsilon_1(ye_1 + ie_2) + \varepsilon_2(ye_1 + je_2) = \varepsilon_3(xe_1 + m_1e_2) + \varepsilon_4(xe_1 + m_2e_2)$, donde $m_1, m_2 \in \{n_1, n_2, n_3\}$, luego

$$\varepsilon_1(ye_1 + ie_2) + \varepsilon_2(ye_1 + je_2) + (-\varepsilon_3)(xe_1 + m_1e_2) + (-\varepsilon_4)(xe_1 + m_2e_2) = 0.$$

Así, A posee una subsecuencia de suma cero ponderada más-menos de longitud 4 y en consecuencia $\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_4) \leq 5$, por lo tanto $\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_4) = 5$. ■

Ahora, le damos las prueba de uno de nuestro resultados principales.

Teorema 3.2.1 ([25]) *Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $n \geq 3$ tenemos*

$$\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_{2n}) = 2n + 2.$$

Por otra parte, $\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_4) = \mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_2) = 5.$

Demostración. Para $n = 1$ tenemos que $C_2 \oplus C_2$ es un 2-grupo elemental, así, por Corolario 3.1.1, tenemos que $\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_2) = |C_2 \oplus C_2| + 1 = 5$, y para $n = 2$ por Lema 3.2.3 tenemos que $\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_{2(2)}) = \mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_4) = 5$. Para $n \geq 3$, tenemos $\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n + 2$ por Lema 3.2.1. Solo falta mostrar que $\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_{2n}) \leq 2n + 2$ para $n \geq 3$. Para n par tenemos por la Proposición 3.2.1 que $\mathsf{g}_\pm(C_2 \oplus C_{2n}) \leq \mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n + 2$. Luego, supongamos que $n \geq 3$ es impar.

Como n es impar, tenemos $C_2 \oplus C_{2n} = \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle \oplus \langle e \rangle$ con $\mathrm{ord}(f_i) = 2$ y $\mathrm{ord}(e) = n$. Sea π_1 la proyección a $\langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle$ y sea π_2 la proyección a $\langle e \rangle$. Sea A una secuencia libre de cuadrado sobre $C_2 \oplus C_{2n}$ de longitud $2n + 2$. Sea $\langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle = \{0, a, b, c\}$; nótese que $b + c = a$. Ahora escribamos $A = A_0 A_a A_b A_c$ donde $\pi_1(g) = x$ para $g \mid A_x$. Distinguimos dos casos $\pi_1(\sigma(A)) \neq 0$ y $\pi_1(\sigma(A)) = 0$.

Asumamos que $\pi_1(\sigma(A)) \neq 0$. La existencia de una secuencia de suma cero de longitud $2n$ sigue de la Proposición 3.2.2, y en particular A posee una sub-suma cero ponderada más-menos de longitud $2n$.

Asumamos que $\pi_1(\sigma(A)) = 0$. Sea $x \in \{0, a, b, c\}$ tal que $|A_x|$ es maximal, entonces $|A_x| \geq |A_y|$ donde $y \in \{0, a, b, c\}$. Luego, $2n+2 = |A_0|+|A_a|+|A_b|+|A_c| \leq 4|A_x|$ y en consecuencia $|A_x| \geq (2n+2)/4 = (n+1)/2$. Supongamos que existe $gh|A_x$ tal que $\pi_2(g) + \pi_2(h) = \pi_2(\sigma(A))$. Entonces, $\pi_1(g) = \pi_1(h)$, y luego $\pi_1(g) + \pi_1(h) = 2\pi_1(g) = 0$ ya que todo elemento de $\langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle = \{0, a, b, c\}$ tienen orden 2 ya que $\mathrm{ord}(f_1) = 2$ y $\mathrm{ord}(f_2) = 2$. Así, $\pi_1(A(gh)^{-1}) = \pi_1(A)-(\pi_1(g)+\pi_1(h)) = 0$ y también $\pi_2(A(gh)^{-1}) = \pi_2(A) - (\pi_2(g) + \pi_2(h)) = (\pi_2(g) + \pi_2(h)) - (\pi_2(g) + \pi_2(h)) = 0$. En consecuencia, $A(gh)^{-1}$ es una secuencia de suma cero de longitud $2n$, en particular A posee una sub-suma cero ponderada más-menos de longitud $2n$.

Luego asumamos que gh no existe. Por el Lema 1.4.2 tenemos que $|A_x| = (n + 1)/2$.

Por definición de A_x tenemos que $|A_y| \leq |A_x| = (n + 1)/2$ para toda $y \in \{0, a, b, c\}$. Supongamos que existe un $y \in \{0, a, b, c\}$ tal que $|A_y| < (n + 1)/2$. Sea $\{y_1, y_2, y_3\} = \{0, a, b, c\} \setminus \{y\}$, entonces $2n + 2 = |A_{y_1}| + |A_{y_2}| + |A_{y_3}| + |A_y| < (n + 1)/2 + |A_{y_1}| + |A_{y_2}| + |A_{y_3}| \leq 4(n + 1)/2 = 2n + 2$ esto es una contradicción, luego $|A_y| = (n + 1)/2$ para cada $y \in \{0, a, b, c\}$.

Sea $gh|A_0$ arbitrarios. Probemos que $\pi_1(\sigma_{\pm}(A(gh)^{-1})) = \{0\}$. En efecto, ya vimos que todo elemento de $\langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle = \{0, a, b, c\}$ tienen orden 2, así, el signo en la proyección π_1 es irrelevante, luego

$$\pi_1(\sigma_\pm(A(gh)^{-1})) = \{\pi_1(\sigma(A(gh)^{-1}))\}$$

y

$$\begin{aligned}
\pi_1(\sigma(A(gh)^{-1})) &= \pi_1(\sigma(A)) - \pi_1(g) - \pi_1(h) \\
&= \pi_1(\sigma(A_0)) + \pi_1(\sigma(A_a)) + \pi_1(\sigma(A_b)) + \pi_1(\sigma(A_c)) - 0 - 0 \\
&= 0 + |A_a|a + |A_b|b + |A_c|c \\
&= |A_a|a + |A_b|b + |A_c|c \\
&= \frac{n+1}{2}(a + (b+c)) \\
&= \frac{n+1}{2}(a+a) \\
&= \frac{n+1}{2}(2a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para completar la demostración es suficiente mostrar que $0 \in \pi_2(\sigma_\pm(A(gh)^{-1}))$. En efecto, ahora probemos que $\pi_2(\sigma_\pm(A(gh)^{-1})) = \langle e \rangle$. Sea $z \in \sigma_\pm(\pi_2(A_a A_b))$, entonces $z + \sigma(\pi_2(A_0 A_c(gh)^{-1})) \in \sigma_\pm(\pi_2(A(gh)^{-1}))$, luego definiendo a $\varphi : \sigma_\pm(\pi_2(A_a A_b)) \mapsto \sigma_\pm(\pi_2(A(gh)^{-1}))$ como $\varphi(z) = z + \sigma(\pi_2(A_0 A_c(gh)^{-1}))$, tenemos que φ es una función inyectiva y de aquí que

$$|\sigma_\pm(\pi_2(A(gh)^{-1}))| \geq |\sigma_\pm(\pi_2(A_a A_b))| = |\sigma_\pm(\pi_2(A_a)) + \sigma_\pm(\pi_2(A_b))|.$$

Como $\Sigma^0(\pi_2(A_a)) \supset \operatorname{supp}(\pi_2(A_a))$, y usando la definición de A_a tenemos que $|\operatorname{supp}(\pi_2(A_a))| = |\pi_2(A_a)| = |A_a|$, entonces $|\Sigma^0(\pi_2(A_a))| \geq |A_a| = (n+1)/2$. Ahora usando el Lema 3.0.2 tenemos

$$|\sigma_\pm(\pi_2(A_a))| = |\sigma(A_a) + 2 \cdot \Sigma^0(\pi_2(A_a))| = |\Sigma^0(\pi_2(A_a))| \geq (n+1)/2$$

y procediendo de la misma forma para b tenemos que $|\sigma_\pm(\pi_2(A_b))| \geq (n+1)/2$, como $|\sigma_\pm(\pi_2(A_a))| + |\sigma_\pm(\pi_2(A_b))| \geq n+1 = |\langle e \rangle| + 1$, por Lema 1.4.2 tenemos

$\sigma_{\pm}(\pi_2(A_a)) + \sigma_{\pm}(\pi_2(A_b)) = \langle e \rangle$ y luego $|\sigma_{\pm}(\pi_2(A(gh)^{-1}))| = |\langle e \rangle|$ y en consecuencia $\sigma_{\pm}(\pi_2(A(gh)^{-1})) = \langle e \rangle$ y por tanto $0 \in \sigma_{\pm}(\pi_2(A(gh)^{-1}))$, esto completa la demostración. $\blacksquare$

Teorema 3.2.2 ([25]) *Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que*

$$\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) = \begin{cases} 2n+3 & \textit{para } n \textit{ impar} \\ 2n+2 & \textit{para } n \textit{ par} \end{cases}.$$

Demostración. Primeramente, $C_2 \oplus C_2$ es un $2-$grupo elemental y en consecuencia $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_2) = |C_2 \oplus C_2| + 1 = 5 = 2(1) + 3$ (ver introducción), luego el resultado es válido para $n = 1$. Asumamos que $n \neq 1$. Para n par, tenemos que $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n+2$ por (3.2) y $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \leq 2n+2$ por Proposición 3.2.1, así, $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) = 2n+2$ si n es par .

Ahora, asumamos que n es impar. Tenemos que $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \geq 2n+3$ por Lema 3.2.2. Queremos probar que $\mathsf{g}(C_2 \oplus C_{2n}) \leq 2n+3$. Puesto que n es impar, tenemos que $C_2 \oplus C_{2n} = \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle \oplus \langle e \rangle$ con $\mathrm{ord}(f_i) = 2$ para $i \in \{1, 2\}$ y $\mathrm{ord}(e) = n$. Sea π_1 la proyeccción a $\langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle$ y sea π_2 la proyección a $\langle e \rangle$. Sea A una secuencia libre de cuadrado sobre $C_2 \oplus C_{2n}$ de longitud $2n+3$. Queremos probar que esta secuencia tiene una subsecuencia de suma cero de longitud $2n$. Como $\mathrm{ord}(e) = n$, entonces la secuencia $B = \prod_{i=0}^{n-1}(\sigma(A) + ie)$ es la secuencia de mayor longitud que cumple con la condición $\pi_1(g) = \pi_1(\sigma(A))$ para cada $g \mid B$. Si suponemos que $\pi_1(g) = \pi_1(\sigma(A))$ para cada $g \mid A$, entonces $2n + 3 = |A| \leq |B| = n$, esto es una contradicción luego existe un $g \mid A$ tal que $\pi_1(g) \neq \pi_1(\sigma(A))$. Sea $A' = Ag^{-1}$; esta es una subsecuencia de A de longitud $2n+2$. Tenemos que $\pi_1(\sigma(A')) = \pi_1(\sigma(A)) - \pi_1(g) \neq 0$. Luego, por Proposición 3.2.2 tenemos que A' tiene una subsecuencia de suma cero de longitud $2n$, y como $A' \mid A$, también A tiene una subsecuencia de suma cero de longitud $2n$, esto completa la demostración. $\blacksquare$

Bibliografía

[1] S.D. Adhikari, Y. G. Chen, J.B. Friedlander, S.V. Konyagin, F. Pappalardi, Contributions to zero-sum problems, *Discrete Math.* 306 (2006), 1–10.

[2] S.D. Adhikari, P. Rath, Davenport constant with weights and some related questions, *Integers* 6 (2006), A30, 6 pp.

[3] S.D. Adhikari, D.J. Grynkiewicz, Z.-W. Sun, On weighted zero-sum sequences, *Adv. in Appl. Math.* 48 (2012), 506–527.

[4] A. Bialostocki, P. Dierker, D. J. Grynkiewicz, and M. Lotspeich, On Some Developments of the Erdős-Ginzburg-Ziv Theorem II, *Acta Arith.*, 110 (2003), no. 2, 173–184.

[5] Y. Caro. Remarks on a zero-sum theorem. *J. Comb. Th.* Ser. A,76 (1996) 315–322.

[6] A. L. Cauchy, Recherches sur les nombres, *J. ´ Ecole polytech.*, 9 (1813), 99–116.

[7] M.N. Chintamani, B.K. Moriya, W.D. Gao, P. Paul, R. Thangadurai, New upper bounds for the Davenport and for the Erdős–Ginzburg–Ziv constants, *Arch. Math. (Basel)* 98 (2012), 133–142.

[8] H. Davenport, On the addition of residue classes, *J. London Math. Society*, 10(1935), 30–32.

[9] H. Davenport, Proceedings of the midwestern conference on Group theory and Number theory, Ohio state university, April, 1966.

[10] Ch. Delorme, A. Ortuño and O. Ordaz, Some existence conditions for barycentric subsets, *Rapport de Recherche* (1995) No 990, LRI, Paris-Sud, Orsay, France.

[11] M. DeVos, L. Goddyn and B. Mohar, A generalization of Kneser's Addition Theorem, *Advances in mathematics* 220 (2009), no 5, 1531–1548.

[12] Y. Edel, Ch. Elsholtz, A. Geroldinger, S. Kubertin, L. Rackham, Zero-sum problems in finite abelian groups and affine caps, *Q. J. Math.* 58 (2007), 159–186.

[13] P. Erdős, A. Ginzburg, A. Ziv, A theorem in additive number theory, *Bull. Res. Council Israel* 10F (1961), 41–43.

[14] W. Gao. A combinatorial problem on finite abelian groups. *J. Number Theory*, 58 (1996) 100 – 103.

[15] W.D. Gao, A. Geroldinger, Zero-sum problems in finite abelian groups: a survey, *Expo. Math.* 24 (2006), 337–369.

[16] W.D. Gao, A. Geroldinger, W.A. Schmid, Inverse zero-sum problems, *Acta Arith.* 128 (2007), 245–279.

[17] W.D. Gao, R. Thangadurai, A variant of Kemnitz conjecture, *J. Combin. Theory Ser. A* 107 (2004), 69–86.

[18] A. Geroldinger and F. Halter-Koch, Non-Unique Factorizations. *Algebraic, Combinatorial and Analytic Theory, Pure and Applied Mathematics*, vol. 278, Chapman and Hall/CRC, (2006).

[19] D. J. Grynkiewicz, L. E. Marchan and O. Ordaz, Representation of finite abelian group elements by subsequences sums, *Journal de Téorie des Nombres de Bordeaux*, 21 (2009), no. 3, 559–587.

[20] H. Harborth, Ein Extremalproblem für Gitterpunkte, *J. Reine Angew. Math.* 262/263 (1973), 356–360.

[21] A. Kemnitz, On a lattice point problem, *Ars Combin.* 16B (1983), 151–160.

[22] H. B. Mann. Addition theorem: The addition theorems of group theory and number theory., *Interscience publisher*, (1965).

[23] H. B. Mann. Two addition theorems. *J. combinatorial Theory*, 3 (1967), 233-235.

[24] L. E. Marchan, Sumas de Secuencias con Pesos en Grupos Abelianos Finitos, *Trabajo de Ascenso* (categoría de Agregado UCLA) (2011).

[25] L.E. Marchan, O. Ordaz, D. Ramos and W. A. Schmid, Some exact values of the Harborth constant and its plus-minus weighted analogue, *Arch. Math.* 101 (2013)501–512.

[26] J. E. Olson, An addition theorem modulo p, *J. Combin. Theory* 5 (1968), 45–52.

[27] J. E. Olson. A combinatorial problem on finite abelian groups I. *Jornal of Number Theory*, 1 (1969), 8-10.

[28] J. E. Olson. A combinatorial problem on finite abelian groups II. *Jornal of Number Theory*, 1 (1969), 195-199.

[29] J. E. Olson, Sums of sets of group elements, *Acta Arith.* 28 (1975/76), 147–156.

[30] J. E. Olson, An addition theorem for finite abelian groups, *J. Number Theory*, 9 (1977), no. 1, 63–70.

[31] A. Potechin, Maximal caps in $AG(6,3)$, *Des. Codes Cryptogr.* 46 (2008), 243–259.

[32] K. Rogers, A combinatorial problem in Abelian groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 59,(1963) 559–562.

[33] P. van Emde Boas. A combinatorial problem on finite abelian groups II. *In Reports ZW- 1969-007. Math. Centre, Amsterdam*, (1969).